الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Minstère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

CENTRE UNIVERSITAIRE DE MILA

INSTITUT DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

Réf. */11*

Mémoire de fin d'étude

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Licence Académique

Domaine : **Mathématiques et Informatique**

Filière : **Mathématiques**

Spécialité : **Mathématiques fondamentales**

Thème

Système dynamique en cas continu

Présenté par :

Zairi Sara

Mansouri Khaoula

Dirigé par :

Laouira Widad

Année universitaire 2010-2011

Didécace

Pour tante Houda ben aissa
Pour ceux qui m'ont vu avant son cœur de me voir

Pour mon amour et la plus grande femme et signé par mes yeux

et recommandé par trois
«Maman, maman, puis maman"
Consacré sa vie à la tendance dans l'éducation de connaissances

et de responsabilité dans mon âme
Qui a créé tout le succès réel de la lutte m'a appris la patience et
Pour ceux qui me conduit au succès
"Cher Père"
Pour mes chers frères, "Abdel Wadoud

Taha , Ishak "
Pour ceux qui ont partagé avec eux la chaleur de sœurs de la famille
«Zainab, Massaouda, et Wissal"
Pour la personne la plus chère
"Roukia"
Cher à ma grand-mère
"Tabbani djamila"

-Mes oncles et mes tantes Nadji, Mouhemed, Ammar, Hadda, fatima, Saliha, Rafiaa

Pour ma fammille ben aissa
Pour chacun des m'aimait de près ou de loin
Pour l'ensemble du personnel et en particulier l'Université de Mila "LABO12

Remerciements

Avant tout nous remercions le bon dieu qui nous a donne le courage et la force continuer. Merci de nous avoir éclaire le chemin de réussite.

Nous remercions très vivement madame ***laouira widad*** *Notre promoteur de nous avoir encadre ,orienté conseillé et corrige tout au long de notre travail*

Table des matières

Introduction Générale

L'histoire des systèmes dynamiques modernes est relativement récente. Elle commence avec Henri POINCARE (1854-1912) qui fut le premier à entreprendre l'étude formelle d'un système dynamique chaotique. Il avait la conviction que le comportement global de toute solution d'un système dynamique était plus important que le comportement local. Cette conviction l'a conduit à développer une théorie qualitative des équations différentielles étudiant le mouvement des corps célestes (problème à trois corps [8] qui consistait à savoir si les orbites décrites par ces corps étaient stables ou instables. Il fut le premier à affirmer que le déterminisme d'une loi n'implique pas nécessairement sa prédictibilité [9]. Vint ensuite le mathématicien BIRKHOFF qui développa au début du X X ième siècle l'étude des systèmes dynamiques discrets qui, selon lui, permettaient de mieux comprendre la dynamique plus complexe résultant des équations différentielles. La théorie des systèmes dynamique tomba ensuite partiellement dans l'oubli, sauf en URSS où le travail fut poursuivi par LYAPUNOV et PONTRJAGIN qui développèrent notamment la notion de stabilité d'une solution d'un système différentiel et l'influence de la perturbation des conditions initiales sur l comportement asymptotique de ses solutions. L'intérêt pour les systèmes dynamiques rejaillit dans les années 60 sous l'influence de mathématiciens américains (MOSER, SMALE), brésiliens (PEIXOTO), et soviétiques (KOLMOGOROV, ARNOL'D et SINAI) qui utilisèrent les techniques différentielles topologiques pour développer cette théorie. Plus récemment, les systèmes dynamiques ont bénéficié de l'intérêt et des techniques d'horizons divers tels que la physique bien sûr, mais aussi l'économie, la biologie, la météorologie, ...lorsque l'on s'est aperçu de l'importance et de l'étendue des domaines où la notion de stabilité des systèmes dynamiques intervenait. L'avènement de l'étude, à l'aide d'ordinateur, de systèmes dynamiques même simples (comme ceux de JULIA et MANDELBROT) a permis de mieux les comprendre.

Le présent mémoire se décompose en 3 chapitres. Dans le premier chapitre on introduit les notions fondamentales sur les systèmes dynamiques en cas continu, la représentation mathématique des systèmes dynamiques par des équations différentielles, notions nécessaires de la stabilité d'un système dynamique du chapitre 2.

