الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Minstère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

CENTRE UNIVERSITAIRE DE MILA
INSTITUT DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

Réf. /11

Mémoire de fin d'étude
Présenté pour l'obtention du diplôme de

Licence Académique

Domaine : **Mathématiques et Informatique**
Filière : **Mathématiques**
Spécialité : **Mathématiques Fondamentales**

Thème

Complétion d'un corps normé
-Application sur le corps des nombres rationnels-

Présenté par :
Khellaf Basma
Mokhtar Asma

Dirigé par :
Kecies Mohamed

Année universitaire 2010-2011

Remerciements

Mes remerciements vont tout premièrement à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé, et la patience qu'il nous a donnée pour terminer ce mémoire.

Nous remercions vivement Monsieur M. Kecies d'avoir voulu proposer et assurer la direction de ce mémoire, sa disponibilité, son soutien, ses encouragements et ses précieux conseils tout au long de ce travail.

Nous adressons, également, mes remerciements chaleureux aux membres de l'institut des sciences et de la technologie et à tous ceux qui ont pris part de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction Générale **2**

1 Corps valués ultramétriques **3**
1.1 Corps normés 3
1.2 Construction d'un corps normé complet 6

2 Corps des nombres p-adiques (Application sur $\mathbb{Q}$) **16**
2.1 Valuation et norme p-adique sur $\mathbb{Q}$ 16
2.2 Norme p-adique 18
2.3 Les nombres p-adiques 21
2.4 Les entiers p-adiques 26

3 Les propriétés topologiques et analytiques des nombres p-adiques **29**

Conclusion Générale **34**

Bibliographie **34**

Introduction Générale

Les notions des nombres p-adiques et de l'analyse p-adique sont apparues pour la première fois, au début du vingtième siècle grâce au mathématicien K.Hensel considère comme l'inventeur des nombres p-adiques.

Pour tout p un nombre premier, le corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques est obtenu suite à la complétion du corps des rationnels $\mathbb{Q}$ par rapport à une certaine norme spécifique appelée norme p-adique qui est non-archimédienne, comme elle induit une distance ultramétrique appelée distance p-adique.

Les recherches dans le domaine des nombres p-adiques sont souvent faites, soient pour voir les différences et les similitudes par rapport au cas réel, soient pour obtenir des résultats propres à ce corps.

L'utilisation des nombres p-adiques est fréquente en théorie des nombres et en Géométrie. D'autre part, depuis quelques années plusieurs auteurs en Physique Mathématique prennent comme corps de base, au lieu des corps des nombres réels et complexes, les corps p-adiques.

Ce mémoire est réparti sur l'introduction générale, trois chapitres et conclusion générale.

Dans le premier chapitre, on a commencé par donner des notions fondamentales sur les corps normés ultramétriques. En suite, on a appliqué ces notions et la procédure de complétion pour construire les corps complets.

Dans le deuxième chapitre, on a construit pour chaque p premier de "nouveaux nombres" selon le procédé de complétion par rapport à la norme p-adique, appelés nombres p-adiques noté $\mathbb{Q}_p$ qui étend le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$. Nous avons présenté aussi la valuation p-adique, la norme p-adique et le corps des entiers p-adiques $\mathbb{Z}_p$.

Dans le dernier chapitre, on a abordé quelques propriétés fondamentales, topologiques et analytiques des nombres p-adique. On a terminé par une conclusion générale.

Chapitre 1

Corps valués ultramétriques

1.1 Corps normés

L'objectif de ce chapitre est de donner une construction complète, détaillée des corps normés complets suivant le procédé de complétion. Le rôle principal dans la procédure de complétion est joué par les suites de Cauchy.

Définition 1.1.1

1. *Une norme sur un corps K est une fonction qui à tout $x \in K$ associe un nombre réel positif noté $\|.\|$ de manière que :*
   a) $\forall x \in K : \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$
   b) $\forall x, y \in K : \|x \cdot y\| = \|x\| \cdot \|y\|.$
   c) $\forall x, y \in K : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(l'inégalité triangulaire).*
2. *On dit que la norme $\|.\|$ est ultramétrique ou non archimédienne si*

$$\forall x, y \in K : \|x + y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|) \text{ (Inégalité triangulaire forte)}$$

Définition 1.1.2 *Une norme constante $\|.\|$ est dite triviale si est seulement si*

$$\|x\| = \begin{cases} 1, & si\ x \neq 0 \\ 0, & si\ x = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Remarque 1.1.3

1. *Au lieu de norme de corps, on dit parfois valeur absolue.*
2. *La norme $\|.\|$ est un morphisme de groupe entre les groupes multiplicatifs K^* et $\mathbb{R}_+^*$,et donc que $\|1\| = 1$.*

Exemple 1.1.4 *La valeur absolue usuelle* $|.|$ *est une norme non archimédienne sur* $\mathbb{R}$.

Définition 1.1.5

1. *On appelle corps normé, tout couple de la forme* $(K, \|.\|)$ *ou* K *est un corps et* $\|.\|$ *est une norme sur* K.
2. *On appelle la distance induite sur* K *par* $\|.\|$, *la distance* $d_{\|.\|}$ *sur* K *définie par*

$$\forall x, y \in K : d_{\|.\|}(x, y) = \|x - y\|$$

Si $\|.\|$ *est une norme ultramétrique, alors*

$$\forall x, y, z \in K : d_{\|.\|}(x, z) \leq \max(d_{\|.\|}(x, y), d_{\|.\|}(y, z))$$

La distance induite par cette norme est appellée distance ultramétrique.

Définition 1.1.6 *Lorsque* K *muni de la distance ultrametrique, on dit que* K *est un corps valué ultramétrique. Dans le cas contraire, on dit que* K *est un corps valué archimédien.*

Proposition 1.1.7 K *est un corps ultramétrique si et seulement si*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|n\| \leq 1$$

Autrement dit, $\mathbb{N}$ *est borné selon* $\|.\|$.

Preuve. *Supposons que* K *est ultramétrique et montrons par récurrence que*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|n\| \leq 1$$

Pour $n = 1$, *on a*

$$\|1\| = 1 \leq 1$$

Supposons que $\|i\| \leq 1$ *pour tout* $i \leq n$ *et montrons que* $\|n + 1\| \leq 1$.

On a

$$\|n + 1\| \leq \max\{\|n\|, \|1\|\} = 1$$

Alors que $\|n + 1\| \leq 1$.

D'autre part, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|n\| \leq 1$$

On obtient, pour tout $x, y \in K$

$$\begin{aligned}
\|(x+y)^n\| &= \left\|\sum_{k=0}^{n} C_n^k.x^k.y^{n-k}\right\|, C_n^k \in \mathbb{N} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \left\|C_n^k\right\| . \|x\|^k . \|y\|^{n-k}, \text{ avec } \left\|C_n^k\right\| \leq 1
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \|(x+y)^n\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|x\|^k . \|y\|^{n-k}$$

Comme

$$\begin{aligned}
\|x\| &\leq \max(\|x\|, \|y\|) \\
\|y\| &\leq \max(\|x\|, \|y\|)
\end{aligned}$$

Donc

$$\forall k = \overline{0, n} : \begin{cases} \|x\|^k \leq [\max(\|x\|, \|y\|)]^k \\ \|y\|^{n-k} \leq [\max(\|x\|, \|y\|)]^{n-k} \end{cases}$$

On trouve pour tout $k \in \{0, 1, ..., n\}$

$$\|x\|^k . \|y\|^{n-k} \leq [\max(\|x\|, \|y\|)]^k . [\max(\|x\|, \|y\|)]^{n-k} = [\max(\|x\|, \|y\|)]^n$$

Ce qui donne

$$\|(x+y)^n\| \leq \sum_{k=0}^{n} [\max(\|x\|, \|y\|)]^n = (n+1). [\max(\|x\|, \|y\|)]^n$$

$$\Longrightarrow \|(x+y)\| \leq (n+1)^{\frac{1}{n}}. \max(\|x\|, \|y\|), \forall n \geq 1$$

Pour $n \to \infty$, on obtient

$$\|(x+y)\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)$$

Alors $\|.\|$ est une norme ultramétrique. ■

Définition 1.1.8 *Soit $(x_n)_n \subset (K, \|.\|)$. Alors*

1. *On dit que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy si elle vérifie la propriété suivante, appelée critère de Cauchy*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0 : \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon \tag{1.2}$$

Ceci est équivalent à

$$\lim_{n,m\longrightarrow\infty} \|x_n - x_m\| = 0$$

2. *On dit que $(x_n)_n$ est une suite converge vers $x \in K$ si et seulement si*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : \|x_n - x\| \leq \varepsilon \tag{1.3}$$

3. *On dit que $(x_n)_n$ est une suite bornée si et seulement si*

$$\exists c > 0, \forall n \in \mathbb{N} : \|x_n\| \leq c \tag{1.4}$$

Remarque 1.1.9 *Dans un espace métrique :*

1. *Toute suite convergente est de Cauchy et la réciproque est fausse dans le cas général.*
2. *Toute suite de Cauchy est bornée.*

1.2 Construction d'un corps normé complet

Définition 1.2.1 *Un espace métrique M est dit complet si toute suite de Cauchy de M a une limite dans M. C'est-à-dire qu'elle converge dans M. Autrement dit l'espace M n'a pas de trou ou n'a aucun point manquant.*

Exemple 1.2.2 *Les nombres rationnels ne forment pas un espace complet. Si on considére la suite $(x_n)_n$ définie par*

$$x_0 = 1, x_1 = \frac{14}{10}, x_2 = \frac{141}{100}, ...$$

$(x_n)_n$ est une suite des nombres rationnels, de plus elle est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$. Cependant ,elle ne converge pas dans $\mathbb{Q}$, puisque elle a une limite $\sqrt{2}$ dans le corps complet $\mathbb{R}$.

