الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Minstère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

CENTRE UNIVERSITAIRE DE MILA
INSTITUT DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

Réf. /11

Mémoire de fin d'étude
Présenté pour l'obtention du diplôme de

Licence Académique

Domaine : **Mathématiques et Informatique**
Filière : **Mathématiques**
Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Thème

Introduction aux espaces de Hilbert

Présenté par :
Guerba Dhiya El Heq
Lekcir Kamal Eddine

Dirigé par :
Leulmi Assma

Année universitaire 2010-2011

شكر وتقدير

إن أول شكر وأعظم حمد نخص به الله ، فحمدا لله مدبر الملك و الملكوت، المنفرد بالعزة و الجبروت اللهم إنا نشكر على كل طريق صعب يسرته لنا و الصلاة و السلام على من أرسلته رحمة للعالمين و أنزلت عليه قولك:" هذا بيان للناس و هدى و موعظة للمتقين" .

ثم نتوجه بجزيل الشكر و الامتنان إلى كل من ساعدنا من قريب أو من بعيد على انجاز هذا العمل وفي تذليل ما واجهناه من صعوبات ونخص بالذكر أستاذتنا المحترمة "العلمي أسماء" التي أضاءت علينا بعلمها ونورت عقولنا والتي أشرفت على مذكرتنا.كما نتقدم لها بجزيل الشكر و التقدير أدامك الله فوق رأس العلم ووفقك لإبلاغه .

و لا ننسى أن نتقدم بالشكر و *العرفان* الخاص لأستاذنا " محمد الصالح عبد الوهاب" *الذي ساهم بتوجيهاته القيمة في إثراء بحثنا.*

كمال الدين و ضياء الحق

إهـــــــــــــــــــــداء

الحمد لله تعالى المحمود، له الفضل علينا ومنه الكرم والجود، خيره ممدود، وعطاؤه بلا حدود، والصلاة والسلام على خير الأنام ، وبدين الله قام و أقام، نبينا محمد عليه أفضل الصلاة والسلام،وعلى آله وصحبه الكرام والتابعين ومن تبعهم بإحسان إلى يوم الدين .

أهـدي حصيلة جهـدي و عملـي المتواضـع إلـى:

إلــــــــــى منبع الخير الدافق و الحنان الوافر، إلــــــــــى المربَي الفاضل الذي نسج لـي طريق النَجاح في حياتي لك ألف شكر،نور الله قلبك بالإيمان و أسعد أيامك بالقـــــرآن و جعلك من أصحاب الجنة أنت "أبــــــــــــي العزيــــــز".

إلــــــــــى التي تعجز الكلمات عن شكرها، إلـــــــى التي تربَت أنفاسي على عرش قلبها

إلــــــــــى الحبيبة التي تفانت في تربيتي و سهرت على راحتي لكي أترعرع في حضنها و أتدفئ بحنانها "أمــــــــــــي الغاليـــــــــــــــــــــة".

إلــــــــى سندي و قوتي ،إلــــــــــى ثمرة الحياة إلى الأعزاء و العزة لله إهداء خاص للغالين معطر بالياسمين أرسله فقط لأخي و أخواتي،دون أن أنسى من بهم قلبي تعلق "سراج لؤي الدين" و"محمد إياد" سائلا المولى أن يجعلهم ذخرا لوالديهما .

بــــــــــسم الأمل و الأمل للحياة.

بــــــــــسم الحياة و الحياة للبشر.

بــــــــــسم القدر و القدر مكتوب أن تكونوا أصدقائي.

بــــــــسم الزهور التي مصيرها الذبول أما الصداقة التي بيننا فلا تزول إليك زكريـــــاء، وإلى كل من نسيه قلمي ولم ينسه قلبي.

من ضياء

إهـــــــــــــــــداء

إلـــــــى الذي كل نعمة منه فضل و كل نقمة منه عدل.

إلـــــــى الذي ألهمني الصبر وأمدني بالطاقة لإنجاز هذا العمل.

"لـك الحمد و الشكر يـــــــا رب"

إلـــــــى نبع الحنان الذي بالحب نبض و نحيا.

إلـــــــى صاحبة القلب الكبير و الدافئ.

إلـــــــى أعظم إنسانة في الوجود .

إلـــــــى التي و ضعت الجنة تحت أقدامها "أمـــــــــي الغالية".

إلـــــــى الرجل الذي تعذب كثيراو ساندني طويلا, طوال فترة دراستي.

إلـــــــى أعز ما أملك "والـــــــــدي العزيـــــــــــــز".

بأحرف ارق من رذاذ المطر و همس أنعم من صوت الشجر و عبارات أقوى من صدى الحب إليكم يا أعز الناس "إخوتي و أخواتي ".

اللهم كما قربت بين أرواحنا قربنا للعمل الصالح الذي يرضيك عنا و اجعلنا منك أقرب و في فردوسك إخوانا إليكم " أصدقائي".

من كمـــال

Table des matières

Introduction Générale

Dans les mathématiques l'espace d'une propriété spéciale est des fois doté d'une construction mathématique en plus, on ne peut pas considérer le mot «mathématiques »comme limité mais c'est un terme général qui englobe certaines connaissances cette discipline constitue une généralisation spécifique de l'espace vectoriel en général l'espace physique ou espace Hilbertien forme une base sur laquelle reposent les mécanismes du tout, de l'ensemble.

Pour cela et vu l'importance de cette dimension des mathématiques connaissances abstraites nous avons voulu qu'il soit le sujet de ce mémoire.

Nous allons présenter dans notre humble exposé un aperçu autour de l'espace Hilbertien il y'a trois .

Dans le premier chapitre, nous donnerons une définition basique de l'espace vectoriel bien sur après avoir fait connaissance avec l'espace préhilbertien et ses spécifiés.

Dans le $2^{\underline{\underline{eme}}}$chapitre nous nous pencherons sur les théories essentielles (théorie des projections etc....).

Dans le $3^{\underline{\underline{eme}}}$ chapitre nous comparerons la relation de l'espace vectoriel avec l'espace duil.

Ainsi avec l'aide de Dieu nous aurons clos ce mémoire.

Chapitre 1

Généralités

1.1 *Espace vectoriel*

Définition 1.1.1 ***(Espace vectoriel) :***
Soit $\mathbb{k}$ un corps commutatif et E un ensemble non vide, on dit que E est un $\mathbb{k}$ espace vectoriel ou un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$ si E est muni de deux loi de composition.une loi interne de groupe abélien note additivement l'élément neutre est note 0 et le symétrique d'un élément quelque x est note conventionnellement $(-x)$.
-Une loi externe c'est à dire une application de $(\mathbb{k} * E)$ dans E, notée multiplicativement que vérifie les propriétés suivant : $\forall (x, y) \in (E * E)$, $\forall (\lambda, \mu) \in (\mathbb{k} * \mathbb{k})$ on a :

1) $\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y$.

2) $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$.

3) $\lambda (\mu x) = (\lambda \mu) x$.

4) $1.x = x$.

On dit aussi que les deux lois précédent munissent E d'une structure de $\mathbb{k}$-espace ce vecteur ou d'espace vectoriel sur $\mathbb{k}$. les élément de E sont alors appelles des vecteurs.

Définition 1.1.2 ***(Sous espace vectoriel) :***
Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k}$ et F sous ensemble de E, on dit que F un sous espace vectoriel si :

a) $\forall x \in F, \forall y \in F : (x - y) \in F$.

b) $\forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{k} : \lambda x \in F$.

Définition 1.1.3 ***(Combinaison linéaire) :***
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$ et $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_p$des vecteurs de E et soit $\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\ \lambda_p$ de $\mathbb{k}$ alors le vecteur

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_p x_p.$$

Est une combinaison linéaire des vecteurs $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_p$.