Au chapitre 3 nous avons représentée deux propriétés de système dynamique, les attracteurs et les variétés centrales.

Chapitre 1

Notions fondamentales de la dynamique

Un système dynamique déterministe est un système évoluant avec le temps ; en suivant une loi, qui peut être décrite par un ensemble fini d'équations qui peut prendre des formes mathématiques diverses : équations différentielles ordinaires (autonomes ou non), équations aux dérivées partielles, application (inversible ou non). En général, la loi d'évolution est locale, l'évolution du système est donnée à chaque instant. On cherche à connaître l'évolution du système, en particulier son comportement quand le temps tend vers l'infini. Les variations météorologiques, les populations animales, les rythmes cardiaques et, certaines pathologies du cerveau sont des exemples sur les systèmes dynamiques.

1.1 Représentations mathématique des systèmes dynamiques :

Un système dynamique continu décrit par une fonction mathématique présente deux types de variables : dynamique et statistique. Les variables dynamiques sont les quantités fondamentales qui changent avec le temps .Les variables statistiques, encore appelées paramètres du système, sont fixes.

Représentation par des équations différentielles

Un système dynamique dans lequel le composant temps est continu est décrit par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f\left(x, t, \lambda\right), \ x \in \mathbb{R}^n, \ \lambda \in \mathbb{R}^p$$

avec :$\mathbb{R}^n$ est l'espace des phases, $\mathbb{R}^p$ est l'espace des paramètres.

Exemple 1.1 *La chute libre*

La chute libre d'un corps, d'une hauteur peut élevée x. Le bilan des forces permet de connaître l'accélération. Celle-ci est constante. Le flot est défini par l'équation : $\ddot{x} = g$ équivalente au système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = g \end{cases}$$

L'orbite d'une condition initiale x_0 est définie par :

$$\theta(t) = \left\{ x/x = \frac{1}{2}gt^2,\ t \geq 0 \right\}$$

et l'espace des phases M est définie par :

$$M = \{(x, y)/x : \text{ hauteur, } y \text{ :vitesse}\}$$

Exemple 1.2 *L'oscillateur de Duffing :*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= x - x^3 - \delta y + \gamma \cos \omega t \end{aligned}$$

Où δ,γ et ω sont des paramètres physiques réels. L'espace des phases est $\mathbb{R}^2$ et l'espace des paramètres est $\mathbb{R}^3$.

1.2 Systèmes autonomes et non autonomes

Définition 1.1 *Soit le système d'équations différentielles :*

$$\dot{x} = f(x, t, \lambda) \tag{1.1}$$

x étant un vecteur de $\mathbb{R}^n$ (espace des phases), f est le champ de vecteurs, quand f ne dépend pas explicitement du temps, mais seulement de x :

$$f = f(x(t))$$

ne dépend pas explicitement du temps, mais seulement de x :
*le système est dit **"autonome"**.*

Définition 1.2 *Dans le cas contraire, lorsque F dépend explicitement du temps, on a affaire à un à un système* ***"non autonome"****.*

Le passage d'un système non autonome à un système autonome

Soit le système non autonome :

$$\dot{x} = F\left(x\left(t\right)\right), \text{ tel que } x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right), \ f = \left(f_1, f_2, , ..., f_n\right)$$

on suppose que les f_i sont des clases C^n $(n \geq 1)$ en x et en t, donc $x_i\left(t\right) \in C^1$.

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n\left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right)$$

on a :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \cdots\cdots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n \end{cases}$$

Pour du système non autonome ci-dessus à un système autonome, on change le variable t, posant $t = x_{n+1}$, donc :$\frac{dx_{n+1}}{dt} = 1$, où le système :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \cdots\cdots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n \\ \frac{dx_{n+1}}{dt} = 1 \end{cases}$$

on obtient :

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n\left(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}\right)$$

alors : $\dot{x} = f\left(x\right)$, tel que :$x = \left(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}\right)$.

