الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Minstère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

CENTRE UNIVERSITAIRE DE MILA
INSTITUT DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

Réf. ***/11***

Mémoire de fin d'étude
Présenté pour l'obtention du diplôme de

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine : **Mathématiques et Informatique**
Filière : **Mathématiques**
Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Thème

Le théorème du point fixe et ces applications

Présenté par :

- Lalaoui Fatima Zohra
- Mimouni Mouna

Dirigé par :

PR / Hamri nasreddine

Année universitaire 2010-2011

Remerciement

Nous remercierons dieu le tout puissant pour nous avoir

Offert la patience durant toutes ces années

Nous tenons à remercier, tous ceux qui nous ont aidé a

Eclaircir dans accomplissement de cette tâche, et plus particulièrement

-Le professeur«Hamri Nasreddine,pour avoir diriger ce travail

-Les deux maitre de conférence Laâlou Mohamed et Laâwira Wided

Nous remercierons aussi :

-Lalaoui Soumia et Mohamed, Mimouni Abdelmadjid Magrous Ammar, Meghzili riad, Boumezbeur Samir et tous ceux qui ont supervisé avec beaucoup

D'attention notre travail

*******MERCI A TOU**

Mouna et Fatima

Sommaire

Chapitre 3 : Les application du théorème de point fixe dans un espace topologique et dans un espace affine

Introduction

Le point de départ du théorème de point fixe est le théorème du point Fixe du mathématicien hollandais " Luitzen Egbertus Jan Brouwer ", Avant la découvre de ce théorème par Brouwer ,le mathématicien Henri Poincaré en 1886 démontre un résultat équivalent à ce théorème.

L'énoncé exact est démontré pour la dimension trois par Piers Bohl pour la première fois en 1904, puis par Jacques Hadamard dans le cas général en 1910, Luitzen Brouwer propose une nouvelle démonstration en 1912.

Le théorème de point fixe du Brouwer est étudié à la suite de travaux sur les équations différentielles de mathématiciens français comme Poincaré et Picard. Démontrer des résultats comme le théorème de Poincaré-Bendixson demande l'usage d'outils de topologie.

Ces études de la fin du XIX^{e} siècle débouchent sur plusieurs versions successives du théorème de point fixe de Brouwer .

1) Le point fixe :

1.1) Définition :

En mathématiques, pour une application *f* d'un ensemble *E* dans lui-même, un élément *x* de *E* est un point fixe **de *f*** si

$$f(x) = x.$$

1.2) Quelques exemples :

- Dans le plan, la symétrie par rapport à un point *A* admet un unique point fixe *A*
- L'application ***inverse*** (définie sur l'ensemble des réels non nuls) admet deux points fixes : -1 et 1

Graphiquement, les points fixes d'une fonction *f* (où la variable est réelle) s'obtient en traçant la droite d'équation $y = x$: tous les points d'intersection de la courbe représentative de *f* avec cette droite sont alors les points fixes de *f*.

Toutes les fonctions n'ont pas nécessairement de point fixe; par exemple, la fonction $x \mapsto x+1$ n'en possède pas, car il n'existe aucun nombre réel *x* égal à $x+1$.

1.3) Point fixe et suites récurrentes :

On considère la fonction continue $f : E \mapsto E$ et(u_n) la suite récurrente définie par sa valeur initiale u_0 et par la relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$. Dans ce cas, si (u_n) converge, elle le fait nécessairement vers un point fixe de *f*.

Il faut noter qu'une telle suite ne converge pas *forcément*, même si *f* possède un point fixe.

1.4) Point fixe attractif :

Un **point fixe attractif** d'une application f est un point fixe x_0 de f tel qu'il existe un voisinage de x_0 sur lequel la suite de nombre réels

$$x,\ f(x),\ f(f(x)),\ f(f(f(x))),\ \ldots$$

converge vers x_0.

Par exemple, la fonction cosinus admet un unique point fixe, qui est attractif. Cependant, tous les points fixes d'une fonction ne sont pas nécessairement attractifs.

Ainsi, la fonction réelle $x \mapsto x^2 + x$ possède un unique point fixe en 0 qui n'est pas attractif.

Les points fixes attractifs sont un cas particulier du concept mathématique d'attracteur.

2) Théorème du point fixe :

Il existe plusieurs théorèmes permettant de déterminer qu'une application satisfaisant à certains critères possède un point fixe. Le plus connu est le théorème suivant :

Soit E un espace métrique complet muni d'une distance d et $f : E \mapsto E$ une application contractante (c'est-à-dire qu'il existe $k \in [0,1[$ tel que pour tous $(x,y) \in E^2$, $d(f(x),f(y)) \leq k.d(x,y)$).