Définition 1.1.4 (La norme) :
Soit E *un* $\mathbb{k}$*-espace vectoriel* ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$) *une norme est une application de* E *dans* $\mathbb{R}_+$ *tel que :*

$$\begin{aligned} &a)\forall x \in E; (\|x\| = 0) \Longleftrightarrow (x = 0).\\ &b)\forall(\lambda, x) \in \mathbb{k} * E : \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|.\\ &c)\forall(x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

On appelle le couple $(E, \|.\|)$ *espace normé.*

Remarque 1.1.5 ***:***
On dit que un espace vectoriel normé c'est complet ou espace de Banach si pour tout suite de Cauchy des éléments de ce espace est une suite converge dans même espace.

1.2 *Produite scalaire*

Définition 1.2.1 ***(Application semi-linéaire) :***
Soient E *et* F *deux espaces vectoriels complexes, on définie la application* $h : E \longrightarrow F$.
On dit que h *est semi-linéaire si vérifiée :*

$$\begin{aligned} &\forall(x, y) \in E, h(x + y) = h(x) + h(y).\\ &\forall x \in E, \forall\lambda \in \mathbb{C} : h(\lambda x) = \overline{\lambda} h(x). \end{aligned}$$

Définition 1.2.2 ***(Application linéaire) :***
Soient E *et* F *deux espaces vectoriels complexes, on définie la application* h *tel que :*
$h : E \longrightarrow F$. *On dit que* h *est linéaire si vérifiée :*

$$\forall x, y \in E,\ \ h(x + y) = h(x) + h(y).$$
$$\forall x \in E, \forall\lambda \in \mathbb{C} : h(\lambda x) = \lambda h(x).$$

Remarque 1.2.3 ***:***
-La composition de deux applications semi-linéaires est une application linéaire.
-La composition d'application linéaire avec une application semi-linéaire est un application semi-linéaire.

Définition 1.2.4 ***(sésquilinéaire) :***
Soit E *un espace vectoriel sur un corps* $\mathbb{k}$ ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$). *On appelle forme sésquilinéaire sur* E, *toute application* h *définie de* $(E * E)$ *dans* $\mathbb{k}$, *linéaire par rapport à la première variable et semi-linéaire par apporte à la deuxième variable.*
Autrement dit :

$h : E * E \longrightarrow \Bbbk$ est sésquilinéaire si :

♦*Pour tout y fixé dans E, l'application partielle $x \longrightarrow h(x, y)$ est linéaire.*

♦*Pour tout x fixé dans E, l'application partielle $y \longrightarrow h(x, y)$ est semi-linéaire.*

Ces deux propriétés se résument comme suit : $\forall \alpha, \beta \in \Bbbk, \forall\ x,\ x',\ x'', y\ ,\ y',\ y'' \in E$.

$$h(\alpha x' + \beta x'', y) = \alpha h(x', y) + \beta h(x'', y).$$
$$h(x, \alpha y' + \beta y'') = \bar{\alpha} h(x, y') + \bar{\beta} h(x, y'').$$

Il en découle aussitôt que si ($\Bbbk = \mathbb{R}$), h devient une forme bilinéaire où :

$$h(x, \alpha y) = \alpha h(x, y).$$

Définition 1.2.5 ***(Hermitienne) :***

On appelle forme hermitienne sur E tout forme Sésquilniere h sur E qui vérifiée la condition suivant :

$$h\left(x, y\right) = h\overline{(y, x)},\ \forall \left(x, y\right) \in \left(E * E\right).$$

Elle est dite positive si :

$$\forall x \in E,\ h(x, x) \geq 0.$$

Elle sera dite définie positive si :

$$\forall x \in E - \{0\}\ ,\ h(x, x) > 0.$$

Proposition 1.2.6 :

Si h est une forme sésquilinéaire sur E, alors :

$$\left(h \text{ est hermitienne}\right) \Longleftrightarrow \left(\forall x \in E\ , h(x, x) \in \mathbb{R}\right).$$

Preuve. :

La condition est évidemment nécessaire, en effet le nombre $h(x, x)$ est réelle puisque est hermitienne.

C'est-à-dire :

$$h(x, x) = \overline{h(x, x)}.$$

Pour la réciproque, nous considérons ces deux identités (facilement vérifiables) suivantes :

$$a)\ h(x + y, x + y) = h(x, x) + h(y, y) + h(x, y) + h(y, x).$$
$$b)\ h(ix + y, ix + y) = h(x, y) + h(y, y) + i\left[h(x, y) - h(y, x)\right].$$

-Les éléments $h(x+x,y+y)$,$h(ix+y,ix+y)$,$h(x+x)$ et $h(y,y)$ sont par hypothès des nombres réels. On en déduit que :

$$h(x,y)+h(y,x)=\alpha,\ \ \alpha\in\mathbb{R}.$$

Et

$$i\left[h(x,y)-h(y,x)\right]=\beta,\ \ \beta\in\mathbb{R}.$$

D'où

$$\begin{aligned} h(x,y) &= \frac{1}{2}(\alpha-i\beta\ ). \\ h(x,y) &= \frac{1}{2}(\alpha+i\beta\ ). \end{aligned}$$

Il vient

$$h(x,y)=\overline{h(y,x)}.$$

C'est-à-dire h est hermitienne. ■

Proposition 1.2.7 ***(L'égalité de polarisation) :***
-Soit E un espace vectoriel complexe et h une forme sésquilinéaire sur E, pour toutes $(x,y)\in E$, on a :

$$4h(x,y)=h(x+y,x+y)-h(x-y,x-y)+ih(x+iy,x+iy)-ih(x-iy,x-iy).$$

-Soit E un espace vectoriel réelle et h bilinéaire symétrique sur E, pour toutes $x,y\in E$, on a :

$$4h(x,y)=h(x+y,x+y)-h(x-y,x-y).$$

Preuve. :
1) Soit E un espace vectoriel complexe et h une forme sésquilinéaire sur E.
Soit $(x,y)\in E$, on calcule expression suivante :
On a :

$$ih(x+iy,x+iy)-ih(x-iy,x-iy).$$

On pose :

$$\begin{aligned} &A_1=ih(x+iy,x+iy)-ih(x-iy,x-iy). \\ &A_2=h(x+y,x+y)-h(x-y,x-y). \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} A_1 &= i(h(x,x)+\bar{i}h(x,y)+ih(y,x)+i\bar{i}h(y,y)-h(x,x)+\bar{i}h(x,y)+ih(y,x)-i\bar{i}h(y,y)) \\ &= 2h(x,y)-2h(x,y). \qquad (*) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A_2 &= h(x,x)+h(x,y)+h(y,x)+h(y,y)-h(x,x)+h(x,y)+h(y,x)-h(y,y) \\ &= 2h(x,y)+2h(y,x). \qquad (**) \end{aligned}$$

De $(*)+(**)$ on trouve :

$$4h(x,y)=h(x+y,x+y)-h(x-y,x-y)+ih(x+iy,x+iy)-ih(x-iy,x-iy).$$

2) Soit E un espace vectoriel réel, et h une forme bilinéaire sur E pour toutes $x,y\in E$ On a :

$$\begin{aligned} h(x+y,x+y)-h(x-y,x-y) &= h(x,x)+h(x,y)+h(y,x)+h(y,y)-h(x,x) \\ &\quad +h(x,y)+h(y,x)-h(y,y) \\ &= 2h(x,y)+2h(y,x) \\ &= 4h(x,y). \end{aligned}$$

■

Définition 1.2.8 ***(produit scalaire) :***
On appelle produite scalaire sur E toute forme sésquilinéaire hermitienne définie positive h. On note :

$$\begin{aligned} &E * E \longrightarrow \mathbb{k} \\ &(x,y) \longmapsto h(x,y)=\langle x,y\rangle . \end{aligned}$$

Proposition 1.2.9 ***(Inégalité de Cauchy- Schwarz) :***
Si h est une forme hermitienne positive, alors :

$$\forall x,y\in E,\ |h(x,y)|^2 \leq h(x,x)*h(y,y).$$

Preuve. :
Pour toute λ de $\mathbb{k}$ on écrit :

$$0\leq h(\lambda x+y,\lambda x+y)=\lambda\overline{\lambda}h(x,x)+h(y,y)+\lambda h(x,y)+\overline{\lambda}h(y,x). \qquad (*)$$

