الجمهوريـــة الجزائـــريـــة الديمقراطيـــة الشعبيـــة

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليـــــم العالـــي والبحـــث العلمـــي

Ministère de lôEnseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Nº Ref :é é é é é

Centre Universitaire de Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Applications des variables aléatores

Mémoire préparé En vue de lôobtention du diplôme de Licence Mathématiques

Présenté par :

1- Facih Amine

2- Amimour Riad

3- Haddadou Tarek

Dirigé par :

Bouzerayeb Hayet

Filière : mathématiques et Informatique

Spécialité : mathématiques

Année universitaire : 2012/2013

dedicase

Ce mémoire est dédié à nos chers parents, pour leurs patiences et leurs soutiens. Merci a tous d'avoir cru en nous, d'avoir toujours été coté pendant toutes ces années tout simplement parce que sans eux, sans leurs conseils et sans leur amour, rien de tout cela n'aurait pu être réalisé. Nous tenons également à remercier tous ceux et celles qui de prés ou de loin ont contribué de quelque manière que ce soit à l'aboutissement de ce mémoire. Nous tenons à saluer toutes les personnes qu'on a eux la chance d'avoir comme amis, frères et sœurs.

Table des matières

Introduction Générale

Les variables aléatoires furent introduites à l' origine pour représenter un gain, par exemple effectuons l'expérience suivante, lançons une pièce de monnaie et suivant que le résultat est pile nous gagnons dix euros, ou face nous perdons un euro. On considère alors X, la variable aléatoire qui prend la valeur 10 lorsque nous obtenons pile et la valeur -1 lorsque nous obtenons face. X représente le gain a l'issue d'un lancer de la pièce.De façon plus générale une variable aléatoire est une certaine onction, qui dépend du résultat d'une expérience aléatoire par exemple dans ce cas le résultat du pile ou face. Cette fonction associe une certaine valeur au résultat d'une expérience. Dans notre exemple plus haut la variable aléatoire associe 10 à $<$ pile $>$ et -1 <face>. Cela permet d'associer des nombres à des résultats d'expériences qui ne sont pas numériques.

Ce mémoire est répartit sur l'introduction générale et trois chapitresDans le premier chapitre, nous avons donnés les variables aléatoires celle qui contient variables aléatoires réelles dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$et fonctions de répartitions dans $\mathbb{R}$et $\mathbb{R}^2$.

Dans le deuxième chapitre nous avons présenté les modes de convergence celle qui concernent la convergence en loi, convergence presque sure, convergence en probabilité et convergence en moyenne quadratique.

Dans le dernier chapitre, on s'est intéressé de théorème central limite-lois des grands nombres lois faibles des grands nombres et lois fortes des grands nombres.

Chapitre 1

Variables aléatoires

1.1 Variables aléatoires réelles

Définition 1.1 *Soit* (Ω, A, P) *un espace de probabilité.On appelle variable aléatoire réelle* $(v\ a\ r)$ *définie sur* (Ω, A)*,une fonction* X *de* Ω *dans* $\mathbb{R}$ *et telle que l'image réciproque par* X *de tout intervalle ouvert* $]-\infty, a[$*,est un événement (i.e :*$X^{-1}(]-\infty, a[) \in A$*).Dire que* X *est un variable aléatoire réelle sur* (Ω, A, P) *revient à dire que* $X^{-1}(B) \in A$*,pour tout borélien B.Ceci vient de ce que la famille des intervalles semi-ouverts bornées et la famille des intervalles de la forme* $]-\infty, a[$*,engendrent la* $\sigma-$alg*èbre des boréliens.*

Proposition 1.2 *soit* X *une v a r définie sur un espace probabilisé* (Ω, A, P)*.La famille des parties* $\{X^{-1}(B) : B \in \beta\}$ *est une* $\sigma - a\lg \grave{e}bre$*,appelé la* $\sigma-$alg*èbre engendrée par X. On note* $\sigma(X)$ *cette* $\sigma-$alg*èbre des événements et on remarquera que* $\sigma(X)$ *est une sous* $\sigma-$alg*èbre de* A

Exemple 1.3 *Soit A un événement .l'indicatrice* 1_A *est une v a r sur l'espace* (Ω, A, P)*.En effet, pour tout réel a on a* $1_A^{-1}(]-\infty, a[) = \left\{ \begin{array}{c} \phi \ si\ a \leq 0 \\ \overline{A}\ si\ 0 < a \leq 1\ et\ donc \\ \Omega\ si\ a > 1 \end{array} \right\}$

$$1_A^{-1}(]-\infty, a[) \in A.$$

On notera que

$$\sigma(1_A) = \left\{\phi, A, \overline{A}, \Omega\right\} = \sigma(A)$$

.Soit P=$\{A_1, A_2, ..., A_r\}$ *une partition de* Ω *et où* $A_1, A_2, ..., A_r$ *sont des événements.Une fonction* X *combinaison linéaire finie des variables indicatrices*

$$1_{A_j} : X = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j.1_{A_j}$$

est une v a r, appelée ***variable aléatoire étagée*** *.Elle prend la valeur constante α_j sur l'événement A_j : $j = 1, r$.Réciproquement,une fonction X définie sur un espace de probabilité (Ω, A, P) et prenant un nombre fini de valeur $a_1, ..., a_n$ est une v a étagée si et selement si, les image réciproque $X^{-1}(\{\alpha_j\})$ sont des événements dans A. Dans ce cas,la partition $\{A_1, A_2, ..., A_r\}$ de Ω est défine par $A_j = X^{-1}(\{\alpha_j\})$.On écrit v a r é pour variable aléatoire réelle étagée*

.

Définition 1.4 *une v a r X est dite positive (resp.finie,resp.bornée)si $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ (resp.$X(\Omega)) \subset \mathbb{R}$, resp.il existe M>0/$|X(\omega)| < M$,pour tout $\omega \in \Omega$)*

Concernant les v a r positives, on a l'important résoltat suivant qu'on admettra.

