الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Minstère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

CENTRE UNIVERSITAIRE DE MILA
INSTITUT DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

Réf. /11

Mémoire de fin d'étude
Présenté pour l'obtention du diplôme de

Licence Académique

Domaine : **Mathématiques et Informatique**
Filière : **Mathématiques**
Spécialité : **Mathématiques Fondamentales**

<u>Thème</u>

Algèbre de Banach et théorie spectral

Présenté par :
Lamri Zeggar Imen
Torche Salima

Dirigé par :
Leulmi Assma

Année universitaire 2010-2011

شكر و تقدير

إلى كل من أضاء بعلمه عقل غيره.

آو هدى بالجواب الصحيح حيرة سائليه .

فاظهر بسماحته تواضع العلماء.

و برحابته سماحة العارفين.

إلى أستاذتنا المحترمة "العلمي أسماء" التي أشرفت على مذكرتنا نتقدم لها بكل شكر و تقدير و احترام لما قدمته لنا من عون .

غسل الله قلبك بماء اليقين و أثلج صدرك بسكينة المؤمنين وعافاك من كل أنين و رزقك رضاه إلى يوم الدين.أمين.

اهداء

بسم الله الرحمان الرحيم

الحمد والشكر لله الذي أعاننا على إخراج هذا العمل المتواضع

اهدي حصيلة عملي وجهدي إلى من قال فيهما عز وجل:

"واخفض لهما جناح الذل من الرحمة وقل رب ارحمهما كما ربياني صغيرا"

إلى التي رآني قلبها قبل عينيها وحضنتني أحشاؤها قبل يديها إلى من ملكت حواسي وإحساسي واحتوت عقلي وأفكاري إلى منبع الحب والحنان إلى الظل الذي آوي إليه في كل حين إلى الشمس الوضاءة التي أنارت لي دروب النجاح في الحياة إليك "أمي ".

إلى من احمل اسمه بكل افتخار إلى من جرع الكأس فارغا ليسقيني قطرة حب إلى من كلّت أنامله ليقدم لي لحظة سعادة إلى الغالي الذي سكن في أعماقي إلى المربي الفاضل الذي نسج لي طريق النجاح في حياتي إليك "أبي".

إلى النجمان الساريان في سما أفقي "جدي"و"جدتي"اللذان يملكان أعظم قلب في الوجود –أطال الله عمرهما –

إلى من رافقوا دربي يوم بيوم إلى من تألموا لألمي و فرحوا لفرحي إلى من غرسهم الخالق زهرات في ربيع حياتي فاستمديت منهم الثقة والقوة أخي وأخواتي:"الغالي العيد , المعطاءة مريم,الحنونة دلال ,وردة البيت خولة,قرة عيني أية,عمتي نزيهة و سميرة"

الآن تفتح الأشرعة و ترفع المرساة لتنطلق السفينة في عرض بحر واسع مظلم هو بحر الذكريات وفي هذه اللحظة لا يضيء إلا قنديل الذكريات ذكريات الأخوة البعيدة إلى الذين أحببتهم وأتمنى أن يكونوا قد أحبوني :"مريم,نبيلة , رحيمة , رقية , أسماء , عبلة و كل الأصدقاء"

إلى من شاركتني في إخراج هذا العمل "إيمان".

إلى كل من سقط من قلمي سهوا وإلا كل من ترك بصمة في حياتي وغير من مجراها.

من عفاف

إهداء

يقول عز وجل:

"وقل اعملوا فسيرى الله عملكم و رسوله و المؤمنين"

الهي لا يطيب الليل إلا بشكرك ولا يطيب النهار إلا بطاعتك ولا تطيب اللحظات إلا بذكرك ولا تطيب الآخرة إلا بعفوك ولا تطيب الجنة إلا برؤيتك الله جل جلاله.

إلى من كلله الله بالهيبة والوقار إلى من علمني العطاء بدون انتظار إلى من احمل اسمه بكل افتخار أرجو من الله أن يمد في عمرك لترى ثمارا قد حان قطفها بعد طول انتظار و ستبقى كلماتك نجوما اهتدي بها اليوم وفي الغد والى الأبد إلى القلب الكبير "أبي العزيز".

إلى من تتسابق الكلمات لتخرج معبرة عن مكنون ذاتها إلى رمز الحب وبلسم الشفاء إلى القلب الناصع بالبياض إلى من علمتني وعانت الصعاب لأصل إلى ما أنا فيه وعندما تكسوني الهموم أسبح في بحر حنانها ليخفف من ألامي إلى "أمي الحبيبة" .

إلى سندي وقوتي وملاذي بعد الله إلى من أثروني على أنفسهم إلى من علموني علم الحياة إلى من اظهروا لي ما هو أجمل من الحياة إلى إخوتي وأخواتي :

"جميلة , أسماء, مريم ,عبد الصمد , وعبد القيوم".

إلى من كانوا ملاذي و ملجئي إلى من تذوقت معهم أجمل اللحظات إلى من سأفتقدهم و أتمنى أن يفتقدوني إلى من جعلهم الله إخوتي في الله ومن أحببتهم في الله إلى من يجمع بين سعادتي و حزني إلى من أتمنى أن اذكرهم إذا ذكروني إلى من أتمنى أن تبقى صورهم في عيوني إلى "أصدقائي".

من إيمان

Table des matières

Introduction Générale

L'algèbre de Banach est un chapitre très important dans l'analyse fonctionnelle elle est consacrés à l'espace de Banach tel que, on définit une lois interne sur ce espace qui vérifie quelques propriétés.

Le but de cette algèbre est à la fois d'appliquer quelques notions topologiques et de développer les outils essentiels de l'espace des opérateurs linéaire borné donné comme un exemple.

Dans un premier temps, nous faisons une généralité sur quelques notions nécessaire tel que :Normes et espaces vectoriels normé, espace de Banach et fonction d'une variable complexe.

Après dans le chapitre 02, nous définissons l'algèbre de Banach, nous étudions ensuite quelque propriété des algèbres de Banach.

Dans le chapitre 03, nous définissons la théorie spectrale et la résolvante.

Enfin, dans le chapitre 04, nous abordons l'étude de l'idéale de l'algèbre de Banach, c'estdonné un exemple de l'algèbre de Banach très importants que nous établissons le lien entre cette algèbre et les opérateurs bornés ce exemple est l'espace des opérateurs bornés $\mathcal{L}(E)$.