Définition 1.2.3 ***(Définition générale de la complétion)***
Soit K un corps normé arbitraire (non complet) muni d'une norme $\|.\|_K$ et $\widehat{K}$ un autre corps normé (construit à partir de K) muni d'une norme $\|.\|_{\widehat{K}}$ .On dit que $\widehat{K}$ est le complété de K si
1) $\widehat{K}$ contient K ($K \subset \widehat{K}$).
2) K est dense dans $\widehat{K}$ par rapport à la topologie associé avec $\|.\|_{\widehat{K}}$.
3) $\forall x \in K : \|x\|_K = \|x\|_{\widehat{K}}$ (la norme $\|.\|_{\widehat{K}}$ est définie à partir de $\|.\|_K$).
4) $(\widehat{K}, \|.\|_{\widehat{K}})$ est complet.

Un espace métrique n'est pas forcément complet, mais il peut se compléter de manière unique. Dans le cas ou le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est muni de la norme euclidienne $|.|$, la procédure de complétion donne le corps des nombres réels $\mathbb{R}$. Cette construction est donnée selon les étapes suivantes :

1) **Etape 1 :** On note par

$$SC(K) = \left\{ A = \{a_n\}_n \in K^{\mathbb{N}} : \lim_{n,m \longrightarrow \infty} \|a_n - a_m\|_K = 0 \right\} \tag{1.5}$$

L'ensemble des suites de Cauchy défini dans $(K, \|.\|)$.

On définit sur $SC(K)$ les lois suivantes :

$$\text{Addition :} \begin{cases} + : & SC(K) \times SC(K) & \longrightarrow & SC(K) \\ & ((a_n)_n, (b_n)_n) & \longmapsto & (a_n + b_n)_n \end{cases} \tag{1.6}$$

$$\text{Multiplication :} \begin{cases} \cdot : & SC(K) \times SC(K) & \longrightarrow & SC(K) \\ & ((a_n)_n, (b_n)_n) & \longmapsto & (a_n \cdot b_n)_n \end{cases}$$

L'ensemble $(SC(K), +, \cdot)$ est un anneau unitaire, d'élément neutre $1_{SC(K)} = \{1\}_{n\in N} = \{1, 1, 1, ..., 1, ...\}$ (resp : $0_{SC(K)} = \{0\}_{n\in N} = \{0, 0, 0, ..., 0, ...\}$) par rapport à la multiplication (resp : à l'addition).

Pour cela, il suffit de vérifier que $SC(K)$ est un sous anneau de l'anneau produit K^N. En effet, si $A = \{a_n\}_n, B = \{b_n\}_n \in SC(K)$ et $n, m \in N$, alors

$$a_n \cdot b_n - a_m \cdot b_m = (a_n - a_m) \cdot b_n + a_m (b_n - b_m)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \|a_n \cdot b_n - a_m \cdot b_m\| &= \|(a_n - a_m) \cdot b_n + a_m (b_n - b_m)\| \\ &\leq \|(a_n - a_m) \cdot b_n\| + \|a_m (b_n - b_m)\| \\ &\leq \|b_n\| \cdot \|a_n - a_m\| + \|a_m\| \cdot \|b_n - b_m\| \\ &\leq \beta \|a_n - a_m\| + \alpha \|b_n - b_m\| \end{aligned}$$

Telles que

$$\alpha = \sup_n \|a_n\|, \beta = \sup_n \|b_n\|$$

Car $\{a_n\}_n$ et $\{b_n\}_n$ sont bornées. On déduit que

$$\lim_{n,m \to \infty} \|a_n \cdot b_n - a_m \cdot b_m\| = 0$$

$$\Longrightarrow A \cdot B \in SC(K)$$

D'autre part, on a

$$(a_n - b_n) - (a_m - b_m) = (a_n - a_m) + (b_m - b_n)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\|(a_n - b_n) - (a_m - b_m)\| &= \|(a_n - a_m) + (b_m - b_n)\| \\ &\leq \|a_n - a_m\| + \|b_n - b_m\|\end{aligned}$$

Comme $\{a_n\}_n$ et $\{b_n\}_n$ sont de Cauchy, alors

$$\lim_{n,m \to \infty} \|(a_n - b_n) - (a_m - b_m)\| = 0$$

On déduit que

$$A - B \in SC(K)$$

De plus $SC(K)$ n'est pas un corps puisqu'il contient un diviseur de Zéro

$$\{1, 0, 0, 0, ...\} \cdot \{0, 1, 0, 0, ...\} = \{0, 0, 0, ..., 0, ...\} = \{0\}_{n \in N^*}$$

2)**Etape 2 :** On définit l'ensemble des suites nulles de Cauchy

$$SN(K) = \left\{A = \{a_n\} \in SC(K) : \lim_{n \longrightarrow \infty} \|a_n\|_K = 0\right\} \tag{1.7}$$

3)**Etape 3 :** On définit sur $SC(K)$ une relation $\Re$ définie par

$$\forall \{a_n\}_n, \{b_n\}_n \in SC(K) : \{a_n\}_n \Re \{b_n\}_n \Longleftrightarrow \lim_{n \longrightarrow \infty} \|a_n - b_n\|_K = 0 \Longleftrightarrow \{a_n - b_n\} \in SN(K) \tag{1.8}$$

Il est claire que $\Re$ est une relation équivalence. En effet :
Soient $\{a_n\}_n, \{b_n\}_n, \{c_n\}_n \in SC(K)$. Alors

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|a_n - a_n\|_K = 0 \Longrightarrow \{a_n\}_n \Re \{a_n\}_n \quad \text{(réflexivité)}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\{a_n\}_n \Re \{b_n\}_n &\Longleftrightarrow \lim_{n \longrightarrow \infty} \|a_n - b_n\|_K = 0 \\ &\Longrightarrow \lim_{n \longrightarrow \infty} \|b_n - a_n\|_K = 0 \\ &\Longrightarrow \{b_n\}_n \Re \{a_n\}_n \quad \text{(symétrie)}\end{aligned}$$

On a

$$\left\{\begin{array}{l}\{a_n\}_n \Re \{b_n\}_n \\ \\ \{b_n\}_n \Re \{c_n\}_n\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \|a_n - b_n\|_K = 0 \\ \\ \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \|b_n - c_n\|_K = 0\end{array}\right.$$

Alors

$$\begin{aligned}\|a_n - c_n\|_K &= \|(a_n - b_n) + (b_n - c_n)\|_K \\ &\leq \|a_n - b_n\|_K + \|b_n - c_n\|_K\end{aligned}$$

Pour $n \to \infty$, on obtient

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|a_n - c_n\|_K = 0$$

Donc

$$\{a_n\}_n \Re \{c_n\}_n \quad \text{(transitivité)}$$

4) **Etape 4 :** Soit l'ensemble

$$\widehat{K} = SC(K)/SN(K)$$

des classes d'équivalence des suites de Cauchy $\{a_n\}_n$ pour la relation $\Re$ définie précédente.

On note par $(a_n) \in \widehat{K}$ la classe d'équivalence de suite de Cauchy $\{a_n\}_n \in SC(K)$ et la suite constante

$$\{a\}_{n\in N} = \{a, a, a, ...\}, a \in K$$

appartient à des classes différentes pour différents éléments a.

Notons par (a_n) la classe d'équivalence qui représente la suite de Cauchy $\{a\}_n$. Ainsi $(a_n) \in \widehat{K}$, et nous allons considérer K comme un sous ensemble de $\widehat{K}$, et nous identifions $a \in K$ avec $\widehat{a} = (a) \in \widehat{K}$.