Posons :

$$a=h(x,x),\ b=h(x,y)\ \ et\ \ c=h(y,y).$$

L'inégalité $(*)$ prend la forme suivante :

$$a\lambda\overline{\lambda}+b\lambda+\overline{b\lambda}+c\geq 0. \qquad (**)$$

♦Si $(a = c = 0)$, on obtient de $(**)$ pour $\left(\ \lambda = -\overline{b}\right)$:

$$-b\overline{b} - b\overline{b} = -2\left|b\right|^2 \geq 0.$$

L'inégalité considérée est satisfaite dans ce cas :

♦Si $(a \neq 0)$, on pose $\left(\lambda = -\frac{\overline{b}}{a}\right)$. Il vient :

$$a(-\frac{\overline{b}}{a})(-\frac{b}{a}) - \frac{\overline{b}}{a} * b - \frac{\overline{b\overline{b}}}{a} + c \geq 0.$$

C'est-à-dire :

$$-\frac{\left|b\right|^2}{a} + c \geq 0.$$

D'où : $\left|b\right|^2 \leq ac$. ■

Proposition 1.2.10 ***(Inégalité de Minkowski) :***
Si h est un produit scalaire sur E, alors :

$$\forall x, y \in E, \sqrt{[h(x+y, x+y)]} \leq \sqrt{[h(x,x)]} + \sqrt{[h(y,y)]}.$$

Preuve. :
On sait que :

$$\begin{aligned} h(x+y, x+y) &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle\,. \end{aligned}$$

Et que :

$$\begin{aligned} Re\,\langle x, y\rangle &\leq \left|\langle x, y\rangle\right| \\ &\leq \sqrt{\langle x, x\rangle} * \sqrt{\langle y, y\rangle}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\langle x+y, x+y\rangle \leq \left[\sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle}\right]^2.$$

C'est-à-dire :

$$\sqrt{\langle x+y, x+y\rangle} \leq \sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle}.$$

■

Proposition 1.2.11 ***(Norme associée produite scalaire) :***

Si h un produite scalaire sur E, alors l'application,

$$N : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto N(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{h(x, x)}.$$

Définie une norme sur E.

Preuve. :
Evident l'inégalité de Minkowski assurant l'inégalité triangulaire. nous utiliserons ,bien entendu, le symbole connu désignant une norme. On note :

$$N(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|.$$

Signalons au passage que si h était seulement une forme hermitienne positive, alors l'application $N : x \longmapsto \sqrt{h(x, x)}$ définirait une semi-norme. ■

Chapitre 2

L'espace préhilbertienne

2.1 *Identité du parallélogramme*

Définition 2.1.1 ***(Espace préhilbertien) :***
On appelle espace préhilbertien tout espace vectoriel muni d'une norme associée à un produite scalaire.

Proposition 2.1.2 ***(Identité du parallélogramme) :***
Pour tout x, y d'un espace préhilbertien h on a :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 .$$

On lit : Dans un parallélogramme la somme des carrés des longueurs de ses diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs ses cotés.

Preuve. :
Il suffit, pour la preuve, d'effectuer le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle . && (*) \\ \|x-y\|^2 &= \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle . && (**) \end{aligned}$$

L'addition de $(*)$ et $(**)$ on trouve :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

■

Proposition 2.1.3 ***:***
Pour qu'un espace normé E soit préhilbertien il faut et il suffit que sa norme satis fasse à l'identité du parallélogramme.

Preuve. :

Notion tout d'abord que nous allons traiter ce théorème dans le cas ($\Bbbk = \mathbb{R}$). Nous laissons au lecteur le soin de procéder à sa généralisation au cas ($\Bbbk = \mathbb{C}$).

La condition est évidement nécessaire.

Réciproquement posons :

$$h(x,y) = \langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2),\ x,y \in E. \tag{1}$$

Et montrons que si l'identité du parallélogramme est vérifiée, alors l'expression (1) présente une application h satisfaisant aux conditions d'un produit scalaire.

Si ($x = y$), la relation (1) donne :

$$\begin{aligned} h(x,y) &= \frac{1}{4}(2\|x\|^2) \\ &= \|x\|^2 \\ &= \langle x,x\rangle . \end{aligned}$$

C'est précisément la norme que définit un produit scalaire sur E. De plus on a :

$$h(x,x) = \|x\|^2 = \langle x,x\rangle > 0.$$

Ce qui signifie que h est définie positive par ailleurs, on déduit de (1) que :

$$\forall x,y \in E\ h(x,y) = h(y,x).$$

C'est-à-dire h est symétrique.

Intéressons-nous à présent à la bilinéarité de h, considérons à cet effet l'application φ définie comme ceci :

$$\varphi(x,y,z) = 4(\langle x+y,z\rangle - \langle x,z\rangle - \langle y,z\rangle);\quad x,y,z \in E.$$

C'est-à-dire :

$$\varphi(x,y,z) = \|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 - \|x+z\|^2 + \|x-z\|^2 - \|y+z\|^2 + \|y-z\|^2 . \tag{2}$$

Montrons que φ est nulle, en vertu de l'identité du parallélogramme, on écrit :

$$\|x+y\pm z\|^2 = 2(\left\|x \mp z\right\|^2 + \|y\|^2) - \|x \pm y + z\|^2 .$$

La relation (2) devient :

$$\varphi(x,y,z) = -\|x+y-z\|^2 + \|x-y-z\|^2 + \|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 - \|y+z\|^2 + \|y-z\|^2 \quad (3)$$

En additionnant(2) et (3) on obtient :

$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{2}\left[\|x+y+z\|^2 + \|y+z-x\|^2\right] - \frac{1}{2}\left[\|y-z+x\|^2 + \|y-z-x\|^2\right] - \|y+z\|^2 + \|y-z\|^2.$$

Le premier terme du membre droit de cette égalité est égal, en vertu de l'identité de parallélogramme, à

$$\|y+z\|^2 + \|x\|^2.$$

Tandis que le second vaut

$$-\|y-z\|^2 - \|x\|^2.$$

On aboutit finalement à

$$\varphi(x,y,z) = 0.$$

Ainsi on vient de prouver que :

$$\forall x,\ y,\ z \in E,\quad h(x+y,z) = h(x,z) + h(y,z).$$

Il nous reste à montrer

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x,\ y \in E,\quad h(\lambda x, y) = \lambda\ h(x,y).$$

Pour ce faire, on considère l'application ψ suivante :

$$\psi(\lambda) = \langle \lambda x, y\rangle - \lambda \langle x, y\rangle\,;\quad x,\ y \in E,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

De (1) il vient

$$\psi(0) = \frac{1}{4}\left[\|y\|^2 - \|x\|^2\right] = 0 \quad \text{et} \quad \psi(-1) = 0.$$

Cela nous permet d'obtenir : $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
\langle nx, y\rangle &= \langle sgn\ n\,(x + ... + x)\,, y\rangle \\
&= (sgn\ n)\left[\langle x,y\rangle + ... + \langle x,y\rangle\right] \\
&= |n|\,(sgn\ n)\,\langle x,y\rangle \\
&= n\,\langle x,y\rangle\,.
\end{aligned}$$

(sgn n désigne le signe de n).