Alors f possède un unique point fixe α.

Ce résultat permet de dire que toute suite de la forme $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers α et que $d(x_n, \alpha) \leq K^n d(x_0, \alpha)$, ce qui permet d'avoir une estimation de la vitesse de convergence de la suite.

3) Démonstration :

Pour tout entier p on a facilement par récurrence $d(x_{p+1}, x_p) \leq k^p d(x_1, x_0)$.

Pour r entier ≥ 1 on écrit

$$d(x_{p+r}, x_p) \leq d(x_{p+r}, x_{p+r-1}) + \ldots + d(x_{p+1}, x_p) \leq (k^{p+r-1} + \ldots + k^p)\, d(x_1, x_0) = \frac{k^p - k^{p+r}}{1-k}\, d(x_1, x_0)$$

$$\leq \frac{k^p}{1-k}\, d(x_1, x_0)$$

Cette dernière quantité tendant vers 0 avec p, cela prouve que la suite (x_n) est une suite de Cauchy donc convergente vers $\alpha \quad E$.

D'autre part pour tout entier n on a $x_{n+1} = f(x_n)$. Une application contractante étant continue on en déduit en faisant tendre n vers l'infini que $\alpha = f(\alpha)$ donc α est point fixe de f.

Si β est un autre point fixe on a $d(\alpha, \beta) = d(f(\alpha), f(\beta)) \leq kd(\alpha, \beta)$. Comme

$k \in [0, 1[$

cela implique que $d(\alpha, \beta) = 0$ soit $\alpha = \beta$.

Remarque : si on remplace $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ par $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour tous x et y distincts de E, la conclusion peut tomber en défaut.

Par exemple si f est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$, on a :

$$f'(x) \quad [0, 1[$$

pour tout x donc pour tous réels x et y distincts on a $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ d'après le théorème des accroissements finis et f n'a pas de point fixe.

4) Exemple :

Étudier la convergence de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [-1\,, +\infty\,[\\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$$

On introduit l'application f définie sur $[-1, +\infty[$ par :

$$x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \sqrt{1+x}$$

Point fixe de f :

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{1+x} = x \Leftrightarrow x \geq 0 \text{ et } x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

On montre facilement que f est dérivable sur $]-1, +\infty[$, croissante sur

$[-1, +\infty[$, puis que :

$$f(\,[-1, +\infty[\,) = [0, +\infty[\subset [-1, +\infty[$$

L'intervalle $I = [-1, +\infty[$ est donc stable et la suite (u_n) est bien définie.

De plus : $\forall x \in \ _+\ ,\ |f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{2}$

D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (a, b) \in \ _+ \times \mathbb{R}_+\,,\ |f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2}\ |b - a|$$

Donc f est $\frac{1}{2}$ - lipschitzienne sur I, donc contractante sur I.

En outre : $f(\ _+) = [1, +\infty[\subset \mathbb{R}_+$

Donc $\mathbb{R}_+$ est stable par f.

D'après le théorème du point fixe, la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+ \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$$ converge donc vers ϕ.

Enfin, si $u_0 \in [-1, 0]$ alors $u_1 \in \mathbb{R}_+$, et d'après ce qui précède, (u_n) converge encore vers ϕ.

1) Les applications du théorème du point fixe :

1.1) Point fixe d'une application :

1.1.1) Définition :

Soit A une application d'un ensemble E dans lui-même, on appelle **point fixe** de A tout point $\hat{u}$ de E tel que $A(\hat{u}) = \hat{u}$.

S'il existe un tel $\hat{u}$, on dit que A possède un point fixe.

1.1.2) Exemples :

Exemple 1 :

A) $f : [0,1] \to [0,1]$, $t \mapsto f(t) = t$; tout point de [0,1] est point fixe de f.

Soit $f_n : [0,1] \to [0,1]$, $t \mapsto f_n(t) = (1 - \frac{1}{n})\, t$, n entier ≥ 2 : f_n n' a qu'un seul point fixe : $t = 0$.

Remarquons que $\|f - f_n\|_\infty = sup_{t \in [0,1]} \left|t - \left(1 - \frac{1}{n}\right) t\right| = \frac{1}{n}$

la suite des fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur [0,1] . Le nombre des point fixe n'est pas « stable » , même pour une « bonne » approximation .

B) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto g(t) = t + 1$ n 'a aucun point fixe . La simplicité d'une application ne lui donne pas de point fixe …

Rappelons qu'étant donnés deux espaces métriques (E , d) , (F , δ) et une application $A : E \to F$, nous avons introduit la terminologie suivante :

A est **lipschitzienne** de constante $k \geq 0$ sur E si

(1.1) $\forall u \in E, \forall v \in E : \delta [A(u), A(v)] \leq k . d(u, v)$.

(1.2) si $k = 1$: on dit que A est **contractante** (ou: est une contraction) sur E.

(1.3) si $k < 1$: on dit que A est strictement contractante (ou : est une contraction stricte) sur E.

Si A vérifie :

(1.4) $\forall u \in E, \forall v \in E, u \neq v : \delta [A(u), A(v)] < d(u, v)$, on dit qu' elle est contractive sur E .

Exemple 2 :

soit $A : E \to E$, où E est un espace métrique . Si A est contractante sur E , elle peut avoir des points fixes ou ne pas en avoir , en avoir une infinité .

Une application contractive peut ne pas avoir de point fixe : E: $=[1,+\infty[$,

$f(t) := t + \frac{1}{t}$; $\left|f(t) - f(s)\right| = \left|(t - s) + \frac{s-t}{st}\right| = \left|t - s\right| . (1- \frac{1}{st}) < \left|t - s\right|$

pour $s \neq t$, mais f n'a aucun point fixe sur E .

2) Les applications du théorème du point fixe dans un espace métrique :

2.1) Définition d'un espace métrique :

Soit E un ensemble. Une distance sur E est une application

$d : E \times E \to [0,+\infty[$ telle que, pour tous x, y, z dans E,

(1) (annulation sur la diagonale) $d(x, x) = 0$;

(2) (séparation) si $d(x, y) = 0$, alors $x = y$;

(3) (symétrie) $d(x, y) = d(y, x)$;

(4) (inégalité triangulaire) $d(x,\, y) \leq d(x,\, z) + d(z,\, y)$.

Si d est une distance sur E, alors

$$d(x,\, y) \geq |d(x,\, z) - d(z,\, y)|$$

pour tous $x,\, y,\, z$ dans E (cette inégalité s'appelle l'inégalité triangulaire inverse).

Un espace métrique est un ensemble X muni d'une distance d. Par abus, nous noterons souvent X le couple $(X,\, d)$,en notant plus précisément d_X la distance de X si nécessaire (le contexte aidant, cela l'est rarement, et d désignera par défaut la distance de tout espace métrique considéré).

2.2) Méthode des approximations successives :

Soit f : $[a,\, b] \rightarrow [a,\, b]$ une fonction strictement contractante de constante $k \in \,]0\,,1[$.

On aura cette condition si , par exemple, f est dérivable sur $[a\,,b]$ avec :

$0 < |f'(t)| \leq k < 1$ pour tout $t \in [a\,,b]$ (théorème des accroissements finis) .

D’après le **théorème du point fixe de contractions strictes** suivant :

Soit E un espace métrique **complet** , soit F une partie ***f*ermée** de E , et soit $A : F \rightarrow E$ une application **strictement contractante** de constante $k \in [0\ ,\ 1[$ telle que $A(F) \subset F$. On a :

1) Existence et unicité : il existe $\hat{u} \in F$ unique point fixe de A , i.e. tel que $A(\hat{u}) = \hat{u}$.

2) Algorithme de calcul ou convergence des itérations : la suite (u_n) de points de F telle que $u_{n+1} = A(u_n)$ où $u_0 \in F$ est arbitrairement choisi [stabilité] est convergente de limite $\hat{u}$.

Remarque : Notant $A^0 = Id_E$, $A^1 = A$, $A^2 = A \circ A$,…., $A^{n+1} = A \circ A^n$ (itérés de A) , on a : $u_{n+1} = A^{n+1}(u_0)$.

3) Estimations de l'erreur : pour tout $n \geq 0$, on a :

3.1) Estimation a priori : $d(u_n , \hat{u}) \leq \dfrac{k^n}{1-k}\, d(u_0 , u_1)$.

3.2) Estimation a posteriori : $d(u_{n+1} , \hat{u}) \leq \dfrac{k}{1-k}\, d(u_n , u_{n+1})$.

