République Algérienne Démocratique et Populaire

Minstère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

CENTRE UNIVERSITAIRE DE MILA
INSTITUT DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude
Présenté pour l'obtention du diplôme de

Licence Académique

Domaine : **Mathématiques et Informatique**
Filière : **Mathématiques**
Spécialité : **Mathématiques Fondamentale**

Thème

Les Intégrales Double et Triple et leur Applications

Présenté par **:**
REKAB AHLEM
BERGUELLAH KHAOULA

Sous la direction de :
Pr. HAMRI NASR-EDDINE

Année universitaire 2010-2011

Table des matières

Introduction Générale

L'histoire des mathématiques doit beaucoup à la théorie de l'intégration, et de tout temps, sa place prédominante a façonné l'analyse en offrant à qui une solution, à qui un problème. Le lustre des "méthodes intégrales" en Grèce antique l'atteste, et bien qu'il faille attendre le calcul infinitésimal pour une première formalisation, elles nous avaient déjà offert de profonds et beaux résultats : les athéniens évaluèrent les grandeurs de l'espace puis en démontrèrent implicitement l'existence et l'unicité ; au $XVII$ siècle naissent des méthodes générales de "calcul de l'infini " (rectification de courbes, quadratures,etc...). C'est Leibniz qui opère le fondement de la théorie de l'intégration (Géometria recondita, 1686), perpétué jusqu'aujourd'hui, d'une part par un symbolisme intégral reliant intégration et dérivation, d'autre part par la mise en place des principaux théorèmes.

L'intégrale de Riemann (Bernhard Riemann, 1854, publication posthume en 1867) puis l'intégrale de Lebesgue (Henri Lebesgue, 1902) ont marqué les esprits par leur formalisation aboutie. L'intégration est encore un sujet pour la recherche contemporaine ; en témoigne des extensions telles que l'intégrale de Kurzweil-Henstock, ou la recentre construction de Bon giorno (1996).

Le schéma général utilisé pour construire une intégrale et qui cherche à mesurer l'aire du domaine sous la courbe, est le même pour les trois approches de l'intégration, au sens de Riemann, au sens de Lebesgue, ou au sens de Kurzweil-Henstock.

D'abord, on considère une famille de fonctions élémentaires, pour les quelles nous avons un moyen évident de mesurer l'aire sous la courbe. Dans le cas de l'intégrale de Riemann ou de Kurzwiel-Henstock, les fonctions en escalier dont l'aire sous la courbe est égale à la somme des aires des rectangles ; les fonctions en escalier étant constantes sur des intervalles, le domaine sous la courbe d'une telle fonction peut alors être vu comme une réunion de rectangles. Pour l'intégrale de Lebesgue, les fonctions élémentaires sont les fonctions étagées, constantes, non plus sur des intervalles des parties mesurables (approche plus souple et plus générale).

L'intégrale de Riemann permet d'intégrer entre les fonctions croissantes ou décroissantes, et les fonctions continues, donc aussi les fonctions continues par morceaux, ainsi que les fonctions monotones par morceaux. Cependant une limite simple (c'est -à-dire

$f(x) = \lim f_n(x)$ pour tout x de l'intervalle $[a, b]$ sans condition d'uniformité en x) de fonction Riemann intégrables n'est pas nécessairement Riemann intégrable. Il est possible de caractériser les fonctions intégrables au sens de Riemann : ce sont les fonctions bornées dont l'ensemble des poids de discontinuité est de mesure nulle (théorème de Lebesgue). L'intégration au sens de Lebesgue permet d'intégrer plus de fonctions (dont des fonctions qui ne sont même pas localement bornées), et elle donne la même valeur à l'intégrale lorsque la fonction est déjà intégrable au sens de Riemann. Elle a l'avantage de munir l'espace vectoriel des fonctions intégrables (modulo l'égalité presque partout) d'une structure d'espace normé complet. Ceci est essentiel pour beaucoup d'applications. Cependant, on perd la notion de sommes de Riemann, et il existe des contextes (étude des suites uniformément distribuées par exemple) où les fonctions intégrables au sens de Riemann surviennent naturellement ; pour une généralisation de cette dernière permettant néanmoins d'intégrer également toutes les fonctions mesurables (au sens de Lebesgue).

Chapitre 1

Intégrales

1.1 L'intégrale de Riemann

L'intégrale de Riemann est une façon simple de définir l'intégrale d'une fonction sur un intervalle. En termes géométriques, cette intégrale s'interpréte comme l'aire du domaine sous la courbe représentative de la fonction, comptée algèbriquement.

Le procédé général utilisé pour définir l'intégrale de Riemann est l'approximation par des fonctions en escalier, pour lesquelles la définition de l'aire sous la courbe est aisée. Les fonctions pour lesquelles cette définition est possible sont dites intégrables au sens de Riemann. C'est le cas notamment des fonctions continues, continue par morceaux, ou réglées sur un segment $[a, b]$.

1.1.1 Définition directe de l'intégrabilité au sens de Riemann

La discussion précédente nécessitait une notion préalable d'intégrale pour les fonctions en escalier, et par exemple on a accepté sans démonstration la propriété de monotonie pour les fonctions en escalier.

Afin de faire l'économie d'une discussion préalable des fonctions en escalier, il est préférable de procéder en toute généralité de la manière suivante (qui est très proche de l'approche originelle de Riemann lui-même). Soit f une fonction bornée définie sur l'intervalle borné $[a, b]$. A toute subdivision $\sigma = (a = x_0 \prec x_1 \prec ... \prec x_n = b)$ on associe son pas $\delta(\sigma) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$, qui mesure sa finesse, ainsi que les nombres réels suivants M_i et m_i, pour $i = 1, 2, ..., n$

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1} - x_i]} f(x)$$

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1} - x_i]} f(x)$$

Puis, les sommes de Darboux supérieure et inférieure :

$$K(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

$$J(\delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

$$\Delta(\sigma) = K(\sigma) - J(\sigma) \geq 0$$

On dit que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ s'il est possible de trouver des subdivisions rendant les écarts $\Delta(\sigma)$ entre sommes supérieure et inférieure arbitrairement petits.

On prouve alors qu'il existe un nombre réel unique, noté $\int_a^b f(x)\, dx$, qui a la propriété suivante :

$$\lim \delta(\sigma_k) = 0 \Longrightarrow \lim_{k \to +\infty} J(\sigma_k) = \lim_{k \to +\infty} K(\sigma_k) = \int_a^b f(x)\, dx$$

pour n'importe quelle suite de subdivisions σ_k dont les pas $\delta(\sigma_k)$ tendent vers zéro.

On peut établir qu'une fonction en escalier est bien intégrable en ce sens et que l'intégrale ainsi définie pour elle a toutes les propriétés. Et notre définition est alors en toute généralité équivalente avec celle de la section précédente.

1.1.2 Propriétés

Lemme 1.1 *Soit $[a, b]$ un segment. L'application $I : f \to \int f$ qui associe à f l'intégrale de a et b est une forme linéaire. Et ainsi pour toutes fonctions intégrables f et g, et tout nombre réel λ, $I(\lambda f + g) = \lambda I(f) + I(g)$.*

Ceci peut être démontré à partir des premiers principes de la construction de l'intégrale de Riemann.

Théorème 1.2 *Toute fonction sur à valeurs réelles, continue sur le segment $[a, b]$ est intégrable.*

La preuve repose sur le fait qu'une fonction continue sur un segment est uniformément continue.

Corollaire 1.3 *Si f est continue sur $[a, b]$ sauf peut-être en un nombre fini de point de discontinuité, et si f est bornée, alors f est intégrable.*

La condition f bornée ne peut pas être omise.

Théorème 1.4 *Si (f_k) est une suite de fonctions intégrables sur $[a, b]$, et si (f_k) converge uniformément vers une fonction f, alors f est intégrables, et les intégrales $\int f_k$ convergent vers $\int f$.*

Les hypothèses du théorème 4 (convergence uniforme sur un segment) sont très fortes. Une difficulté avec l'intégrale de Riemann se pose, lorsque nous tentons d'amoindrir ces hypothèses.

Car en fait, la suite numérique $\left(\int f_k\right)$ converge vers le nombre $\int f$ plus souvent que le théorème ne le suggère, mais pour le démontrer il faut des raisonnements nettement mois simples que ceux définissant l'intégrale de Riemann et donnant ses propriétés de base. Il est néanmoins possible de le prouver avec les notions de base sur les suites et les séries de nombres réels.

Un autre aspect de l'intégrale de Riemann est qu'elle ne concerne dans un premier temps que les fonctions bornées, sur un intervalle bornées. Il faut une deuxième définition si l'une de ces conditions n'est pas vérifiée. Par exemple, si nous souhaitons intégrer une fonction f de x à $+\infty$,en supposant qu'elle soit intégrable sur tout intervalle borné, on prendra la limite suivante, qui peut d'ailleurs ou non, exister :

$$\lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b f(x)\, dx$$

Dans le cadre de l'intégration au sens de Lebesgue il n'y a qu'une seule définition et par exemple $\int_0^\infty e^{-x} dx$ est une intégrale de Lebesgue au sens strict tandis que comme intégrale de Riemann elle est une intégrale généralisée. De même pour $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$. Cependant les intégrales au sens de Lebesgue sont toujours automatiquement absolument convergentes.

Ainsi, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

n'est ni une intégrale de Riemann, ni une intégrale de Lebesgue au sens propre, mais elle est une intégrale généralisée dans les deux approches (et sa valeur est $\frac{\pi}{2}$).

1.2 L'intégrale de Lebesgue

En mathématiques, l'intégrale de lebesgue désigne à la fois une théorie relative à l'intégration et à la mesure, puis le résultat de l'intégration d'une fonction à valeures réelles définie sur $\mathbb{R}$ (ou sur $\mathbb{R}^n$), munis de la mesure de Lebesgue.

Généralisant l'intégrale de Riemann, l'intégrale de Lebesgue joue un rôle important en analyse, en théorie des probabilités et dans beaucoup d'autres domaines des mathématiques.

Dans les cas simples, l'intégrale d'une fonction positive f peut être vue comme l'air comprise entre l'axe des x et la courbe de la fonction f. En étendant cette notion, la constriction de l'intégrale de lebesgue s' applique à un ensemble plus riche de fonctions définies sur des espases plus généraux que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$.

1.2.1 Intéret pratique de l'intégrale de lebesgue

Après la construction de l'intégrale de Cauchy-Riemann, l'intérêt s'est porté sur des extensions des théorème fondamentale du calcule intégrale :

Soit f une fonction à valeur réelles, définie sur l'axe réel et supposée continue par morceaux. Alors pour tout intervalle fermé $[a, b]$, f est Reimann -intégrable et elle admet une primitive continue sur $[a, b]$. Si F désigne une primitive de f sur $[a, b]$ alors pour tout x dans $[a, b]$:

$$\int_a^x f(u)\, du = F(u) - F(a).$$

Les études réalisées sur l'intégrale de Riemann aboutissent au théorème suivant qui est le "meilleur qu'on sache démontrer" :

Si F est différentiable sur $[a, b]$ et si sa dérivée $F^{'}$ est Riemann -intégrable sur $[a, b]$, alors pour tout x dans $[a, b]$

$$\int_a^x F^{'}(u)\, du = F(u) - F(a).$$

Cependant, il existe des fonctions F dérivables sur $[a, b]$ sans que leur dérivée soit Riemann -intégrable.