Théorème 1.2.4 *L'ensemble quotient $\widehat{K} = SC(K)/SN(K)$ est un corps.*

Preuve. Il est facile de vérifier que $\widehat{K}$ muni des deux opérations suivantes :

Pour $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in A \in \widehat{K}$ et $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in B \in \widehat{K}$

$$\begin{array}{l}A + B = (a_n) + (b_n) = (a_n + b_n) \\ A.B = (a_n) \cdot (b_n) = (a_n.b_n)\end{array}$$

est un anneau commutatif, tel que son élément neutre par rapport à l'addition (resp.à la multiplication) est $\overline{0}$ (resp. $\overline{1}$).

Il reste à montrer que tout élément de $\widehat{K}$ admet un inverse par rapport à la multiplication. C'est-à-dire

$$\forall A \in \widehat{K}, \exists \grave{A} \in \widehat{K} : A \cdot \grave{A} = 1$$

Soit $A \in \widehat{K}$ tel que $A \neq \overline{0} = SN(K)$, et $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un représentant de A (une suite de Cauchy dans K). Tant qu'elle n'est pas nulle, alors

$$\exists C \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}^* : \|a_n\| > C, \forall n \geq N$$

On définit une autre suite $\{a_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$a_n^* = \begin{cases} 0 & , \text{si } \ 1 \leq n \leq N-1 \\ \frac{1}{a_n} & , \text{si } n \geq N \end{cases}$$

La suite $\{a_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. En effet :
Pour tous $n, m \geq N$, on a

$$0 \leq \|a_m^* - a_n^*\| = \|\frac{1}{a_m} - \frac{1}{a_n}\| = \frac{\|a_m - a_n\|}{\|a_m\|\|a_n\|} \leq C^{-2}\|a_m - a_n\| \longrightarrow 0, n, m \longrightarrow \infty$$

Notons la classe d'équivalence de $\{a_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ par A^{-1}. On a

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cdot \{a_n^*\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_n \cdot a_n^*\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{ \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{(N-1)terme}, 1, 1, \ldots \right\}$$

On trouve

$$\{a_n \ a_n^*\}_{n\in\mathbb{N}} - \{1\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{ \underbrace{-1, -1, \ldots, -1}_{(N-1)terme}, 0, 0, \ldots \right\} \in SN(K)$$

Ceci implique que $\{a_n \cdot a_n^*\}_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{1}$, c'est à dire que

$$(a_n a_n^*) = A \cdot B = \overline{1}$$

Alors

$$A.A^{-1} = \overline{1}$$

■

Définition 1.2.5 *Pour tout $A = (a_n) \in \widehat{K}$, on définit l'application*

$$\begin{aligned} \|.\|_{\widehat{K}} \quad &: \quad \widehat{K} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ A \quad &\longrightarrow \quad \|A\|_{\widehat{K}} = \lim_{n\to+\infty} \|a_n\|_K \end{aligned} \tag{1.9}$$

Nous allons montrer que cette application est une norme sur $\widehat{K}$.

Proposition 1.2.6 *L'application* $\|.\|_{\widehat{K}}$ *est une norme sur* $\widehat{K}$. *Elle est non-archimédienne si la norme de* K *est non-archimédienne aussi.*

Preuve. Cette norme est bien définie. Pour cela, nous devons montrer que la limite existe et indépendante du représentant $\{a_n\}_n \in A \in \widehat{K}$.

On a $\{a_n\}_n$ est une suite de Cauchy. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0 : \|a_m - a_n\|_K \leq \varepsilon$$

D'autre part, on sait que

$$| \, \|a_m\|_K - \|a_n\|_K \, | \leq \|a_m - a_n\|_K \tag{1.10}$$

On obtient, pour tout $\varepsilon > 0$

$$| \, \|a_m\|_K - \|a_n\|_K \, | \leq \varepsilon$$

La suite de nombres réels $\{\|a_n\|_K\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |.|)$ complet, alors elle a une limite $l \in \mathbb{R}^+$. Donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \|a_n\|_K$ existe.

Supposons que $\{a_n\}_n$ et $\{a'_n\}_n$ sont deux représentants de A. Alors par la même inégalité, nous avons

$$0 \leq \lim_{n\longrightarrow+\infty} | \|a_n\|_K - \|a'_n\|_K | \leq \lim_{n\longrightarrow+\infty} \|a_n - a'_n\|_K = 0$$

Alors

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|a_n\|_K = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \|a'_n\|_K$$

On vérifie les trois propriétés de la norme :

1) Si $A = (a_n) \in \widehat{K}$ telle que $A = 0$, alors

$$\begin{aligned} A &= (a_n) = 0 \Longleftrightarrow \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in SN(K) \\ &\Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \|a_n\|_K = 0 \\ &\Longleftrightarrow \|A\|_{\widehat{K}} = 0 \end{aligned}$$

Si $A = (a_n) \neq 0$, alors $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \notin SN(K)$, on obtient

$$\exists c \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}^* : \|a_n\| \geq c > o, \forall n \geq N$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \|a_n\|_K \neq 0 \\ &\Longrightarrow \|A\|_{\widehat{K}} > 0 \end{aligned}$$

2) Soit $A=(a_n)\in\widehat{K}$, $B=(b_n)\in\widehat{K}$, alors

$$\begin{aligned}
\| \quad A\cdot B\|_{\widehat{K}} &= \lim_{n\to+\infty}\| a_nb_n\|_K\\
&= \lim_{n\to+\infty}(\| a_n\|_K\cdot \| b_n\|_K)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\| a_n\|_K\cdot \lim_{n\to+\infty}\| b_n\|_K\\
&= \| A\|_{\widehat{K}}\cdot \| B\|_{\widehat{K}}
\end{aligned}$$

3) Pour $A=(a_n)\in\widehat{K}$, $B=(b_n)\in\widehat{K}$, on a

$$\begin{aligned}
\| \quad A+B\|_{\widehat{K}} &= \lim_{n\to+\infty}\| a_n+b_n\|_K\\
&\leq \lim_{n\to+\infty}(\| a_n\|_K+\| b_n\|_K)\\
&\leq \lim_{n\to+\infty}\| a_n\|_K+\lim_{n\to+\infty}\| b_n\|_K\\
&= \| A\|_{\widehat{K}}+\| B\|_{\widehat{K}}
\end{aligned}$$

l'application $\|.\|_{\widehat{K}}$ est une norme. ■

Maintenant, on montre que si $\|.\|_K$ est ultramétrique, alors $\|.\|_{\widehat{K}}$ est ultramétrique aussi. Pour cela, on va utiliser le lemme suivant :

Lemme 1.2.7 *Soient K un corps muni de la norme non-archimédienne $\|.\|_K$, et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy et $b\in K$ tel que :*

$$b\neq\lim_{n\longrightarrow+\infty}a_n$$

Alors

$$\exists M\in\mathbb{N},\forall n,m>M:\|a_n-b\|_K=\|a_m-b\|_K$$

On dit que la suite des nombres réels $(\|a_n-b\|_K)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire. En particulier, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une suite nulle, alors la suite $(\|a_n\|_K)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Preuve. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy

$$\forall\varepsilon>0,\exists M>0:\forall m,n>M\Longrightarrow\|a_m-a_n\|_K<\varepsilon$$

D'autre part, on a

$$\|\,(a_m-b)+(b-a_n)\,\|_K=\|a_m-a_n\|_K\geq|\|a_m-b\|_K-\|b-a_n\|_K|$$

$$\Longrightarrow|\|a_m-b\|_K-\|b-a_n\|_K|<\varepsilon$$

Donc la suite $(\|a_n - b\|_K)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, d'où elle est convergente. Soit l sa limite et

$$\begin{aligned} b &\neq \lim_{n\longrightarrow+\infty} a_n \Longrightarrow \|a_n - b\|_K > 0 \\ &\Longrightarrow l > 0 \end{aligned}$$

Nous avons, par définition

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists M_1 \in \mathbb{N} : \forall n > M_1 \Longrightarrow |\|a_n - b\|_K - l| < \varepsilon$$

Donc pour $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0$, on a

$$-\frac{l}{2} < \|a_n - b\|_K - l < \frac{l}{2} \Longrightarrow \frac{l}{2} < \|a_n - b\|_K < \frac{3l}{2}$$

On obtient

$$\exists M_1 \in \mathbb{N}\ : \forall n > M_1 \Longrightarrow \|a_n - b\|_K > \frac{l}{2}$$

De même, puisque $(a_n)_n$ est de Cauchy dans K, alors pour $\varepsilon = \frac{l}{2}$, il existe $M_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n, m > M_2 \Longrightarrow \|a_m - a_n\|_K < \frac{l}{2}$$