D'où $\psi(n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Maintenant, si p et q sont deux entiers tels que $q \neq 0$, alors :

$$\left\langle \frac{p}{q}x, y \right\rangle = p \left\langle \frac{x}{q}, y \right\rangle = \frac{p}{q} q \left\langle \frac{1}{q}x, y \right\rangle = \frac{p}{q} \langle x, y \rangle .$$

Ce qui donne

$$\psi(\lambda) = 0,\ \forall \lambda \in \mathbb{Q}.$$

Comme ψ est continue (vérifier-le), on conclut que :

$$\psi(\lambda) = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ce qui permet d'affirmer, enfin que h est un produit scalaire, Le théorème est achevé. ■

2.2 *Orthogonalité*

Définition 2.2.1 ***(Orthogonalité) :***
Le produite scalaire permet dans le cas d'un espace préhelppertienne réel, non seulement de déterminer la longueur (norme) d'un vecteur, mais aussi l'ongle que délimitent deux vecteurs, plus clairement, l'ongle θ formé par les vecteurs x et y s'obtient a' l'aide de la forme suivent :

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \ \ \|y\|}. \tag{*}$$

On voit grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que le second membre de $(*)$ a valeur absolue ne dépassant pas 1, ce qui fait que $(*)$ définit un angle θ compris entre 0 et π quels que soient x et y non nuls. si $\langle x, y \rangle = 0$, on obtient $\theta = \frac{\pi}{2}$. On dit dans ce cas que les vecteurs x et y sont orthogonaux. Dans le cas complexe, la notion d'angle se perd néanmoins, l'orthogonalité est conservée.

Définition 2.2.2 ***:***
Soient x et y deux éléments d'un espace préhelbertien h. On dit qu'ils sont orthogonaux, si leur produit scalaire est nul. On note :

$$x^{\perp}y \Longleftrightarrow \langle x, y \rangle = 0.$$

Exemple 2.2.3 ***:***
1) On prend $(E = \mathbb{C}^n)$ muni de son produite scalaire (désormais) classique :

$\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}$, *et on considère la famille de vecteurs :*

$$(e_\alpha)_{\alpha=1,2,\ \ldots,\ n} = (0,\ \ldots,\ 0,\ \underset{\overset{\uparrow}{\alpha}}{1},\ 1,\ 0\ ,\ldots,\ 0).$$

Pour tout α, β *tels que* $\alpha \neq \beta$ *on a* $e_\alpha^\perp e_\beta$, *car* $\langle e_\alpha, e_\beta\rangle = 0$.

2) On pose $\zeta([-\pi,\pi], \mathbb{R})$ *avec :*

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt.$$

On considère dans E *la famille* $(f_n)_n$ *définie par* $f_n(t) = \cos nt$, $n \geq 0$, *Pour tout :* $m, n \in \mathbb{N}$, $(m \neq n)$ *on a :*

$$\begin{aligned} \langle f_n, f_m\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)t + \cos(m-n)t]\, dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Proposition 2.2.4 ***(Elémentaires)***

i) $\forall x \in E,\ x \perp 0.$

ii) $\forall x,\ y \in E,\ \ \forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{k},\ \ \ \ x \perp y \Longrightarrow \alpha x^\perp \beta y.$

iii) $\forall x,\ y \in E,\ \ (x \perp y) \Longrightarrow (y \perp x)\,.$

iiii) $\forall x \in E,\ \forall y_i \in E,\ \forall \alpha_i \in \mathbb{k};\ (x \perp y_i) \Longrightarrow \left(x^\perp \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right).$

Définition 2.2.5 ***:***

Soit F *une partie non vide d'un espace préhelbertien* h. *On dit qu'un élément* x *de* h *est orthogonal à* F *s'il est orthogonal à chaque point* Y *de* F. *On écrit :*

$$x \perp F \Longleftrightarrow \langle x, y\rangle = 0,\ \forall y \in F.$$

Il découle aussitôt de cette définition que le vecteur nul est orthogonal à toute partie non vide de h.

Définition 2.2.6 :

Soient F_1 *et* F_2 *deux partie non vide d'un espace préhelbertien* h. *On dit qu'ils sont orthogonal c'est toute pointe de l'une est orthogonal à chaque de l'autre. On note :*

$$(F_1 \perp\ F_2) \Longleftrightarrow (\forall\ x \in F_1,\ \forall\ y \in F_2,\ \langle x,\ y\rangle = 0)\,.$$

Par ailleurs, On appelle orthogonal d'un partie F de h, l'ensemble des éléments de h orthogonal à F. On le note $F^{\perp}$. On a :

$$F^{\perp} = \{x \in h \ / \ \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in F\}.$$

Proposition 2.2.7 :
Soit F un sous espace vectoriel de espace préhilbertien h. On a les propositions suivantes :
★$F^{\perp}$ *fermé.*
★$F \subset F^{\perp\perp}$.

Preuve. :

$\left(F^{\perp} = \overline{F}^{\perp}\right) \Longleftrightarrow \left(F^{\perp} fermé\right)$.
On a : $F^{\perp} \subset \overline{F}^{\perp}$, il claire. On montre $F^{\perp} \supset \overline{F}^{\perp}$,
soit $x \in \overline{F}^{\perp}$, donc $\exists \left(x_n\right)_n \subset F^{\perp} \ / \ x_n \to x$.
Alors :

$$\begin{aligned} \left(\left(x_n\right)_n \subset F^{\perp}\right) &\Longrightarrow \left(\langle \left(x_n\right), y\rangle = 0\right), \ \forall y \in F \\ &\Longrightarrow \left(\underset{n\to+\infty}{lim} \langle \left(x_n\right), y\rangle = 0\right) \\ &\Longrightarrow \left(\left\langle \underset{n\to+\infty}{lim} \left(x_n\right), y\right\rangle = 0\right) \\ &\Longrightarrow \left(\langle x, y\rangle = 0\right). \end{aligned}$$

D'ou $x \in F^{\perp}$.
Soit $x \in F$:

$$\begin{aligned} (x \in F) &\Longrightarrow \left(\langle x, y\rangle = 0\right), \ \forall y \in F^{\perp} \\ &\Longrightarrow \left(x \in F^{\perp\perp}\right) \\ &\Longrightarrow \left(F \subset F^{\perp\perp}\right). \end{aligned}$$

■

Théorème 2.2.8 *:*
Soit h un espace préhilbertien sur $\mathbb{C}$. On a : $\forall x, y \in h$.

$$(x \perp y) \Longleftrightarrow \begin{cases} \|x\| + \|y\| = \|x+y\| \\ et \\ \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+iy\|^2 \end{cases}.$$

Preuve. *:*
Soient $x,\ y \in h$ *tel que* $x^{\perp}y$*, on a :*

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + 2Re\langle x,y\rangle + \|y\|^2 .\\ \|x+iy\|^2 &= \|x\|^2 + 2Im\langle x,y\rangle + \|y\|^2 .\end{aligned}$$

mais que $x^{\perp}y$ *alors :*

$$Im\langle x,y\rangle = 0\ ,\ \ Re\langle x,y\rangle = 0.$$

Donc :

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 .\\ \|x+iy\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 .\end{aligned}$$

■

2.3 *Bases hilbertiennes*

Définition 2.3.1 *:*

Soient $(e_i)_{i\in I}$ *une famille orthogonale d'un espace préhilbertien* h *et* x *un point de* h*.*

On a appelle composante d'ordre i *de* x *suivant cette famille le nombre* ξ_i *de* $\Bbbk$ *défini par :*

ξ_i *S'appelle coefficient de Fourier de* x *par rapport à* $(e_i)_{i\in I}$*.*

Définition 2.3.2 *:*

Une famille orthogonale $(e_i)_{i\in I}$ *d'un espace préhilbertien* h *sera dite base hilbertienne de* h *si elle* y *est totale.*

Autrement dit $(e_i)_{i\in I}$*, est une base hilbertienne de* h *si,*

i) $\forall \underset{i\neq j}{(i,j)} \in I^2,\ \langle\ e_i, e_j\rangle = 0.$

ii) $\forall i \in I,\quad \|e_i\| = 1.$

iii) $E = \left[\overline{(e_i)_{i\in I}}\right].$

Par suite, on écrit :

$$\forall x \in h,\ \exists\,(\lambda_i)_{i\in I} \subset \Bbbk\ \ /\ \ x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i.$$

Proposition 2.3.3 *:*
Pour qu'une famille soit une base d'un espace préhilbertien h il faut et il suffit qu'elle soit maximale.