Chapitre 1

Généralités

1.1 Normes et espaces vectoriels normes

1.1.1 Normes :

On dèsigne ici par $\mathbb{k}$ le corps h des nombres rèels ou le corps G des nombres complexes.

Définition 1.1.1 *soit E un $\mathbb{k}\_$ espace ($\mathbb{k}$ est $\mathbb{R}$ ou G)*

1. *on appelle norme sur E une application noteè $x \to \|x\|$ de E dans $\mathbb{R}_+$ayant les propriètès suivantes :*
   (a) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(sèparation)*
   (b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ *(homogènièté)*
   (c) $\forall x, y \in E$,$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(inègalitè triangulaire)*
2. *E est alors nommè espace vectoriel normè.*
3. *Notons que si $\mathbb{k} = \mathbb{R}, |\lambda|$ est la valeur absolue de λ et si $\mathbb{k} = G$,$|\lambda|$ est le module de λ*

Définition 1.1.2 ($Distance$ $associè$ a une $norme$) *Soit E un $\mathbb{k}\_$ espace normè,on appelle distance associeè a la norme $\|.\|$, l'application définie par*

$$\begin{array}{cccc} \|.\| & E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (x;y) & \longmapsto & d(x,y) = \|x-y\|. \end{array} \tag{1.1}$$

1.1.2 Espaces vectoriels normès

Définition 1.1.3 *Un espace vectoriel normè rèel [resp complexe] est un couple constituè par un espace vectoriel E rèel [complexe] et par une norme $\|.\|$ sur l'espace vectoriel E.*

On abrègera souvent espace vectoriel normè en e.v.n
un e.v.n sera notè $(E, \|.\|)$ *ou* $E_{\|.\|}$.

1.1.3 Sèrie dans un espace vectoriel normè

Soit E un espace vectoriel normè, le corps des scalaires $\mathbb{k}$ et $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ considèrons une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de E ,pour tout $n \in \mathbb{N}$ posons :

$$S_n = x_0 + x_1 + ... + x_n.$$

On dèfinit ainsi une nouvelle suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a partir de la premiere pour tout $n \geq 1$ on a

$$x_n = S_n - S_{n-1}.$$

Définition 1.1.4 *On appele sèrie attachèe à une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*de point d'un espace vectoriel normè la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,definie par*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k.$$

Où
x_n *est nommè le terme gènèral de la sèrie convergente*
S_n *est nommè la somme partielle de rang* n.

Sèrie convergente :

Définition 1.1.5 *La sèrie* (x_n) *est dite convergente si la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a une limite dans ce cas la limite* $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ *se nomme la somme de la sèrie.*
La sèrie (x_n) *est dite divergente si la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'a pas de limite.*

Serie normalement convergent :

Définition 1.1.6 *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normè.*
Une sèrie $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$ *où* $x_n \in E$ *est dite normalement convergente si la sèrie des nombres rèel* $\sum\limits_{n\geq 0} \|x_n\|$ *converge.*

1.1.4 Application lineaires continues

Définition 1.1.7 *Soit $(E,N),(F,N')$ deux espaces vectoriels normès et soit Q une application lineaire de E dans F ,on rappelle qu'une application Q de E dans F est dite linèaire si pour tout $(x,y) \in E^2$ et tout $\lambda \in \Bbbk$*

$$Q(x + \lambda y) = Q(x) + \lambda Q(y).$$

Théorème 1.1.8 *Soit Q une application linèaire de E dans F ,les propositions suivants sont èquivalents :*

1. *Q est continue sur E*
2. *Q est continue en 0*
3. *Q est uniformèment continue sur E*

Définition 1.1.9 (*Application lineaire bornèe*) *Q est dite bornèe sur E si Q est bornèe sur la boule unitè c'est-à-dire s'il existe $c > 0$ tel que :*

$$N'(Q(x)) \leq c, \forall x \in \overline{B}(0,1).$$

Théorème 1.1.10 *Soit Q une application lineaire de E dans F ,les propsitions suivantes sont èquivalentes :*

1. *Q est continue sur E*
2. *Q est bornè*
3. *Q est lipschitizienne sur E*
4. *il existe une constante k telle que :*

$$\forall x \in E : \|f(x)\|_F \leq k \|x\|_E. \tag{1.2}$$

Normes d'une application lineaire continue :

Soit $L(E,F)$ l'ensemble des applications lineaires continues de l'e.v.n (E,N) dans l'e.v.n (E,N') c'est un espace vectoriel ,on peut dèfinie diffèrents normes mais il y a un procède canonique :

$$\|Q\|_{L(E,F)} = \sup_{N(x)\leq 1} N'(Q(x)).$$

Proposition 1.1.11 *L'application N qui à $Q \in L(E,F)$,l'application lineaire continue de (E,F) dans (F,N') dèfinie par :*

$$\begin{aligned} \|Q\|_{L(E,F)} &= \sup_{N(x)\leq 1} N'(Q(x)) \\ &= \sup_{x\in S(0,1)} N'(Q(x)) \\ &= \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{N'(Q(x))}{N(x)}, \end{aligned}$$

est une norme sur l'èspace vectoriel $L(E,F)$.

1.1.5 Espaces d'application multilineaire continues

Définition 1.1.12 *Soit $(E_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'espaces vecoriels,on dit qu'une application f de $E_1 \times ... \times E_n$ dans F est n-lineaire (ou multilineaire) si et seulememt si pour tout i fixè et tout $(x_j)_{j\neq i}$ fixè.$x_i \longmapsto f(x_1,...,x_n)$ est lineaire sur E_i.*
on dit que f est lineaire par rapport à chacune de ses variables

Remarque 1.1.13 *On peut identifier l'ensemble des applications multilineaires à.*
$L(E_1, L(E_2, L(E_3,...L(E_n,F))..))$ il suffit juste d'identifier $\mathcal{F}(E_1 \times ... \times E_n, F)$.
avec $\mathcal{F}(E, \mathcal{F}(E_2, \mathcal{F}(E_3,...\mathcal{F}(E_n,F))..))$

Proposition 1.1.14 *une application multilineaire est continue si et seulement s'il existe une constante k telle que :*

$$\forall (x_i)_{1\leq i\leq n} \in E_1 \times ... \times E_n, \|f(x_1,...x_n)\| \leq k(\|x_1\|_1,...,\|x_n\|_n).$$

1.1.6 Diffèrentiabilitè dans une espace normè

Définition 1.1.15 *Soient E et F deux e.v.n sur K.*
Ω un ouvert de E et soit $f : \Omega \to F$ une application soit $a \in \Omega$ on dit que f est differentiable au point a s'il existe une application lineaire et continue $L : E \to F$ tel que :