On prend

$$M = \max(M_1, M_2)$$

Pour tout $n, m \geq M = \max(M_1, M_2)$, on obtient

$$\begin{aligned} \|a_m - b\|_K &= \|a_n - b + a_m - a_n\|_K \\ &= \max\{\|a_n - b\|_K, \|a_m - a_n\|_K\} \\ &= \|a_n - b\|_K \end{aligned}$$

Montrons que $\|\ .\|_{\widehat{K}}$ est non-archimédienne :

Soient $A = (a_n)_n, B = (b_n)_n \in \widehat{K}$ telle que $A \neq B$. Supposons que les deux suites ne sont pas nulles $(b = 0)$, D'après le lemme (1.2.7), on obtient

$$\begin{aligned} \exists N_1 &\in \mathbb{N}, \forall n > N_1 \Longrightarrow \|A\|_{\widehat{K}} = \|a_n\|_K \qquad (1.11) \\ \exists N_2 &\in \mathbb{N}, \forall n > N_2 \Longrightarrow \|B\|_{\widehat{K}} = \|b_n\|_K \end{aligned}$$

Soit
$$N = \max(N_1, N_2)$$
Alors d'après (1.11), on trouve
$$\begin{aligned} \|a_n + b_n\|_K &= \max\left(\|a_n\|_K, \|b_K\|_K\right) \\ &= \max\left(\|A\|_{\widehat{K}}, \|B\|_{\widehat{K}}\right) \end{aligned}$$
Donc
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|a_n + b_n\|_K = \max\left(\|A\|_{\widehat{K}}, \|B\|_{\widehat{K}}\right)$$
$$\Longrightarrow \|A + B\|_{\widehat{K}} = \max\left(\|A\|_{\widehat{K}}, \|B\|_{\widehat{K}}\right)$$
Alors $\|.\|_{\widehat{K}}$ est une norme ultramétrique. ■

Théorème 1.2.8 *L'espace $\widehat{K}$ muni de la norme $\| \ .\|_{\widehat{K}}$ est complet. De plus K est un sous-ensemble dense dans $\widehat{K}$.*

Preuve. 1) Montrons que K est dense dans $\widehat{K}$.
On sait qu'on peut identifier la suite constante $\{c\}_{n\in N} = \{c, c, c, ...\}, c \in K$ avec sa classe d'équivalence
$$\bar{c} = \{c, c, c, ...\}$$
Soit $A \in \widehat{K}$ et $\{a_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de K qui représente A.
Pour tout entier positif fixé "n", nous considérons la suite constante $\bar{a}_n$, donc la suite $\{a_m - a_n\}_{m\in\mathbb{N}}$ représente la classe $A - (\bar{a}_n)$, et comme $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, on peut écrire
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \| \ A - (\bar{a}_n)\|_{\widehat{K}} \ = \lim_{n\to+\infty} \left(\lim_{m\to+\infty} \| \ a_m - a_n\|_K \right) = 0 \tag{1.12}$$
Il vient que K est dense dans $\widehat{K}$.
2) **Montrons que $(\widehat{K}, \|.\|_{\widehat{K}})$ est complet**
C'est-à-dire toute suites de Cauchy de $\widehat{K}$ est convergente dans $\widehat{K}$.

Soit $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{A_1, A_2, ...\}$ une suite de Cauchy dans $\widehat{K}$, d'après la densité de K dans $\widehat{K}$, alors pour tout A_n il existe un élément $a_n \in K$ tel que
$$\| \ A_n - (\bar{a}_n)\|_{\widehat{K}} \leq \frac{1}{n} \tag{1.13}$$
Donc $\{A_n - (\bar{a}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite nulle, d'où elle est de Cauchy dans $\widehat{K}$.

Nous avons
$$\{(\bar{a}_n)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} - \{A_n - (\bar{a}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Alors $\{(\bar{a}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\widehat{K}$, et comme tous ses éléments appartiennent à K, alors $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans K.

De (1.12) et (1.13), on déduit que $\{A-(\bar{a}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{A_n-(\bar{a}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites nulles dans $\widehat{K}$. Donc sa différence

$$\{A-A_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{A-(\bar{a}_n)\}_{n\in\mathbb{N}} - \{A_n-(\bar{a}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$$

est une suite nulle dans $\widehat{K}$, ce qui implique que

$$\lim_{n\to+\infty} \| A-A_n\|_{\widehat{K}} = 0$$

Il vient que

$$A = \lim_{n\to+\infty} A_n$$

■

Chapitre 2

Corps des nombres p-adiques (Application sur $\mathbb{Q}$)

Dans ce chapitre, on va introduire les notions de la valuation et la norme p-adique sur le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$. Nous allons construire le corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$ en complétant $\mathbb{Q}$ suivant le procédé de complétion selon la norme p-adique.

2.1 Valuation et norme p-adique sur $\mathbb{Q}$

Définition 2.1.1 *Soit* p *un nombre premier.*

1. *On appelle valuation p-adique d'un entier rationnel non nul* $x \in \mathbb{Z}^*$ *notée* $v_p(x)$ *le plus grand entier positif tel que* $p^{v_p(x)}$ *divise* x.

$$\begin{array}{rccl} v_p : & \mathbb{Z}^* & \longrightarrow & \mathbb{Z}^+ \\ & x & \longmapsto & v_p(x) = \max\{r \in \mathbb{Z}^+ : p^r \, divise \; x\} \end{array}$$

   dans ce cas x *s'écrit*

$$x = u \cdot p^{v_p(x)} \text{ où } u \in \mathbb{Z}^*, \; (u, p) = 1$$

   où (u, p) *désigne le* $p\gcd$ *de* u *et de* p. *Autrement dit la valuation p-adique compte le nombre de fois que l'on peut diviser un nombre par* p.

2. *La valuation p-adique d'un nombre rationnel non nul* $x \in \mathbb{Q}^*$ *notée* $v_p(x)$ *est définie par*

$$\begin{array}{rccl} v_p : & \mathbb{Q}^* & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & x & \longmapsto & v_p(x) = \max\{r \in \mathbb{Z} : p^r \, divise \; x\} \end{array}$$

Remarque 2.1.2 *On pose* $v_p(0) = +\infty$, *car* 0 *est divisible une infinité de fois par* p.

Proposition 2.1.3 *La valuation p-adique vérifie les propriétés suivantes :*

1. *si* $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$, *alors* $v_p(x) = v_p\left(\frac{a}{b}\right) = v_p(a) - v_p(b)$
2. $v_p(x \cdot y) = v_p(x) + v_p(y), \forall x, y \in \mathbb{Q}$
3. $v_p(x + y) \geq \min\{v_p(x), v_p(y)\}. \forall x, y \in \mathbb{Q}$

Preuve.

1) Soit $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$ telles que

$$\begin{cases} a = a_1 \cdot p^{v_p(a)}, (a, a_1) \in \mathbb{Z}^2, (a_1, p) = 1 \\ \\ b = b_1 \cdot p^{v_p(b)}, (b, b_1) \in \mathbb{Z}^{*2}, (b_1, p) = 1 \end{cases}$$

On obtient

$$x = \frac{a}{b} = \frac{a_1 \cdot p^{v_p(a)}}{b_1 \cdot p^{v_p(b)}} = \frac{a_1}{b_1} p^{v_p(a) - v_p(b)}, (a_1, p) = (b_1, p) = 1$$

Alors

$$v_p(x) = v_p\left(\frac{a}{b}\right) = v_p(a) - v_p(b)$$

2) Soient

$$\begin{cases} x = c \cdot p^{v_p(x)} \in \mathbb{Q}^*, (c, p) = 1 \\ y = d \cdot p^{v_p(y)} \in \mathbb{Q}^*, (d, p) = 1 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} x \cdot y &= cd \cdot p^{v_p(x) + v_p(y)},\ (cd, p) = 1 \\ &\Longrightarrow v_p(x \cdot y) = v_p(x) + v_p(y) \end{aligned}$$

3) Soient

$$\begin{cases} x = p^r \cdot \frac{a}{b}\ , v_p(x) = r \\ y = p^s \cdot \frac{c}{d}\ , v_p(y) = s \end{cases}$$

$$\Longrightarrow v_p(x + y) = v_p\left(p^r \cdot \frac{a}{b} + p^s \cdot \frac{c}{d}\right)$$

Supposons que $s \geq r$ donc

$$v_p(x + y) = v_p\left(p^r \cdot \left(\frac{a}{b} + p^{s-r} \cdot \frac{c}{d}\right)\right)$$

$$= v_p\left(p^r \cdot \left(\frac{ad + p^{s-r} \cdot cb}{bd}\right)\right)$$

$$= v_p(p^r) + v_p\left(\frac{ad + p^{s-r} \cdot cb}{bd}\right)$$
$$= r + v_p\left(ad + p^{s-r} \cdot cb\right) - v_p(bd)$$

Tant que $(bd, p) = 1$, alors $v_p(bd) = 0$ et comme $ad + p^{s-r} \cdot cb \in \mathbb{Z}$, donc $v_p(ad + p^{s-r} \cdot cb) \geq 0$. On conclut que

$$v_p(x + y) \geq r = \min(v_p(x), v_p(y))$$

■

2.2 Norme p-adique

Définition 2.2.1 *Soit p un nombre premier*

1. *La fonction $|.|_p$ définie par*

$$\begin{array}{rccl} |.|_p : & \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longrightarrow & |x|_p = \begin{cases} p^{-r} & , \text{ si } x = p^r \cdot \frac{a}{b} \text{ avec } (a,p) = (b,p) = 1,\ r \in \mathbb{Z} \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

   où r représente la valuation p-adique de x est appelée la norme p-adique (la valeur absolue p-adique) sur $\mathbb{Q}$.