Preuve. :

Signalons de prime abord qu'une famille $(e_i)_{i\in I}$ est dite maximale s'il n'existe pas de vecteur non nul orthogonal à chaque élément e_i de la famille. La condition est évidemment nécessaire puisque :

$$\begin{aligned}
\left(x^{\perp}(e_i)_{i\in I}\right) &\Longrightarrow \left(x \in [(e_i)_{i\in I}]^{\perp}\right) \\
&\Longrightarrow \left(x \in E^{\perp}\right) \\
&\Longrightarrow (x = 0)\,.
\end{aligned}$$

Inversement, on a :

$$\left([(e_i)_{i\in I}]^{\perp} = \{0\}\right) \Longleftrightarrow \left(\left[\overline{(e_i)_{i\in I}}\right]^{\perp} = \{0\}\right).$$

D'où :

$$\left[\overline{(e_i)_{i\in I}}\right] = \{0\}^{\perp} = h.$$

■

Chapitre 3

Espace de Hilbert

3.1 La projection

Définition 3.1.1 ***(Espace de Hilbert) :***

On appelle espace de Hilbert (ou Hilbertien) tout espace préhilbertien complet.

Donc espace de Hilbert et un espace vectoriel muni d'un norme, ce espace est complet pour la norme $N(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ *et on not :* H*.*

Définition 3.1.2 **:**
Soit F *une partie fermée d'un espace métrique* $(E,\ d)$*. Soit* x *un point de* E*. On appelle projection de* x *sur* F *tout point* y *de* F *vérifiant :*

$$\begin{aligned} d(x,y) &= d(x,F) \\ &= \inf_{y \in F} d(x,y). \end{aligned}$$

Théorème 3.1.3 ***:***

Soit H *un espace de Hilbert et* $(k \subset H)$ *convexe fermé non vide alors : pour tout* $f \in H$*, il existe* x *unique dans* k *tel que :*

$$\begin{aligned} \|f - x\| &= \min_{y \in k} \|f - y\| \\ &= d(f - k) \\ &= \inf_{y \in k} \|f - y\|. \end{aligned}$$

D'outre part x vérifié le propriété suivant :

$$\left\{ \begin{array}{c} x \in k \\ \langle f - x, f - y \rangle \leq 0 \quad \forall y \in k \end{array} \right. .$$

On pose $x = p_k f$ est une projection de f sur k.

Preuve. :

♦L'existence :

Soit $f \in H$.
1)Si $f \in k$ alors : $d(f, k) = 0$ il suffit on pose $x = f$.
2)Si $f \in k$ on pose $d = inf \underset{y \in k}{\|f - y\|}$.
Soit $y \in k$ d'après la propriété caractéristique de inf alors :
$\forall y \in k : \|f - y\| \geq d$ $(*)$
pour $\varepsilon > 0$, il existe $y_\varepsilon \in k$ tel que :
$\|f - y_\varepsilon\| \leq d + \varepsilon$ $(**)$
On prend $\varepsilon = \frac{1}{n}$ tel que : $n \in \mathbb{N}$
de $(*)$ et $(**)$ on a il existe $y_n \in k$ tel que : $d \leq \|f - y_n\| \leq d + \frac{1}{n}$.
Alors :

$$d \leq \lim_{n \to +\infty} \|f - y_n\| \leq \lim_{n \to +\infty} \left(d + \tfrac{1}{n}\right)$$
$$d \leq \lim_{n \to +\infty} \|f - y_n\| \leq d.$$

Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f - y_n\| = d = \inf\limits_{y \in k} \|f - y\|$.
On montre que (y_n) est une suite de Cauchy

$$\|y_n - y_m\| \underset{n,m \to +\infty}{\overset{?}{\longrightarrow}} 0.$$

On utilise identité du parallélogramme.
On pose $y = f - y_m$ et $x = f - y_n$, on trouve :

$$\|f - y_n - f + y_m\|^2 + \|f - y_n + f - y_m\|^2 = 2\left[\|f - y\|^2 + \|f - y\|\right]^2.$$

Donc :

$$\|2f - y_n - y_m\|^2 + \|y_m - y_n\|^2 = 2\|f - y_n\|^2 + 2\|f - y_m\|^2.$$

Par suit :

$$\|y_m - y_n\|^2 = 2\|f - y_n\|^2 + 2\|f - y_m\|^2 = 4\left\|f - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2.$$

Et comme $\dfrac{y_n + y_m}{2} \in k$ (car k est fermé) on a :

$$\begin{aligned}
4\left\|f - \frac{y_n + y_m}{2}\right\| &\leq 4d^2 \\
\|y_m - y_n\|^2 &\leq 2(d + \frac{1}{n})^2 + 2\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 - \|2f - (y_n - y_m)\|^2 \\
0 &\leq \|y_m - y_n\|^2 \leq 2(d + \frac{1}{n})^2 + 2\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 - 4d^2 \\
&\leq 2d^2 + \frac{2}{n}d + \frac{1}{n^2} + 2d^2 + \frac{2}{m}d + \frac{1}{m^2} - 4d^2 \\
&\leq \frac{2}{n}d + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{m}d + \frac{1}{m^2}.
\end{aligned}$$

Passant à la limite $(n, m) \to +\infty$ on trouve :

$$\lim_{n,m \to +\infty} \|y_n - y_m\|^2 = 0.$$

Donc (y_n) est une suite de Cauchy sur H complet alors (y_n) est converge donc il existe $x \in H$ tel que :

$$\lim_{n \to +\infty} y_n = x.$$

Comme que k fermé et $(y_n) \subset k$, alors $x \in k$.

On montre la équivalente $(i \Longleftrightarrow ii)$.

1)$i \Longrightarrow ii)$ on pose $x \in k$

$$\begin{aligned}
\|f - x\| &= \underset{y \in k}{inf} \|f - x\| \\
\|f - y\| &\leq \|f - x\|, \forall y \in k \\
\|f - y\|^2 &\leq \|f - x\|^2 \forall y \in k.
\end{aligned}$$

On prend t$\in [0,1]$ et $z \in k$ tel que : $y=(1-t)x+tz, z \in k$.On trouve :

$$\begin{aligned}\| \ f-y\|^2 &= \|f-(1-t)x-tz\|^2\\ &= \|f-x-t(x-z)\|^2\\ &= \langle f-x-t(x-z), f-x-t(x-z)\rangle\\ &= \langle f-x,f-x\rangle - t\langle f-x,f-z\rangle - t\langle x-z,f-x\rangle + t^2\langle x-z,x-z\rangle\\ &= \|f-x\|^2 - 2t\langle f-x, f-x-z\rangle + t^2\|x-z\|^2.\end{aligned}$$

Donc

$$-2t\langle f-x,f-x-z\rangle + t^2\|x-z\|^2.$$

Par passant à la limite pour $t \to 0$ On trouve :

$$\forall z \in k, \langle f-x, z-x\rangle \leq 0.$$

$2)i \Longleftarrow ii)$ On suppose que tout $z \in k$ que :

$$\langle f-x, z-x\rangle \leq 0.$$

On a :

$$\begin{aligned}\|f-x\|^2 &= \|f-y+y-x\|^2\\ &= \langle f-y+y-x, f-y+y-x\rangle\\ &= \| \ f-y\|^2 + \|y-x\|^2 + 2\langle f-y+y-x\rangle.\end{aligned}$$

Mais :

$$\begin{aligned}\langle f-y+y-x\rangle &= \langle f-x+x-y, f-x+x+y\rangle\\ &= \langle f-x+x-y\rangle - \|y-x\|^2.\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}\|f-x\|^2 - \|f-y\|^2 &= 2\langle f-x, y-x\rangle - \|y-x\|^2 \leq 0\\ \|f-x\|^2 &\leq \|f-y\|^2,\ \forall x \in k\\ \|f-x\| &\leq \|f-y\|,\ \forall x \in k.\end{aligned}$$

Donc :

$$\|f-x\| = \underset{y \in k}{inf}\|f-x\|.$$

♦La unicité :

On montre que x est unique.