Théorème 1.5 *Soit (Ω, A, P) un esoace de probabilité.Toute variable aléatoire réelle positive définie sur (Ω, A) est limite simple d'une suite croissante de v a r é positives définies sur (Ω, A, P) .Pour toute variable aléatoire réelle X définie sur (Ω, A) ,on définit $X^+ = \sup(X, 0)$ et $X^- = \sup(-X, 0)$*
apelées respectivement la partie positive et la partie négative de X
.Ces la fonctions sont des v a r positive.Ceci résult immédiatemment de ce que $\{X^+ < x\} = \{X < x\}$ si $x > 0$ et $\{X^+ < x\} = \emptyset$ si $x < 0$.et

$$\left\{X^- < x\right\} = \{X > -x\} \text{ si } x > 0 \text{ et} \left\{X^- < x\right\} = \emptyset \text{ si } x < 0.$$

Par ailleurs, on a les relations $X = X^+ - X^-$ et $|X| = X^+ - X^-$,
d'où $X^+ = \frac{X+|X|}{2}$ et $X^- = \frac{X+|X|}{2}$.Nous déduisons alors en utilisant les opérations sur les limites et le théorème 1,le résultat suivant :

Corollaire 1.6 *Toute v a r X est limite d'au moins une suite de v a r é .*

1.1.1 Opération sur les variable aléatoires réelles $(v.a.r)$

Soitent X et Y deux v a r définies sur le même espace probabilié (Ω, A, P).

*La somme $X + Y$, le produit $X.Y$ sont des *v a r*.Si de plus, la *v a r X* ne prend pas la valeur 0 sur Ω, alors l'inverse $\frac{1}{X}$ est aussi une v a r.

**Si φ est une fonction réelle de la variable réelle telle que pour tout intervalle $[a, b]$,$\varphi^{-1}([a, b])$ est un borélient, alors la fonction $Y = \varphi(X)$ est une variable aléatoire réelle.

***Si $(X_n, n \geq 1)$ est une suite de v a r ,les applications $\sup_n X_n$ et $\inf_n X_n$ définissent encore des v a r .Ceci vient de ce que pour tout $x \in \mathbb{R}$,on a :

$\left\{\omega : \sup_n X_n(\omega) < x\right\} = \bigcap_{n\geq 1} \{\omega : X_n(\omega) < x\}$
et
$\left\{\omega : \inf_n X_n(\omega) < x\right\} = \bigcup_{n\geq 1} \{\omega : X_n(\omega) < x\}$
Et il s'ensuit encore que $\limsup_n X_n$ et $\liminf_n X_n$ sont des $v\ a\ r$.

Définition 1.7 *Soit* $(X_n, n \geq 1)$ *une suite de v a r définies sur l'espace de probabilité* (Ω, A, P)*.Si* $\limsup_n X_n = \liminf_n X_n$ *sur une partie de* Ω*,on dit que cette suite converge et on note* $\lim_{n\to\infty} X_n$ *la variable aléatoire limite .L'ensemble de convergence d'une suite convergente* $(X_n, n \geq 1)$ $\left(i.e : \left\{\omega : \limsup_n X_n = \inf_n X_n(\omega)\right\}\right)$ *de v a r sur* (Ω, A, P)*,est un événement.Et nous dirons alors que la suite* $(X_n, n \geq 1)$ *de v a r conerge partout si l'ensemble de convergence de cette suite coïncide avec* Ω*, et* ***converge presque sûrement****,si l'ensemble de convergence est de probabilité égale à 1.Dans ce dernier cas,on dit que la suite* $(X_n, n \geq 1)$ ***converge presque sûrement.***

1.2 Fonction de répartition

1.2.1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle ($v.a.r$)

Définition 1.8 *Soit* X *une v a r définie sur un espace de probabilité* (Ω, A, P) *.Un événement* A *de la* $\sigma - a\lg\acute{e}bre$ $\sigma(X)$ *engendrée par* X*, s'écrit* $A = X^{-1}(B)$ *où* B *est un borélien.Cette relation permet de définir une loi de probabilité sur l'espace probabilisable* $(\mathbb{R}, B)$ *en transportant la probabilité* P *sur l'espace probabilisable* $(\mathbb{R}, B)$ *et ceci en posant :*

$Q(B) = P(X \in B)$

De façon précise,on a la proposition suivante :

Proposition 1.9 *Soit* (Ω, A, P) *un espace de probabilité et* X *une v a r définie sur* (Ω, A, P) *.La fonction* Q *définie sur* B *par* $B \to Q(B) = P(\omega \in \Omega / X(\omega) \in B)$ *est une loi de probabilité sur* $(\mathbb{R}, B)$*,applée loi image de* P *par* X *(ou encore la loi probabilité de la v a r* X*).*

Preuve. Il est aisé de verifier que cette fonction est positive et de masse totale 1, de plus P étant une probabilité sur (Ω, A) assur de $\sigma-$additivité de cette fonction. ■

On note P_X la loi de probabilité de la $v\ a\ r\ X$. L'espace de probabilité $(\mathbb{R}, B, P_X)$ est dit l'espace de probabilité image de (Ω, A, P) par X.

!En d'autre termes, la $v\ a\ r\ X$ nous donne une autre preception des effets de l'exprérience aléatoire.On regarde plus, les événements aléatoires dans Ω,mais leurs image par X dans l'espace de probabilité image $(\mathbb{R}, B, P_X)$.

1.2.2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle $(v.a.r)$

Définition 1.10 *Soit* (Ω, A, P) *un espace de probabilité et* X *une v a r définie sur cet espace et* P_X *sa loi de probabilité.On appelle fonction de répartition associée à la loi de* P_X *(ou encore fonction de répartition de la v a r* X *),l'application* F_X *de* $\mathbb{R}$ *dans* $[0,1]$ *définie pour tout* $x \in \mathbb{R}$*,par* $F_X(x) = P_X(]-\infty, x[) = P(\omega \in \Omega / X(\omega) < x)$

Et eut égard à ce que P *est une "mesure",on peut écrire* F_X *sous forme intégrale*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} dP_X(t)$$

Remarque 1.11 *La loi de probabilité d'une v a r* X*,est entièrement identifiée par sa fonction de répartition* F_X *(on montre en effet, que la donnée d'une fonction de répartition* F *détermine entièrement une loi de probabilité* P *sur l'espace probabilisation* $(\mathbb{R}, B)$

Proposition 1.12 *Soit* X *une v a r définie sur un espace de probabilité* (Ω, A, P)*.La fonction de répartition* F_X *de la v a r* X *, jouit des propriétés suivantes :*

$F_1.F_X$ *est non négative.*

$F_2.F_X$ *est non décroissante.*

$F_3.F_X$ *est continue à gauche en tout point* $x \in \mathbb{R}$

$F_4.$ $\lim\limits_{n\to+\infty} F_X(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} F_X(x) = 1.$

$F_5.$*Pour tout intervalle* $[a, b[$ *de* $\mathbb{R}$*, on a :*$P_X([a, b[) = F_X(b) - F_X(a)$