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \|h\| \in L, \tag{1. 1}$$

avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.
dans ce cas $L \in \mathcal{L}(E,F)$ est unique on dit que L est la differentielle de f au point a.
on note $L = Df(a)$ et on note $Df(a)h$ au lieu de $L(h)$ pour $h \in E$.
l'application differentielle de f et est noteè Df :

$$Df : \Omega \to \mathcal{L}(E,F)$$

en gèneral Df n'est pas lineaire dans la formule (1.1) l'expression $f(a+h)$ à un sens pour $\|h\|$ suffisamment petit puisque Ω est un ouvert

$$\exists r > 0, \|h\| < r \Longrightarrow a + h \in \Omega,$$

si f est differentiable au point a alors f est nècèssairement continue au point a car d'après (1.1)

$$\|f(a+h) - f(a)\|_F \leq c\|h\| + \|h\| . \|\varepsilon(h)\| .$$

où $c = \|L\|$ et le membre droite tend vers 0 quand$\|h\| \to 0$.

1.2 Espace de Banach

Définition 1.2.1 *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normè on dit que $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach si et seulement s'il est complet*

Définition 1.2.2 *Un espace de Banach est un espace vectoriel A sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni d'une norme $\|.\| : A \to \mathbb{R}^+$ vèrifiant les axiomes :*

$$\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\| \text{ et } \|a\| = 0 \Rightarrow a = 0,$$

et qui est topologiquement complète pour cette norme.

Proposition 1.2.3 *Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach ,si B_n est une suite de boule emboiteè alors $\underset{n\in N}{\cap} \overline{B_n}$ est non vide*

Lemme 1.2.4 *Si E et F sont des espaces de Banach ,il en est de mème de $E \times F$ quand on le minuit de l'une quelconque des normes*

$$\begin{aligned}
\|(x,y)\| &= \sup(\|x\|, \|y\|) \\
\|(x,y)\| &= \|x\| + \|y\| \\
\|(x,y)\| &= \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}.
\end{aligned}$$

Caractèrisation par les sèries :

un espace vectoriel normè est un espace de Banach si et seulment si toute sèrie absolument convergente.

Exemple 1.2.5 *par la suite $\mathbb{k}$ peut étre remplacè par $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*
les espace eunclidiens munis de la norme $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1} x_i \overline{x_i}}$ où $\overline{x_i}$ est le conjuguè de x_i et

$x = (x_1, x_2, ..x_n)$ *sont des espace de Banach*
l'espace des fonctions continues dèfinies sur un intervelle :

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{k}.$$

muni de la norme $\|f\| = \sup(|f(x)|)$ *forme un espace de Banach.*

1.2.1 Thèoreme de Hahn-Banach

Théorème 1.2.6 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et*

$$p : E \to \mathbb{R}^+,$$

soit G un sous espace vectoriel de E et $g : G \to \mathbb{R}$ une forme lineaire sur G vèrifiant :

$$g(x) \leq p(x), \forall x \in G,$$

alors il existe une forme lineaire f definie sur E et prolongeant g telle que :

$$f(x) \leq p(x), \forall x \in E,$$

Corollaire 1.2.7 *Soient X un espace normè et $x \in X$, il existe $x^* \in X$ telle que :*

$$x^*(x) = \|x\| \, et \, \|x^*\| \leq 1.$$

1.3 Fonction d'une variable complexe

1.3.1 Dèfinition d'une fonction analytique

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et F une fonction de U dans $\mathbb{C}$ on dit que F est analytique dans U lorsque ,pour tout $Z_0 \in U$ il existe une sèrie entiere $\sum_{n\geq 0} a_n Z^n$ de rayon de convergence $p \geq 0$ et un rèel $\varepsilon \in]0, p[$ tel que pour tout $Z \in D \in (Z_0, \varepsilon)$:

$$F(Z) = \sum_{n=0}^{0} a_n (Z - Z_0)^n.$$

1.3.2 Dèfinition d'une fonction holomorphe

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $Z_0 \in U$, une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite $\mathbb{C}$-dèrivable en Z_0 lorsque le taux de variation :

$$\frac{(F(Z)-F(Z_0))}{(Z-Z_0)},$$

possède une limite lorsque le Z tend vers Z_0 dans $\mathbb{C}$, on note $F'(Z_0)$ cette limite lorsque F est dèrivable en tout point de U , elle est dite holomorphe dans U.

Théorème 1.3.1 *Soit $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$pour tout point $Z_0\in U$, f est infiniment dèrivable en Z_0 et il existe un voisinage V de Z_0 sur lequel on a :*

$$f(Z)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}Z_0(Z-Z_0)^n.$$

1.3.3 Thèoreme de Liouville

Soit $f:\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}$, si f analytique dans $\mathbb{C}$ et bornè alors f est constante.

Chapitre 2

Algebre de Banach

2.1 Dèfinitions

Définition 2.1.1 *Soit A une algèbre sur $\mathbb{C}$ èquipeè d'une norme $\|.\|$,on dit que A est une algèbre de Banach si les deux conditions suivantes satisfaites :*

Définition 2.1.2
1. *A est un $\mathbb{C}$-espace de Banach (i.e : un $\mathbb{C}$-espace vectoriol normè complet)*
2. *pour tout $x, y \in A$ on a :*

$$\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\| \, ,$$

si de plus il existe un èlement $e \in A$ tel que :

$$xe = ex = x (x \in A) \text{ et } \|e\| = 1,$$

alors on dit que A est une algèbre de Banach unitaire l'èlement e s'appelle l'èlement unitè de l'algèbre A.
Enfin nous dirons qu'une algèbre A est commutative si $xy = yx$ pour tout $x, y \in A$.

Définition 2.1.3 *soit A une algèbre de Banach unitaire , un èlement $x \in A$ est dit inversible s'il existe un èlement $x^{-1} \in A$ tel que :*

$$x^{-1}x = xx^{-1} = e,$$

où e est l'èlement unitè de A.
on notera $Tnv(A)$ l'ensemble des èlements inversible de A.
il est facile de voir que :

1. *si $x \in A$ admet un inverse , il est nècessairement unique.*

2. $Tnv(A)$ *est groupe (pour la multiplication).*

Définition 2.1.4 *Pour* $x \in A, n$ *entier positive ou nul ,on definit* x^n *par rècurrence en posant* $x^0 = 1_A$ *et :*

$$x^{n+1} = x^n \cdot x = x \cdot x^n,$$

pour tout entier n *positive ou nulle.*

2.2 Quelques propriètès des algèbres de Banach

ce lemme montre comment cette notion algebrique se mèlange avec la topologie.