On suppose que x_1, x_2 deux projections de f sur k donc ils vérifient pour tout $z \in k$

$$\begin{cases} \langle f - x_1, z - x_1 \rangle \leq 0 & (1) \\ \langle f - x_2, z - x_2 \rangle \leq 0 & (2) \end{cases} .$$

On veut que montrer $x_1 = x_2$. On substitutions z à (1) par x_1 et z à (2) par x_2, par l'addition (1) et (2). On trouve :

$$\begin{aligned} \langle f - x_1 - f + x_2, x_2 - x_1 \rangle &\leq 0 \\ 0 &\leq \|x_2 - x_1\|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Alors :

$$(x_2 - x_1 = 0) \Longrightarrow (x_1 = x_2).$$

■

Conclusion 3.1.4 *:*

Pour tout $f_1, f_2 \in H$: $\|p_k f_{1-} p_k f_2\| \leq \|f_1 - f_2\|$.

Preuve. :

On pose

$$x_2 = p_k f_2,\ x_1 = p_k f_2.$$

Avec $(x_1, x_2) \in k$ et vérifient :

$$\langle f_1 + x_1, z - x_1 \rangle,\ \forall z \in k. \quad (1)$$

$$\langle f_2 + x_2, z - x_2 \rangle,\ \forall z \in k. \quad (2)$$

Donc

$$\langle f_1 - x_1, x_2 - x_1 \rangle \leq 0 \text{ et } \langle f_2 - x_2, x_1 - x_2 \rangle \leq 0.$$

Par adition

$$\begin{aligned}
\langle f_1 - x_1, x_2 - x_1\rangle + \langle f_2 - x_2, x_1 - x_2\rangle &\leq 0\\
\langle f_1 - x_1, x_2 - x_1\rangle + \langle f_2 - x_2, x_1 - x_2\rangle &\leq 0\\
\langle f_1 - x_1, x_2 - x_1\rangle - \langle f_2 - x_2, x_1 - x_2\rangle &\leq 0\\
\langle f_1 - x_1 - f_2 + x_2, x_2 - x_1\rangle &\leq 0\\
\langle f_1 - f_2, x_2 - x_1\rangle + \langle x_2 - x_1, x_2 - x_1\rangle &\leq 0\\
\langle f_1 - f_2, x_2 - x_1\rangle + \|x_1 - x_2\|^2 &\leq 0.
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\|x_1 - x_2\|^2 &\leq -\langle f_1 - f_2, x_2 - x_1\rangle\\
&\leq \langle f_1 - f_2, x_1 - x_2\rangle\\
&\leq \|f_1 - f_2\| * \|x_1 - x_2\|, \quad x_1 \neq x_2.
\end{aligned}$$

Alors :

$$\|f_1 - f_2\| \geq \|x_1 - x_2\|.$$

■

Conclusion 3.1.5 ***:***
Soit H une espace de Hilbert et $M \in H$ un sous espace vectoriel fermé, et soit $f \in H$ On a donc :

$$x = p_m f \overset{déf}{\to} \begin{cases} i) x \in M \\ ii) \langle f_1 - x, y\rangle = 0, \forall y \in M \end{cases}.$$

Preuve. :
$\langle f_1 - x, y - x\rangle \leq 0$, $\forall y \in M$: On pose $z \in M$, $y = tz$,

$$\begin{aligned}
\langle f - x, tz - x\rangle &= \langle f - x, tz\rangle - \langle f - x, x\rangle\\
&= t\langle f - x, z\rangle - \langle f - x, x\rangle\\
t &\leq \langle f - x, z\rangle \leq \langle f - x, z\rangle.
\end{aligned}$$

Pour $t > 0$, $y = -tz$,

$$\begin{aligned}
(\langle f - x, -tz\rangle \leq 0) &\Longrightarrow (-t\langle f - x, z\rangle - \langle f - x, x\rangle \leq 0)\\
&\Longrightarrow (-t\langle f - x, z\rangle \leq \langle f - x, x\rangle)\\
&\Longrightarrow (\langle f - x, x\rangle \leq t\langle f - x, z\rangle).
\end{aligned}$$

On calculons $(\langle f-x,x\rangle)$:

$$\begin{aligned}(y=2x) &\Longrightarrow (\langle f-x,x\rangle \leq 0)\,,\, 2x\in M\\ (y=0) &\Longrightarrow (\langle f-x,-x\rangle \leq 0)\,,\, 0\in M\\ &\Longrightarrow (-\langle f-x,x\rangle \leq 0)\\ &\Longrightarrow (0\leq \langle f-x,x\rangle \leq 0)\\ &\Longrightarrow (\langle f-x,x\rangle = 0)\\ &\Longrightarrow (\langle f-x,z\rangle = 0)\,.\end{aligned}$$

■

3.2 Dual d'un espace Hilbert

Représentation du dual

Rappelons que le dual de H est $H'=\{\varphi : H\to \Bbbk,\ \varphi \text{ linéaire continue}\}$.

Savoir donner une représentation "concrète" du dual d'un espace fonctionnel permet souvent de résoudre des problèmes sur l'espace lui même.

Nous avons vu que pour tout $y\in H$ la forme linéaire $\langle .,y\rangle$ est continue c'est-à-dire un élément du dual H', il savoir que tous les éléments de H' sont de cette forme.

Théorème 3.2.1 ***(Fréchet-Reisz) :***
Soit H un espace de Hilbert, alors pour tout $\varphi\in H'$, il existe un unique $y\in H$ tel que :

$$\forall x\in H,\ \varphi(x)=\langle x,y\rangle\,.$$

De plus :

$$\|\varphi\|_{H'}=\|y\|_H\,.$$

Preuve. :

♦La unicité :

Soit $\varphi\in H'$, supposons qu'il existe $(y_1,y_2)\in H$ tel que : $\forall x\in H$: $\varphi(x)=\langle x,y_1\rangle$ et $\varphi(x)=\langle x,y_2\rangle$. Donc

$$(\langle x,y_1\rangle=\langle x,y_1\rangle)\Longrightarrow(\langle x,y_1-y_2\rangle=0)\,.$$

Donc :

$$(y_1-y_2)\in H^{\perp}=\{0\}\,.$$

D'où $y_1 = y_2$.

♦Les existence :

Si $\varphi = 0$ il existe $y = 0$, tel que :

$$\forall x \in H,\ \varphi(x) = \langle x, 0\rangle = 0.$$

Si $\varphi \neq 0$, sur H (ie : $ker\,(\varphi) \neq\ H$). Mais $ker\,(\varphi)$ est fermé ($ker\,(\varphi){=}\varphi^{-1}(\{0\})$), φ continue donc $ker\,(\varphi)^{\perp} \neq \{0\}$.