Théorème 1.13 *Toute fonction de répartition de* F *sur* $\mathbb{R}$ *est une combinaison linéaire convexe unique d'une fonction de répartition discrête* F_d *et d'une fonction de répartiton continue* F_c*sur* $\mathbb{R}$ *:*

$$F = \alpha.F_d + (1-\alpha).F_c$$

où α *est un réel compris entre 0 et 1.*

Définition 1.14 *On appelle variable aléatoire discrête* $($*resp. v a continue*$)$*,une v a dont la fonction de répartition est une fonction discrête (resp.fonction diffuse).*

1.2.3 Densité de probabilité

Définition 1.15 *Soit* P *une loi de probabilité sur* $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$ *et* F *sa fonction de répartition .Si* F *est partout dérivable sur* $\mathbb{R}$*, alors sa dérivée* f *est appelée* ***la dansité de probabilité*** *de la loi* P *et satisfait :*$P(]+\infty, x[) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ *,pour tout* $x \in \mathbb{R}$*.*

Remarque 1.16 *Tout loi de probabilité **avec densité est diffuse.***
Si F_X est la fonction de répartition d'une v a r X définie sur un espace de probabilité (Ω, A, P), et si la loi de probabilité P_X de X admet une densité de probabilité f_X, alors on a $F'_X(x) = f_X(x), \forall x \in \mathbb{R}$ et :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$$

f_X est dite aussi densité de probabilité de la variable aléatoire de X.

Exemple 1.17 *i)Loi exponentielle de paraméttre λ.Cette loi est caractérisé par sa densité de probabilité définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \frac{1}{\lambda}\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right).1_{\mathbb{R}+}(x)$ où λ est un paramètre réel strictement positif.*

ii)Loi uniforme .la fonction de répartiton de la loi uniforme $[a, b]$ est dérivable sur cet intervalle .La loi uniforme sur $[a, b]$ possède donc une densité de probabilité donnée par $f(x) = F'(x) = \frac{1}{b-a}1_{[a,b]}(x)$.

1.3 Variable alèatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$

Définition 1.18 *Soit (Ω, A, P) un espace probabilisè .une application X de (Ω, A, P) dans $\mathbb{R}^2$ est dite un $\vec{v}$ a . si pour tout rectangle $[a; b]\times[c, d]$ dans $\mathbb{R}^2$, la partie $X^{-1}([a, b] \times [c, d])$ est un èvènement dans A.*

L'espace $\mathbb{R}^2$ est en fait muni de la $\sigma-$algèbre β_2 engendrèe par les rectangles $([a, b] \times [c, d])$,appelèe la $\sigma-$algèbre des borèlien dans $\mathbb{R}^2$ .Et par suite,dire que X est un vecteur alèatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ si la $\sigma-$algèbre engendrèe par X :$\{X^{-1}([-\infty, a] \times [-\infty, b]) : a, b \in \mathbb{R}\}$ est une sous $\sigma-$algèbre de A

Définition 1.19 *.Une application X de (Ω, A, P) dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa tribu de Borel β_2 est vecteur alèatoire si et seulement si,ses composantes sont des v a r.*

Proposition 1.20 Preuve. *Si X est un vecteur alèatoire,ses composantes s'ècrivent $X_1 = p_1 \circ X$ et $X_2 = p_2 \circ X$ ($p_1$et p_2 ètant la première et la deuxième application coordonnèe) sont èvidemment des v a r .Rèciproquement ,si les composantes X_1 et X_2 de X sont des v a r ,on a :$X^{-1}([-\infty, a_1[\cap [-\infty, a_2[) = X^{-1}\{[-\infty, a_1[\} \cap X^{-1}\{[-\infty, a_2[\} \epsilon A$ et donc Xest un vecteur alèatoire.* ■

Ce rèsultat nous permet de gènèraliser la dèfinition 1 au cas de vecteurs alèatoires à valeurs dans l'èspace $\mathbb{R}^n$ lorsque cet espace est muni de la $\sigma-$algèbre β_n .Cette $\sigma-$algèbre est engendrèe par les pavès fermès $\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$.

Définition 1.21 *On appelle vecteur alèatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$,une application X dèfinie sur un espace de probabilitè(Ω, A, P) ,à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ muni de la $\sigma-$algèbre β_n ,et telle que toutes ses composantes sont des variables alèatoires rèelles.*

On note $X =^t (X_1, ..., X_n)$ un vecteur alèatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.Les composantes $X_1, ..., X_n$ sont des v a r .

Exemple 1.22 *1) Soient X et Y deux variables alèatoires dèfinies sur le même espace de probabilitè (Ω, A, P).Le vecteur $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ dèfinie un vecteur alèatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.*

2)Soient X et Y deux variables alèatoires dèfinies sur le même espace de probabilitè (Ω, A, P) .L'application Z dèfinie sur (Ω, A, P) par $Z = \begin{pmatrix} X+Y \\ X-Y \end{pmatrix}$ est un vecteur alèatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.Il en est de même du vecteur $\begin{pmatrix} X \\ X-Y \end{pmatrix}$

1.3.1 Fonctions de rèpartition dans $\mathbb{R}^2$

Définition 1.23 *Un vecteur $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ dèfini sur un espace de probabilitè (Ω, A, P) et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$,induit une loi de probabilitè P_Z sur $(\mathbb{R}^2, \beta_2)$,appelèe la loi de probabilitè du vecteur alèatoire $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et l'èspace de probabilitè $(\mathbb{R}^2, \beta_2, P_Z)$ est dit l'èspace de probabilitè image de (Ω, A, P) par Z.Cette loi image est dèfinie par $P_Z (A \times B) = P (X \epsilon A, Y \epsilon B)$ où $A \epsilon \sigma (X)$ et $B \epsilon \sigma (Y)$ .En particulier ,la loi jointe $P_{X,Y}$ du vecteur alèatoire $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est dèfinie sur les rectangles $[a, b] \times [c, d]$ par*

$$P_Z(A, B) = P(X \in A, y \in B)$$

Définition 1.24 *Soit $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ un vecteur alèatoire dèfini sur (Ω, A, P) et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa tribu de Borel β_2.La fonction de rèpartition du vecteur alèatoire Z est l'application Fz définie sur$\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $[0, 1]\,\mathbb{R}$ par :*

$$\begin{aligned} Fz(x, y) &= P(X < x, Y < y) \\ &= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} dP_Z (u, v) \end{aligned}$$

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

Il arrive souvent de noter cette fonction de répartition sous la forme d'une intégrale de Riemann-Stieltjes :

$$Fz(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} dF_Z\left(u,v\right)$$

De la même manière que dans le cas unidimensionnel, on montre

Proposition 1.25 *la fonction de répartition d'un vecteur aléatoire $Z = (X,Y)$ possède les propriétés suivantes :F1)*$\lim_{x\to-\infty} F_Z(x,y) = \lim_{y\to-\infty} F_Z(x,y) = 0$

F2)$\lim_{x\to+\infty}\lim_{y\to+\infty} F_Z(x,y) = 1$

F3). Fz est croissante par rapport a chaque argument.