Lemme 2.2.1 *Soit* A *une algébre de Banach unitaire et* $x \in A$ *tel que* $\|x\| < 1$ *alors :*

1. $e \cdot x \in Inv\,(A)$.
2. $\left\|(e-x)^{-1} - e - x\right\| \leq \frac{\|x\|^2}{1-\|x\|}$.

Preuve. Comme $\|x^n\| \leq \|x\|^n$et $\|x\| < 1$.la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ defenie par :

$$S_n = e + x + x^2 + ... + x^n,$$

forme une suite de Cauchy dans A puisque A est complète.
il existe $S \in A$ tel que $S_n \to S$ un calcul immèdiat.
montrons que :

$$S_n\,(e-x) = e - x^{n+1} = (e-x)\,S_n,$$

et comme $x^n \to 0$ on obtient par continuitè de la multiplication que :

$$S\,(e-x) = e = (e-x)\,S,$$

en d'autre terme $e - x$ est inversible et son inverse est :

$$(e-x)^{-1} = S = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

ce qui dèmontre 1.
pour prouver 2 d'aprės (dèfinition) que :

$$(e-x)^{-1}\,A - e - x = \sum_{n=2}^{\infty} x^n,$$

et donc :

$$\begin{aligned} \left\|(e-x)^{-1}-e-x\right\| &\leq \sum_{n=2}^{\infty}\|x\|^n \\ &= \frac{\|x\|^2}{1-\|x\|}. \end{aligned}$$

■

Corollaire 2.2.2 *Soit A une algèbre de Banach unitaire, $x \in Inv(A)$, $h \in A$ et $\|h\| \leq \frac{1}{2}\left\|x^{-1}\right\|^{-1}$, alors $x+h \in I \subseteq (A)$ et*

$$\left\|(x+h)^{-1}-x^{-1}+x^{-1}hx^{-1}\right\| \leq 2\left\|x^{-1}\right\|^3\|h\|^2.$$

Preuve. Ecrivons $x+h = x\left(e+x^{-1}h\right)$ or $\left\|x^{-1}h\right\| \leq \left\|x^{-1}\right\|\|h\| \leq \frac{1}{2} < 1$ et donc le lemme 2.2.1 implique que $e+x^{-1}h \in Inv(A)$,comme $Inv(A)$ est un groupe, on en dèduit que $x+h \in Inv(A)$ de plus :

$$\begin{aligned} (x+h)^{-1}-x^{-1}+x^{-1}hx^{-1} &= \left(e+x^{-1}h\right)^{-1}xcx^{-1}-x^{-1}hx^{-1} \\ &= \left(\left(e+x^{-1}h\right)^{-1}-e+x^{-1}h\right)x^{-1}, \end{aligned}$$

le lemme 2.2.1 -b implique que :

$$\begin{aligned} \left\|(x+h)^{-1}-x^{-1}+x^{-1}hx^{-1}\right\| &\leq \left\|c+x^{-1}h\right\|^{-1} \\ &\leq \left\|\left(e+x^{-1}h\right)^{-1}-e+x^{-1}h\right\|\left\|x^{-1}\right\| \\ &\leq \frac{\left\|x^{-1}h\right\|^2}{1-\left\|x^{-1}h\right\|}\left\|x^{-1}\right\|. \end{aligned}$$

comme $\left\|x^{-1}h\right\| \leq \frac{1}{2}$,on en dèduit l'inègalitè. ■

Des propositions :

1- Soient E un espace de Banach sur $\mathbb{k}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E.

Si la sèrie$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est normalement convergente (c'est-à-dire si la suite rèelle $\sum_{n\in\mathbb{N}}\|x_n\|$ converge) alors la sèrie $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ converge dans E et

$$\left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\right\| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|.$$

2- Soient A une algèbre de Banach et $x \in A$,si $\|x\| < 1$ alors l'èlement $1 - x$ de A est inversible d'inverse $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$.

3- Soient A une algèbre de Banach et $A^\times$ l'ensemble des èlements inversibles de A ,alors $A^\times$ est un ouvert de A et l'application, $x \mapsto x^{-1}$ de $A^\times$ dans $A^\times$ est continue.

4- Soient A une algèbre de Banach et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dansyy $A^\times$ qui converge vers $x \notin A^\times$, alors $\|x_n^{-1}\|$ converge vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$.

Dèmonstration

1- La convergence normale de$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ implique que la suite des $t_n = \sum_{k=0}^{n} \|x_k\|$ est convergente donc de Cauchy dans $\mathbb{R}$,la suite des $y_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ est donc de Cauchy dans E car :

$$\begin{aligned}
\|y_{n+p} - y_p\| &= \left\|\sum_{i=1}^{p} x_{n+i}\right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{p} \|x_{n+i}\| \\
&= \|t_{n+p} - t_n\|,
\end{aligned}$$

donc la suite des y_n est convergente par complètude de $\bar{t}$

2-La sèrie $\sum U^k$dans l'espace de Banach A est normalement convergente car $\left\|U^k\right\| \leq \|U\|^k$ donc converge vers $v \in A$ comme $U \circ V = V \circ U = V - 1$ par passage à la limite

,l'èlement V est l'inverse de $1 - U$.

3- Soient $x_0 \in A^\times$ et $x \in A$ tel que $\|x - x_0\| < \frac{1}{\|x_0^{-1}\|}$.

Posons

$$y = 1 - x_0^{-1} x,$$

alors

$$\|y\| \leq \left\|x_0^{-1}\right\| \|x - x_0\| < 1, \qquad (*)$$

est inversible ce qui montre que $A^\times$ contient une boule ouvert centreè en chacun de ses points de plus :

$$\begin{aligned}
\left\|x^{-1}-x_0^{-1}\right\| &\leq \left\|(1-y)^{-1}-1\right\|\left\|x_0^{-1}\right\| \\
&= \left\|\sum_{n=1}^{+\infty} y^n\right\|\left\|x_0^{-1}\right\| \\
&\leq \|y\| \frac{\left\|x_0^{-1}\right\|}{1-\|y\|},
\end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand x tend vers x_0 cas ,alors $\|y\|$ tend vers 0 par $(*)$. La continuitè en tout point de $A^{\times}$ de $x \mapsto x^{-1}$ en dècoule.