2. *La distance sur $\mathbb{Q}$ induite par cette norme notée d_p (la distance p-adique) est définie par*

$$\begin{array}{rccl} d_p : & \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (x, y) & \longrightarrow & d_p(x, y) = |x - y|_p \end{array}$$

On va vérifier que $|.|_p$ est une norme ultra-métrique sur $\mathbb{Q}$.

Remarque 2.2.2

1. *0 est divisible une infinité de fois par p, donc $|0|_p = \frac{1}{+\infty} = 0$.*
2. *1 n'est divisible aucune fois par p, donc $|1|_p = \frac{1}{p^0} = 1$.*

Proposition 2.2.3 *La fonction $x \longmapsto |x|_p$ est une norme ultramétrique sur $\mathbb{Q}$.*

Preuve.

1) On a

$$|x|_p = 0 \iff p^{-v_p(x)} = 0 \iff v_p(x) = +\infty \iff x = 0$$

2) Soient $x,y \in \mathbb{Q}$. Alors

$a)$ Si $x = 0$ ou $y = 0$, alors on a l'égalité.

$b)$ Sinon, alors

$$|x \cdot y|_p = p^{-v_p(x \cdot y)} = p^{-v_p(x) - v_p(y)} = p^{-v_p(x)} \cdot p^{-v_p(y)} = |x|_p \cdot |y|_p$$

3) Soient $x, y \in \mathbb{Q}$. Donc

$$\begin{aligned} v_p(x+y) \geq \min(v_p(x), v_p(y)) \quad &\Longrightarrow \quad -v_p(x+y) \leq -\min(v_p(x), v_p(y)) \\ &\Longrightarrow \quad p^{-v_p(x+y)} \leq p^{-\min(v_p(x), v_p(y))} = p^{\max(-v_p(x), -v_p(y))} \\ &\Longrightarrow \quad p^{-v_p(x+y)} \leq \max\left\{|x|_p, |y|_p\right\} \end{aligned}$$

■

Exemple 2.2.4 *Pour la distance usuelle, la distance de* 252 *à* 2 *est* $d(252, 2) = |252 - 2| = 250$. *Voilà comment mesurer la distance 5-adique de* 252 *à* 2 *que la note* $d_5(252, 2)$ *:*

On écrit

$$252 - 2 = 250 = 5^3 \cdot 2$$

On obtient

$$d_5(252, 2) = |250|_5 = \frac{1}{5^3}$$

De même pour

$$d_3(252, 2) = 1$$

Remarque 2.2.5

1. *La propriété importante de la norme p-adique est que ses images forment un ensemble discret défini par*

$$|\mathbb{Q}|_p = \{0, p^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

2. *Il est claire que l'ensemble des entiers rationnels* $\mathbb{Z}$ *est un ensemble non borné pour la distance usuelle* $d_{|.|}$ *sur* $\mathbb{R}$ *induite par la valeur absolue archimédienne* $|.|_\infty = |.|$.
3. *Si p un nombre premier, tout entier n s'écrit sous la forme* $p^r \cdot m$ *où r représente la valuation p-adique et* $(m, p) = 1$, *donc*

$$\forall n \in \mathbb{Z} : |n|_p \leq p^{-r} \leq 1$$

ce qui implique que $\mathbb{Z}$ *est un ensemble borné pour toute valeur absolue p-adique* $|.|_p$.

On a le résultat suivant, qui lie les normes p-adiques d'un même élément non nul $a \in \mathbb{Q}$:

Théorème 2.2.6 (*La formule du produit*)
Pour tout nombre rationnel non nul $a \in \mathbb{Q}^*$*, on a* $|a|_\infty \cdot \prod\limits_{p\ premier} |a|_p = 1$*. Autrement dit pour tout* $a \in \mathbb{Q}^*$*,* $|a|_p$ *est égal à* 1 *sauf pour un nombre fini de valeurs de* p*.*

Preuve. *La factorisation primaire de* a *s'écrit*

$$a = \mp p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot ... \cdot p_k^{m_k}$$

Alors

$$|a|_\infty = |\mp p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot ... \cdot p_k^{m_k}| = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot ... \cdot p_k^{m_k}$$

et

$$\forall i = \overline{1,k} : |a|_{p_i} = p_i^{-m_i}$$

Soit p *un nombre premier. Si* $p \notin \{p_1, p_2, ..., p_k\}$*, alors*

$$|a|_p = 1$$

On obtient

$$\prod_{p \leq \infty} |a|_p = |a|_\infty \cdot \prod_{i=1}^{k} |a|_{p_i} = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot ... \cdot p_k^{m_k} \cdot \prod_{i=1}^{k} p_i^{-m_i} = 1$$

■

Exemple 2.2.7 *Pour tout* $p \notin \{2, 3, \infty\}$*, on a* $\left|\frac{3}{2}\right|_p = 1$*,ce qui donne*

$$\left|\frac{3}{2}\right|_\infty \cdot \prod_{p\ premier} \left|\frac{3}{2}\right|_p = \left|\frac{3}{2}\right|_\infty \cdot \left|\frac{3}{2}\right|_2 \cdot \left|\frac{3}{2}\right|_3 = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

Remarque 2.2.8 *On peut définir sur le corps des nombres rationnels* $\mathbb{Q}$ *trois types de valeurs absolues :*

1. *Valeur absolue triviale :*

$$|x| = \begin{cases} 1 & , \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

2. *Valeur absolue naturelle(ordinaire) :*

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q}_+ \\ x & \longmapsto & |x|_\infty = \max(x, -x) = \begin{cases} x & , \text{ si } x \geq 0 \\ -x & , \text{ si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

3. Valeur absolue p-adique $|.|_p$.

A propos de suite de Cauchy, noter la propriété remarquable suivante qui n'est pas vraie pour la valeur absolue ordinaire :

Théorème 2.2.9 *Soit* $(a_n)_n$*suite de* $\mathbb{Q}$. *Alors* $(a_n)_n$ *est une suite de Cauchy si et seulement si*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0$$

Preuve. Si $(a_n)_n$ est une suite de Cauchy. Alors

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0 : |a_m - a_n|_p \leq \varepsilon$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} |a_m - a_n|_p = 0, \forall m > n$$

En particulier, pour $m = n + 1 \geq n_0$, on a

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0$$

D'autre part, supposons que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0$$

Par définition

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,; \forall n \geq n_0 : |a_{n+1} - a_n|_p < \varepsilon$$

Prenons $\varepsilon > 0$, $m > n \geq n_0$ et examinons $|a_m - a_n|_p$.
On a

$$\begin{aligned} |a_m - a_n|_p &= |a_m - a_{m-1} + a_{m-1} - a_{m-2} + ... + a_{n+1} - a_n|_p \\ &\leq \max\left\{|a_m - a_{m-1}|_p, |a_{m-1} - a_{m-2}|_p, ..., |a_{n+1} - a_n|_p\right\} \\ &\leq \max(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon) = \varepsilon \end{aligned}$$

Alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. ■

2.3 Les nombres p-adiques

On sait que lorsqu'on complète $\mathbb{Q}$ par rapport à la distance associée à la valeur absolue $|.|$, on obtient le corps des nombres réels $\mathbb{R}$.