L'objectif premier de l'intégrale de Lebesgue est de lever cette restriction afin de satisfaire à l'énoncé :

Si F est différentiable sur $[a, b]$ et si sa dérivée $F^{'}$ est bornée sur $[a, b]$, alors pour tout x dans $[a, b]$, elle est Lebesgue -intégrable sur $[a, x]$ et

$$\int_a^x F^{'}(u)\, du = F(u) - F(a).$$

Par la suite, d'autres constructions d'une intégrale ont été élaborées (intégrale de Kurzweil-Henstock, Denjoy, Perron, Khintchine,...) et elles satisfont à l'énoncé plus général.

Si F est différentiable sur $[a,b]$, alors, pour tout x dans $[a,b]$, F' est intégrable sur $[a,x]$ et

$$\int_a^x F'(u)\,du = F(u) - F(a).$$

1.2.2 Construction formelle

L'idée générale consiste à définir l'intégrale de fonction simples (en l'occurrence les fonctions étagées), d'étendre successivement cette notion à toute fonction à valeurs positives, puis finalement à une catégorie plus riches : les fonctions mesurables.

Soit μ une mesure positive pour une σ-algèbre X sur un ensemble E. En analyse réelle, E désigne l'espace euclidien de dimension n ($\mathbb{R}^n$) ou un sous-ensemble de celui-ci qui est mesurable au sens de Lebesgue ; X désigne la sigma-algèbre de tous les sous-ensemble de E mesurables au sens de Lebesgue, et μ la mesure de Lebesgue. En probabilité et en statistique, μ est une probabilité sur un espace probabilisable E.

L'intégrale de Lebesgue des fonctions définies sur E et à valeurs réelles est construite de manière suivante :

Soit S une partie de X et soit f la fonction définie sur E qui vaut 1 dans S et en dehors. Cette fonction est appelée fonction indicatrice ou fonction caractéristique de S et est notée 1_s.

La valeur attribuée à $\int 1_s$ est conforme à la mesure μ :

$$\int 1_s = \mu(S).$$

Par linéarité, l'intégrale est étendue à l'espace vectoriel engendré par les fonctions indicatrice (une combinaison linéaire finie de fonctions indicatrices s'appelle une fonction étagée) :

$$\int \sum a_k 1_{s_k} = \sum a_k \mu(S_k).$$

Pour toute somme finie et tous coefficients a_k réels.

Remarquons que l'intégrale ainsi définie pour une fonction qui est une combinaison linéaire de fonctions indicatrices est indépendante du choix de la combinaison : c'est une condition essentielle à la consistance de la définition (preuve).

Soit f une fonction définie sur E et à valeurs positive dans la droite réelle achevée (comprenant donc la valeur $+\infty$).

L'intégrale de Lebesgue de f est définie comme étant la borne supérieure de $\int s$ pour toute fonction étagée s inférieure à $f\,(s(x)) \leq f(x)$ pour tout x. Lorsque les $\int s$ ne sont pas bornées, alors $\int f$ est infinie (ou n'existe pas).

Remarque 1.5 *Cette construction est analogue à celle des sommes inférieures de Riemann, bien qu'elle n'envisage pas de somme supérieure ; ce fait important permet d'obtenir une classe plus générale de fonctions intégrables.*

Pour être plus précis, il convient encore de mentionner la mesure et le domaine d'intégration :

$$\int_E f d\mu = \sup_{s \text{ étagée, } s \leq f} \int_E s d\mu.$$

L'intégrale est ainsi établie pour toute fonction définie sur E et à valeurs positives. Cependant, afin de satisfaire des propriétés de linéarité et de convergence pour des suites, les fonctions considérées sont limitées aux fonctions mesurables, soit celles pour lesquelles l'image réciproque de tout intervalle soit dans la tribu X.

Une telle fonction f mesurable sur l'ensemble E et à valeurs réelles (ou $\underline{+}\infty$) se décompose en une différence de deux fonctions g et h positive satisfaisant $f(x) = g(x) - h(x)$ si $\int |f|$ est finie, alors f est dite intégrable au sens de Lebesgue ou sommable. Dans ce cas, les deux intégrales $\int g$ et $\int h$ sont finies et donnent un sens à la définition : $\int f = \int g - \int h$.

Il est possible de vérifier que cette définition étend la notion d'intégrale de Riemann.

Les fonctions à valeurs complexes peuvent être intégrées de la même manière, en intégrant séparément la partie réelle et la partie imaginaire.

1.2.3 Théorèmes

Toute notion raisonnable d'intégrale doit satisfaire les propriétés de linéarité et de monotonie.

L'intégrale de Lebesgue ne fait pas exception : si f et g sont des fonctions intégrables et si a et b sont des nombres réels, alors $af+bg$ est intégrable et $\int (af + bg) = a\int f + b\int g$; si $f \leq g$, alors $\int f \leq \int g$.

Deux fonctions qui diffèrent seulement sur un ensemble de mesure μ nulle ont la même intégrale, ou plus précisément : si $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0$, alors f est intégrable si et seulement si g est intégrable, et dans ce cas $\int f = \int g$.

Comparativement à l'intégrale de Riemann, l'un des avantages essentiels de l'intégrale de Lebesgue est la facilité avec laquelle s'effectue un passage à la limite. Les trois théorèmes suivants sont parmi les plus utilisés :

Théorème 1.6 ***(convergence monotone)***
si (f_k) est une suite de fonctions mesurables positives telles que tout k, $f_k \leq f_{k+1}$ et si

$f = \lim f_k$, *alors la suite de terme générale* $\int f_k$ *converge vers* $\int f$ *(remarque :* $\int f$ *peut être infinie ici).*

Lemme 1.7 ***(fatou)***
si (f_k) *est une suite de fonctions mesurables positives et si* $f = \liminf f_k$, *alors* $\int f \leq \liminf f_k$ *(à nouveau,* $\int f$ *peut être infinie).*

Théorème 1.8 ***(convergence dominée)***
si (f_k) *est une suite de fonctions mesurables convergeant ponctuellement vers une fonction* f, *et s'il existe une fonction intégrable* g *telle que pour tout* k, $|f_k| \leq g$, *alors* f *est intégrable et la suite de terme général* $\int f_k$ *converge vers* $\int f$.

Chapitre 2

Les intégrales double et triple

2.1 Intégrale double

2.1.1 Définition de l'intégrale double

Soit dans le plan OXY un domaine fermé D limité par une courbe l.

Soit donnée dans le domaine D une fonction continue

$$z = f(x, y).$$

Partageons le domaine D en n domaines partiels par des courbes quelconques :

$$\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3, ..., \Delta s_n.$$

Pour ne pas alourdir l'écriture, nous désignerons également par $\Delta s_1, ..., \Delta s_n$ les aires de ces petits domaines. Choisissons dans chaque Δs_i un point p_i arbitraire (intérieur ou sur la frontière) ; on aura donc n points :

$$p_1, p_2, ..., p_n.$$

Soient $f(p_1), f(p_2), ..., f(p_n)$ les valeurs de la fonction en ces points ; formons la somme de produits $f(p_i)\Delta s_i$:

$$V_n = f(p_1)\Delta s_1 + f(p_2)\Delta s_2 + ... + f(p_n)\Delta s_n = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta s_i \qquad (1)$$

qui est appelée somme intégrale de la fonction $f(x, y)$ dans le domaine D.

Si $f \geq 0$ dans D, on pourra se représenter géométriquement chaque terme $f(p_i)\Delta s_i$

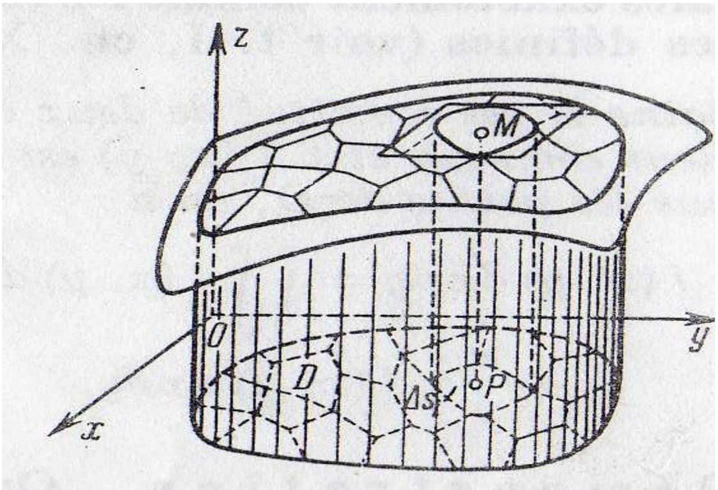

FIG. 2-1 –

comme le volume du cylindre élémentaire de base $\Delta s_{_i}$ et de hauteur $f\,(p_i)$.

La somme V_n est la somme des volumes des cylindres élémentaires, c'est-à-dire le volume du corps en (escalier) représenté sur la figure(2-1).

Considérons une suite arbitraire des sommes intégrales formées pour la fonction $f\,(x,y)$ dans le domaine D

$$V_{n_1}, V_{n_2}, ..., V_{n_k}, ... \qquad (2)$$

pour divers découpages de D en domaines partiels Δ_{s_i}. On supposera que le plus grand diamètre des Δ_{s_i} tend vers zéro lorsque $n_k \to \infty$. On a alors le théorème suivant que nous ne démontrerons pas.

Théorème 2.1 *La fonction $f\,(x,y)$ étant continue dans le domaine fermé D, la suite (2) de sommes intégrales (1) a une limite lorsque le plus grand diamètre des domaines partiels $\Delta s_{_i}$ tend vers zéro et que $n \to \infty$. Cette limite est la même quelle que soit la suite (2), c'est-à-dire. Qu'elle ne dépend ni du mode de découpage de D en domaines partiels $\Delta s_{_i}$ ni du choix du point p_i dans $\Delta s_{_i}$.*

Cette limite est appelée intégrale double de la fonction $f\,(x,y)$ sur le domaine D et on la désigne par

$$\int_D \int f\,(p)\,dsou \int_D \int f\,(x,y)\,dxdy,$$

C'est-à-dire

$$\lim_{diam\Delta_{s_i} \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\,(p_i)\,\Delta s_{_i} = \int_D \int f\,(x,y)\,dxdy$$

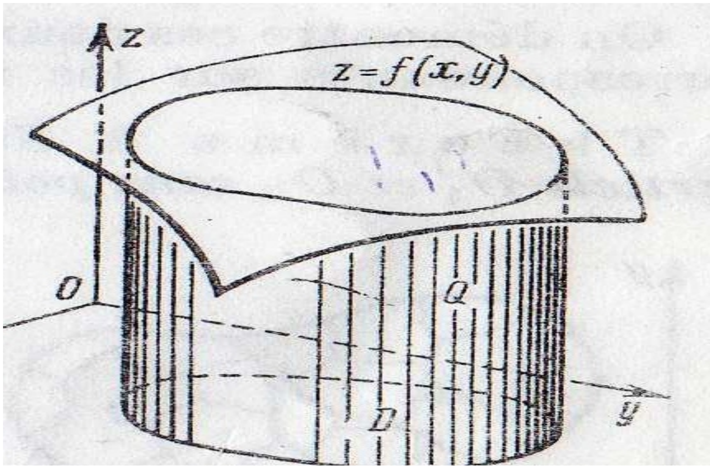

FIG. 2-2 –

D est appelé le domaine d'intégration.