4) Vitesse de convergence : $d(u_{n+1} , \hat{u}) \leq k \, . \, d(u_n , \hat{u})$ [convergence dite linéaire] .

la suite : $t_0 \in [a\ ,\ b]$ arbitraire , $t_1 = f(t_0)$, $t_2 = f(t_1)$, …, $t_{n+1} = f(t_n)$,…est convergente vers la solution unique $\hat{y}$ de l'équation $f(t) = t$ sur l'intervalle $[a\ ,\ b]$.

Deux situations distinctes se présentent suivant que $0 < f'(t) < 1$ ou bien que $-1 < f'(t) < 0$. Dans le premier cas la suite des itérés est monotone : croissante si t_0 a été pris à gauche du point fixe t . décroissante si t_0 a été pris à droite du point fixe t .

Dans le second cas deux termes consécutifs de la suite encadrent la solution cherchée.

Il est recommandé au lecteur de dessiner ces deux situations en axes orthonormés, en utilisant la première bissectrice pour construire les itérés.

Soit à présent l'équation $g(t) = 0$, où $t \in [a\ ,\ b]$, g vérifiant : $g\ (a) < 0$ et

$g\ (b) > 0$, g dérivable sur $[a\ ,\ b]$, et : $\exists\ c$, $\exists\ C$ réels tels que :

$0 < c \leq g'\ (t) \leq C$ pour $a \leq\ t \leq b$.

Posons : $f(t) := t - \lambda\ .\ g\ (t)$, où $\lambda \neq 0$ est à choisir au mieux ultérieurement.

L'équation proposée $g\ (t) = 0$ équivaut à la recherche d'un point fixe pour f.

On a : $f'\ (t) = 1 - \lambda\ .\ \ g'\,(t)$, d'où : $1 - \lambda\ .C \leq\ f'\ (t) \leq 1 - \lambda.c$.

On peut jouer sur λ , jusqu'ici arbitraire , de manière à assurer la convergence de la méthode des approximations successives du **théorème du point fixe de contractions strictes** , et on dispose ainsi d'une méthode pour trouver une valeur approchée de la solution de l'équation

$g\ (t) = 0$.

2.3) Résolution de systèmes linéaires :

On se propose de résoudre le système linéaire

$$M.\ X = B$$

à n équation et n inconnues (M est une matrice carrée $n \times n$ donnée

B une matrice colonne donnée , X est la matrice colonne cherchée).

Posons $A := I - M$,où I est la matrice unité , et : $g(X) := A.X + B$. La résolution de $M.X = B$ est équivalente à la recherche d'un point fixe de g ; en effet :

$$g(X) = X \Leftrightarrow A.X + B = X \Leftrightarrow X - A.X = B \Leftrightarrow M.X = B .$$

Bien entendu, le fait que g soit ou bien ne soit pas une contraction stricte va dépendre du choix de la distance qu'on mettra sur $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$).

Pour $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ et $Y = (w_1, \ldots, w_n)$, prenons d'abord sur $\mathbb{R}^n$ la distance

$d_\infty(X, Y) = \max\limits_{1 \le i \le n} |\xi_i - w_i|$, Notons : $A = (a_{i,j})$, $1 \le i , j \le n$. On a :

$$d_\infty[g(X), (Y)] = d_\infty(A.X + B , A.Y + B) = \max_{1 \le i \le n} |A.(X - Y)_i|$$

$$= \max_{1 \le i \le n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} (\xi_i - w_j) \right|$$

$$\le \max_{1 \le i \le n} \left[\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| . |\xi_j - w_j| \right]$$

$$\le \max_{1 \le i \le n} \left[\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right] . \max_{1 \le j \le n} |\xi_j - w_j|$$

$$= \max_{1 \leq i \leq n} \left[\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right] . \ d_{\infty}(X, Y) ,$$

et donc *g* sera une contraction stricte lorsque *A* =*I*-*M* vérifie:

$$\|A\|_{1,\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \left[\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right] < 1.$$

Le lecteur vérifiera que si l'on prend sur $\mathbb{R}^n$ la distance

$$d_1(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} | \xi_i - w_i | ,$$

on tombe sur la condition suffisante :

$$\|A\|_{\infty,1} = \max_{1 \leq j \leq n} \left[\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right] < 1 .$$

si l'on prend

$$d_2(X, Y) = \left(\sum_{i=1}^{n} | \xi_i - w_i|^2 \right)^{1/2}$$

on tombe sur la condition :

$$\|A\|_{2,2} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^{2} < 1 .$$

Dès que l'une de ces conditions suffisantes (et nullement nécessaires) est vérifiée, on peut appliquer la méthode des approximations successives :

$X_0 \in \mathbb{R}^n$ arbitraire, $X_1 = g(X_0), \ldots, X_{n+1} = g(X_n), \ldots$

Bien entendu g n'est pas ‹‹obligée›› d'être strictement contractante ! La méthode ne peut ‹‹marcher›› à coup sûr que si elle l'est.