Soit $y_0 \in F^{\perp}$ et $y_0 \neq 0$,

$$\forall x \in H,\ x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(y_0)} y_0 = z \in\ ker(\varphi).$$

Donc :

$$\left(\left\langle x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(y_0)} y_0, y_0 \right\rangle = 0\right) \Longleftrightarrow \left(\langle x, y\rangle - \frac{\varphi(x)}{\varphi(y_0)} \|y_0\|^2 = 0\right).$$

Donc :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{\varphi(y_0)}{\|y_0\|^2} \langle x, y\rangle \\ &= \left\langle x, \frac{\overline{\varphi(y_0)}}{\|y_0\|^2} y_0 \right\rangle.\end{aligned}$$

On prend $y = \frac{\overline{\varphi(y_0)}}{\|y_0\|^2} y_0$. On trouve :

$$\forall x \in H, \varphi(x) = \langle x, y\rangle.$$

Montrons que :

$$\|\varphi\|_{H'} = \|y\|_H.$$

On a :

$$\forall x \in H,\quad \exists y \in H,\quad \varphi(x) = \langle x, y\rangle.$$

Donc :

$$\begin{aligned}|\varphi(x)| &= |\langle x, y\rangle| \\ &\leq \|x\|\,\|y\|.\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{H'} &= \sup_{\|x\|=1} |\varphi(x)| \leq \sup_{\|x\|=1} \|x\| \, \|y\| = \|y\| \, . \\
\|\varphi\|_{H'} &\leq \|y\|_H \, . \qquad (1)
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\|y\|^2 &= |\langle y, y\rangle| \\
&= |\varphi(y)| \\
&\leq \|\varphi\|_{H'} \|y\| \, .
\end{aligned}$$

Donc :

$$\|y\|_H \leq \|\varphi\|_{H'} \, . \qquad (2)$$

De (1) et (2) on trouve que :

$$\|\varphi\|_{H'} = \|y\|_H \, .$$

■

Remarque 3.2.2 *:*
Le théorème de représentation de (Reisz-Fréchet) caractérise le dual topologique d'un espace de Hilbert il montre comment on obtient toutes les formes linéaires continues sur un espace de Hilbert.

3.3 Orthogonalité

Définition 3.3.1 *:*
Soient x et y deux vecteurs d'un espace Hilbert H. On dit qu'ils sont orthogonaux, si leur produit scalaire est nul. On note :

$$(x \perp y) \Longleftrightarrow (\langle x, y\rangle = 0) \, .$$

Définition 3.3.2 *:*
Soit (x_n) une suite dans H on dit que (x_n) est orthogonal si tous les éléments de (x_n) est orthogonaux deux à deux :

$$\langle x_n, x_m\rangle = 0, \; \forall n \neq m.$$

Corollaire 3.3.3 *:*
Soit H un espace de Hilbert et F un sous espace vectoriel fermé de H alors :

1) $F^{\perp\perp} = \overline{F}$.

2) $H^{\perp} = \{0\}$.

3) F *est dense dans* H *si et seulement si* $F^{\perp} = \{0\}$.

Preuve. :

1) Pour montre que $F^{\perp\perp} = \overline{F}$ il suffit montre que :

$$F^{\perp\perp} \supset \overline{F} \text{ et } F^{\perp\perp} \subset \overline{F}.$$

On a :

$$F \subset F^{\perp\perp} \Longrightarrow \overline{F} \subset \overline{F^{\perp\perp}}.$$

Mais $F^{\perp\perp} = \overline{F}^{\perp\perp}$, donc $\overline{F} \subset F^{\perp\perp}$.

D'autre part $F \subset F^{\perp}$, alors $\overline{F^{\perp}} \subset F^{\perp}$, par suite $F^{\perp\perp} \subset \overline{F}^{\perp}$.

Mais :

$$\overline{F}^{\perp} = \overline{F}.$$

Donc : $F^{\perp\perp} \subset \overline{F}$.

Alors : $F^{\perp\perp} = \overline{F}$.

2) Il est clair.

3) On suppose que F dense dans H.

(F dense dans H) $\Longleftrightarrow \left(\overline{F} = H\right)$,

$\Longleftarrow)\overline{F}^{\perp} = H^{\perp}$ et on a $H^{\perp} = \{0\}$, alors : $\overline{F}^{\perp} = \{0\}$ mais $F = \overline{F}^{\perp}$.

Donc :

$$F^{\perp} = \{0\}.$$

$\Longrightarrow)$On suppose que $F^{\perp} = \{0\}$ et on a, $F = \overline{F}^{\perp}$ et $H^{\perp} = \{0\}$, alors $\overline{F}^{\perp} = H^{\perp}$, par suite $\overline{F}^{\perp\perp} = H^{\perp\perp}$.

Donc :

$$\overline{F} = H.$$

Définition 3.3.4 ***:***

Soit H *un espace de Hilbert une famille* $(e_i)_{i\in I}$ *des vecteur de* H *est dite :*

1) Orthogonal si : $\langle e_i, e_j \rangle = 0, \forall j, i \in I$ *avec* $i \neq j$.

2) Orthonormée si :

$$\begin{cases} \langle e_i, e_j \rangle = 0, \forall j, i \in I \textit{ et } i \neq j \\ \langle e_i, e_i \rangle = 1, \forall i \in I \end{cases}.$$

3) Totale si vect$((e_i)_{i\in I})$ *est dense dans* H.

Exemple 3.3.5 :

Dans l'espace de Hilbert $\mathcal{L}^2(\mathbb{N})$ *la famille* $(e_i)_{i\geq 1}$ *tel que :* $e_i = (0, 0,\ ...,\ 0,\ 1,\ 0,\ ...)$ *est orthonormée.*

Posons $(e_{i,n})_{n\geq 1} = e_i$, *donc :*

$$\langle e_i, e_j\rangle = \langle (e_{i,n}), (e_{j,n})\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} e_{i,n}\overline{e_{j,n}}.$$

On a :

$$\begin{array}{lll} (e_{i,n}\overline{e_{j,n}} = 0 \quad si \quad i \neq j) & \Longrightarrow & (\langle e_i, e_j\rangle = 0)\,. \\ (e_{i,n}\overline{e_{j,n}} = 1 \quad si\ i = j\ ) & \Longrightarrow & (\langle e_i, e_j\rangle = 1 \ \ \forall \ \ i \geq 1)\,. \end{array}$$

Donc la famille $(e_i)_{i\geq 1}$ *est orthonormée.*

■

Lemme 3.3.6 *:*
Soit $(x_1,\ x_2,\quad ,\ x_k)$ *des vecteurs orthogonaux deux à deux dans un espace Hilbert alors :*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2\,.$$

Preuve. :
Soit (x_k) *des ensembles des vecteurs orthogonaux deux à deux, pour tout* $n, m \in \mathbb{N}$ *tel que* $(n \neq m)$, *on a*

$$\langle x_n, x_m\rangle = 0. \qquad (*)$$

Et on a :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{k=1}^{n} x_k \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left\langle x_k, \sum_{k=1}^{n} x_k \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left\langle x_1, \sum_{k=1}^{n} x_k \right\rangle + \sum_{k=1}^{n} \left\langle x_2, \sum_{k=1}^{n} x_k \right\rangle + ... + \sum_{k=1}^{n} \left\langle x_k, \sum_{k=1}^{n} x_k \right\rangle. \end{aligned}$$

Par utilisons la relation $(*)$ on trouve :

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{n}x_k\right\|^2 &= \langle x_1,x_1\rangle = \langle x_2,x_2\rangle + ... + \langle x_k,x_k\rangle \\ &= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + ... + \|x_k\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^2 .\end{aligned}$$

■

Corollaire 3.3.7 *:*

1) Tout famille orthonormée est libre.

2) $(e_i)_{i\in I}$ est une famille totale si seulement si la condition $(\langle x,e\rangle = 0, \forall i \in I) \Longrightarrow (x=0)$.

Preuve. *:*

1) Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormée.

Supposons que $\sum\limits_{j\in J}\alpha_j e_j = 0$ avec $J \in I$ et J finie donc$\forall i \in J$:

$$\begin{aligned}\left\langle \sum_{j\in J}\alpha_j e_j, e_i\right\rangle = 0 \Longleftrightarrow \sum_{j\in J}\alpha_j \langle e_j,e_i\rangle = 0 &\Leftrightarrow \alpha_i\langle e_i,e_i\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha_i = 0.\end{aligned}$$

Alors la famille $(e_i)_{i\in I}$ est libre.

2) Soit une famille de H et $F = vect(e_i)_{i\in I}$.

$\Longrightarrow$) Supposons que $(e_i)_{i\in I}$ est une famille totale alors F est dense dans H.