Si $f(x,y) \geq 0$, l'intégrale double de la fonction $f(x,y)$ sur le domaine D est égale au volume $\mathbb{Q}$ du corps limité par la surface $z = f(x,y)$; le plan $z = 0$ et la surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à l'axe Oz et s'appuient sur la frontière de D figure(2-2).

Considérons encore les théorèmes suivants sur l'intégrale double.

Théorème 2.2 *L'intégrale double de la somme de deux fonctions $\varphi(x,y) + \psi(x,y)$ sur un domaine D est égale à la somme des intégrales doubles de chacune des deux fonctions étendues à ce domaine :*

$$\int_D \int [\varphi(x,y) + \psi(x,y)]\, ds = \int_D \int \varphi(x,y)\, ds + \int_D \int \psi(x,y)\, ds.$$

Théorème 2.3 *On peut sortir un facteur constant de sous le signe d'intégration double : Si $a = const$, on a*

$$\int_D \int a\varphi(x,y)\, ds = a \int_D \int \varphi(x,y)\, ds.$$

Théorème 2.4 *Si le domaine D est constitué de deux domaines partiels D_1 et D_2 sans point intérieur commun et si $f(x,y)$ est continue en tous les points de D on a*

$$\int_D \int f(x,y)\, dxdy = \int_{D_1} \int f(x,y)\, dxdy + \int_{D_2} \int f(x,y)\, dxdy. \qquad (3)$$

Preuve. *On peut représenter la somme intégrale dans D sous la forme*

$$\sum_{D} f(P_i)\,\Delta s_i = \sum_{D_1} f(p_i)\,\Delta s_i + \sum_{D_2} f(p_i)\,\Delta s_i \qquad (4),$$

la premier somme contenant les termes relatifs aux domaines partiels de D_1 et la seconde, les termes relatifs aux domaines partiels de D_2. En effet, l'intégrale double ne dépendant pas du mode de découpage, nous découperons le domaines D de telle façon que la frontière commune de D_1 et de D_2 soit aussi une frontière des domaines partiels Δs_i. Passant dans l'égalité (4) à la limite lorsque $\Delta s_i \to 0$, on obtient l'égalité (3). Ce théorème subsiste lorsque D est formé d'un nombre arbitraire du domaine disjoint sans points intérieur communs. ■

2.1.2 Calcul des intégrales doubles

Considérons un domaine D du plan OXY tel que toute parallèle à l'un des axes de coordonnées, par exemple à OY, et passant par un point intérieur du domaine coupe sa frontière en deux points N_1 et N_2.

Nous supposerons que, dans le cas considéré, D est limité par les courbes $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ et les droites $x = a$, $x = b$ et que

$$\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x), a \prec b$$

les fonctions $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ étant continues sur le segment $[a, b]$.
Nous conviendrons d'appeler ce domaine régulier selon l'axe OY.
On définit de la même manière un domaine régulier selon l'axe OX.

Un domaine régulier selon les deux axes de coordonnées sera dit simplement domaines.

Supposons $f(x, y)$ continue dans D.

Considérons l'expression

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

que nous appellerons intégrale double ou somme double de la fonction $f(x, y)$ sur D. Dans cette expression, on calcule d'abord l'intégrale entre parenthèses, l'intégration étant faite par rapport à y et x étant considéré comme constant. On trouve après intégration une fonction continue de x :

$$\phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

Intégrons maintenant cette fonction par rapport à x entre les bornes a et b :

$$I_D = \int_a^b \phi(x)\, dx.$$

On trouve en définitive un nombre constant.

Exemple 2.5 *Calculer l'intégrale double*

$$I_D = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} \left(x^2 + y^2\right) dy \right) dx.$$

Solution 2.6 *Calculons d'abord l'intégrale interne (entre parenthéses) :*

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \textstyle\int_0^{x^2} \left(x^2 + y^2\right) dy \\ &= \left[x^2 y + \tfrac{y^3}{3}\right]_0^{x^2} \\ &= x^2 x^2 + \tfrac{\left(x^2\right)^3}{3} = x^4 + \tfrac{x^6}{3}. \end{aligned}$$

Intégrons maintenant la fonction obtenue de 0 *à* 1 *:*

$$\int_0^1 \left(x^4 + \frac{x^6}{3}\right) dx = \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{3*7}\right]_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} = \frac{26}{105}.$$

Le domaine d'intégration D est le domaine limité par les courbe la figure(2-3)

$$y = 0, x = 0, y = x^2, x = 1.$$

Il arrive que le domaine D est tel que l'une des fonctions $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ ne peut être donnée par une seule expression analytique dans tout l'intervalle de variation de x (de $x = a$ à $x = b$). Soit, par exemple, $a \prec c \prec b$ et

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x) = \psi(x) \text{ sur le segment } [a, c], \\ &\varphi_1(x) = \chi(x) \text{ sur le segment } [c, b], \end{aligned}$$

$\psi(x)$ et $\chi(x)$ étant des fonctions donneés analytiquement sur la figure(2-3) On écrira alors l'itégrale double comme suit :

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx = \int_a^c \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx + \int_c^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

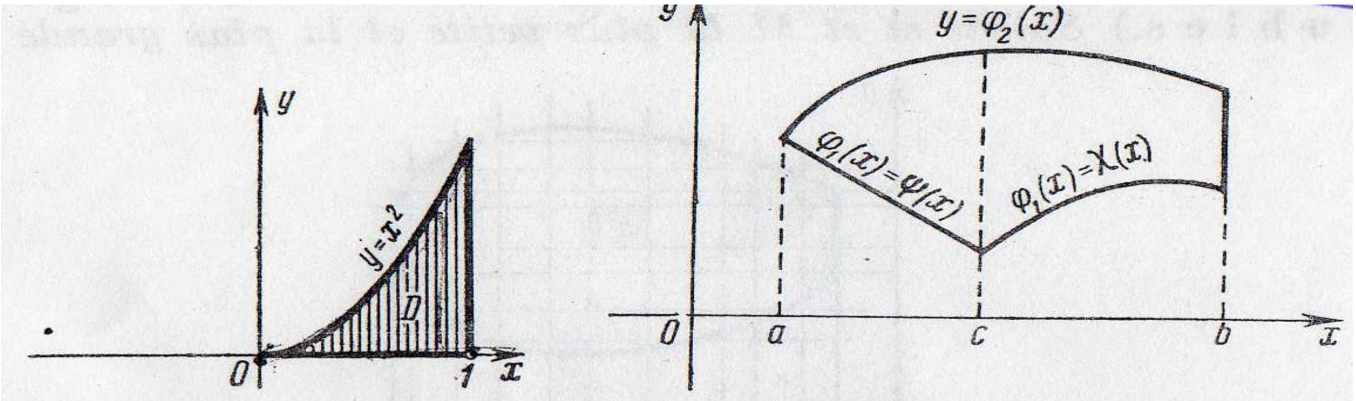

FIG. 2-3 –

$$= \int_a^c \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy \right) dx + \int_c^b \left(\int_{\chi(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy \right) dx.$$

On a écrit la premiere égalité en vertu de la propriété connue des intégrales définies et la seconde parce que l'on a $\varphi_1(x) \equiv \psi(x)$ sur le segment $[a,c]$ et $\varphi_{1(x)} \equiv \chi(x)$ sur $[c,b]$.

Une transcription analogue pour l'intégrale double a lieu lorsque la fonction $\varphi_2(x)$ se décompose en différentes expressions analytiques sur le segment $[a,b]$.

Etablissons quelques propriétés des intégrales doubles .

Proposition 2.7 *Si l'on divise un domaine D régulier selon OY en deux domaines D_1 et D_2 par une parallèle à l'axe OY ou à l'axe, OX l'intégrale double I_D sur D est égale à la somme d'intégrales analogues sur D_1 et D_2 :*

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_{2.}}. \qquad (1)$$

Preuve.

a) Supposons que la droite $x = c$ $(a \prec c \prec b)$ partage le domaine D on deux domaines réguliers selon OY, D_1et D_2.

Alors :

$$\begin{aligned} I_D &= \textstyle\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy \right) dx \\ &= \textstyle\int_a^b \phi(x)\, dx = \int_a^c \phi(x)\, dx + \int_c^b \phi(x)\, dx \\ &= \textstyle\int_a^c \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy \right) dx + \int_c^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy \right) dx = I_{D_1} + I_{D_2}. \end{aligned}$$

b) Supposons que la droite $y = h$ partage le domaine D en deux domaines réguliers D_1et D_2 selon OY comme sur la figure(2-4) Désignons par M_1 et M_2 les points d'intersection de la droite $y = h$ avec la frontière L de D. Désignons les abscisses de ces points par a_1 et b_1.

Le domaine D_1 est limité par les courbes continues :

1) $y = \varphi_1(x)$;

2) la courbe $A_1M_1M_2B$ dont nous écrirons conventionnellement l'équation sous la forme :

$$y = \varphi_1^*(x),$$

ayant en vue que $\varphi_1^*(x) = \varphi_2(x)$ lorsque $a \leq x \leq a_1$ et $b_1 \leq x \leq b$ et que $\varphi_1^*(x) = h$ lorsque $a_1 \leq x \leq b_1$;

3) les droites $x = a$, $x = b$.