4- Supposons que la suite $\left(\|x_n^{-1}\|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornè, posons $z_n = 1 - x_n^{-1}x$ alors la suite des $\|z_n\| \leq \|x_n^{-1}\| \|x_n - x\|$ converge vers 0 donc la norme de z_n est strictement inferieure à 1 si n est assez grand pour un tel n ,l'èlement $1 - z_n$ est donc inversible par l'assertion (2) d'ou x est inversible.

Proposition 2.2.3 *soit A une algèbre de Banach, l'ensemble des èlements inversibles $A^{\times}$ est un ouvert non vide de A, l'application :*

$$\begin{aligned} \phi \ : \ & A^{\times} \rightarrow A \\ & u \mapsto u^{-1} \end{aligned},$$

est continue et diffèrentiable, sa diffèrentielle en $u \in A^{\times}$ et :

$$(d\phi)_u : b \rightarrow -u^{-1}bu^{-1}.$$

Remarque 2.2.4

$$B\left(1_{A,}, 1\right) \subset A^{\times}.$$

Preuve. 1- on va montrer d'abord que $A^{\times}$ est un ouvert se A si et seulement si $A^{\times}$ est voisinage de chacune de ses points

soit $x \in A^{\times}$

pour montrer que $A^{\times}$ est un voisinage de x il suffit de trouver un ouvert O telque : $x \in O \subset A^{\times}$

on a : $B\left(1_{A,}, 1\right) \subset A^{\times}$ et comme $1_{A,} \in B\left(1_{A,}, 1\right) \subset A^{\times}$ donc $A^{\times}$ est un voisinage de $1_{A,}$

pour $x \in A^{\times}$ on a : x est inversible c'est-à-dire : il existe x^{-1} telque $x^{-1}x = xx^{-1} = 1_A$

on dèfinit maintenant l'application :

$$
\begin{aligned}
f \quad : \quad & A \to A \\
& y \mapsto x^{-1}y
\end{aligned}
$$

qui est continue, on remarque que :

$$f(x) = x^{-1}x = 1_A,$$

soit V un voisinage de 1_A $(V' \in V_{1_A})$ comme f est continue il existe V' voisinage de x $(V' \in V(x))$ telque $f(V') \subset V_{1_A}$

pour $V = B(1_A, 1)$, il existe $V' \in V(x)$ telque $f(V') \subset B(1_A, 1)$ donc il exitse O ouvert telque $f(O) \subset B'(1_A, 1)$ et $x \in O$.

Il suffit maintenant de montrer que $O \subset A^{\times}$

soit $y \in O$ on a $f(y) = x^{-1}y$ d'après $O \subset A^{\times}$ on trouve que :

$$f(y) \in B'(1_A, 1),$$

donc $x^{-1}y$ est inversible c'est-à-dire

$$\left(x^{-1}y\right)\left(x^{-1}y\right)^{-1} = 1_A,$$

et

$$\left(x^{-1}y\right)^{-1}\left(x^{-1}y\right) = 1_A,$$

mais on sait que

$$\left(x^{-1}y\right)^{-1} = \left(y^{-1}x\right),$$

donc

$$\left(x^{-1}y\right)\left(x^{-1}y\right)^{-1} = 1_A x^{-1}\left(y^{-1}y\right)x = 1_A,$$

alors

$$x^{-1}x\left(y^{-1}y\right)x^{-1}x = x1_A x^{-1},$$

ce qui donne que $yy^{-1} = 1_A$, de mème façon on montre que $y^{-1}y = 1_A$,

alors y est inversible c'est-à-dire $y \in A^{\times}$

on dèduit qu'il trouve un ouvert O telque $x \in O \subset A^{\times}$

ce qui donne que $A^{\times}$ est un voisinage de x qui est quelconque donc $A^{\times}$ est voisinage de tout ses points alors $A^{\times}$ est un ouvert

2- On va montrer que l'application $\phi : u \mapsto u^{-1}$ est continue et diffèrentiable de $A^{\times}$ dans A ,et sa diffèrentielle est :

$$(d\phi)_u : b \to -u^{-1}bu^{-1},$$

on sait que ϕ est diffèrentiable si et seulement s'il existe une application lineaire continue $L = (d\phi)_u$ qui vèrifie :

$$\forall U \in A^{\times} : \phi(u+b) = \phi(u) + L(b) + O(\|b\|) \text{ telque } b \in A \text{ et } u+b \in A^{\times}.$$

Soit $u \in A^{\times}$ et soit $b \in A$ telque :

$$\|b\| < \left\|u^{-1}\right\|^{-1}, \tag{1}$$

on ècrit $u + b = u(1_{A,} + u^{-1}b)$, et si on pose $a = -u^{-1}b$ on aura :

$$\|a\| < \left\|u^{-1}\right\| \|b\| \tag{2}$$

de (1) et (2) on trouve que : $\|a\| < 1$ ce qui implique que :

$$1_{A,} - a = 1_{A,} + u^{-1}b,$$

est inversible dans A donc $u + b$ aussi alors :

$$(u+b)^{-1} = (1_{A,} - a)^{-1} u^{-1},$$

en utilisant le dèveloppement en sèrie obtenue au propositions $\left((1_{A,} - a)^{-1} = \sum_{k=o}^{+\infty} a^k\right)$ on obtient que lorsque $\|b\| < \|u^{-1}\|^{-1}$, on a :

$$(u+b)^{-1} = \left(\sum_{k\geq 0}^{+\infty} a^k\right) u^{-1}.$$

ce qui peut s'ècrire :

$$(u+b)^{-1} = u^{-1} - u^{-1}bu^{-1} + u^{-1}bu^{-1}bu^{-1} - ...$$

considèrons que u est fixè, b variable et petit et gardons en èvidence les deux premiers termes du dèveloppement sous la forme :

$$(u+b)^{-1} = u^{-1} - u^{-1}bu^{-1} + v(b) \text{ ou } v(b) = \left(\sum_{k=2}^{\infty} a^k\right) u^{-1},$$

d'après les propositions :

$$\|v(b)\| = O\left(\|b\|^2\right) = O(\|b\|) \text{ lorsque } b \to 0_A ,$$

d'autre part on a :

$$\phi(u+b) = (u+b)^{-1} = u^{-1} - u^{-1}bu^{-1} + O(\|b\|),$$

donc il existe une application :

$$L \quad : \quad \begin{array}{c} A \to A \\ b \mapsto -u^{-1}bu^{-1} \end{array},$$

il suffit de montrer que L est lineaire et continue.