F4) .Fzest continue a gauche par rapport a chaque argument.

Proposition 1.26 *une fonction réelle F non négative définie sur $\mathbb{R}^2$ est la fonction de répartition d'une loi de probabilité P sur $\mathbb{R}^2$ si est seulement si elle vérifie les propriétés F2 , F3 et F4 .*

1.3.2 Lois jointes et lois marginales

Définition 1.27 *soit(Ω, A, P) un espace de probabilité et X, Y deux variables aléatoires réelles définies sur cet espace. On appelle loi de probabilité conjointe des v a r X et$Y$ la loi image $P(X,Y)$ de P par le vecteur aléatoire $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$.cette loi de probabilité est définie par :*

$$P_{X,Y}(]a,b[\times]c,d[) = \int_a^b\int_c^d dP_{X,Y}(u,v)$$

Quel que soit le rectangle $]a,b[\times]c,d[$ de $\mathbb{R}^2$

.

Définition 1.28 *soit $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$un vecteur aléatoire réel définie sur un espace de probabilité (Ω, A, P)et de loi jointe $P_{X,Y}$. la loi de la v a r X(resp.Y)est appelée la loi de probabilité marginale en X (resp.en$Y$) du vecteur$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et elle est déterminée par*

$$P_X(B) = P((X,Y) \in B \times \mathbb{R}) = P(X \in B, Y \in \mathbb{R}) = \int\int_{B\times\mathbb{R}} dP_{X,Y}(x,y)$$

resp

$$P_Y(B) = P((X,Y) \in \mathbb{R} \times B) = P(X \in \mathbb{R}, Y \in B) = \int\int_{\mathbb{R}\times B} dP_{X,Y}(x,y)$$

La version de ces définitions en terme de fonction de répartition est plus commode et plus aisée a retenir .

Proposition 1.29 *soit* $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ *un vecteur aléatoire a valeur dans* $\mathbb{R}^2$ *. on a :*

$$F_X(x) = \lim_{y \to +\infty} F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{x} F_{X,Y}(x, dy)$$

Et

$$F_Y(y) = \lim_{x \to +\infty} F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{y} F_{X,Y}(dx, y)$$

Preuve. *les conclusions de cette proposition résultent directement de la continuité séquentielle de P et de ce que*

$$\lim_{y \to +\infty}]-\infty, x] \times]-\infty, y] =]-\infty, x] \times \mathbb{R}.$$

Proposition 1.30 *soit* $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ *un vecteur aléatoire a valeurs dans* $\mathbb{R}^2$ *. si la fonction de répartition* F *du vecteur aléatoire* Z *est de classe* C^2 *, alors le vecteur* Z *admet une densité de probabilité* f *définie par :*

$$f_Z(x, y) = \frac{\partial^2 F_Z(x, y)}{\partial x \partial y}$$

et on a $F_Z(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_Z(x, y) dx dy$

Définition 1.31 *la densité de probabilité* f *d'un vecteur aléatoire* X *possède les propriétés suivantes :*
i)f_X *est non négative.*

■

Définition 1.32 *ii)*$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(x, y) dx dy = 1$

Chapitre 2

les modes de convergence

2.1 La convergence on loi :

Définition 2.1 *Soit X_n une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle , pour tout n , notons P_n la loi image de P par la variable X_n et P_X la loi image de P par X*

On di t que la suite de variables aléatoires$(X_n, n \geq 1)$ converge en loi vers la variable aléatoire X , si pour toute fonction continue et bornée f on ait

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)P_n(dx) \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)P_X(dx).$$

On note $X_n \xrightarrow{l} X$ la convergence en loi de la suite (X_n)vers X . pour montrer la convergence en loi d une suite de variable aléatoire réelle on se sert de l'un des critères suivants

Théorème 2.2 *On dit que la suite de variable aléatoire (X_n) de fonction de répartition F_n converge en loi vers une variable aléatoire X si la suite $F_n(x)$ converge vers $F(x)$en tout point x ou Fest continue*

Théorème 2.3 *Soit $(X_n,n \geq 0)$ une suite de variables aléatoires a valeurs dans $\mathbb{N}$ pour que la suite $(X_n\ ,n \geq 0)$converge en loi vers X a valeurs dans $\mathbb{N}$, il faut et il suffit que*

$$\lim_{n\to\infty} p(X_n = r) = P(X = r), \forall r \epsilon \mathbb{N}$$

D'autre part la fonction de répartition est entièrement déterminée par sa fonction caractéristique et comme la fonction $t \to exp(itx)$est continue et bornée , alors on déduit du théorème précédent que

Corollaire 2.4 *Si la suite* (X_n) *converge en loi vers* X *, alors la suite* (φ_n) *converge simplement vers* φ*, ou* φ_n *est la fonction caractéristique de la variable aléatoire* X_n *et* φ *celle de* X *.*
De plus la convergence de φ_n *vers* φ *est uniforme sur tout compact de* $\mathbb{R}$*.*
le theoreme suivant établit une réciproque de ce résultat

Théorème 2.5 *(theoreme de Paul Lévy) Soit* $(X_n, n \geq 1)$ *une suite de variables aléatoires et* X *une variable aléatoire définie sur le même espace de probabilité que la suite* (X_n) *. on note* φ_n *la fonction caractéristique de la variable aléatoire* X_n *et* φ*celle de* X *. si la suite des fonctions des répartitions* (φ_n) *converge vers une fonction* ψ *continue en* $t = 0$ *, alors la suite des variables aléatoires* (X_n) *converge en loi vers* X*de fonction caractéristique* ψ *.*

2.2 Convergence presque sure (on abrège p. s) :

Définition 2.6 *soient* $(X_n, n \geq 0)$ *une suite de variable aléatoire réel définies sur un espace de probabilité* (Ω, A, P)*. On dit que la suite* (X_n) *converge presque surement vers une v. a. r* X *définie sur*(Ω, A, P)*, s'il existe un événement* A *de probabilité nulle tel que :*$lim_{n\to+\infty} X_n(\omega)$ *Pour tout* $\omega \in A^c$*.*
On note$X_n \overset{p.s}{\to} X$*.*

Remarque 2.7 *S'appuyant sur le fait que* $\mathbb{R}$ *est complet, on montre facilement que :La suite* $(X_n, n \geq 0)$ *converge p .s vers une v. a si, et seulement si* $(X_n, n \geq 0)$ *est une suite de Cauchy pour la convergence presque sure (i.e. la suite* $(X_n - X_m, n, m \in \mathbb{N})$ *converge presque surement vers 0).Le résultat suivant fournit une condition nécessaire et suffisante de convergence presque sure.*

Théorème 2.8 *soit* $(X_n, n \geq 0)$ *une suite de v. a. r. pour que la suite* X_n *converge p. s vers une v. a* X*, il faut et il suffit que*

$$lim_{n\to+\infty}(\bigcup_{m\geq n}\{\omega : |X_m(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon, \forall\varepsilon > 0$$

.