Le domaine D_2 est limité par les courbes

$$y = \varphi_1^*(x), y = \varphi_2(x), où a_1 \leq x \leq b_1.$$

Ecrivons l'identité suivante en appliquant à l'intégrale intérieure le théorème sur la décomposition de l'intervalle d'intégration :

$$\begin{aligned} I_D &= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x,y)\,dy + \int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x,y)\,dy\right) dx + \int_a^b \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right) dx. \end{aligned}$$

Décomposons la dernière intégrale en trois intégrales en appliquant le même théorème à l'intégrale extérieure :

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right) dx =$$

$$= \int_a^{a_1} \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right) dx + \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right) dx + \int_{b_1}^{b} \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right) dx\,;$$

comme $\varphi_1^*(x) = \varphi_2(x)$ sur le segment $[a, a_1]$ et sur le segment $[b_1, b]$, la première et la troisième intégrale sont identiquement nulles. Par suit,

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x,y)\,dy\right) dx + \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right) dx.$$

Le premier terme est ici une intégrale double étandue à D_1 et le second une intégrale double étendue à D_2. Par conséquent,

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2}.$$

La démonstration est analogue quelle que soit la sécante M_1M_2. Si la droite M_1M_2

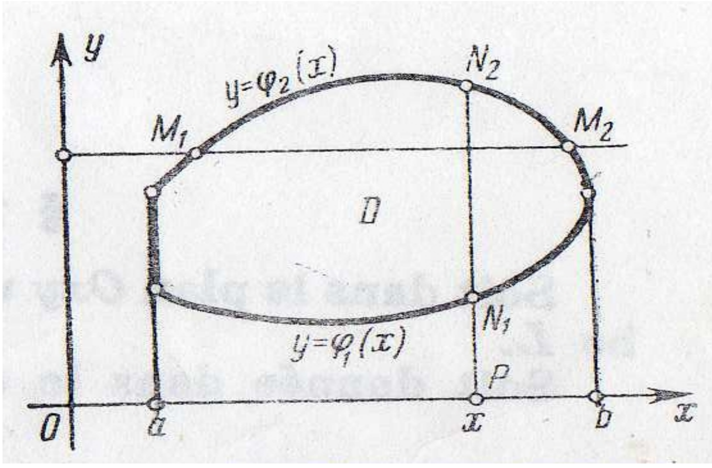

FIG. 2-4 –

partage D en trois domaines ou plus, on obtient une relation analogue à (1) avec dans le second membre un nombre correspondant des termes. ■

Corollaire 2.8 *On peut partager chacun des domaines obtenus en des domaines réguliers selon OY par une parllèle à OY ou OX et leur appliquer l'égalité (1). Par conséquent, on peut partager le domaine D par des parallèles aux axes de coordonnées en un nombre arbitraire de domaines partiels réguliers*

$$D_1, D_2, ..., D_i,$$

et on pourra toujours affirmer que l'intégrale double étendue au domaine D est égale à la somme d'intégrales doubles étendues aux domaines partiels

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2} + ... + I_{D_i}. \quad (2)$$

Proposition 2.9 ***(Evaluation des intégrales doubles)***
Soient m et M la plus petite et la plus grande valeur de la fonction $f(x,y)$ dans le domaine D. Soit S l'aire de D. On a l'inégalité

$$mS \leq \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy \right) dx \leq MS. \quad (3)$$

Preuve. Evaluons l'intégrale intérieure que nous désignerons par $\phi(x)$:

$$\phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \leq \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} M dy = M\left[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\right].$$

on a :

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \leq \int_a^b M\left[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\right] dx = MS,$$

c'est-à-dire

$$I_D \leq MS. \qquad (3')$$

D'une manière analogue

$$\phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \geq \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} m dy = m\left[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\right],$$

$$I_D = \int_a^b \phi(x)\,dx \geq \int_a^b m\left[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\right] dx = mS,$$

c'est-à-dire que

$$I_D \geq mS. \qquad (3'')$$

L'inégalité (3) résulte des inégalités $(3')$ et $(3'')$:

$$mS \leq I_D \leq MS.$$

Nous interpréterons géométriquement ce théorème au paragraphe suivant : ■

Proposition 2.10 ***(Théorème de la moyenne)***
L'intégrale double I_D d'une fonctoin continue $f(x,y)$ sur un domaine D d'aire. S est égale au produit de S par la valeur de la fonction en un certain point p du domaine D :

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = f(p)\,S. \qquad (4)$$

Preuve. On déduit de (3) :

$$m \leq \frac{1}{S} I_D \leq M.$$

Le nombre $\frac{1}{S} I_D$ est compris entre la plus grande et la plus petite valeur de la fonction $f(x, y)$ dans le domaine D. En vertu de la continuité de $f(x, y)$ dans D, elle prend en un certain point p du domaine D la valeur $\frac{1}{S} I_D$, c'est-à-dire.
que

$$\frac{1}{S} I_D = f(p),$$

d'où

$$I_D = f(p) S. \qquad (5)$$

■

Théorème 2.11 *l'intégrale double d'une fonction continue $f(x, y)$, étendue à un domaine régulier D a pour expression*

$$\int_D \int f(x, y)\, dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Preuve. Découpons le domaine D par des parallèles aux axes de coordonnées en n domaines réguliers (rectangulaires) :

$$\Delta_{S_1}, \Delta_{S_2}, ..., \Delta_{s_n}.$$

On a en vertu de propriété 1 [formule (2)] du paragraphe précédent :

$$I_D = I_{\Delta s_1}. + I_{\Delta s_2} + ... + I_{\Delta s_n} = \sum_{i=1}^{n} I_{\Delta s_i}. \qquad (6)$$

Transformons chaque terme de droite par application du théorème de la moyenne sur les intégrales doubles :

$$I_{\Delta s_i} = f(p_i) \Delta_{S_i}.$$

L'égalité (2) devient

$$I_D = f(p_1)\Delta s_1 + f(p_2)\Delta s_2 + ... + f(p_n)\Delta_{S_n} = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta_{S_i}, \qquad (7)$$

où p_i est un point dans Δ_{s_i}. On a à droite une somme intégrale pour la fonction $f(x,y)$ sur D. D'aprés le théorème d'éxistence des intégrales doubles, il résulte que la limite de cette somme, lorsque $n \to \infty$ et que le plus grand diamètre des domaines partiels Δs_i tend vers zéro, existe et est égale à l'intégrale double de la fonction $f(x,y)$ sur D. La valeur numérique de I_D du premier membre de l'égalité (7) résultant de deux intégrations simple ssuccessives ne dépend pas de n. Passant donc à la limite dans (7), on obtient

$$I_D = \lim_{diam\Delta s_i \to 0} = \sum f(p_i)\Delta s_i = \int_D\int f(x,y)\,dxdy$$

Où

$$\int_D\int f(x,y)\,dxdy = I_D. \qquad (8)$$

On obtient en définitive :

$$\int_D\int f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx. \qquad (9)$$

■

Remarque 2.12 *1- Lorsque $f(x,y) \geq 0$, la formule (9) admet une interprétation géométrique simple. Considérons le corps délimité par la surface $z = f(x,y)$, le plan $z = 0$ et la surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à OZ et s'appuient sur la frontière du domaine D figure(2-5).*
Calculons le volume V de ce corps. Nous avons indiqué plus haut que le volume de ce corps était égal à l'itégrale double de $f(x,y)$ sur D :

$$V = \int_D\int f(x,y)\,dxdy. \qquad (10)$$

Calculons maintenant le volume de ce corps. I sur le calcul du volume d'un corps en fonction des aires des sections parallèle. Menons le plan sécant $x = const\,(a \prec x \prec b)$. Calculons l'aire $S(x)$ de la figure(2-5) dans le plan $x = const$. Cette figure est le trapèze curviligne délimité par les courbes $z = f(x,y)$ $(x = const)$, $z = 0$, $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$.

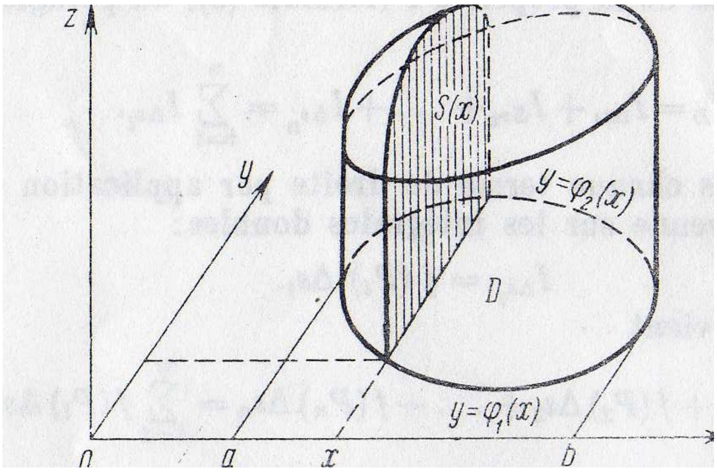

FIG. *2-5* –

Par concéquent, cette aire est exprimée par l'intégrale

$$S\,(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f\,(x, y)\,dy. \qquad (11)$$

Connaissant les aires des sections parallèles, on trouve facilement le volume

$$V = \int_a^b S\,(x)\,dx$$

ou, substituant l'expression (11), pour l'aire $S\,(x)$ on trouve :

$$V = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f\,(x, y)\,dy \right) dx. \qquad (12)$$

Les premiers membres des formules (8) et (10) sont égaux il en est donc de même des seconds membres

$$\int_D \int f\,(x, y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f\,(x, y)\,dy \right) dx.$$

Il n'est plus difficile à présent de donner le sens géométrique du théorème sur l'évaluation des intégrales doubles (propriété 2 du paragraphe précédent) : le volume V du corps

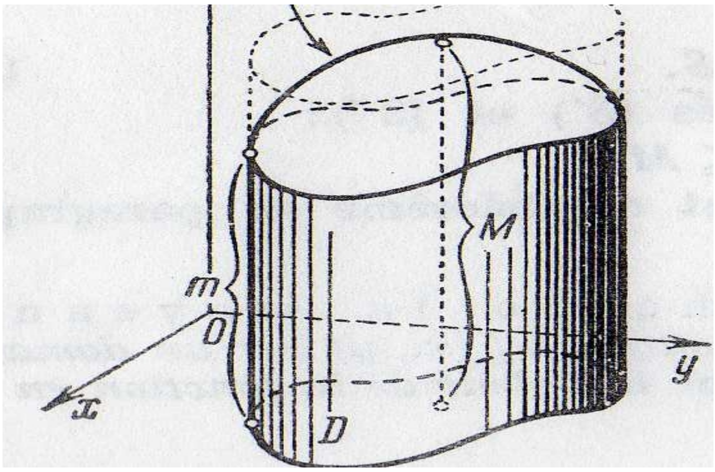

FIG. *2-6* –

délimité par la surface $z = f(x,y)$, le plan $z = 0$ et la surface cylindrique ayant pour directrice la frontière du domaine D est supérieur au volume du cylindre de base S et de hauteur m mais inférieur au volume du Cylindre de base S et de hauteur M (m et M étant la plus petite et la plus grande valeur de la fonction $z = f(x,y)$ dans le domaine D la figure(2-6)). Ceci résulte du fait que l'intégrale double I_D est égale au volume V de ce corps.

Exemple 2.13 *Calculer l'intégrale double*

$$\int_D\int \left(4 - x^2 - y^2\right) dxdy,$$

sachant que le domaine D est limité par les droites $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = \frac{3}{2}$.