La linèairitè :

Soient $b, b' \in A$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} L(\alpha b + \beta c) &= -u^{-1}(\alpha b + \beta c)u^{-1} \\ &= \alpha\left(-u^{-1}\right)b + \beta\left(-u^{-1}\right)b' \\ &= \alpha\left(-u^{-1}bu^{-1}\right) + \beta\left(-u^{-1}b'u^{-1}\right) \\ &= \alpha L(b) + \beta L(c). \end{aligned}$$

La continuitè :

Soit $b \in A$ on a :

$$\|L(b)\| = \left\|u^{-1}b'u^{-1}\right\|,$$

mais

$$\left\|u^{-1}b'u^{-1}\right\| \leq \left\|u^{-1}\right\|^2 \|b\|,$$

donc

$$\|L(b)\| \leq \left\|u^{-1}\right\|^2 \|b\|,$$

posons $c = \|u^{-1}\|^2$ existe et positive alors il existe un $c \geq 0$ telque : $\|L(b)\| \leq c\|b\|$, donc L est continue.

On conclusion on trouve une application lineaire continue L qui vèrifie :

$$\phi(u+b) = \phi(u) + L(b) + O(b),$$

donc $\phi : A^{\times} \to A$ est diffèrentielle est :

$$(d\phi)_u : b \to -u^{-1}bu^{-1}.$$

■

Chapitre 3

Thèorie spectral

Ce qui aètè dit jusqu'ici est valable aussi bien dans le cas rèel la thèorie de spectre n'est vraiment satisfisante que dans le cas $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ nous prenons donc des algèbres de Banach sur $\mathbb{C}$.

Spectre d'un element d'une algèbre de Banach :

Soit A une algèbre de Banach unifère sur le corps des nombres complexes , le spectre d'un èlement a de A

notè $Sp\,(a)$ ou $Sp_A\,(a)$ est l'ensemble des nombres complexes λ pour lesquels l'èlement $r\,(\lambda, a) = a - 1_A\lambda$ n'admet pas d'inverse dans A

$$Sp\,(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - 1_A\lambda \notin Inv\,(A)\}\,.$$

Spectre d'un opèrateur lineaire bornè :

On dèfinit le spectre d'un opèrateur bornè sur un espace de Banach complexe X comme son spectre lorsqu'on considère ,cet opèrateur comme ètant un èlement de l'algèbre de Banach $B\,(X)$ des opèrateurs bornès sur X plus explicitement ,si on note par l'application identitè de X ,qui est l'èlement unitè de $B\,(X)$ alors le spectre de l'opèrateur linèaire bornè $T : X \to X$ est l'ensemble $Sp\,(T)$ des nombres complexes λ pour lesquels l'opèrateur

$$R\,(\lambda) = \lambda I - T,$$

n'admet pas d' opèrateur inverse

Définition 3.0.5 *Soient A une algèbre de Banach unitaire complexe et $a \in A$ on appelle rèsolvante de a lèapplication à $\lambda \in C - Sp\,(a)$ associè l'inverse $(a - 1_A\lambda)^{-1}$ et on note quand*

$$\lambda \notin Sp\,(a) : R_\lambda\,(a) = (a - 1_A\lambda)^{-1}\,,$$

c'èst -à-dire pour $x \in A$

$$R \quad : \quad \begin{array}{c} C - Sp(a) \to A \\ \lambda \mapsto R_\lambda(a) = (a - 1_A\lambda)^{-1} \end{array}.$$

Proposition 3.0.6 *Soient A une algèbre de Banach unitaire complexe $x \in A$,le spectre de x est une partie compacte non vide de $\mathbb{C}$, l'application*

$$R(a) : \lambda \mapsto (a - 1_A\lambda)^{-1} = R_\lambda(a),$$

est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus Sp(a)$ avec :

$$R(a)'(\lambda) = (R_\lambda(a))^2,$$

(et la dèriveè est donc continue).

Preuve. 1- On va montrer que le $Sp(a)$ est compact.On a $Sp(a)$ est compact dans $\mathbb{C}$ si et seulement si $Sp(a)$ est fermè et bornè

1) Montrons que le $Sp(a)$ est fermè :

On sait que $Sp(a)$ est fermè si et seulement si $\mathbb{C} \setminus Sp(a)$ est un ouvert pour montrer que $\mathbb{C} \setminus Sp(a)$ est ouvert on va montrer qu'il est voisinage de toutes ses points, soit $\lambda \in Sp(a)$ donc $a - 1_A\lambda$ est inversible, soit $\lambda' \in V_\lambda$ voisinage de λ alors

$$a - 1_A\lambda' \in V(a - 1_A\lambda) \subset A^\times,$$

alors

$$\lambda' \notin Sp(a),$$

donc $\lambda' \in \mathbb{C} \setminus Sp(a)$ donc $V_\lambda \subset \mathbb{C} \setminus Sp(a)$ et on a $\lambda \in V_\lambda$ ce qui donne que $\mathbb{C} \setminus Sp(a)$ est voisinage de λ qui est quelconque donc $\mathbb{C} \setminus Sp(a)$ est ouvert donc $Sp(a)$ est fermè.

2) Montrons que le $Sp(a)$ est bornè :

$$Sp(a) \subset \{\lambda, |\lambda| \leq \|a\|\} = B'(0. \|a\|),$$

on a $Sp(a)$ est bornè, en dèduit que $Sp(a)$ est compact

2- Montrons que :

$$R(a) : \lambda \mapsto (a - 1_A\lambda)^{-1} = R_\lambda(a),$$

est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus Sp(a)$ avec $R(a)'(\lambda) = (R_\lambda(a))^2$ (est la dèrivèe donc continue) $R(a)$ est dèrivable alors :

$$\lim_{z \to 0} \frac{(R_a(\lambda + z) - R_a(\lambda))}{z},$$

existe et finie.