Corollaire 2.9 *soit* $(X_n, n \geq 0)$ *une suite de v. a. r.Si*

$$\sum_{m\geq1} P(\{\omega : |X_m(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}) < +\infty$$

, pour tout $\varepsilon > 0$, alors la suite (X_n)converge p. s vers une v. a. r X.La démonstration résulte de ce que

$$P(\underset{m\geq n}{\cup}\{|X_m(\omega)-X(\omega)|\geq\varepsilon\})\leq\sum_{m\geq n}P(\{|X_m(\omega)-X(\omega)|\geq\varepsilon\})$$

.

Corollaire 2.10 *soient $(X_n, n \geq 0)$ une suite de v. a. r de carre intégrable et Yune v. a. r de carre intégrable. si $\sum_{n\geq 0}((X_n\_Y)^2) < +\infty$, alors la suite X_n converge p. s vers Y.*

Preuve. pour tout $\varepsilon > 0$, et pour tout $n \geq 1$ posons

$$A_n(\varepsilon)=\{\omega:|X_n(\omega)-X(\omega)|\geq\varepsilon\}.$$

On a

$$E((X_n-Y)^2)\geq\varepsilon^2P(A_n(\varepsilon)),\text{et ceci }\forall\varepsilon>0.$$

La convergence de la série de terme général$E((|X_n(\omega)-Y(\omega)|)^2)$ assure la convergence de la série

$$\sum_{n\geq 1}P(\{\omega:|X_n-Y|\geq\varepsilon\})$$

et donc celle de la suite (X_n)vers Y p. s. ■

Exemple 2.11 *Soit$(X_n, n \geq 0)$ une suite de v. a de distributions respectives $P(X_n = n-1) = 1/2$ pour tout $n < m$, on a*
$|X_m\ | < |X_n|$ p. s, ce qui fait que $\{|X_n| \geq \varepsilon\} \supseteq \{|X_m| \geq \varepsilon\}$ d'où nous déduisons que

$$\underset{m\geq n}{\cup}\{|X_m|\geq\varepsilon\}=\{|X_n|\geq\varepsilon\}$$

.Pour $n > \frac{1}{\varepsilon}$ on constate que

$$P(\underset{m\geq n}{\cup}\{|X_m|\geq\varepsilon\})=p(\{|X_n|\geq\varepsilon\})\leq P(\{|X_n|=\frac{1}{n}\})=0$$

D'où nous concluons que la suite X_n converge p. s.

2.3 Convergence en probabilité :

Définition 2.12 *soient* $(X_n, n \geq 0)$ *une suite de v. a. r définies sur un espace de probabilité*(Ω, A, P). *On dit que la suite*$(X_n, n \geq 0)$ *converge en probabilité vers une v. a.r* X *si,* $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} P(\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon) = 0$$

.*On note*$X_n \xrightarrow{p} X$, *pour exprime que la suite*(X_n) *converge en probabilité vers* X. *On remarque que si* $X_n \xrightarrow{p} X$ *alors la variable* X*est unique p. s, au sens que si*
$X_n \xrightarrow{p} X$ *et* $X_n \xrightarrow{p} Y$, *alors* $X = Y$ *p. s*

Théorème 2.13 *soit* $(X_n, n \geq 0)$ *une suite de v. a. r. si*(X_n) *converge en probabilité vers une v. a. r* X, *alors* (X_n) *converge en loi vers* X .

Preuve. notons F_n la fonction de répartition de la variable aléatoire $X_n$et par F celle de X d'abord notons que pour toutes v. a. r X et Y. et pour tous réel a et b ,on a

$$P(X + Y < a + b) \leq P(X < a) + P(Y < b)$$

Il suffit de remarquer que dans le plan le borélien $\{(x, y) : x + y \leq a + b\}$ est contenu dans $\{(x, y) : x \leq aouy \leq b\}$. En posa$X_n = X + Y$, $x = a + b$ et $b = -h$, On peut exprime l'inégalité de la façon suivante

$$F_n(x) - F(x + h) \leq P(X - X_n > h)$$

En permutant dans cette inégalité, les rôles de X et de $X_n$et en remplaçant $x$par $x - h$, cette inégalité devient :

$$F(x - h) - F_n(x) \leq P(X - X_n < -h)$$

Comme X_n converge en probabilité vers X , alors on passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on trouve que

$$P(X - X_n > h) + P(X - X_n < -h) = P(|X_n - X| > h) \to 0$$

Ainsi, pour x fixé on voit que $\lim_n sup F_n(x) \leq F(x + h)$ et $\lim_n inf\ F_n(x) \geq F(x - h)$
Ensuite, en un point de continuité x de F en faisant tendre h vers 0 , on voit que

$$F(x) \leq \lim_n inf F_n(x) \leq \lim_n sup F_n(x) \leq F(x)$$

D'où il vient que

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$$

En tout point de continuité x de$F$. Et ceci permet de conclure à la convergence en loi de la suite(X_n) vers la même limite X ■

Remarque 2.14 *La réciproque de ce résultat est fausse en générale, sauf dans la circonstance suivante :*

Proposition 2.15 *si la suite (X_n) converge en loi vers une constante a, elle converge alors en probabilité vers a.*

Preuve. on a $\delta_a(]a-\varepsilon, a+\varepsilon[) = 1$, pour tout $\varepsilon > 0$, $\delta_a$étant la mesure de Dirac en a. Par suite

$$\lim_{n\to+\infty} P_{X_n}(]a-\varepsilon, a+\varepsilon[) = \delta_a(]a-\varepsilon, a+\varepsilon[) = 1$$

C'est-à -dire ■

$$\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - a| \leq \varepsilon) = 1,$$

Ce qui exprime que, $X_n \xrightarrow{p} .a$

Théorème 2.16 *Pour qu'une suite $(X_n, n \geq 0)$de v a r converge en probabilité,il faut et il suffit que :*

$$\lim_{n,m\to+\infty} P\left(\{X_n, X_m > \varepsilon\}\right) = 0, pourtout \varepsilon > 0$$

.