Au point de vue analyse numérique, on utilise généralement

d'autres méthodes plus performantes (rapidité, coût).

2.4) Résolution d'une équation intégrale :

Soit $[a\ ,\ b]$, $a < b$, un intervalle compact dans $\mathbb{R}$ .On considère l'espace de Banach $E = C_\infty([a\ ,\ b], \mathbb{R})$.On se donne $\varphi \in E$ et une fonction appelée ***noyau*** K: $[a\ ,b] \times [a\ ,b] \to \mathbb{R}$ continue sur son domaine de définition. On suppose donné, enfin, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Le problème qu'on se propose de résoudre (au moins partiellement) est le suivant, appelé **équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce, non homogène** [ce type d'équation est issu de la physique mathématique] :

Trouver une fonction $t \mapsto u(t)$ dans E telle que :

$$\forall\, t \in [a\ ,\ b] :\ u(t) \ = \lambda\,.\int_a^b K(t,s).\,u(s)\,.\,ds + \varphi(t)$$

Remarque : il peut sembler étonnant de chercher a priori la solution dans E : pourquoi pas ailleurs ?

Mais la résolution de l'équation $x^2 + 1 = 0$ pose le même problème ... les solutions ne seront pas les mêmes selon qu'on résout dans $\mathbb{C}$!

Définissons une application A , manifestement *affine* ,par :

$[A(u)](t) = \lambda . \int_a^b K(t,s).u(s).ds + \varphi(t)$, pour $u \in E$.

D'après les propriétés élémentaires des intégrales dépendant d'un paramètre puisque K est continue sur $[a, b]\times[a, b]$, et puisque $\varphi \in E$,on a :

$A(u) \in E$. A applique E dans E .

Nous calculons $d_\infty[A(u), A(v)] = \max\limits_{a\leq t\leq b} \left| [A(u)](t) - [A(v)](t) \right|$

$$d_\infty[A(u), A(v)] = \max_{a\leq t\leq b} \left| \lambda\int_a^b k(t,s).u(s)ds + \varphi(t) - \lambda\int_a^b k(t,s).v(s)ds - \varphi(t) \right|$$

$$= \max_{a\leq t\leq b} |\lambda| . \left|\int_a^b k(t,s).[u(s) - v(s)]\, ds\right|.$$

Puisque K est continue sur le compact $[a, b]\times[a, b]$, il existe M réel > 0 tel que $|K(t,s)| \leq M$ pour $(t, s) \in[a, b]\times[a, b]$, et donc :

$$d_\infty[A(u), A(v)] \leq |\lambda| \max_{a\leq t\leq b} \left(\int_a^b |k(t,s)|.|u(s) - v(s)|ds\right)$$

$$\leq |\lambda| . M. \max_{a\leq t\leq b} |u(s) - v(s)| \int_a^b ds$$

$$= |\lambda| . M.(b - a).\|u - v\|_\infty$$

L'application affine A est donc une contraction stricte si (condition suffisante, non nécessaire) l'on a la condition : $|\lambda| . M.(b - a) < 1$,

c'est - à - dire si $|\lambda|$ est ‹‹assez petit ›› : $|\lambda| < \frac{1}{M.(b-a)}$

le théorème du point fixe de contractions strictes permet d'énoncer : *l'équation intégrale admet une solution* $u \in E$ *unique* , si $|\lambda| < \frac{1}{M.(b-a)}$

On peut bien sur se demander ce qu'il en est lorsque $|\lambda| \geq \frac{1}{M.(b-a)}$ ...

Les problèmes posés par les équations intégrales ont grandement contribué aux progrès de l'analyse fonctionnelle (on peut même dire que les équations intégrales ont fondé l'A.F.); cela continue aujourd'hui avec les équations intégrales non linéaires, avec des noyaux K très irréguliers ou singuliers ($\frac{1}{(t-s)}$, par ex.), etc.

Partant de $u_0 \in E$ arbitraire (par exemple $u_0 = 0$), les approximations successives s'écrivent ici:

$\forall t \in [a , b]$, $u_{n+1}(t) = \lambda \int_a^b k(t,s).u_n(s)ds + \varphi(t)$.