Solution 2.14
$V = \int_0^{\frac{3}{2}} \left[\int_0^1 \left(4 - x^2 - y^2\right) dx\right] dy = \int_0^{\frac{3}{2}} \left[4x - \frac{x^3}{3} - y^2 x\right]_0^1 dy$
$\quad = \int_0^{\frac{3}{2}} \left(4 - \frac{1}{3} - y^2\right) dx = \left[4y - \frac{1}{3}y - \frac{y^3}{3}\right]_0^{\frac{3}{2}} = \frac{35}{8}.$

Remarque 2.15 *Supposons un domaine D régulier selon OX délimité par les courbes*

$$x = \varphi_1(x), \; x = \varphi_2(x), \; y = c, \; y = d,$$

avec $\varphi_1(y) \leq \varphi_2(y)$ figure(2-7).

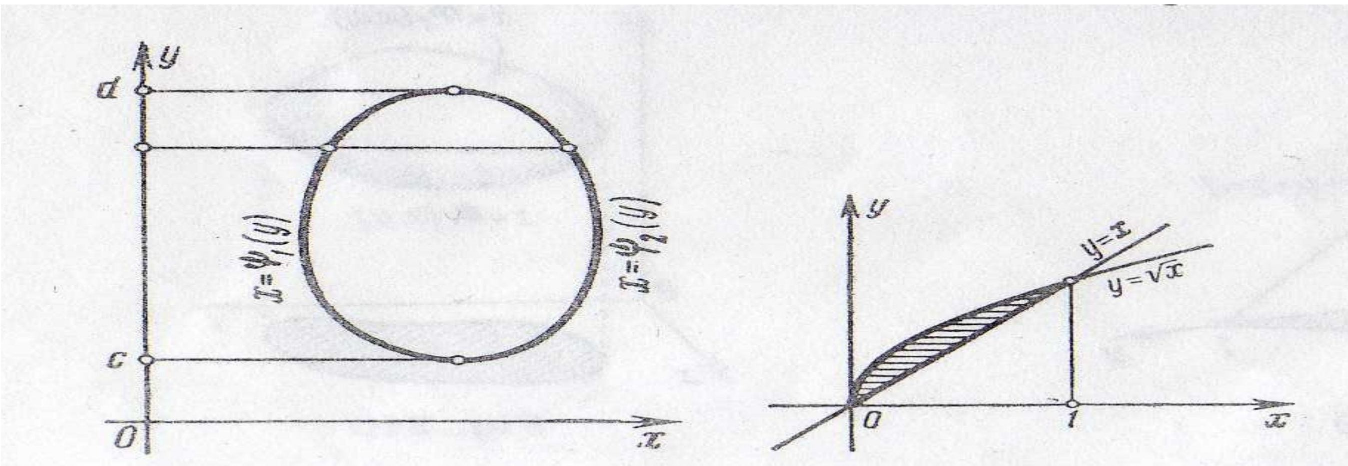

FIG. *2-7* –

On a alors évidemment

$$\int_D \int \int f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy. \tag{13}$$

Pour calculer une intégral double, on appliquera, selon le cas la formule (9) ou la formule (13). Le choix est indiqué par la forme du domaine D ou de la fonction à intégrer.

Exemple 2.16 *Intervertir l'ordre d'intégration dans*

$$I = \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Solution 2.17 *Le domaine d'intégration est limité par la droite $y = x$ et la parabole $y = \sqrt{x}$ figure(2-7).*

Toute droite parallèle à l'axe OX coupe la frontière du domaine en deux points au plus ; on pourra donc appliquer la formule (13) en posant

$$\varphi_1(y) = y^2,\ \varphi_2(y) = y,\ 0 \le y \le 1;$$

on a

$$I = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{y} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Remarque 2.18 *Si le domaine D n'est régulier ni selon OX ni selon OY (c'est-à-dire* *s'il existe des verticales et des horizontales passant par des points intérieurs du domaine et coupant la frontière du domaine en plus de deux points) on ne peut alors intégrer sans précaution. Si l'on arrive à découper le domaine irrégulier D en un nombre fini des domaines réguliers selon OX ou OY $D_1, D_2, ..., D_n$, on intégrera séparément dans chaque domaine partiel et on fera la somme des résultats obtenus.*

Remarque 2.19 *Par la suite, nous omettrons les parenthèses dans l'intégrale double*

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx,$$

et nous écrirons simplement :

$$I_D = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dydx,$$

l'intégration étant faite dans l'ordre où sont écrites les différentielles des coordonnées.

2.1.3 Intégrales doubles en coordonnées polaires

Considérons en coordonnées polaires θ, ρ un domaine D tel que tout rayon issu de l'origine et passant par un point intérieur du domaine coupe la frontière de D en deux points au plus. Supposons que D soit limité par les courbes $\rho = \phi_1(\theta)$, $\rho = \phi_2(\theta)$ et les rayons $\theta = \alpha$ et $\theta = \beta$, avec $\phi_1(\theta) \leq \phi_2(\theta)$ et $\alpha \prec \beta$ figure(2-8). Nous dirons aussi qu'un tel domaine est régulier.

Soit dans D une fonction continue des coordonnées θ et ρ :

$$z = F(\theta, \rho).$$

Découpons arbitrairement D en domaines partiels $\Delta_{s_1}, \Delta_{s_2}, ..., \Delta_{s_n}$.

Formons la somme intégrale

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} F(p_k)\, \Delta s_k, \qquad (1)$$

où P_k est un point pris dans Δs_k.

Il résulte du théorème d'existence des intégrales doubles que lorsque le plus grand diamètre des Δs_k tend vers zéro, la somme intégrale (1) a une limite V. Elle donne par

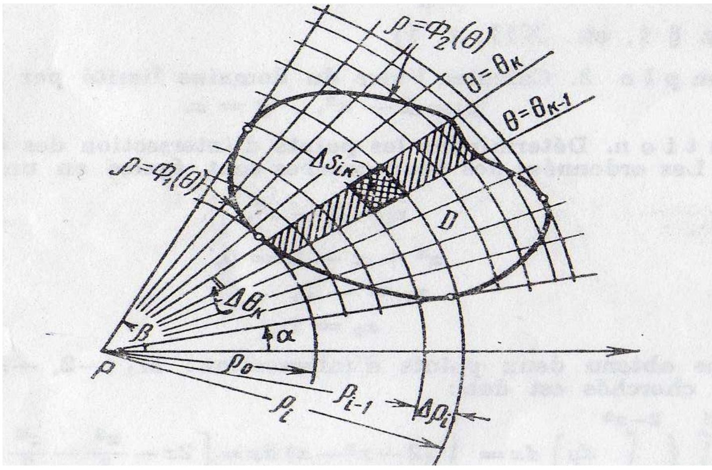

FIG. 2-8 –

définition l'intégrale double de $F(\theta,\rho)$ dans D :

$$V = \int_D \int F(\theta,\rho)\, ds \qquad (2)$$

Occupons-nous du calcul d'une telle intégrale double.

Comme la limite de la somme intégral ne dépend pas du mode de découpage de D en domaines partiels Δs_{k}, nous le découperons pour raison de commodité, en menant des rayons $\theta = \theta_0, \theta = \theta_1, \theta = \theta_2, ..., \theta = \theta_n$ (où $\theta_0 = \alpha, \theta_n = \beta, \theta_0 \prec \theta_1 \prec \theta_2 \prec ... \prec \theta_n$) et des circonférences concentriques $\rho = \rho_0, \rho = \rho_1, , ..., \rho = \rho_m$ (où ρ_0 est la plus petite valeur de la fonction $\phi_1(\theta)$ et ρ_m la plus grande valeur de $\phi_2(\theta)$ dans l'intervalle fermé $\alpha \leq \theta \leq \beta\,; \rho_0 \prec \rho_1 \prec ... \prec \rho_m$).

Soit Δs_{ik} l'aire délimitée par les lignes de coordonnées $\rho = \rho_{i-1}, \rho = \rho_i, \theta = \theta_{k-1}, \theta = \theta_k$.

IL ya aura trois espèces de domaines partiels Δs_{ik} :

1) des domaines entièrement intérieurs à D ;

2) des domaines entièrement extérieurs à D ;

3) des domaines empiétant sur la frontière de D.

La somme des aires empiétant sur la frontière tend vers zéro lorsque $\Delta\theta_k \to 0$ et $\Delta\rho_i \to 0$; on négligera donc ces aires. Les aires partielles Δs_{ik} extérieures à D n'entrent pas dans la somme intégrale considérée et ne présentent pas d'intérêt. On pourra donc écrire la somme intégrale sous la forme

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{i} F(p_{ik}) \Delta_{s_{ik}} \right],$$

où P_{ik} est un point arbitraire pris dans $\Delta s_{_{ik}}$.

La sommation double exprime que nous sommons d'abord sur l'indice i en considérant k fixe (c'est-à-dire, que nous faisons la somme des aires comprises entre deux rayons voisins). Le signe de sommation extérieure exprime que nous additionnons les sommes résultant de la premiere sommation (nous sommons sur k).

Trouvons l'expression de l'aire d'un domaine partiel $\Delta s_{_{ik}}$ n'empiétant pas sur la frontière de D. C'est la différence des aires de deux secteurs :

$$\Delta s_{_{ik}} = \frac{1}{2}\left(\rho_i + \Delta_{\rho_i}\right)^2 \Delta\theta_k - \frac{1}{2}\rho_i^2 \Delta\theta_k = \left(\rho_i + \frac{\Delta_{\rho_i}}{2}\right) \Delta\rho_i \Delta\theta_k$$

où

$$\Delta s_{_{ik}} = \rho_i^* \Delta\rho_i \Delta\theta_k, où\ \rho_i \prec \rho_i^* \prec \rho_i + \Delta\rho_i.$$

La somme intégrale s'écrit donc

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{i} F(\theta_k^*, \rho_i^*) \rho_i^* \Delta\rho_i \Delta\theta_k \right],$$

où $p(\theta_i^*, \rho_i^*)$ est un point pris dans Δs_{ik}.

Sortons maintenant le facteur $\Delta\theta_k$ de la somme intérieure(ce qui est légitime, car c'est un facteur commun à tous les termes de cette somme) :

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{i} F(\theta_k^*, \rho_i^*) \rho_i^* \Delta\rho_i \right] \Delta\theta_k.$$

Supposons que $\Delta\rho_i \to 0$ et que $\Delta\theta_k$ est constant. Alors l'expression enter crochets tendra vers l'intégrale

$$\int_{\phi_1(\theta_k^*)}^{\phi_2(\theta_k^*)} F(\theta_k^*, \rho) \rho d\rho.$$

Supposant maintenant que $\Delta\theta_k \to 0$ on obtient en définitive :

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} F(\theta, \rho) \rho d\rho \right) d\theta. \tag{3}$$

La formule (3) sert au calcul des intégrales doubles en coordonnées polaires.

Si l'on intègre d'abord sur θ, puis sur ρ, on a la formule :

$$V = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left(\int_{\omega_1(\rho)}^{\omega_2(\rho)} F(\theta, \rho)\, d\theta \right) \rho d\rho. \qquad (3')$$

Soit à calculer l'intégrale double de la fonction $f(x, y)$ sur le domaine D, cette intégrale étant écrite en coordonnées rectangulaires :

$$\int_D \int f(x, y)\, dx\ dy.$$

Si D est un domine régulier en coordonnées polaires θ, ρ, on pourra passer dans les calculs aux coordonnées polaires.