Théorème 2.17 *si (X_n)converge en probabilité vers une v a r X,On a .*

$$\lim_{n,m\to+\infty} p\left(\left\{X_n, X > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) = 0$$

Comme

$$\left\{X_n, X > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \subset \left\{X_n, X > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{X_m, X > \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

Ce qui assure :

$$P\left(\{X_n, X_m > \varepsilon\}\right) \leq P\left(\left\{X_n, X > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) + P\left(\left\{X_m, X > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)$$

en faisant tendre $n$et m vers $+\infty$, On obtient :

$$\lim_{n,m\to+\infty} P\left(\{X_n, X_m > \varepsilon\}\right) = 0 \quad (i.e\ X_n - X_m \to 0)$$

Réciproquement, notons pour commencer que la condition suffisante traduit que la suite (X_n) *est une suite de Cauchy pour la convergence en probabilité. On a alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *et* $\varepsilon' > 0$*, il existe un entier positif* n_0 *tel que pour tout* n *et* $m > n_0$ *:*

$$P\left(\{|X_n - X_m| > \varepsilon\}\right) < \varepsilon'$$

Posons $n_1 = 1$ *et pour tout* $j \geq 2$ *prenons :*

$$n_j = \inf\left\{N > n_{j-1}/n, m \geq N : P\left(\left\{|X_n - X_m| > \frac{1}{2^j}\right\}\right) < \frac{1}{3^j}\right\}$$

comme la suite $\left(\frac{1}{3^j}\right)$ *est sommable, ceci fait que la série de terme générale*

$$P\left(\left\{|X_n - X_m| > \frac{1}{2^j}\right\}\right)$$

est converge aussi, et il résulte alors la suite extraite $\left(X_{n_j}, j \geq 1\right)$ *converge presque surement. Désignons par* X *la lmite presque sure de la suite* $\left(X_{n_j},\ j \geq 1\right)$*, On a :*

$$P\left(\{|X_n - X_m| > \varepsilon\}\right) \leq P\left(\left\{\left|X_n - X_{n_j}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) + P\left(\left\{\left|X - X_{n_j}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)$$

et tenant compte de ce que (X_n) *est une suite de Cauchy pour la convergence en probabilité, il vient que* $X_n \to 0$.

La démonstratin ci dessus a fait apparaitre le résultat suivant

Corollaire 2.18 *Si une suite*$(X_n, n \geq 0)$ *de v a converge en probabilité vers une v a* X *, il existe alors une sous suite* $\left(X_{n_j}\right)$ *de* (X_n) *qui converge presque surement vers* X.

2.4 convergence en moyenne quadratique

Définition 2.19 *soit*$(X_n, n \geq 0)$ *est suite des variable définies sur un espace de probabilité* (Ω, A, P) *.On dit que la suite* $(X_n, n \geq 1)$ *converge en moyenne quadratique vers une v a r* X *définie sur le même espace de probabilité* (Ω, A, P)*, si*

$$\lim \left(E\left((X_n - X)^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

.

On note $X_n \to^n X$ (resp $X_n \to^m X$) pour exprimier que la suite (X_n) converge en moyenne quadratique (resp en moyenne) vers X ,et on notera que la variable limite est unique p.s.

Proposition 2.20 *soient $(X_n, n \geq 1)$ une suite de v a r définies sur (Ω, A, P) et soit X une v a r définie sur ce meme espace . Si (X_n) converge en moyenne resp en moyenne quadratique vers X alors cette suite converge en probabilité vers X Elle résulte illédiatement de l'inégalité de Tchebichev*

Exemple 2.21 *1) La suite $(X_n, n \geq 0)$ cette suite converge p.s et de plus ,On a $E(X_n) = 0$ pour tout $n \geq 1$, ce qui montre que (X_n) converge en moyenne et en moyenne quadratique vers* 0.

2) La suite$(X_n, n \geq 0)$ est définie par $X_n(\omega) = 1$

Si $k \in [k.2^{-m}, (k+1).2^{-m}]$ et $X_n(\omega) = 0$ sinon m étant le plus petit entier naturel tel que $n = 2^m + k$(i.e $2^m \leq n < 2^{m+1}$)

on a $E(X_n) = \frac{1}{2^m} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, et donc cette suite converge en moyenne, mais ne converge pas p.s.

3) Soit $(a_n, n \geq 1)$ une suite de nombres réels strictement positifs et soit $(X_n, n \geq 0)$ une suite de v a r définies sur le meme espace de probabilité (Ω, A, P) , avec $P(X_n = a_n) = \frac{1}{n.}$ Cette suite converge vers 0 et la convergence en moyenne dépend de la nature de la suite des réels a_n .Par exemple, cette suite converge en moyenne vers 0 pour les $a_n = \frac{1}{n}$ et diverge pour les $a_n = n$.

les deux premiers exemles montrent qu'il n'y a pas de relation entre la convregence p.s et convergence en moyeenne et en moyenne quadratique , et l'exemple 3 montre que la convergence en probabilité n'assure pas quant à elle la convergence en moyenne.

Chapitre 3

Théorème central limite – lois des grands nombres

3.0.1 Théorème central limite

Le théorème de la centrale limite étudie la convergence en loi de la suite des variables aléatoires $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$ ou (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes.

Nous étudions seulement la version de ce théorème lorsque les variables X_n sont de même loi de moyenne m de variance σ^2.

Théorème 3.1 *si la suite des variables aléatoires réelles (X_n) sont indépendantes et de même loi de moyenne m et de variance σ^2, alors la suite $(S_n, n \geq 1)$ ou $S_n = \frac{1}{\sqrt[1]{n}} \sum \frac{X_j - m}{\sigma}$, converge en loi vers une v a r normale centrée réduite*

.