3) Variantes du théorème fondamental et applications :

3.1) Applications dont un itéré est strictement contractant :

il peut arriver qu'une application ne soit pas une contraction stricte, mais qu'un de ses itérés $A^N = A \circ A \circ ... \circ A$ (N fois) soit une contraction stricte.

A) Proposition :

soit (E , d) un espace métrique complet, et soit $A:E \to E$ une application telle que pour un entier $N \geq 1$ l'application $B = A^N$ est une contraction stricte : A possède un point fixe et un seul.

B) Démonstration :

Supposons que $u \in E$ est un point fixe de A:$\hat{u} = A(\hat{u})$; on a :

$A^2(\hat{u}) = A\,[A\,(\hat{u})] = A\,(\hat{u}) = \hat{u}$, $A^3(\,\hat{u}) = A\,[A^2(\,\hat{u})] = A\,(\hat{u}) = \hat{u}$, etc.

Et donc $\hat{u}$ est un point fixe de $B = A^N$. comme B admet un point fixe unique , A admet un point fixe au plus. pour l'unicité.

Quant à l'existence, soit $\hat{u}$ le point fixe de B ,qui existe par **le théorème du point fixe de contractions strictes** : $\hat{u} = B(\hat{u})$.

On a: $B\,(A(\hat{u})) = A^N \circ A\,(\hat{u}) = A \circ A^N(\hat{u}) = A \circ B\,(\hat{u}) = A\,(\hat{u})$

(les puissances de A commutent entre elles). Donc $A(\hat{u}) = \hat{u}$, puisque B n'a qu'un point fixe.

4) Le théorème de Picard :

Soient (E, d) un espace métrique complet et $\varphi : E \to E$ une application contractante, i.e. Lipschitzienne de rapport $k < 1$.

Alors, φ admet un unique point fixe $a \in E$. De plus, pour tout point initial $x_0 \in E$, la suite itérée $(x_p)_{p \in N}$, avec

$x_0 \in E$ quelconque et $x_{P+1} = \varphi(x_p)$ converge vers a .

1) Les applications du théorème du point fixe dans un espace topologique :

1.1) Définition d'un espaces topologiques :

Soit E un ensemble. Une topologie sur E est un ensemble σ de parties de E tel que

(1) toute intersection finie d'éléments de σ appartient à σ ,

(2) toute union d'éléments de σ appartient à σ .

Par convention, une intersection vide de parties d'un ensemble E est égal à E , et une union vide de parties de E est égale à la partie vide . Donc $\emptyset$ et E appartiennent à σ, si σ est une topologie sur E.

La première condition (stabilité par intersections finies) peut être remplacée indifféremment par : E appartient à σ et $A \cap B$ appartient à σ pour tous A,B dans σ .

Un espace topologique est un ensemble X muni d'une topologie σ sur X.

Par abus, on note souvent X le couple (X,σ).

1.2) Le théorème de Brouwer :

Le théorème de Brouwer est le prototype de nombreux autres qui appartiennent à la famille des théorème de points fixes de nature topologique (i.e. relevant de la topologie algébrique).

Le théorème de Brouwer est le théorème de point fixe fondamental en dimension finie . Soit $\bar{B}^m = \{x \in R^m\ ,\ \|x\|\ \leq 1\}$ *la boule unité fermée de* R^m *muni de la norme euclidienne usuelle, et* $s^{m-1} = \partial\ \bar{B}^m$ *la sphère qui* *en est la frontière. Le théorème de Brouwer affirme que :*

Théorème : toute application continue de $\bar{B}^m$ dans $\bar{B}^m$ admet au moins un point fixe.

1.3) Théorème de Cauchy-Lipschitz :

On s'intéresse au problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = f(t,X) \\ X(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad (1)$$

où $f : U \to \mathbb{R}^n$, avec U ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, et $(t_0 , x_0) \in U$.

Théorème (Cauchy-Lipchitz) : *Si f est continue sur U, et localement lipschitzienne en X (i.e. pour tout$(t_1 , x_1) \in U$, il existe $V \in \mathcal{V}(x_1)$ et $W \in \mathcal{V}(t_1)$, et il existe $k > 0$, tels pour tous x ,y $\in V$et tout $t \in W$,*

$\|f(t,x) - f(t,y)\| \le k \|x - y\|$, alors (1) admet une unique solution maximale.