On a, en effet,

$$x = \rho \cos\theta, y = \rho \sin\theta,$$

$$f(x, y) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = F(\theta, \rho),$$

par conséquent,

$$\int_D \int f(x, y)\, dxdy = \int_\alpha^\beta \left(\int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\, \rho d\rho \right) d\theta. \qquad (4)$$

Exemple 2.20 *Calculer de volume V du corps compris entre la sphére et le sylindre*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2 \\ x^2 + y^2 - 2ay = 0 \end{cases}$$

Solution 2.21 *On pourra prendre pour domaine d'intégration la base du cylindre $x^2 + y^2 - 2ay = 0$, c'est-à dire. Le cercle de centre, $(0, a)$ et de rayon a.*

On peut écrire l'équation de ce cercle sous la forme $x^2 + (y - a)^2 = a^2$.

Calculons le quart du volume cherché V. On prendra alors pour domaine d'intégration le demi-cercle défini par les équations

$$x = \varphi_1(y) = 0, x = \varphi_2(y) = \sqrt{2ay - y^2} \qquad y = 0, y = 2a.$$

La fonction sous le signe somme est

$$z = f(x, y) = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}.$$

par conséquent,

$$\frac{1}{4}V = \int_0^{2a} \left(\int_0^{\sqrt{2ay-y^2}} \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} dx \right) dy.$$

Passons en coordonnées polaires θ, ρ :

$$x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta.$$

Déterminons les bornes d'intégration. Ecrivons à cet effet l'équation du cercle donné en coordonnées polaires : comme

$$x^2 + \ y^2 = \rho^2,$$

$$y = \rho \sin \theta,$$

On a

$$\rho^2 - 2a\rho \sin \theta = 0$$

où

$$\rho = 2a \sin \theta.$$

La frontière du domaine en coordonnées polaires s'écrit donc : $\rho = \phi_1(\theta) = 0$, $\rho = \phi_2(\theta) = 2a \sin \theta$, $a = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$. *La fonction à intégrer devient*

$$F(\theta, \rho) = \sqrt{4a^2 - \rho^2}.$$

On obtient par conséquent :

$$\begin{aligned} \tfrac{V}{4} &= \textstyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2a \sin \theta} \sqrt{4a^2 - \rho^2} \rho d\rho \right) d\theta \\ &= \textstyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{\left(4a^2-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_0^{2a \sin \theta} d\theta \\ &= -\tfrac{1}{3} \textstyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(4a^2 - 4a^2 \sin^2 \theta\right)^{\frac{3}{2}} - \left(4a^2\right)^{\frac{3}{2}} \right] d\theta \\ &= \tfrac{8a^3}{3} \textstyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos^3 \theta\right) d\theta = \tfrac{4}{9} a^3 (3\pi - 4). \end{aligned}$$

2.1.4 Changement de variables dans une intégrale double (cas général)

Considérons un domaine D du plan OXY limité par une courbe L. Supposons que les coordonnées x et y soient des fonctions des nouvelles variables u et v :

$$x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), \qquad (1)$$

où les fonction $\varphi(u,v)$ et $\psi(u,v)$ sont univoques, continues et possèdent des dérivées continues dans un certain domaine $D^{'}$ que nous définirons par la suite. Il correspond alors d'après les formules (1) à tout couple de valeurs u et v un seul couple de valeurs x et y. Supposons en outre les fonctions φ et ψ telles que si l'on donne à x et y des valeurs définies du domaine D, il leur correspond alors des valeurs déterminées de u et v d'apré les formules(1).

Considérons le système de coordonnées cartésiennes OUV. Il résulte de ce qui précède qu'à tout point $p(x,y)$ du plan OXY il correspond univoquement un point $p^{'}(u,v)$ du plan OUV de coordonnées u, v définies par les formule (1). Les nombres u et v sont appelés les coordonnées curvilignes de p.

Si dans le plan OXY le point p d'écrit la courbe fermée L délimitant le domaine D, le point correspondant d'écrit dans le plan OUV une courbe fermée $L^{'}$ délimitant un certain domaine $D^{'}$; il correspond alors à tout point de $D^{'}$ un point de D.

Ainsi, les formules (1) établissent une correspondance biunivoque entre les points des domaines D et $D^{'}$ ou comme on dit encore représentent biunivoquement D sur $D^{'}$.

Considérons dans $D^{'}$ une droit $u = const$. En générale, les formules (1) lui font correspondre dans le plan OXY une ligne courbe. De la même façon il correspondra à toute droite $v = const$ du plan OUV une certaine courbe dans le plan OXY.

Découpons le domaine $D^{'}$ par des droites $u = const$ et $v = const$ en de petits domaines rectangulaires (nous ne prendrons pas en considération les rectangles empiétant sur la frontière de $D^{'}$). les courbes correspondantes du domaine D découpent ce derniér en quadrilatères curvilignes.

Considérons dans le plan OUV le rectangle $\Delta s^{'}$ limité par les droites $u = const$, $u + \Delta u = const$, $v = const$, $v + \Delta v = const$ et le quadrilatère curviligne correspondant Δs dans le plan OXY.

Nous désignerons les aires de ces domaines partiels également par $\Delta s^{'}$ et Δs on a évidement

$$\Delta s^{'} = \Delta u \Delta v.$$

les aires Δs et $\Delta s^{'}$sont en général différentes.

Supposons donnée dans D une fonction continue

$$z = f(x,y).$$

Il correspond à toute valeur de la fonction $z = f(x,y)$ du domaine D la même valeur de $z = F(u,v)$ dans $D^{'}$, où

$$F(u,v) = f[\varphi(u,v), \psi(u,v)].$$

Considérons les sommes intégrales de la fonction z dans le domaine D. On a évidemment l'égalité suivante :

$$\sum f(x,y)\,\Delta s = \sum F(u,v)\,\Delta s. \qquad (2).$$

Calculons Δs, c'est-à-dire. L' aire du quadrilatère curviligne $p_1p_2p_3p_4$ dans le plan OXY.

Déterminons les coordonnées de ses sommets :

$$\left.\begin{array}{rl} p_1(x_1,y_1), x_1 = \varphi(u,v), & y_1 = \psi(u,v), \\ p_2(x_2,y_2), x_2 = \varphi(u+\Delta u, v), & y_2 = \psi(u+\Delta u, v), \\ p_3(x_3,y_3), x_3 = \varphi(u+\Delta u, v+\Delta v), & y_3 = \psi(u+\Delta u, v+\Delta v), \\ p_4(x_4,y_4), x_4 = \varphi(u, v+\Delta u), & y_4 = \psi(u, v+\Delta v), \end{array}\right\} \quad (3).$$

Nous assimilerons dans le calcul de l'aire du quadrilatère $p_1p_2p_3p_4$ les arcs p_1p_2, p_2p_3, p_3p_4, p_1p_4 à des segments de droites parallèles ; nous remplacerons en autre les accroissements des fonctions par leurs différentielles. C'est dire que nous faisons abstraction des infiniment petits d'ordre plus élevé que Δu et Δv.Les formules (3) deviennent alors :

$$\left.\begin{array}{rl} x_1 = \varphi(u,v), & y_1 = \psi(u,v), \\ x_2 = \varphi(u,v) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u, & y_2 = \psi(u,v) + \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u, \\ x_3 = \varphi(u,v) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v, & y_3 = \psi(u,v) + \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v, \\ x_4 = \varphi(u,v) + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v, & y_4 = \psi(u,v) + \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v. \end{array}\right\} \quad (3').$$

Sous ces hypothéses, le quadrilatère curviligne $p_1p_2p_3p_4$ peut être assimilé à parallélogramme. Son aire Δs est approximativement égale au double de l'aire du triangle $p_1p_2p_3$, que l'on calcule en appliquant la formule correspondante de la géométrie analytique :

$$\begin{aligned} \Delta s &\approx |(x_3-x_1)(y_3-y_2) - (x_3-x_2)(y_3-y_1)| \\ &= \left|\left(\tfrac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \tfrac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v\right)\tfrac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v - \tfrac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v\left(\tfrac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u + \tfrac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v\right)\right| \\ &= \left|\tfrac{\partial\varphi}{\partial u}\tfrac{\partial\psi}{\partial v}\Delta u\Delta v - \tfrac{\partial\varphi}{\partial v}\tfrac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u\Delta v\right| = \left|\tfrac{\partial\varphi}{\partial u}\tfrac{\partial\psi}{\partial v} - \tfrac{\partial\varphi}{\partial v}\tfrac{\partial\psi}{\partial u}\right|\Delta u\Delta v \\ &= \left\|\begin{matrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{matrix}\right\|\Delta u\Delta v. \end{aligned}$$

Posons

$$\left|\begin{matrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{matrix}\right| = I.$$

Par conséquent,

$$\Delta s \approx |I|\,\Delta s^{'} . \qquad (4)$$

Le déterminant I est appelé le déterminant fonctionnel ou jacobien (du nom du mathématicien allemand jacobi) des fonctions $\varphi(u,v)$ et $\psi(u,v)$.

L'égalité (4) n'est qu'approximative, étant donné que dans les calculs de l'aire Δs nous avons négligé les infiniment petits d'ordre supérieur. Toutefois, plus les dimensions des domaines élémentaires Δs et $\Delta s^{'}$ sont petites, plus on s'approche de l'égalité. L'égalité a lieu quand on passe à la limite, les diamètres du domaine élémentaire Δs et $\Delta s^{'}$ tendant vers zéro :

$$|I| = \lim_{diam\Delta s^{'} \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta s^{'}}$$

Appliquons maintenant l'égalité obtenue au calcul de l'intégrale double. On peut écrire en vertu de l'égalité (2)

$$\sum f(x,y)\,\Delta s \approx \sum F(u,v)\,|I|\,\Delta s^{'} .$$

(la somme intégrale de droite est étendu à $D^{'}$). Passant à la limite lorsque $diam\Delta s^{'} \to 0$, on obtient l'égalité rigoureuse

$$\int_D \int f(x,y)\,dxdy = \int_{D'} \int F(u,v)\,|I|\,dudv. \qquad (5)$$

Telle est la formule de transformation des coordonnées dans une intégrale double. Elle permet de ramener le calcul d'une intégrale double dans la domaine D au calcul d'une intégrale double dans le domaine $D^{'}$ ce qui peut simplifier le problème. La première démonstration rigoureuse de cette formule est due à M. Ostrogradsky.

Remarque 2.22 *Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires, examiné au paragraphe précédent est un cas particulier du changement de variable dans une intégrale double .*

On a dans ce cas $u = \theta$, $v = \rho$:

$$x = \rho\cos\theta,\ \ y = \rho\sin\theta.$$

L'arc de cercle AB $(\rho = \rho_1)$ du plan OXY est représenté par la droite $A^{'}B^{'}$ dans le plan $O\theta\rho$.L'arc de cercle DC $(\rho = \rho_2)$ du plan OXY est représenté par la droite $D^{'}C^{'}$ du plan $O\theta\rho$.