On considère l'exemple suivant :

Exemple 2.3.1 *Pour $p = 5$, on définit deux suites a_n et x_n de $\mathbb{Q}$ par*

$$\begin{aligned} x_0 &= a_0 = 2 \\ x_1 &= a_0 + a_1 \cdot 5 \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= a_0 + a_1 \cdot 5 + \cdots + a_{n-1} \cdot 5^{n-1} \\ x_n &= x_{n-1} + a_n \cdot 5^n \\ &\Longleftrightarrow x_n - x_{n-1} \equiv 0 \bmod 5^n \end{aligned}$$

On détermine $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, et $x_n = x_{n-1} + a_n \cdot 5^n$ par la congruence $x_n^2 + 1 \equiv 0 \bmod 5^n$. Il est très facile de voir que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, car

$$|x_n - x_{n-1}|_p \leq |5^n|_p = \frac{1}{5^n} \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty$$

Cependant,, elle ne peut converger vers $x \in \mathbb{Q}$, puisque dans ce cas, on aurait $x^2 + 1 = 0$ dans $\mathbb{Q}$, ce qui est impossible.
On conclut que l'espace métrique $\mathbb{Q}$ muni de la distance associée à la norme p-adique n'est pas complet. On le complète suivant la procédure de complétion par rapport à la norme p-adique, et on obtient un corps complet que l'on note $\mathbb{Q}_p$ qui s'appelle le corps des nombres p-adiques.

Définition 2.3.2 *Soit p un nombre premier.*

1. *Le corps des nombres p-adiques est la complétion de l'espace métrique $(\mathbb{Q}, d_p)$. Ses éléments sont les classes d'équivalences des suites de Cauchy des nombres rationnels $\{a_n\}_n$ muni de la relation suivante*

$$\{a_n\} \Re \{b_n\} \Longleftrightarrow |a_n - b_n|_p \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{} 0$$

2. *On prolonge la norme p-adique définie sur $\mathbb{Q}$ à tout $\mathbb{Q}_p$ par*

$$\forall \alpha \in \mathbb{Q}_p : |\alpha|_p = \lim_{n \longrightarrow \infty} |\alpha_n|_p$$

où (α_n) est une suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{Q}$ qui représente le nombre p-adique α.

Remarque 2.3.3

1. *$\mathbb{Q}$ est inclus dans $\mathbb{Q}_p$ de plus il est dense dans $\mathbb{Q}_p$.*

2. $\mathbb{Q}_p$ *est un corps valué complet ultramétrique.*

Lemme 2.3.4 *Si* $x \in \mathbb{Q}$ *avec* $|x|_p \leq 1$*, alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists \alpha \in \mathbb{Z} : |\alpha - x|_p \leq p^{-n}$$

Preuve. Soient $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, p un nombre premier tels que $(a, b) = 1 = (p, b) = (p, a)$. On a

$$\begin{aligned} |x|_p &= p^{-v_p(x)} \leq 1 \Longrightarrow p^{-v_p\left(\frac{a}{b}\right)} \leq 1 \\ &\Longrightarrow p^{-v_p(a)+v_p(b)} \leq 1 \\ &\Longrightarrow \frac{p^{v_p(b)}}{p^{v_p(a)}} \leq 1 \end{aligned}$$

Tant que

$$(p, b) = 1 \Longrightarrow (p^n, b) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

D'après le théorème de Bézout

$$\exists m_1, m_2 \in \mathbb{Z} : m_1 \cdot b + m_2 \cdot p^n = 1$$

On prend

$$\alpha = a \cdot m_1 \in \mathbb{Z}$$

On a

$$\begin{aligned} |\alpha - x|_p = \left|\alpha - \tfrac{a}{b}\right|_p &= \left|a \cdot m_1 - \tfrac{a}{b}\right|_p \\ &= \left|\tfrac{a}{b} \cdot (m_1 \cdot b - 1)\right|_p \\ &= \left|\tfrac{a}{b}\right|_p \cdot |m_1 \cdot b - 1|_p \\ &\leq |m_1 \cdot b - 1|_p = |m_2 \cdot p^n|_p \leq p^{-n} \end{aligned}$$

■

Théorème 2.3.5 *Si la classe d'équivalence* $a \in \mathbb{Q}_p$ *vérifie la condition* $|a|_p \leq 1$*, alors elle possède un seul représentant* (λ_n) *qui satisfait*

$$\begin{cases} \lambda_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq \lambda_n \leq p^n - 1 \\ \\ \lambda_{n+1} \equiv \lambda_n \bmod p^n \end{cases}$$

Preuve. Soit $a \in \mathbb{Q}_p$ tel que $|a|_p \leq 1$, alors d'après le lemme 2.3.4

$$\exists \alpha_0 \in \mathbb{Z} : |\alpha_0 - a|_p < 1, 0 \leq \alpha_0 \leq p - 1$$

et comme $|a-\alpha_0|_p \leq \frac{1}{p} < 1$, alors $\left|\frac{a-\alpha_0}{p}\right| \leq 1$. D'après le lemme précédent, on obtient

$$\exists \alpha_1 \in \mathbb{Z} : |a-(\alpha_0+\alpha_1 \cdot p)|_p < p^{-1}, 0 \leq \alpha_1 \leq p-1$$

On répète cette étape, on obtient une suite des entiers rationnels $\alpha_n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$|a-(\alpha_0+\alpha_1 \cdot p+\ldots+\alpha_n \cdot p^n)|_p < p^{-n}, 0 \leq \alpha_n \leq p-1$$

Soit la suite (λ_n) définie par

$$\lambda_n = \alpha_0+\alpha_1 \cdot p+\ldots+\alpha_{n-1} \cdot p^{n-1}$$

(λ_n) vérifie

$$\begin{cases} \lambda_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq \lambda_n \leq p^n-1 \\ \lambda_{n+1} \equiv \lambda_n \bmod p^n \\ \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = a \end{cases}$$

Montrons maintenant l'unicité.
Supposons que a possède deux représentants (λ_n) et (λ'_n) différents

$$\begin{cases} \lambda_n = \alpha_0+\alpha_1 \cdot p+\ldots+\alpha_{n-1} \cdot p^{n-1} \\ \lambda'_n = \alpha'_0+\alpha'_1 \cdot p+\ldots+\alpha'_{n-1} \cdot p^{n-1} \end{cases}$$

Soit d le premier entier pour que $\alpha_d \neq \alpha'_d$, alors nous pouvons supposer que $\alpha_d < \alpha'_d$. On trouve

$$1 \leq \alpha'_d - \alpha_d \leq p-1$$

Alors

$$\lambda'_d - \lambda_d = (\alpha'_d - \alpha_d) \cdot p^d$$

Donc

$$|\lambda'_d - \lambda_d|_p = p^{-d}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} |\lambda'_d - \lambda_d|_p &= |\lambda'_d - a + a - \lambda_d|_p \\ &\leq \max\left\{|\lambda'_d - a|_p, |a-\lambda_d|_p\right\} \\ &< p^{-d} \end{aligned}$$

Ceci contredit la dernière égalité. ■

Conclusion 2.3.6

1. *La suite de Cauchy* (λ_n) *qui vérifie les conditions du théorème précédent s'appelle représentant canonique de* a*.*
2. *Tout nombre p-adique* $a \in \mathbb{Q}_p$ *admet un développement unique sous forme d'une série convergente (série de Hensel) s'écrit sous la forme* $a = \sum_{k=n}^{\infty} \beta_k \cdot p^k$ *où* $\beta_k \in \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}, n \in \mathbb{Z}$ *et* $|a|_p = p^{-n}$*.*
3. *On note par* $a = \beta_n \beta_{n+1} \ldots \cdot \beta_0 \beta_1 \ldots$ *la forme canonique de* a *où* $\cdot$ *est appelé le point p-adique qui nous permet de déterminer le signe de* n*, tels que :*
   (a) $a = \beta_n \beta_{n+1} \ldots \beta_{-1} \cdot \beta_0 \beta_1 \ldots$*, si* $n < 0$*.*
   (b) $a = \cdot \beta_0 \beta_1 \beta_2 \ldots$*, si* $n = 0$*.*
   (c) $a = \cdot 00 \ldots 0 \beta_0 \beta_1 \ldots$*, si* $n > 0$*.*

Exemple 2.3.7 *Soient les nombres* 5*-adiques suivants :*

1. (a) $a_1 = 13 \cdot 41 = 1 \cdot 5^{-2} + 3 \cdot 5^{-1} + 4 \cdot 5^0 + 1 \cdot 5^1 = \frac{241}{25}$, $n = -2$
   (b) $a_2 = \cdot 1341 = 1 \cdot 5^0 + 3 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^3 = 241$, $n = 0$
   (c) $a_3 = \cdot 01341 = 0 \cdot 5^0 + 1 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^4 = 1205$, $n = 1$
2. *Le développement* $5-$*adique de* $b = \frac{1}{3}$ *est*

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= 2 \cdot 5^0 + 3 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^4 + \ldots \\ &= \cdot 231313131\ldots = \cdot 2\overline{31} \ \ (\textit{périodique}) \end{aligned}$$