Nous Remarquons que, comme f est continue, X est solution de (1) sur I si et seulement si pour tout $t \in I$,

$$X(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, X(u))\, du \qquad (2)$$

Soient $V \in \mathcal{V}(x_0)$, $W \in \mathcal{V}(t_0)$ et $k > 0$ comme dans l'énoncé du théorème.

Notons $M = sup_{w\times v} f$. Plaçons-nous sur un *cylindre de sécurité* : soit $r > 0$ tel que $\bar{B}\ (x_0 , r) \subset V$, et soit $T > 0$ tel que

$T \leq \frac{r}{M}$, et $[t_0 - T\ ,\ t_0\ +\ T] \subset W$. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions continues de $[t_0 - T\ ,\ t_0\ +\ T]$dans $\overline{B}\ (x_0\ , r)$. Alors $\mathcal{F}$, muni de la norme uniforme, est un espace complet .Soit Φ l'opérateur sur $\mathcal{F}$ défini par :

$\Phi(Y)\,(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(u, Y(u)\big)\, du$.

Le fait d'avoir choisi $T < \frac{r}{M}$ assure que si $Y \in \mathcal{F}$, $\Phi(Y)$ est encore dans $\mathcal{F}$. L'équation intégrale (2) affirme en outre qu'une fonction X de classe C^1

est solution de (1) si et seulement si elle est point fixe de . Nous cherchons

donc à appliquer un théorème du point fixe.

Soient Y , $Z \in \mathcal{F}$. nous montrons par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\forall\, t\ \in\ [t_0 - T\ ,\ t_0\ +\ T]\,, \|\Phi^p\ (Y)(t) - \Phi^p\ (Z)(t)\ \|\ \leq\ \frac{k^p\,|t - t_0|^p}{p!}\ \|Y - Z\|$$

Cette égalité est vérifiée pour $p = 0$, par définition de $\|\ .\ \|_\infty$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $t\ \in\ [t_0 - T\ ,\ t_0\ +\ T]$.

$$\|\Phi^{P+1}\ (Y)\ (t) - \Phi^{P+1}(Z)\ (t)\|\ \leq \left|\int_{t_0}^{t} \|f\big(u\ , \Phi^p(Y)(u)\big) - \ f\big(u\ , \Phi^p(Z)(u)\big)\|\, du\right|$$

$$\leq \left|\int_{t_0}^{t}\ k\ \|\Phi^p(Y)(u) - \Phi^p(Z)(u)\ \|\, du\right| \ (f \text{ loc.lip.})$$

$$\leq \left|\int_{t_0}^{t} k\ \frac{k^p\ |t - t_0|^p}{p!}\ \|Y - Z\|_\infty dt\right| \text{(par hyp. de récurrence)}$$

$$\leq \frac{k^{p+1}\ |t -\ t_0|^{p+1}}{p+1!} \|Y - Z\|_\infty$$

ce qui conclut la récurrence.

En particulier, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tous Y, $Z \in \mathcal{F}$,

$$\|\Phi^p(Y) - \Phi^p(Z)\|_\infty \leq \frac{k^p\ T^p}{p!}\|Y - Z\|$$

Or, $\frac{k^p\ T^p}{p!}$ tend vers lorsque p tend vers l'infini, donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{k^p\ T^p}{p!} < 1$.

D'après le théorème du point fixe de Picard, Φ admet un point fixe X sur $\mathcal{F}$.

En outre, comme X et f sont continues, $t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(u, X(u)\big)\, du$

est de classe C^1, et donc le point fixe X est de classe C^1. Finalement,

X est l'unique solution de (1) sur $[t_0 - T\ ,\ t_0 + T]$.

Elle se prolonge en au moins une solution maximale. Supposons qu'il

existe deux tels prolongements X_1et X_2 sur deux intervalles I_1et I_2.

L'intervalle $I_1 \cap I_2$ est non vide, puisqu'il contient $[t_0 - T\ ,\ t_0 + T]$. Soit J le plus grand intervalle inclus dans $I_1 \cap I_2$, contenant $[t_0 - T\ ,\ t_0 + T]$.

tel que X_1- X_2 soit nulle sur J. Cet intervalle est nécessairement fermé

puisque X_1- X_2 est continue. S'il n'est pas égal à $I_1 \cap I_2$ tout entier, en l'une de ses bornes, on peut appliquer l'unicité locale précédemment

démontrée 1, et contredire la maximalité de J. Donc $J = I_1 \cap I_2$, ainsi X_1et X_2sont égales sur $I_1 \cap I_2$, et par définition de solution maximale, $I_1 = I_2 = I_1 \cap I_2$. Finalement, X se prolonge en une unique solution maximale, ce qui conclut.