Exemple 1.3 *considérons les différentiels suivants :*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x, \\ x\left(t_0\right) = 1, y\left(t_0\right) \ = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

La solution du système autonome (1.2) est :

$$x\left(t\right) = \cos\left(t - t_0\right), \ y\left(t\right) = -\sin\left(t - t_0\right).$$

La trajectoire est un cercle passant par le point $(1,0)$ *et d'équation :*

$$x^2 + y^2 = 1$$

Par contre, la trajectoire du système non autonome (**??**) *dépend du temps initial* t_0. *Ainsi :*

a) Si $t_0 = \frac{\pi}{2}$, *la solution est :*

$$x(t) = \cos t + \left(1 - \frac{\pi}{2}\right)\sin t + t, y(t) = -\sin t + \left(1 - \frac{\pi}{2}\right)\cos t + 1$$

b) Si $t_0 = \pi$, *la solution est :*

$$x(t) = (\pi - 1)\cos t + \sin t + t, y(t) = -(\pi - 1)\sin t + \cos t + 1$$

c) Si $t_0 = 2\pi$, *la solution est :*

$$x(t) = (1 - 2\pi)\cos t - \sin t + t, y(t) = -(1 - 2\pi)\sin t - \cos t + 1$$

1.3 Définitions et propriétés des flots continus

Définition 1.3 *Espace d'état, degré de liberté*

L'espace des phases est l'ensemble des états possibles d'un système dynamique. On peut également le définir comme un espace abstrait dont chaque variable représente une dimension nécessaire à la description du système à un moment donné. Le degré de liberté caractérise l'espase des phases. Il représente l'ordre qui égal à la dimension de l'espace des phases, c'est-à-dire le nombre de variables qui le caractérisent.

Par exemple, l'espace des phases d'un balancier d'une horloge est construit à partir des variables vitesse et angle par rapport à la verticale et, dont le degré de liberté est égal à 2.

Le flot continu

Définition 1.4 *Le flot continu*

On appelle ***"flot"*** *l'action du groupe aditif* $(\mathbb{R},+)$ *sur l'espace des phases noté M. Le flot est la donnée d'une application* Φ *définie par :*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} \times M \quad &\rightarrow \quad M \\ (t \quad , \quad x) &\longmapsto \Phi(t,x) = \Phi_t(x) \end{aligned}$$

Et qui vérifiée deux axiomes :

Axiom 1.1 *Le flot*

1-Axiome de neutralité :

$$\Phi(0,x) = x \quad \forall \;\; x \in M$$

2-Axiome d'associativité :

$$\Phi(t+s,x) = \Phi(s,\Phi_t(x)) \qquad \forall\; t,s \;\; \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in M$$

Exemple 1.4 *Mouvement rectiligne*

Le flot d'un mouvement rectiligne uniforme est donné par :

$$\Phi_t(x) = x(0) + v(0)\,t, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$x(0)$ *: position initiale,* $v(0)$ *: vitesse initiale,* t *:temps.*

En effet, les deux axiomes sont vérifiés :

$$\begin{aligned} \Phi(0,x) &= x \\ \Phi_s(\Phi_t(x)) &= \Phi(s,\Phi_t(x)) \\ &= (\; x(0) + v(0)\,t) + v(0)\,s \\ &= x(0) + v(0)(s+t) \\ &= \Phi(t+s,x) \end{aligned}$$

Proposition 1.1 *Le flot continu*

1-Puisque le groupe additif $\mathbb{R}$ *agit sur l'espace des phases M, par le flot* Φ *on peut définir deux concepts :*

a)L'orbite d'un point x de M, noté $\theta(t)$*, défini par :*

$$\theta(t) = \{\Phi_t(x), \forall t \in \mathbb{R}\}$$

$\theta(t)$ *est un sous ensemble de l'espace des phases.*

b) Le stabilisateur d'un point x de M ; noté $St(x)$*, défini par :*

$$St(x) = \{t \in \mathbb{R}, \Phi_t(x) = x\}$$

2-L'action du groupe $\mathbb{R}$ *sur* M *par le flot* Φ *nous permet de faire une partition de l'espace des phases* M *en des orbites vérifiant :*

▶ $\theta(x) \cap \theta(y) = \emptyset : x \neq y, \forall x, y \in M$,*c'est la non intersection des orbites dans l'espace des phases.*

▶ $\cup_{x \in M} \theta(t) = M$.