3. *Pour tout p premier, le développement p-adique de* -1 *est*

$$\begin{aligned} -1 &= (p-1) + (p-1) \cdot p + (p-1) \cdot p^2 + (p-1) \cdot p^3 \ldots + (p-1) \cdot p^n + \ldots \\ &= (p-1) \sum_{n=0}^{\infty} p^n \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\frac{1}{1-p} = \cdot 11111\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} p^n$$

2.4 Les entiers p-adiques

Définition 2.4.1 *On dit que le nombre p-adique $a \in \mathbb{Q}_p$ est un entier p-adique si le développement canonique de a ne contient que les puissances positives de p. Autrement dit $v_p(a) \geq 0$. On écrit*

$$a = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot p + \alpha_2 \cdot p^2 + \ldots + \alpha_n \cdot p^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot p^n, 0 \leq \alpha_n < p$$

On note par $\mathbb{Z}_p$ l'ensemble des entiers p-adiques, avec

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ a \in \mathbb{Q}_p : a = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot p^n \right\} = \{a \in \mathbb{Q}_p : v_p(a) \geq 0\}$$

Remarque 2.4.2

1. $\mathbb{Z}_p = \{a \in \mathbb{Q}_p : v_p(a) \geq 0\} = \left\{ a \in \mathbb{Q}_p : |a|_p \leq 1 \right\}$. *Autrement dit $\mathbb{Z}_p$ représente le disque de l'unité de rayon 1 et de centre 0.*
2. *Le corps $\mathbb{Q}_p$ est l'ensemble des fractions de $\mathbb{Z}_p$*

$$\mathbb{Q}_p = \left\{ \frac{a}{b} : (a, b) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p^* \right\}$$

Définition 2.4.3 *Soit a un nombre p-adique, on dit que a est inversible ou unitaire si le développement canonique p-adique de a ne contient que les puissances positives de p et le premier chiffre différent de zéro. On écrit*

$$a = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot p + \alpha_2 \cdot p^2 + \ldots + \alpha_n \cdot p^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot p^n, 0 < \alpha_n < p$$

Notons par $\mathbb{Z}_p^*$ (ou U_p) l'ensemble de nombres p-adiques inversibles (unitaires) définie par

$$\mathbb{Z}_p^* = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot p^n : \alpha_0 \neq 0 \right\} = \{a \in \mathbb{Q}_p : v_p(a) = 0\} = \left\{ \alpha \in \mathbb{Z}_p : |\alpha|_p = 1 \right\}$$

Proposition 2.4.4 *Tout nombre p-adique $\alpha \in \mathbb{Q}_p$ s'écrit de façon unique sous la forme*

$$\alpha = p^n \cdot u,\ u \in \mathbb{Z}_p^*,\ n \in \mathbb{Z}$$

Preuve.

1. *Existence de la représentation :*

Soit $\alpha \in \mathbb{Q}_p$, alors α s'écrit sous la forme

$$\alpha = \frac{a}{b},\ (a,b) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p^*$$

On sait que

$$\begin{cases} a = u_1 \cdot p^{m_1}, u_1 \in \mathbb{Z}_p^*, m_1 = v_p(a) \\ \\ b = u_2 \cdot p^{m_2}, u_2 \in \mathbb{Z}_p^*, m_2 = v_p(a) \end{cases}$$

Donc

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & \frac{a}{b} = \frac{u_1 \cdot p^{m_1}}{u_2 \cdot p^{m_2}} \\ & = & \frac{u_1}{u_2} \cdot p^{m_1 - m_2} \\ & = & u \cdot p^n,\ n = m_1 - m_2,\ u = \frac{u_1}{u_2} \in \mathbb{Z}_p^* \ \left(\textit{puisque } \mathbb{Z}_p^* \textit{ un corps}\right) \end{array}$$

2. *Unicité de la représentation :*

Supposons que α admet deux représentations

$$\begin{cases} \alpha = u' \cdot p^{m'}, u' \in \mathbb{Z}_p^*, m' \in \mathbb{Z} \\ \textit{et} \\ \alpha = u'' \cdot p^{m''}, u'' \in \mathbb{Z}_p^*, m'' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Alors

$$\begin{array}{rcl} u' \cdot p^{m'} & = & u'' \cdot p^{m''} \Longrightarrow u' \cdot u''^{-1} = p^{m''-m'} \\ & \Longrightarrow & v_p\left(u' \cdot u''^{-1}\right) = m'' - m' \end{array}$$

Or

$$v_p\left(u' \cdot u''^{-1}\right) = 0 \ \left(\textit{car } u' \cdot u''^{-1} \in \mathbb{Z}_p^*\right)$$

Alors

$$m' = m''$$

Par conséquent $u' = u$".

■

Exemple 2.4.5 *Soient*

$$\begin{cases} p = 5 \\ \alpha^{(1)} = \cdot 4\overline{13} = 4 + 1 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^4 + \dots \\ \alpha^{(2)} = \cdot 4\overline{2} = 4 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^4 + \dots \end{cases}$$

$\alpha^{(1)}$ *et* $\alpha^{(2)}$ *sont des nombres de* $\mathbb{Z}_5^*$*. Par contre*

$$\begin{cases} \beta^{(1)} = \mathbf{.}01\overline{40} = 0 + 1 \cdot 5 + 4 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^4 + 0 \cdot 5^5 + \dots \\ \beta^{(2)} = 42\,\mathbf{.}\,13\overline{31} = 4 \cdot 5^{-2} + 2 \cdot 5^{-1} + 1 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^4 + \dots \end{cases}$$

$\beta^{(1)} \notin \mathbb{Z}_5^*$ *puisque le premier chiffre est nul et* $\beta^{(2)} \notin \mathbb{Z}_5^*$ *puisque le développement* 5*-adique de* $\beta^{(2)}$ *contient des puissances négatives.*

Chapitre 3

Les propriétés topologiques et analytiques des nombres p-adiques

Le but de ce chapitre est d'exposer les différentes propriétés topologiques et analytiques de corps des nombres p-adiques.

Proposition 3.0.6 *Soient $x, a \in \mathbb{Q}_p$. Si $|a - x|_p < |a|_p$, alors $|x|_p = |a|_p$. Autrement dit, tout triangle dans l'espace $(\mathbb{Q}_p, |.|_p)$ est isocèle et la longueur de sa base ne dépasse pas les longueurs des côtés.*

Preuve. D'après l'inégalité triangulaire forte, on a

$$|x|_p = |x - a + a|_p \leq \max\left\{|a|_p, |x - a|_p\right\} = |a|_p \tag{3.1}$$

D'autre part, on a

$$|a|_p = |a - x + x|_p \leq \max\left\{|x - a|_p, |x|_p\right\}$$

Si $|x - a|_p > |x|_p$, alors

$$|a|_p \leq |x - a|_p$$

Ceci contredit le fait que $|a - x|_p < |a|_p$. Donc $|x - a|_p < |x|_p$,ce qui donne

$$|a|_p \leq |x|_p \tag{3.2}$$

De (3.1) et (3.2), on trouve

$$|a|_p = |x|_p$$

■

Définition 3.0.7 *On appelle :*

1. *La boule ouverte dans $\mathbb{Q}_p$, de rayon $r \in \mathbb{R}^+$ et de centre $a \in \mathbb{Q}_p$ l'ensemble donné par*
$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{Q}_p : d_p\,(a,x) < r\} = \{x \in \mathbb{Q}_p :\mid x-a\mid_p < r\} \tag{3.3}$$
2. *La boule fermé dans $\mathbb{Q}_p$, de rayon $r \in \mathbb{R}^+$ et de centre $a \in \mathbb{Q}_p$ l'ensemble donné par*
$$\bar{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{Q}_p : d_p\,(a,x) \leq r\} = \{x \in \mathbb{Q}_p :\mid x-a\mid_p \leq r\} \tag{3.4}$$
3. *La sphère dans $\mathbb{Q}_p$ l'ensemble défini par*
$$S(a,r) = \{x \in \mathbb{Q}_p : d_p\,(a,x) = r\} = \{x \in \mathbb{Q}_p :\mid x-a\mid_p = r\} \tag{3.5}$$

Remarque 3.0.8 *La norme p-adique $|.|_p$ prend ses valeurs dans l'ensemble discret $\{0, p^n : n \in \mathbb{Z}\}$, donc on peut prend $r = p^n, n \in \mathbb{Z}$.*

Proposition 3.0.9 *La sphère $S(a,r)$ est un ensemble ouvert dans $\mathbb{Q}_p$.*

Preuve. Il faut montrer que $S(a,r)$ est voisinage de tous ses points, c'est à dire que pour tout $x \in S(a,r)$, il existe une boule ouverte de centre x et de rayon s inclus dans $S(a,r)$. Cela signifie
$$\forall x \in S(a,r), \exists s > 0 : B\,(x,s) \subset S(a,r)$$
Soient $x \in S(a,r)$ et $s < r$. Montrons que $B\,(x,s) \subset S(a,r)$.
Supposons que $y \in B(x,s)$, alors
$$\begin{cases} \mid x-y\mid_p < s \\ \\ \mid x-a\mid_p = r \end{cases} \Longrightarrow \mid x-y\mid_p < \mid x-a\mid_p = r$$
D'après la proposition (3.0.6), on a
$$\mid y-a\mid_p = \mid x-a\mid_p = r$$
Alors
$$y \in S(a,r)$$
■

Proposition 3.0.10 *Toute boule $B(a,r)$ de $(\mathbb{Q}_p, |.|_p)$ est un ensemble à la fois ouvert et fermé.*

Preuve. On sait que toute boule $B(a,r)$ est ouverte dans tout espace métrique. Pour montrer que $B(a,r)$ est fermée dans $\mathbb{Q}_p$, on va montrer que son complémentaire

$$C = \{x \in \mathbb{Q}_p : \mid x - a \mid_p \geq r\}$$

est un ensemble ouvert.