Donc :

$$\overline{F} = H \Longleftrightarrow F^{\perp} = \{0\}.$$

Suppose de plus que :

$$\langle x,e_i\rangle = 0, \forall i \in I.$$

Donc :

$$\forall y \in F, \langle x,y\rangle = 0.$$

D'où $x \in F^{\perp}$ donc $x = 0$,

$\Longleftarrow$) Supposons que :

$$(\langle x,e_i\rangle = 0, \forall i \in I) \Longrightarrow (x = 0).$$

Soit :

$$y \in F^{\perp}, \ \forall i \in I, \ e_i \in F.$$

Donc :

$$\langle y, e_i \rangle = 0, \forall i \in I \Longrightarrow y = 0.$$

D'où $F^{\perp} = \{0\}$ *alors la famille* $(e_i)_{i \in I}$ *est totale.*

Lemme 3.3.8 :
Soit $(e_i)_{i\in I}$ *une suite finie des vecteur orthonormée dans espace vectoriel. On pose vect*$(e_i)_{i\in I}$ *pour tout vecteur* $x \in H$, $y = \sum_{i=1}^{n} (x_i, e_i)\, e_i$ *est un projection orthogonal de* x *sur* F.
ie) : $y \in F$ *et* $(x - y)$ *orthogonal sur* F.

■

Preuve. :

On montre que $y \in F$.
On a :

$$y = \sum_{i=1}^{n} (x_i, e_i)\, e_i.$$

y est une combinaison linéaire de e_i alors $y \in F$.

Pour montrer que $(x - y)$ orthogonal sur F il suffit montrer que $\langle x - y, z \rangle = 0$, $\forall z \in F$.

Soit $z \in F$,

$$\langle x - y, z \rangle = \left\langle x - \sum_{i=1}^{n} (x_i, e_i)\, e_i, z \right\rangle, \forall z \in F.$$

Comme $z \in F$ alors il existe α_j tel que :

$$z = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j.$$

Et on a :

$$\langle x - y, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle y, e_j \rangle = 0.$$

comme $(x - y)$ orthogonal sur tout les vecteurs (e_j) alors $(x - y)$ orthogonal sur F.

■

Proposition 3.3.9 ***(projection et orthogonale) :***

Si $(e_1,\ e_2,\ .....,\ e_n)$ *est une base orthonormée de* F *alors pour tout* $x \in H$*, on a :*

$$\begin{aligned} P_F(x) &= \sum_{k=1}^{n} \overline{\langle e_k, x\rangle} e_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \overline{\langle x, e_k\rangle} e_k. \end{aligned}$$

Preuve. :

On pose $y = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle\, e_k$*, il suffit de montrer que* $x - y \in F^{\perp}$, $\forall i = 1,\ 2,\ ...,\ n$ *on a :*

$$\begin{aligned} \langle e_i, x - y\rangle &= \langle e_i, x\rangle - \langle e_i, y\rangle \\ &= \langle e_i, x\rangle - \left\langle e_i, \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle\, e_k \right\rangle \\ &= \langle e_i, x\rangle - \sum_{k=1}^{n} \overline{\langle e_k, x\rangle}\, \langle e_i, e_k\rangle \\ &= \langle e_i, x\rangle - \overline{\langle x, e_i\rangle} \\ &= \langle e_i, x\rangle - \langle e_i, x\rangle\, . \end{aligned}$$

Alors $x - y \in F^{\perp}$*, donc :*

$$\begin{aligned} P_F(x) &= y \\ &= \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle\, e_k. \end{aligned}$$

■

Définition 3.3.10 ***(Famille sommable) :***

Soit E *un espace normé,* I *est un ensemble quelconque et* $(x_i)_{i\in I}$ *une famille d'élément de* E*, on dit que la famille* $(x_i)_{i\in I}$ *est sommable de somme* $(S) \in E$ *et on écrit* $(S) = \sum\limits_{i\in I} x_i$*, si pour tout* $\varepsilon > 0$*. Il existe une partie finie* $J \subset I$ *tel que : Pour tout partie* $K \subset I$ *avec* $J \subset K$ *et soit* $\left\| S - \sum\limits_{i\in k} x_i \right\| < \varepsilon$ *la somme* S *est unique.*

Lemme 3.3.11 ***(Inégalité de Bessel) :***

Si $(e_i)_{i\in I}$ *est une famille orthonormée d'un espace de Hilbert* H*, alors pour tout* $x \in H$*, la famille* $\left(|\langle x_i, e_i\rangle|^2\right)_{i\in I}$ *est sommable dans* $\mathbb{R}$ *et on a :*

$$\sum_{i\in I} |\langle x_i, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \ \text{(Inégalité de Bessel)}.$$

Preuve. :

Pour toute partie finie J de I, on pose :

$$y = x - \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j.$$

Il est claire que : $y \in (vect(e_j)_{j\in J})^{\perp}$, on a :

$$x = y + \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \left\| y + \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j \right\|^2 \\ &= \|y\|^2 + \left\| \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j \right\|^2 \\ &= \|y\|^2 + \sum_{j \in J} |\langle x, e_j \rangle e_j|^2 \\ &\geq \sum_{j \in J} |\langle x, e_j \rangle e_j|^2. \end{aligned}$$

Alors l'ensemble des sommes finies est majoré par $\|x\|^2$, donc la forme $\left(|\langle x_i, e_i \rangle|^2\right)_{i\in I}$ est sommable et on a :

$$\sum_{i \in I} |\langle x_i, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

■

Lemme 3.3.12 *:*

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite orthogonale dans espace de Hilbert H. La série des vecteurs $\sum x_k$ est convergente si et seulement si :

$$\sum \|x_k\|^2 \leq +\infty.$$

Remarque 3.3.13 *:*

Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite orthonormée dans espace de Hilbert H. La série des vecteurs

$\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k e_k$ *est convergente dans* H *si et seulement si :*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |c_k|^2 \leq +\infty.$$

Dans ce cas on a :

$$\left\| \sum_{k=0}^{+\infty} c_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |c_k|^2 .$$

Lemme 3.3.14 ***:***

Soit $(e_n)_{n\geq 0}$ *une suite orthonormée dans un espace de Hilbert* H*, et* F *est un espace vectoriel fermé engendré par la suite* $(e_n)_{n\geq 0}$ *Pour tout* $(y \in F)$ *on a :*

$$y = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle y_i, e_i \rangle \, e_i.$$

Preuve. :

Soit $y \in F$ et soit $z \in F$ définie par :

$$z = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k e_k.$$

Tel que :

$$c_k = \langle y, e_k \rangle \, .$$

D'après lemme précédent on a La série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k e_k$ est convergente, il faut montrer facilement que $c_j = \langle y, e_j \rangle$ et $\langle y - z, e_j \rangle = 0$, alors $(z - y) \perp F$, et comme $y \in F$, $z \in F$, alors $(z - y) \in F$, Donc :

$$y = z = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k e_k.$$

■

Conclusion

Nous somme accomplir ce modeste travail que nous avons touché à travers les trois chapitres d'étude de l'espace de Hilbert.

Comme nous l'avons dispersé ses louanges et nous l'avons connues leur ségrégations majeur, leur concept est un acquittement plus important dans ses caractéristiques et exposés à sa base Hilbertien.

Bibliographie

[1] Exercice & problème (Algèbre) Maurice Gaultier ©Dunod, paris 2008.

[2] Cours et exercices avec solution Lionel Schwartz ©Dunod, paris 2003

[3] Mathématiques L3 analyse Jean Pierre Marco France 2009.

[4] Exercices de topologie et d'analyse G.Flory librairie Vuibert 63 Boulevard Saint-Germain 75005, paris 1976.

[5] Houcine Chebli : Analyse Hilbertienne, Tunis 2001.

[6] Francis Hirsch Gilles Lacombe : Eléments d'analyse fonctionnelle, Office des publications universitaires.

[7] Mostefai Abdelhafid : cours de topologie, Office des publications universitaires.

[8] Analyse fonctionnelle et théorie spectral MT 404, 2001_2002.

[9] Introduction aux espace normés Mohammed Hazi l'office des publication Nationnel Alger 1994.