1.4) Théorème de Schauder :

Soit E un espace de Banach, C un convexe fermé de E et T une *application continue de C dans C telle que T(C) soit relativement compact. Alors T admet un point fixe.*

Démonstration : Soit $c' = \overline{\text{conv}}\, T(c)$ .Il s'agit d'un convexe inclus dans *C*. En effet, *T*(*C*) ⊂ *C*, donc conv*T*(*C*) ⊂ *C* car *C* est convexe et $\overline{\text{conv}}\, T(C) \subset C$ car *C* est fermé. De plus, c' est compact comme enveloppe convexe fermée d'un ensemble relativement compact dans un espace complet, cf. lemme suivant.

On applique alors le théorème de Schauder à la restriction de *T* à c' .

2) Application du théorème du point fixe dans un espace affine de dimension finie :

2.1) Théorème du point fixe en géométrie affine :

Soit $\vec{\varepsilon}$ un espace vectoriel et soit ε un espace affine de dimension finie et de direction $\vec{\varepsilon}$.

Soit $\vec{\Phi}$ une application linéaire de $\vec{\varepsilon}$ et soit Φ : ε → ε une application affine .

On appelle **point fixe** de Φ tout point *A* de ε tel que Φ (*A*) = *A*.

Proposition : L'ensemble des points fixes de Φ de ε est , soit vide, soit un sous-espace affine de direction $Ker(\vec{\Phi} - id_{\vec{\varepsilon}})$ (c'est-à-dire le sous espace propre de $\vec{\Phi}$ associé à la valeur propre 1).

En particulier :

Proposition : Soit Φ une transformation affine d'un espace affine ε.

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Φ admet un point fixe et un seul ;

(ii) 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{\Phi}$.

Démonstration :

L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) résulte immédiatement de la proposition précédente.

Nous montrons que si 1 n'est pas valeur propre de Φ, i.e. si $\overrightarrow{\Phi} - id_{\vec{\varepsilon}}$ est injective,

alors Φ admet un point fixe et un seul. Soit δ une origine dans ε. Un point A est fixe par Φ si et seulement si $\overrightarrow{\Phi(\delta)\Phi(A)} = \overrightarrow{\Phi(\delta)A}$ i.e. si et seulement si $\overrightarrow{\Phi}\left(\overrightarrow{\delta A}\right) = \overrightarrow{\Phi(\delta)\delta} + \overrightarrow{\delta A}$, soit encore $\overrightarrow{\Phi} - id_{\vec{\varepsilon}} = \overrightarrow{\Phi(\delta)\delta}$.

L'application linéaire $\overrightarrow{\Phi} - id_{\vec{\varepsilon}}$ étant injective, elle est bijective et cette dernière relation détermine un point A et un seul.

Conclusion :

Le théorème du point fixe est FONDAMENTAL en mathématique. Il a des applications nombreuses, à la fois théoriques et pratiques. Au rang des premières, citons les incontournables : solutions d'une équation différentielle satisfaisant à l'équation de Cauchy-Lipschitz! Pour les applications pratiques, ce qui est essentiel est d'avoir une estimation de la vitesse de convergence.

Enfin, notons que notre terminologie : "Le théorème du point fixe " est totalement abusive ! Il existe plusieurs centaines de théorèmes du point fixe, et des livres entiers ne font qu'en citer et en citer des applications. L'un des plus beaux, des plus surprenants, et le résultat suivant, dit théorème du point fixe de Brouwer :

Toute fonction continue d'un convexe compact de $\boldsymbol{R}^n$ *dans lui-même admet un point fixe.*

Par exemple, si vous tournez votre café, à la fin il y a au moins une particule qui sera toujours à la même place!

C'est à Emile Picard qu'on doit une première forme assez générale du théorème du point fixe, et surtout l'idée de l'utiliser pour démontrer des résultats difficiles d'analyse.

Bibliographie :

Livre « Topologique et analyse fonctionnelle » de **l'écrivain** « yves Sonntag ' Maitre de conférence à l'université de provence' »

Les sites web :

http://www.techno-science.net

http ://www.wikipedia.org/wiki/Th%25C3%25A9ori...

http://zegour.uuuq.com/Site%20secondaire/Mcp/Cours%20ppt/9_pfixe.pdf

http://www.worldlingo.com/ma/enwiki/fr/Fixed_point_theorem

http://www.bibmath.net/bios/index.php3?action=affiche&quoi=brouwer