Les droites AD et BC du plan OXY sont représentées par la droites $A^{'}D^{'}$ et $B^{'}C^{'}$ du plan $O\theta\rho$. Les courbes L_1 et L_2 sont représentées par les courbes $L_1^{'}$ et $L_2^{'}$.

Calculons le jacobien de la transformation des coordonnées cartésiennes x et y en coordonnées polaires θ et ρ :

$$I=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \rho}\\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \rho}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\rho\sin\theta & \cos\theta\\ \rho\cos\theta & \sin\theta\end{vmatrix}$$
$$=-\rho\sin^2\theta-\rho\cos^2\theta=-\rho.$$

Ona donc $|I|=\rho$ *et*

$$\int_D\int f(x,y)\,dx\ dy=\int_\alpha^\beta\left(\int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} f(\theta,\rho)\,\rho d\rho\right)d\theta.$$

On retrouve la formule établie au paragraphe précédent.

Exemple 2.23 *Soit à calculer l'intégrale double*

$$\int_D\int (y-x)\,dx\ dy,$$

Où D *est le domaine du plan* OXY *limité par les droites*

$$y=x+1, y=x-3,\ y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3},\ y=-\frac{1}{3}x+5.$$

Le calcul directe de cette intégrale double est assez fastidieux, mais un changement de variables simple permet de ramener cette intégrale à l'intégration dans un rectangle dont les cotés sont parallèles aux axes de coordonnées.

Posons

$$u=y-x, v=y+\frac{1}{3}x. \qquad (6)$$

Alors les droites $y=x+1$, $y=x-3$ *sont représentées respectivement par les droites* $u=1$, $u=-3$ *du plan* Ouv *; les droites* $y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$, $y=-\frac{1}{3}x+5$ *ont pour images les droites* $v=\frac{7}{3}$, $v=5$.

Le domaine D *sera donc représenté par le domaine rectangulaire* D'. *Reste à calculer le jacobien de la transformation. Exprimons à cet effet* x *et* y *en fonction de* u *et* v.*on obtient en résolvant le systéme d'équations (6)*

$x=-\frac{3}{4}u+\frac{3}{4}v$; $y=\frac{1}{4}u+\frac{3}{4}v$.

Par conséquent,

$$I=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\frac{3}{4} & \frac{3}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{vmatrix}=-\frac{19}{16}-\frac{3}{16}=-\frac{3}{4},$$

et la valeur absolue du jacobien est $|I|=\frac{3}{4}$. *Donc*

$$\int_D\int (y-x)\,dx\ dy=\int_D\int\left[\left(+\frac{1}{4}u+\frac{3}{4}v\right)-\left(-\frac{3}{4}u+\frac{3}{4}v\right)\right]\frac{3}{4}du\ dv$$
$$=\int_D\int \frac{3}{4}u\ du\ dv=\int_{\frac{7}{3}}^{5}\int_{-3}^{1}\frac{3}{4}u\ du\ dv=-8.$$

2.2 Intégrales triples

2.2.1 Définition de l'intégrale triple

Considérons un domaine V de l'espace limité par une surface S. Soit une fonction $f(x, y, z)$, où x, y, z sont les coordonnées rectangulaires d'un point de l'espace, définie et continue dans V et sur sa frontière. Pour fixer les idées, lorsque $f(x, y, z) \geq 0$, on pourra supposer que cette fonction représente la densité de distribution d'une certaine matière dans V.

Découpons le domaine V arbitrairement en domaines partiels Δv_i où Δv_i représentera également le volume du petit domaine correspondant. Prenons un point arbitraire p_i dans chaque Δv_i et désignerons par $f(p_i)$ la valeur de la fonction f en ce point. Formons la somme intégrale

$$\sum f(p_i) \Delta v_i \qquad (1)$$

et augmentons le nombre de domaines partiels Δv_i de sorte que leurs diamètres tendent vers zéro. Si la fonction $f(x, y, z)$ est continue, la limite des sommes intégrales (1) existe(on donne ici à la limite le même sens que pour les intégrales doubles). Cette limite, qui ne dépend ni du mode de découpage du domaine V ni du choix, des points p_i est désignée par le symbole $\int \int_V \int f(p)\, dv$ et on l'appelle intégrale triple. On a donc, par définition,

$$\lim_{diam \Delta v_i \to 0} \sum f(p_i) \Delta v_i = \int \int_V \int f(p)\, dv$$

où

$$\int \int_V \int f(p)\, dv = \int \int_V \int f(x, y, z)\, dxdydz. \qquad (2)$$

Corollaire 2.24 *Quel que soit le découpage du domaine V en un nombre fini des domaines $V_1, V_2, ..., V_n$ par des plans parallèles aux plans de coordonnées, on a*

$$I_V = I_{V_1} + I_{V_2} + ... + I_{Vn}.$$

Proposition 2.25 (théorème sur l'évaluation d'une intégrale triple)

m et M étant la plus petite et la plus grande valeur de $f(x, y, z)$ dans V, on a l'inégalité

$$mV \leq I_V \leq MV,$$

où V est le volume du domaine donné et I_V l'intégrale triple de $f(x, y, z)$ dans V.

Preuve. Evaluons d'abord l'intégrale interne dans l'intégrale triple

$$I_V = \int_D \int \left[\int_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] d\sigma :$$

$$\int_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz \leq \int_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} Mdz = M\int_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} dz$$
$$= [Mz]_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)}$$
$$= M[\psi(x,y) - \chi(x,y)].$$

l'intégrale interne n'est donc pas supérieure à l'expression $M[\psi(x,y) - \chi(x,y)]$. Par conséquent, en vertu du théorème du §1 sur les intégrales doubles, on obtient (en désignant par D la projection de V sur le plan OXY) :

$$I_V = \int_D \int \left[\int_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] d\sigma \leq \int_D \int M[\psi(x,y) - \chi(x,y)]\,d\sigma$$
$$= M\int_D \int [\psi(x,y) - \chi(x,y)]\,d\sigma.$$

Mais cette dernière intégrale double est égale au volume du domaine compris entre les surfaces $z = \chi(x,y,z)$ et $z = \psi(x,y)$ c'est-à-dire, au volume du domaine V. On a donc

$$I_V \leq MV.$$

On démontre d'une manière analogue que $I_V \geq mV$. La propriété 2 est ainsi démontrée. ■

Proposition 2.26 ***(théorème de la moyenne)***

L'intégrale triple I_V d'une fonction continue $f(x,y,z)$ dans un domaine V est égale au produit de son volume V par la valeur de la fonction en un certain point p du domaine :

$$I_V = \int_a^b \left\{\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dy\right\} dx = f(p)\,V. \qquad (2)$$

La démonstration de cette propriété est analogue à celle de la propriété correspondante des intégrales doubles (voir §2 , propriété 3, formule (4)). Nous pouvons maintenant démontrer le théorème sur le calcul des intégrales triples.

Théorème 2.27 *L'intégrale triple d'une fonction $f(x,y,z)$ dans un domaine régulier V a pour expression*

$$\int\int_V\int f(x,y,z)\,dv = \int_a^b \left\{\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dy\right\} dx.$$

Preuve. Découpons le domaine V par des plans parallèles aux plans de coordonnées en n domaines réguliers :

$$\Delta v_1, \Delta v_2, ..., \Delta v.$$

Désignons, comme plus haut, par I_V l'intégrale triple de $f(x,y,z)$ dans V et par $I_{\Delta v_i}$ l'intégrale triple de cette fonction dans l'élément de volume Δv_i. On peut écrire en vertu de la propriété 1 (de son corollaire) :

$$I_V = I_{\Delta v_1} + I_{\Delta v_2} + ... + I_{\Delta v_n}. \qquad (3)$$

Transformons chaque terme du second membre d'après la formule (2) :

$$I_V = f(p_1)\Delta v_1 + f(p_2)\Delta v_2 + ... + f(p_n)\Delta v_n, \qquad (4)$$

ou p_i est un point de Δv_i.

On a dans le second membre de cette égalité une somme intégrale $f(x,y,z)$ est, par hypothèses, une fonction continue dans le domaine V et la limite de cette somme, lorsque le plus grand diamètre des Δv_i tend vers zéro, existe et définit l'intégrale triple de $f(x,y,z)$ dans V. On obtient donc en passant à la limite dans l'égalité (4) lorsque $diam\Delta v_i \to 0$:

$$I_V = \int\int_V\int f(x,y,z)\,dv,$$

soit encore

$$I_V = \int\int_V\int f(x,y,z)\,dv = \int_a^b \left\{\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dy\right\} dx$$

Le théorème est démontré.

Ici $z = \chi(x,y)$ et $z = \psi(x,y)$ sont les équations des surfaces délimitant le domaine régulier V inférieurement et supérieurement.

Les courbes $y = \varphi_1(x)$ et $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$ délimitent le domaine D, projection de D, projection de V sur le plan OXY. ■

Remarque 2.28 *Ainsi que pour les intégrales doubles, on peut former des intégrales triples avec des ordres différents d'intégration par rapport aux variables et avec d'autres bornes, si toutefois la forme du domaine V le permet.*

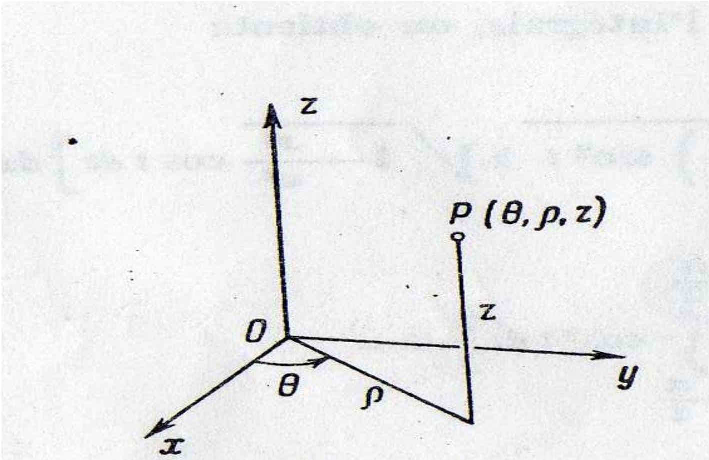

FIG. 2-9 –

2.2.2 Changement de variables dans une intégrale triple

Intégrale triple en coordonnées cylindriques

On appelle coordonnées cylindriques les trois nombres θ, ρ, z définissant la position d'un point p dans l'espace,θ et ρ étant les coordonnées polaires de la projection du point p sur le plan oxy et z la cote de p, c'est-à-dire. Sa distance au plan OXY prise avec le signe plus si le point se trouve au-dessus du plan OXY et avec le signe moins dans le cas contraire figure (2-9)

On découpe le domaine spatial donné V en volumes élémentaires par les surfaces de coordonnées $\theta = \theta_i$, $\rho = \rho_j$, $z = z_k$ (demi-plans contenant l'axe OZ, cylindres circulaires d'axe OZ, plans perpendiculaires à OZ). Un volume élémentaire est alors un "prisme" curviligne représenté sur la figure(2-10). L'aire de la base de ce prisme est égale, à des infiniment petits d'ordre supérieur prés, à $\rho\Delta\theta\Delta\rho$, sa hauteur est Δz. On a donc $\Delta v = \Delta\theta\Delta\rho\Delta z$. L'intégrale triple de la fonction $F(\theta, \rho, z)$ dans le domaine V s'écrit donc

$$I = \int\int_V\int F(\theta, \rho, z)\, \rho d\theta d\rho dz. \qquad (1)$$

Les bornes d'intégration sont déterminées par la forme du domaine V.