Soient $x \in A$ et $\lambda \notin Sp(a)$ on va calculer :

$$R_{\lambda+z}(a) - R_\lambda(a),$$

on a :

$$R_{\lambda+z}(a) = (a - (\lambda+z)1_A)^{-1},$$

mais :

$$\begin{aligned} a - (\lambda+z)1_A &= a - \lambda 1_A - z1_A \\ &= u - z1_A, \end{aligned}$$

telque $u = a - 1_A\lambda$ qui est inversible donc $u - z1_A$ est inversible, on a :

$$u - z1_A = u\left(1_A - zu^{-1}\right) \text{ et } \left\|zu^{-1}\right\| \leq |z| \frac{1}{|\lambda| - \|a\|} < 1,$$

et d'après les propositions :

$$\begin{aligned} (u - z1_A)^{-1} &= \left(1 - zu^{-1}\right)^{-1} u^{-1} \\ &= \left(\sum \left(zu^{-1}\right)^k\right) u^{-1} \\ &= \left(1 - zu^{-1} + z^2u^{-2} + ...\right) u^{-1} \\ &= u^{-1} + zu^{-2} + z^2u^{-3} + ... = R_{\lambda+z}(a), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} R_{\lambda+z}(a) &= (a - 1_A\lambda)^{-1} + z\left((a - 1_A\lambda)^{-1}\right)^2 + ... \\ &= R_\lambda(a) + z(R_\lambda(a))^2 + z^2(R_\lambda(a))^3 + ..., \end{aligned}$$

ce qui donne

$$R_{\lambda+z}(a) - R_\lambda(a) = z(R_\lambda(a))^2 + z^2(R_\lambda(a))^3 + O\left(z^2\right),$$

donc

$$\frac{R_{\lambda+z}(a) - R_\lambda(a)}{z} = [R_\lambda(a)]^2,$$

au voisinage de 0 et comme $[R_\lambda(a)]^2$ existe et finie donc elle est dèrivable

3- Montrons que $Sp(a) \neq \varnothing$:

Supposons que$Sp(a) = \varnothing$ c'est-à-dire $\mathbb{C} - Sp(a) = \mathbb{C}$,choisissons λ_0 hors du spectre alors :

$$R_{\lambda_0}(a) = (a - 1_A\lambda_0)^{-1} \neq 0,$$

puisqu'il est inversible et on peut trouver une forme linèaire continue x^* sur A telle que : $x^*(R_{\lambda_0}(a)) \neq 0.$

D'après le corollaire de Hahn-Banach on dèfinit l'application :

$$\begin{aligned} g \quad : \quad & \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ & \lambda \mapsto x^*(R_\lambda(a)), \end{aligned} \tag{3.1}$$

qui est une fonction holomorphe scalaire dèfinit sur $\mathbb{C}$ telle que $g(\lambda_0) \neq 0$,cette fonction serait entière (holomorphe sur $\mathbb{C}$).

On a si :

$$|\lambda| > \|a\|, \|R_\lambda(a)\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|a\|},$$

alors

$$\lim_{\lambda\to\infty} g(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty} x^*(R_\lambda(a)) = x^*\left[\lim_{\lambda\to\infty} R_\lambda(a)\right] = 0.$$

En utilisant lte thèoreme de Liouvielle (g est holomorphe sur tout $\mathbb{C}$ est bornè car x^* est continue) alors : $g(\lambda) = \mathbb{C}$,

tel que $\mathbb{C}$ est constante, et on a :

$$\lim_{\lambda\to\infty} g(\lambda) = \mathbb{C} = 0, \forall\lambda \in \mathbb{C} : g(\lambda) = 0,$$

mais

$$g(\lambda) \neq 0,$$

donc

$$Sp(a) \neq *\varnothing.$$

■

Rayon spectral

Définition 3.0.7

$$r(T) = \sup_{z\in Sp(t)} |z|,$$

est appelè rayon spectral de T

Théorème 3.0.8 *Soit E un espace de Banach $T \in B(E)$ alors :*

1. $r(T) = \lim_{n\to+\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$
2. *si $E = H$ Hilbert de T normal, $r(T) = \|T\|.$*

Chapitre 4

Complement

4.1 Un exemple d'une algèbre de Banach unitaire

Préambule :

Après avoir abordé avec une grande généralité l'algèbre de Banach et ses résultats, intéressons,nous ici à donner un exemple plus important.

Définition 4.1.1 *Soit E un espace de Hilbert nous désignons pour $\mathcal{L}(E)$ à l'espace des opérateurs linéaires borné sur E.*

Lemme 4.1.2 $\mathcal{L}(E)$ *muni d'un produit (La composition des applications)*

$$\begin{aligned} \varphi \quad : \qquad \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) &\to \mathcal{L}(E) \\ (u,,v) &\mapsto \varphi(u.v) = u \circ v = uv, \end{aligned} \tag{4.1}$$

est une algèbre de Banach unitaire, l'élément neutre du produit est $1_{\mathcal{L}(E)} = I_E$

Preuve. 1. Le produit φ est bilinéaire :soient $u, v, w \in \mathcal{L}(E)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$

1) On a :

$$\begin{aligned} \varphi([\alpha u + \beta v], w) &= (\alpha u + \beta v) \circ w \\ &= \alpha(u \circ v) + \beta(v \circ w) \\ &= \alpha\varphi(u,,w) + \beta\varphi(v,w). \end{aligned}$$

2) On a :

$$\begin{aligned} \varphi(u,,(\alpha v + \beta w)) &= [u \circ (\alpha v + \beta w)] \\ &= \alpha(u \circ v) + \beta(u \circ w) \\ &= \alpha\varphi(u,,v) + \beta\varphi(u,,w). \end{aligned}$$

2. φ est associatif : soit $u, v, w \in \mathcal{L}(E)$

$$\begin{aligned} \varphi(u,,v) \circ w &= (u \circ v) \circ w \\ &= u \circ (v \circ w) \\ &= u \circ \varphi(v, w). \end{aligned}$$

3. On a :

$$I_E \circ u = u \circ I_E,$$

donc

$$\begin{aligned} I_E &= 1_{\mathcal{L}(E)} \left\| 1_{\mathcal{L}(E)} \right\| \\ &= \|I_E\| \\ &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|I_E\|}{\|X\|} \\ &= 1. \end{aligned}$$

4. On a :

$$\|u \circ v\| \leq \|u\| \|v\|.$$

■

Définition 4.1.3 *Soient E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$,on dit que T est inversible dans $\mathcal{L}(E)$ s'il existe $S \in \mathcal{L}(E)$telle que :*

$$ST = I_E = 1_{\mathcal{L}(E)},$$

et

$$TS = I_E = 1_{\mathcal{L}(E)}.$$

Cela signife que l'application T est bijective et que T^{-1} est continue, et correspond bien à la définition usuelle de l'inversibilité d'une application linéaire continue.