On a

$$C = S(a,r) \cup D$$

Où

$$D = \{x \in \mathbb{Q}_p : \mid x - a \mid_p > r\}$$

L'ensemble

$$D = \{x \in \mathbb{Q}_p : \mid x - a \mid_p > r\}$$

est un ouvert. En effet :
Supposons que $y \in D$ et posons

$$\mid y - a \mid_p = r_1 > r$$

Montrons que la boule $B(y,\, r_1 - r)$ est inclus dans D.

Pour cela, supposons que $B(y,\, r_1 - r)$ n'est pas inclus D, alors on peut trouver $x_0 \in B(y, r_1 - r)$, $x_0 \notin D$ telle que

$$\begin{cases} \mid y - x_0 \mid_p < r_1 - r \\ \\ \mid x_0 - a \mid_p \leq r \end{cases}$$

On trouve

$$\begin{aligned} r_1 &= \mid y - a \mid_p = \mid y - x_0 + x_0 - a \mid_p \\ &\leq \mid y - x_0 \mid_p + \mid x_0 - a \mid_p \\ &< r_1 - r + r = r_1 \end{aligned}$$

Contradiction. Comme l'union de deux ouverts est un ouvert, donc C est un ouvert. ■

Proposition 3.0.11 *Tout point d'une boule est le centre de cette boule. C'est-à-dire*

$$\forall b \in B(a,r) \Longrightarrow B(a,r) = B(b,r)$$

Preuve. Soient $b \in B(a,r)$ et $x \in B(a,r)$, alors

$$\begin{aligned} |x-b|_p &= \mid x-a+a-b \mid_p \leq \max\{\mid x-a \mid_p, \mid a-b \mid_p\} \\ &< \max\{r,r\} = r \end{aligned}$$

on obtient $B(a,r) \subset B(b,r)$.

D'autre part, Maintenant si nous échangeons les rôles de a et b, alors on trouve $B(b,r) \subset B(a,r)$. ■

Proposition 3.0.12 *Deux boules sont soit disjointes soit l'une est contenue dans l'autre. Autrement dit si $B(a,r)$ et $B(b,s)$ deux boules de $(\mathbb{Q}_p, |.|_p)$, alors*

$$B(a,r) \cap B(b,s) \neq \varnothing \Longrightarrow B(a,r) \subset B(b,s) \text{ ou } B(b,s) \subset B(a,r) \tag{3.6}$$

Preuve. Supposons que $r \leq s$, et $y \in B(a,r) \cap B(b,s)$. Alors $y \in B(a,r)$ et $y \in B(b,s)$. D'après la proposition (3.0.11)

$$\begin{cases} B(a,r) = B(y,r) \\ \\ B(b,s) = B(y,s) \end{cases}$$

D'autre part, on a $B(y,r) \subset B(y,s)$, on obtient

$$B(a,r) \subset B(b,s)$$

De même, si on suppose que $s \leq r$, alors on trouve

$$B(b,s) \subset B(a,r)$$

■

Remarque 3.0.13 *Toutes les propriétés qui sont démontrées au-dessus pour les boules ouvertes, restent vrais pour les boules fermées dans $\mathbb{Q}_p$.*

Théorème 3.0.14 *Une suite $(a_n)_n$ de $\mathbb{Q}_p$ est une suite de Cauchy et par conséquent convergente si et si seulement si*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0$$

Preuve. Si $(a_n)_n$ est une suite de Cauchy. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0 : |a_m - a_n|_p \leq \varepsilon$$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} |a_m - a_n|_p = 0, \forall m > n$$

En particulier, pour $m = n + 1 \geq n_0$, on a

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0$$

D'autre part, supposons que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0$$

Par définition

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,; \forall n \geq n_0 : |a_{n+1} - a_n|_p < \varepsilon$$

Prenons $\varepsilon > 0$, $m > n \geq n_0$ et examinons $|a_m - a_n|_p$.
On a

$$\begin{aligned} |a_m - a_n|_p &= |a_m - a_{m-1} + a_{m-1} - a_{m-2} + ... + a_{n+1} - a_n|_p \\ &\leq \max\left\{|a_m - a_{m-1}|_p, |a_{m-1} - a_{m-2}|_p, ..., |a_{n+1} - a_n|_p\right\} \\ &\leq \max(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon) = \varepsilon \end{aligned}$$

Alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. ■

Proposition 3.0.15 *Une série* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *avec* $a_n \in \mathbb{Q}_p$ *converge dans* $\mathbb{Q}_p$ *si et seulement si* $\lim_{n \longrightarrow +\infty} a_n = 0$.

Preuve. On note par $\sum_{i=0}^{n} a_i = s_n$ la suite des sommes partielles. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} a_n \text{converge dans } \mathbb{Q}_p &\iff (s_n)_n = (\sum_{i=0}^{n} a_i)_n \text{ converge dans } \mathbb{Q}_p \\ &\iff s_n - s_{n-1} = a_n \text{ converge vers 0 dans } \mathbb{Q}_p \\ &\iff \lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = 0 \text{ dans } \mathbb{Q}_p . \end{aligned}$$

■

Remarque 3.0.16 *Cette proposition est fausse dans* $(\mathbb{R}, |.|)$. *L'exemple le plus évident d'une série dans* $(\mathbb{R}, |.|)$ *dont le terme général tend vers* 0, *mais qui ne converge pas, est la série harmonique* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

Conclusion Générale

On a vu qu'un espace métrique M est dit complet ou espace complet si toute suite de Cauchy de M a une limite dans M (converge dans M), donc la notion de suite de Cauchy est plus faible que la notion de suite convergente.

La propriété de complétude dépend de la distance. Quand on parle d'espace complet, il est important de préciser la distance que l'on prend.

La procédure de complétion est valable pour un espace métrique quelconque.

L'avantage des espaces complets est qu' il n'est pas utile de connaître la limite d'une suite pour montrer qu'elle est convergente, il suffit de montrer qu'elle est de Cauchy.

Bibliographie

[1] A.J. Baker, *An Introduction to p-adic Numbers and p-adic Analysis.* Department of Mathematics, University of Glasgow, Scotland (2004).

[2] B. Diarra, *Analyse p-adique. Cours DEA- Algèbre Commutative FAST.* Université du Mali. Décembre 1999- Mars (2000).

[3] C. Berger, *Topologie pour la Licence.* Université de Nice-Sophia Antipolis, Laboratoire J.-A. Dieudonné, 06108 Nice Cedex (2004).

[4] C. K. Koc, *A Tutorial on P-adic Arithmetic.* Electrical and Computer Engineering. Oregon State University, Corvallis, Oregon 97331. Technical Report (2002).

[5] F. B. Vej, *P-adic Numbers.* Aalborg University, Department Of Mathematical Sciences. 7E 9222 Aalborg Øst. Groupe E3-104 (2000).

[6] F.Q. Gouvéa, *P-adic Numbers : An Introduction.* Second Edition. New York : Springer-Verlag, (1997).

[7] G. Christol, A. Cot, C. M Marle, *Topologie, Mathématiques pour le deuxième cycle.* Ellipses (1997).

[8] J.P Bézivin, *Dynamique des fractions rationnelles p-adiques.* Université de Caen (2005).

[9] S. Katok : *Real and p-adic analysis.* Course notes for Math 497C, Mass Program, Fall 2000
(2001).

[10] W.H. Schiko, *Ultrametric Calculus*, *An Introduction to p-adic Analysis*, Cambridge Studies in Adv. Math. 4, Cambridge University Press, (1984).

[11] Y. Amice, *Les nombres p-adiques.* Presses universitaires de France (1975).