Si l'intégrale triple de $f(x, y, z)$ est donnée en coordonnées rectangulaires, il est facile de donner son expression en coordonnées rectangulaires, il est facile de donner son expression en coordonnées cylindriques. En effet, prenant en considération que

$$x = \rho\cos\theta; y = \rho\sin\theta; z = z,$$

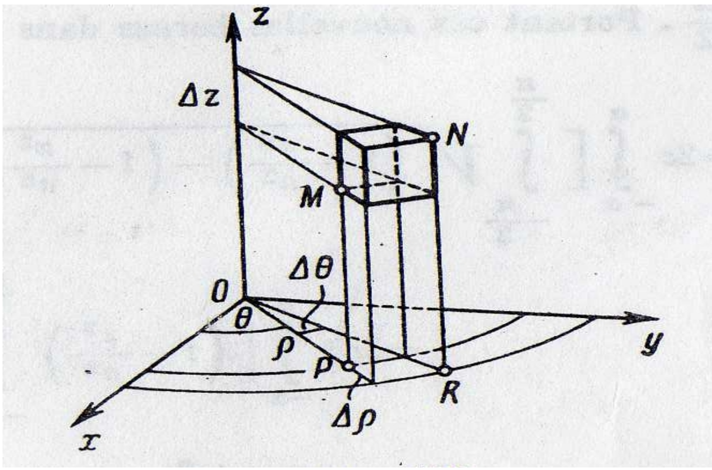

FIG. 2-10 –

on obtient :

$$\int\int_V\int f(x,y,z)\,dxdydz = \int\int_V\int F(\theta,\rho,z)\,\rho d\theta d\rho dz,$$

où

$$f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z) = F(\theta,\rho,z).$$

Intégrale triple en coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques, la position d'un point p dans l'espace est définie par trois nombres θ, r, φ, où r est la distances du point à l'origine des coordonnées, dite encore le rayon vecteur du point, φ l'angle entre le rayon vecteur et l'axe OZ et θ l'angle entre la projection du rayon vecteur sur le plan OXY et l'axe OX calculé dans le sens trigonométrique. On a pour tout point de l'espace :

$$0 \leq r \leq \infty, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Découpons les domaines donné V en élément Δv par les surfaces de coordonnées $r = const$ (sphère), $\varphi = const$ (cones de sommets à l'origine), $\theta = const$ (demi-plans passant par l'axe OZ). A des infiniment petits d'ordre supérieur prés, on peut considérer que le domaine élémentaire Δv est un parallélépipède d'arêtes Δr, $r\Delta\varphi$, $r\sin\varphi\Delta v$. Le volume élémentaire Δv s'exprime alors :

$$\Delta v = r^2 \sin\varphi \Delta r \Delta\theta \Delta\varphi.$$

L'intégrale triple de la fonction $F(\theta, r, \varphi)$ dans le domaine V s'écrit

$$I = \int\int_V \int F(\theta, \rho, z)\, r^2 \sin\varphi dr d\theta d\varphi. \qquad (1^{'})$$

Les bornes d'intégration sont déterminées par la forme du domaine V. On a déduit facilement de l'expressions des coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées sphériques :

$$x = r\sin\varphi\,\cos\theta,$$
$$y = r\sin\varphi\,\sin\theta,$$
$$z = r\cos\varphi\,;$$

La formule permettant de passer d'une intégrale en coordonnées cartésiennes à une intégrale en coordonnées sphériques est donc

$$\int\int_V \int f(x, y, z)\, dxdydz = \int\int_V \int f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)\, r^2 \sin\varphi dr d\theta d\varphi.$$

Chapitre 3

Les applications des intégrales double et triple

3.1 Applications des intégrales doubles

3.1.1 Masse d'une plaque de densité $\rho(x, y)$

Soit donnée une figure plane bornée D de densité surfacique $\rho(x, y)$ telle que $\rho(x, y)$ est une fonction continue sur D.

La masse d'une plaque de densité $\rho(x, y)$, se calcule par la formule suivant :

$$m = \int_D \int \rho(x, y)\, dxdy. \qquad (1)$$

Si la masse est uniformément distribuée, alors $\rho = const$ et la formule (1) devient :

$$m = \rho \int_D \int dxdy = \rho S,$$

où

$$S = \int_D \int dxdy,$$

est l'aire du domaine D.

Exemple 3.1 *Aire du cercle de centre O et de rayon R*

$$S = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R \rho d\rho \right] d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^R d\theta = \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \pi R^2.$$

3.1.2 Moment d'inertie d'une plaque homogène (la densité ρ est constante)

On établit sans peine comme précédemment que les moments d'inertie par rapport à OX, OY et O sans respectivement égaux à :

Par rapport à (OX)

$$I_x = \int\int_D \rho y^2 dxdy.$$

Par rapport à (OY)

$$I_x = \int\int_D \rho x^2 dxdy.$$

Par rapport à O

$$I_x = \int\int_D \rho \left(x^2 + y^2\right) dxdy.$$

où $\rho(x, y)$ est la densité.

3.1.3 Moment statique d'une figure plane par rapport aux axes de coordonnées du centre de gravité

On appelle moment statique M_x d'un point matériel de masse m par rapport à l'axe OX le produit my (y est l'ordonnée de ce point). Définit par la formule suivant :

$$M_x = \int_D \int y\rho(x, y)\, dxdy.$$

De façons analogue, le moment statique de D par rapport à OY est égale à

$$M_y = \int_D \int x\rho(x, y)\, dxdy.$$

Si l'on connait les moment statique M_x et M_y est la masse m de la figure plan les coordonnées du centre de gravité de cette dernière sans données par les formules :

$$\begin{cases} x_c = \frac{\int_D \int x\rho(x,y)dxdy}{m} = \frac{M_y}{m} \\ y_c = \frac{\int_D \int y\rho(x,y)dxdy}{m} = \frac{M_x}{m} \end{cases}, \qquad (2)$$

où m égale à

$$m = \int_D \int \rho(x,y)\, dxdy.$$

et

$$S = \int_D \int dxdy.$$

Si $\rho = const$ alors $m = \rho S$ où S est l'aires D la formule (2) devient :

$$\begin{cases} x_c = \frac{\int_D \int xdxdy}{S} \\ y_c = \frac{\int_D \int ydxdy}{S} \end{cases}.$$

3.2 Applications des intégrales triples

3.2.1 Masse d'un solide Ω de densité $\gamma(x,y,z)$

On posant le problème qui nous a conduits à l'intégrale triple. On a montre que si $\gamma(x,y,z)$, la densité de distribution des masse, est comme en tout point d'un solide occupant an domaine Ω. La masse de se solide se calcule avec la formule

$$m = \int \int_\Omega \int \gamma(x,y,z)\, dxdydz,$$

sous réserve que $\gamma(x,y,z)$ soit continue sur Ω.

3.2.2 Moment d'inertie d'un solide Ω de densité $\gamma(x,y,z)$

On établit sans peine comme précédemment que les moments d'inertie par rapport à un point A, à une droite D et un plan P sans respectivement égaux à :

Par rapport à un point A

$$I_A = \int \int_\Omega \int d\left[(x,y,z), A\right]^2 \gamma(x,y,z)\, dxdydz.$$

Par rapport à une droite D

$$I_D = \int \int_\Omega \int d\left[(x,y,z), D\right]^2 \gamma(x,y,z)\, dxdydz.$$

Par rapport à un plan P

$$I_P = \int \int_\Omega \int d\left[(x,y,z), P\right]^2 \gamma(x,y,z)\, dxdydz.$$

3.2.3 Moment statique d'un solide par rapport aux plans de coordonnée centre de gravité

Les moments statiques d'un solide Ω par rapport aux plans de coordonnées et le centre de gravité s'acquièrent par analogue à l'aide des intégrales triples. Ainsi le moment statique élémentaires par rapport aux plan (O, I, J) est égale à

$$k_{xy} = \int \int_{\Omega} \int \gamma\left(x, y, z\right) dxdydz.$$

De façons analogue

$$\begin{aligned} k_{xz} &= \int \int_{\Omega} \int y\gamma\left(x, y, z\right) dxdydz, \\ k_{yz} &= \int \int_{\Omega} \int x\gamma\left(x, y, z\right) dxdydz. \end{aligned}$$

Une fois comme la masse m du solide Ω et son moment statistique. On trouve sans peine les coordonnées du centre de gravité :

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\int \int_{\Omega} \int x\gamma(x,y,z)dxdydz}{m}, \\ y_c &= \frac{\int \int_{\Omega} \int y\gamma(x,y,z)dxdydz}{m}, \\ z_c &= \frac{\int \int_{\Omega} \int z\gamma(x,y,z)dxdydz}{m}. \end{aligned} \qquad (3)$$

Si le solide est homogène la densité $\gamma = const$ et les formule (3) se mettent sous la forme plus simple :

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\int \int_{\Omega} \int xdxdydz}{V}, \\ y_c &= \frac{\int \int_{\Omega} \int ydxdydz}{V}, \\ z_c &= \frac{\int \int_{\Omega} \int zdxdydz}{V}. \end{aligned}$$

Puisque $m = \gamma V$, où V est le volume des solide Ω est égale à :

$$V = \int \int_{\Omega} \int dxdydz.$$

Conclusion générale

Nous avons présenté dans notre humble travail un aperçu autour des applications des intégrales double et triple.

Dans le premier chapitre, les intégrales presenteés sont les intégrales de Riemann et de Lebesgue. Dans le deuxième chapitre nous avons presenté les intégrales double et triple (définition, calcul etc...). Dans le troisième chapitre nous avons parlé des applications des intégrales double et triple.

Bibliographie

[1] Mathématique L3 Algèbre - Hakim Boumaza, benjamin Gollas, stéphan Callas, Marie Dellinger, Zoé Fayet - En France 2009.

[2] Mathématiques supérieures pour ingénieurs et polytéchniciens - Michail Krasnov, Alexender Kisselev, Grigory Makarenko, Evgeny Chikine -1989.

[3] Les Mathématique En Licence - Elie Azoulay, Jean Avignant, Guy Auliac - Dunod, Paris, 2007.