Proposition 3.2 ***Preuve. Preuve.*** *si φ désigne la fonction caractéristique de la variable aléatoire X_n alors celle de S_n , vue que les v a X_n sont indépendants et de même loi, est donnée par*

$$\varphi_n(t) = exp(-i\frac{tm\sqrt[1]{n}}{\sigma})\ [\varphi(\frac{t}{\sigma\sqrt[1]{n}})]^n$$

Comme φ admet le développement limité à l'ordre 2 :

$$\varphi(t) = 1 + imt - \frac{m_2 t^2}{2} + t^2\varepsilon(t), \qquad avec \lim_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0$$

Ou m_2 est moment d'ordre 2 de X_n. Et pour n suffisamment grand, ce développement *s'écrit au point* $\frac{t/}{(\varepsilon \sqrt[1]{n})}$ *:*

$$\varphi(\frac{t}{\sigma\sqrt[1]{n}}) = 1 + \frac{imt}{(\sigma\sqrt[1]{n}}) - \frac{m_2 t^2}{2n\sigma^2} + \frac{t^2}{n\sigma^2}\varepsilon(\frac{t}{\sigma\sqrt[1]{n}})$$

D'autre part, la fonction φ *est non nulle en* 0*, aussi, on peut définir une détermination du logarithme de , et pour passage ou log dans l'expression de* φ_n *, nous obtenons*

$$\log\varphi_n(t) = \frac{-imt}{\sigma}\sqrt[1]{n} + nlog[\varphi(\frac{t}{\sigma\sqrt[1]{n}})]$$

Avec

$$\log\ [\varphi(\frac{t}{\sigma\sqrt[1]{n}})] = \frac{imt}{(\sigma\sqrt[1]{n}} - \frac{m_2 t^2}{2n\sigma^2} + \frac{1}{2}\frac{m^2 t^2}{2n\sigma^2} + \cdots$$

En prenant le développement à l'ordre 1 du logarithme de $1 + \frac{imt}{(\sigma\sqrt[1]{n}}) - \frac{m_2 t^2}{2n\sigma^2} + \frac{t^2}{n\sigma^2}\varepsilon(\frac{t}{\sigma\sqrt[1]{n}})$*.*
Or $m_2 - m^2 = \sigma^2$*.*
Donc, après simplification,

$$log[\varphi_n(t)] = \frac{-t^2}{2} + termesinfinimentpetitsavec\frac{1}{\sqrt[1]{n}}$$

.On constate donc, qu'en tout point t,

$$\lim_{n\to+\infty} log[\varphi_n(t)] = \frac{-t^2}{2}$$

D'où finalement

$$\lim_{n\to+\infty}\varphi_n(t) = e^{\frac{-t^2}{2}}$$

Or, cette fonction n'est rien d'autre que la fonction caractéristique de la loi normal centrée réduite. Et par conséquent, la suite (S_n) *converge en loi vers une v a* X *distribuée suivant la loi normale centrée réduite.* ■ ■

Exemple 3.3 *Le théorème de Poisson :*
Pour n fixé, soit $X_1, \ldots\ldots, X_n$ *une suite finie de v a de Bernoulli indépendante et de même paramètre* $\frac{\lambda}{2}$ *avec*$\lambda \in]0,1]$*. La variable aléatoire* $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ *suit une loi binomiale de moyenne* λ *et de variance* $\sigma_n = \lambda(1 - \frac{\lambda}{n})$*. D'autre part, on sait que la fonction caractéristique* φ_n *de v a* S_n *s'écrit* $\varphi_n(t) = [1 + \frac{\lambda}{n}(e^{it} - 1)]^n$ *et lorsque n tend vers* $+\infty$*,* $\varphi_n(t)$ *tend vers*$exp(a.e^{it-1})$ *qui représente la fonction caractéristique d'une loi de Poisson de paramètre* λ*. Ainsi,* S_n *converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre* λ*.*

3.0.2 Les lois de grands nombres

Il s'agit de théorème de convergence en probabilité et de convergence presque sure des somme de v a.

lois faibles des grands nombres

Définition 3.4 *soit*$(X_n, n \geq 1)$ *une suite de v a r.On dit de la suite*(X_n) *qu'elle satisfait la loi faible des grands nombres, si la suite des sommes partielles* $(S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i)$ *converge en probabilité vers un réel b.*
La convergence en probabilité de la suite $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i)$ *est connue comme étant*

lois faibles des grands nombres

Exemple 3.5 *(le théorème de Bernoulli)*
Si $(A_n, n \geq 1)$ *est une suite d'événements indépendants de même probabilité* $p \quad (0 \leq p \leq 1)$*, alors la suite* $(S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{A_i} : n \geq 1$ *converge en probabilité vers* p *Ceci résulte l'intégralité Tchebitchev :*

$$P(|S_n - p| \geq \varepsilon) < \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}) \to 0$$

Lorsque $n \to +\infty$ *et ce* $\forall \varepsilon > 0$*.Ce résultat justifie l'approche fréquentielle de la probabilité. Cette approche consiste à définir la probabilité d'un événement par sa fréquence.Par exemple, dans un jeu de pile ou face, la fréquence d'apparition e pile lorsque la pièce n'est pas truquée, est égale à*$p = 1/2$*. L'approche fréquentielle suggère alors et c'est tout à fait légitime d'après la loi faible des grands nombres, de prendre pour probabilité de l'événement "pile apparait" la valeur* $1/2$*.*

Théorème 3.6 *soit* $(X_n, n \geq 1)$ *une suite e v a r, eux à deux indépendantes et de carré P-intégrable. On considère la suite de v a* $(S_n, n \geq 1)$ *défine par* $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_n$ *si*

$$\lim_{n \to +\infty} E(S_n) = m$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} (|S_n - E(S_n)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{4}{\varepsilon^2}\sigma^2$$

alors, la suite X_n *satisfait la loi faible des grands nombres et on a* $S_n \xrightarrow{p} m$

Preuve. l'inégalité de Tchebitchev appliquée à S_n, fournit :

$$P(|S_n - E(S_n)| > \frac{4}{\varepsilon^2}\sigma^2)$$

avec $\sigma^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2$,car les v a X_n sont deux à deux indépendantes. Comme

$$\{|S_n - m| \geq \varepsilon\} \subseteq \{|S_n - E(S_n)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|E(S_n) - m| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$$

, il existe donc un entie $N_\varepsilon \geq 1$ tel que $|E(S_n) - m| \leq \frac{\varepsilon}{2}$,pour tout$n \geq N_\varepsilon$ impossible et que par conséquent

$$P(\{|S_n - m| \geq \varepsilon\} \leq P\{|S_n - E(S_n) \geq \frac{\varepsilon}{2}\} + P(\{|E(S_n) - m| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \leq \frac{4}{n^2\varepsilon^2}\sigma^2$$