Lemme 4.1.4 *(corollaire du lemme 2.2.1 du chapitre2)*

Soient E un espace de Hilbert et soit $u \in \mathcal{L}(E)$tel que $\|u\| < 1$

Alors La série $\sum\limits_k u^k$ est convergente dans $\mathcal{L}(E)$et sa somme est l'inverse de $I_E - u$

$$(I_E - u)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} u^k,$$

on a de plus l'estimation

$$\left\|(I_E-u)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-\|a\|}.$$

Pour la preuve voire corollaire du lemme 2 2.1 du chapitre2

Proposition 4.1.5 *(corollaire de la proposition 2.2.3 du chapitre 2)*

Soient E un espace de Hilbert.L'ensemble $u \in \mathcal{L}(E)$des applications linéaires continues inversibles est ouvert dans L'espace $\mathcal{L}(E)$ 'l'application :

$$\varphi : \mathcal{L}(E) \mapsto (\mathcal{L}(E))^{-1},$$

est continue et différentiable de U dans $\mathcal{L}(E)$ sa différentiabilité en $T \in U$ est :

$$(d\varphi)_T : S \to -T^{-1}ST^{-1}.$$

Ce qui a été dit jusqu'ici est valable aussi bien dans le cas réel que complexe. En revanche,la théorie du spectre n'est vraiment satisfaisante que dans le cas $|\mathbb{k} = \mathbb{C}$ Nous prendrons donc $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathbb{C}$

Définition 4.1.6 *Soient E un espace de Hilbert, et u un opérateur de $\mathcal{L}(E)$.Un nombre complexe λest dit valeur propre de u si l'équation :*

$$u(x) = \lambda x, \tag{1.4}$$

admet des solutions non nulles.

Si l'on note Sl_λ l'esemble de ces solutions, il vient :

$$\begin{aligned} S_\lambda &= \{x \in E \text{ tel que } u(x) = \pi x\} \\ &= \ker(u-\lambda I), \end{aligned}$$

S_λ est dit sous-espace propre associé à la valeur propre λses éléments s'appellent des vecteurs propres.

Définition 4.1.7 *Soient E un espace de Hilbert, et u un opérateur de $\mathcal{L}(E)$.L'ensemble des valeurs propres de u, s'appelle spectre de u, les autres valeurs, elles pour lesquelles l'équation (4. 1) précitée n'admet pas de solutions non nulles sont dites valeurs régulières de u*

Définition 4.1.8 *(une autre définition)*

Soient E un espace de Hilbert.On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur spectrale (si λ est une valeur propre de u) si $(u-\lambda I_E)$ n'est pas inversible.

Une valeur λ est régulière si l'opérateur $(u-\lambda I)$est inversible.

Définition 4.1.9 *Soient E un espace de Hilbert, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ .On appelle la résolvante de u L'application qui à $\lambda \in \mathbb{C} \diagdown Sp(u)$ associe l'inverse $(u-\lambda I)^{-1}$ c'èst-à-dire :*

$$R_{\lambda}(\alpha) = (u-\lambda I)^{-1}.$$

Exemple 4.1.10 *1. L'opérateur I de $\mathcal{L}(E)$ admet une seule valeur propre*

$$\lambda = 1 \Rightarrow Sp(I) = 1.$$

2. Munissons $\mathbb{C}^n$d'une norme (complexe) quel conque et considérons $M_N(c)$ comme L'algèbre de Banach $A = \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$spectre d'une matrice $M \in A$ est L'ensemble des valeurs propres de la matrice.

Corollaire 4.1.11 *(de la proposition 3.0.6 du chapitre 3)*

Soient E un espace de Hilbert, et $u \in \mathcal{L}(E)$ Le spectre de u est une partie compacte non vide dans $\mathbb{C}$.L'application :

$$R(u).\lambda \to (u-\lambda I)^{-1} = R_{\lambda}(u),$$

est holomorphe sur $\mathbb{C} \diagdown Sp(u)$

$$R(u)'(\lambda) = (R_{\lambda}(u))^2,$$

(et la dérivée est donc continue)

Corollaire 4.1.12 *Le spectre d'un opérateur u de $\mathcal{L}(E)$est contenu dans le disque $B(0, \|u\|)$ de centre 0 et de rayon $\|u\|$*

Définition 4.1.13 *(D'après la définition du spectre d'un èlement du chapitre 3)*

Soit $\mathcal{L}(E)$ une algèbre de Banach unitaire complexe, la quantité :

$$p(u) = \max\{|\lambda| : \lambda \in Sp(u)\},$$

s'appelle rayon spectral de $u \in \mathcal{L}(E)$.

Remarque 4.1.14 *On a :*

$$p(u) \leq \|u\|$$

Corollaire 4.1.15 *(D'après le théorème 3.0.8 du chapitre 3)*

$$p\left(u\right)=\lim_{n\rightarrow\infty}\left\Vert u^{n}\right\Vert ^{\frac{1}{n}}$$

Conclusion

Nous espérons que ce mémoire pourra atteindre son objectif qui reste inchangé, ouvrir la voie à la compréhension des mathématiques fondamentales et cette dernière est un outil essentiel d'analyse des informations engendrées par notre société et qui sont de plus en plus variées.

Bibliographie

[1] L.KANTOROVITCH,D.AKILOV.Analyse Fonctionnelle Tome1,Tome2.Editions Mir 1981.

[2] A.KOLMOGOROV,S.FOMINE.Elements de la Thèorie des Fonctions et de l'Analyse Fonctionnelle .Editions Mir 1974.

[3] V.MIKHAILOV.Equations aux dèrivèes partielles .Editions Mir 1980.

[4] M.NADIR.Cours d'analyse fonctionnelle ,universitè de Msila Algèrie 2004.

[5] W.RUDIN.Functional analysis.McGraw-Hill New York 1973.

[6] FREDERIC PAULIN.Complèments de thèorie spectral et d'analyse harmonique.Dèpartement de mathèmatique d'Orsay.

[7] H.Brèzis Analyse fonctionnelle thèorie et applications Masson fr Paris 1983 Collection Mathematique Appliquèes pour la Maitrise

[8] J.Dieudonnè.Elèments d'analyse.T.I.fondements de l'analyse moderne Gauthier-Villars fr Paris 1968.

[9] F.Riesz, B.Nagy. leçons d'analyse fonctionnelle Akademiai Kiado hu Budapest 1955 Academie des sciences de Hongrie.

[10] W.Rudiu,Analyse rèelle et complexe, èdition Masson,1975.

[11] S.Banach.Thèorie des opèrations linèaires,Chealsea publishing company.

[12] S.Long. Analysis II Addison-Wesley publishing Company us Massachusettes 1969 Addision - Wesley series in mathematics.