,et ceci quelque soit $n \geq N_\varepsilon$. Il résulte que

$$\lim_{n\to+\infty} P(\{|S_n - m| \geq \varepsilon\} = 0$$

et ceci quelque soit (S_n)converge en probabilité vers m lorsque$n \to +\infty$ ■

Remarque 3.7 *le théorème reste vrai dans le cas ou les variables ont la même variance ou encore sont de même loi de plus, l'hypothèse de l'indépendance n'est pas nécessaire et peut être remplacée $cov(X_n, X_m) = 0$,si$n \neq m$.*

Théorème 3.8 *Si $(X_n, n \geq 1)$ est une suite de v a r deux à deux indépendantes et de même loi P_X de carré P-intégrable, alors la suite (X_n) satisfait à la loi faible des grands nombres*

3.0.3 lois fortes es grands nombres

Définition 3.9 *soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de v a r.On dit de la suite (X_n) qu'elle satisfait la loi forte des grands nombres, si la suite des sommes partielles $(S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i)$ converge presque surement vers un nombre réel b.La convergence p.s. e la suite $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ est connue comme étant la loi forte des grands nombres*

Théorème 3.10 *.soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de v a r indépendantes et de carré P-intégrable Si*
i) La suite $(E_n, n \geq 1)$ converge vers un réel m.
ii)$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2}\sigma_n^2 \prec +\infty$ est la variance de (X_n) alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_k = m \qquad\qquad p.s$$

Problème 3.11 ***Preuve. Preuve. Preuve.*** *les v a $X_k - E(X_k)$ sont indépendantes, centrée et de variance σ_k^2 et $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2}\sigma_n^2$ selon la propriété ii. On montre que la série*

$\sum_{n\geq 1}\frac{X_n-E(X_n)}{n}$ *converge p.s. Notons* $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[X_k-E(X_k)]$. *et* $Y_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{[X_k-E(X_k)].}{k}$ *. on a*

$$n.S_n=(Y_1-Y_0)+2(Y_2-Y_1)+.......+n(Y_n-Y_{n-1})$$

D'où

$$S_n=Y_n-\frac{Y_0+Y_1+......+Y_{n-1}}{n}$$

Or, comme Y_n *converge p.s. vers une limite* a*, alors en vertu du théorème de Césaro, on a également*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{Y_0+Y_1+......+Y_{n-1}}{n}=a \qquad p.s$$

Mais comme $\lim_{n\to+\infty}Y_n=a$ *p.s, il s'ensuit que*

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=0 \quad p.s$$

Autrement dit,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_k=m \quad p.s$$

■ ■ ■

Lemme 3.12 *(une condition suffisante de convergence presque sure)*
Soit $(X_n, n\geq 1)$ *une suite de v a r indépendantes et de carré P-intégrables. Si* $\sum_{i=1}^{n}\sigma_n^2 \prec +\infty$ *, alors la série* $\sum_{i=1}^{n}X_n$ *converge presque surement.*

Preuve. posons $S_n=X_1+\cdots+X_n$,$A_m=\underset{r\geq 0}{sup}|S_{m+r}-S_m\mid$,$m\geq 1$et $A(\omega)=\underset{m\geq 1}{inf}A_m(\omega)$. Dire la suite $(S_n, n\geq 1)$ converge presque sur revient a dire que (S_n) est une suite de cauchy pour la convegence p.s. ce qui est équivalent à
$A(\omega)=0$ p.s
Or,

$$\{\omega/A(\omega)\neq 0\}=\underset{m\geq 1}{\cup}\{\omega/A_m(\omega)>\frac{1}{n}\}$$

et

$$A(\omega)>\frac{1}{n}\Rightarrow A_m(\omega)>\frac{1}{n}\text{ pour tout } m\geq 1$$

.Soit

$$\{\omega/A(\omega)>\frac{1}{n}\}\subset\underset{m\geq 1}{\cap}\{\omega/A_m(\omega)>\frac{1}{n}\}$$

Ce qui assure que

$$P(\omega/A(\omega)>\frac{1}{n})\leq P(\{\omega/A_m(\omega)>\frac{1}{n}\})\quad \forall m\geq 1$$

. D'autre part,

$$\{\omega/A_m > \frac{1}{n} > \frac{1}{n}\} = \sup_{r\geq 0}\{\omega/\max_{1\leq i\leq r}|S_{m+i} - S_m| > \frac{1}{n}\}, r \geq 0,$$

comme la suitee des evenements $\{\omega\backslash\max_{1\leq i\leq r}|S_{m+i} - S_m| > \frac{1}{n}\}$ estcroissante,il résulte alors que $P(\{\omega/A(\omega) > \frac{1}{n}\})$

$$= \lim_{n\to+\infty} P(\{|S_{m+i} - S_m| > \frac{1}{n}\}) \leq \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{r} var(X_{m+i}) = \frac{1}{n^2}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=m+1}^{m+r} var(X_r)$$

soit

$$P(\{\omega/A_m(\omega) > \frac{1}{n}\}) \leq \lim_{n\to+\infty}\sum_{r\geq m+1} var(X_r)\ \forall m \geq 1$$

Comme $\sum_{r\geq m+1} var(X_r)$ est le reste d'une série convergente, elle converge donc vers 0 lorsque$m \to +\infty$. En faisant tendre m vers $+\infty$ on obtient

$$P(\{\omega/A_m(\omega) > \frac{1}{n}\}) = 0$$

Il s'ensuit que l'événements $\{\omega/A(\omega) > \frac{1}{n}\}$est une réunionDénombrable d'événements négligeables, est lui aussi négligeable, et par conséquent $A(\omega) = 0$ P-p.s, ce qui assure ensuite la convergence presque sure de la série $\sum_{i=1}^{n} X_n$ Contrairement aux résultats précédents qui imposaient à la suite de v a X_n d'être de carré intégrable, on montre dans le cas d'une suite de v a iid que cette hypothèse peut-être réduite à la seule existence du moment d'ordre 1. ■

Théorème 3.13 *soit $(X_n, n \geq 1)$ une v a r indépendantes, équidistribuées.Pour que la suite (X_n) salisfait la loi forte des grands nombres il faut et il suffit que X_1 soit P-intégrable.*

Bibliographie

[1] D.DACUNHA -CASTELL, cours polycopier de probabilité , 1974

[2] M.METIVIER , Notions fondamental de la theorie de probabilité

[3] C .REDER , probabilité et statistique , baurdeau France

[4] moussedek bousseboua , introduction aux calculs des probabilité , edition 2009

[5] A.perrut , calculs des probabilité , 2010

[6] FREDIRIC . NAUD , département de mathematique , universite avignon ,cours de probabilité . 2011