À partir des trois propriétés l'ensemble $\sum = \{\theta(x)\}_{x \in M}$, *forme une partition de* M.

il existe une relation d'équivalence $\Re$ *associée à* $\sum$

$$\begin{aligned} (x \Re \grave{x}) &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \grave{x} = \Phi_t(x) \\ &\Leftrightarrow \textit{sont sur la même orbite} \end{aligned}$$

3-$\mathbb{R}$ *admet une représentation dans M, il existe un homomorphisme* Ψ *tel que*

$$\begin{array}{cccc} \Psi : \mathbb{R} & \longrightarrow & (B(M, M), \circ) \\ t & \longmapsto & \Psi(t) = \Phi_t \end{array}$$

Où $B(M, M)$ *est l'ensemble de bijections de* M.

Si le système est réversible l'application bijective $\Phi_t : M \to M$ *admet une inverse* $(\Phi_t)^{-1}$ *telle que :*

$$(\Phi_t)^{-1} = \Phi_t$$

4-Φ_t *est de classe* $C^1, \forall t \in \mathbb{R}$.

5-Si le système est irréversible, l'ensemble $\{\Phi_t, \forall t \in \mathbb{R}^*\}$ *est appelle semi-groupe.*

6- Un point d'équilibre ou point fixe x^**du système est un point pour lequel :*

$$St(x^*) = \mathbb{R}$$

7-Un point périodique x_p*du système est un point pour lequel :*

$$St(x_p) = \{np,\ n \in \mathbb{Z},\ \ p \textit{ est le période du mouvement}\}.$$

Proposition 1.2 *Action transitive*

L'action du flot Φ *sur* M *est dite transitive, s'il existe une seule orbite ; autrement dit :*$\sum = \{M\}$

$$\sum = \{M\} \Leftrightarrow \forall\ x, \grave{x} \in M,\ \exists t \in \mathbb{R} : \grave{x} = \Phi_t(x).$$

Définition 1.5 *Champ de vecteurs*

Le champ de vecteurs f *sur* M *associé à chaque point* $x \in M$ *un vecteur* $f\ (x)$ *admettant ce point pour origine tel que :*

$$\frac{d}{dt}\Phi_t(x) \mid_{t=0} = f(x)$$

Chapitre 2

Stabilité en temporel des systèmes dynamiques

2.1 Stabilité et point d'équilibre

Etat d'équilibre

Définition 2.1 *Etat d'équilibre*

Un système physique est en état d'équilibre, s'il présente des propriétés constantes.

Autrement dit :un système est en état d'équilibre $\dot{x}$ si :

$$F(\dot{x}, t, \lambda) = 0$$

(physiquement si la vitesse est nulle en un point $\dot{x}$).

La stabilité

Définition 2.2 *Systéme stable*

Un système, qui a une propriété de revenir à son état d'équilibre après une perturbation, est dit stable.

Stabilité au sens de Lyapunov

Une solution $\dot{x}$ est dite stable au sens de Lyapunov si :

$$\forall \zeta > 0, \exists \delta > 0 : \|x(0) - \dot{x}\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \dot{x}\| < \zeta$$

Stabilité asymptotique

Une solution $\dot{x}$ est dite asymptotique stable si :

$$\exists \delta > 0 : \|x(0) - \dot{x}\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} x(t) = \dot{x}$$

Instabilité

Une solution $\dot{x}$ est dite instable s'il n'est pas stable :

$$\exists \zeta > 0, \forall \delta > 0 : \|x(0) - \dot{x}\| < \delta, \text{ et } \|x(t) - \dot{x}\| > \zeta$$

2.2 Système linéairisé-Valeurs propres

Supposons que, par un changement de cordonnées, le point fixe ait été ramené à l'origine :$f(0) = 0$. Le développement de Taylor en $x = 0$ s'écrit :

$$f(x) = Df(0)x + \frac{1}{2!}D^2 f(0)(x, x) + \frac{1}{3!}D^3 f(0)(x, x, x) + ... \tag{2.1}$$

Où l'on à posé :

$$\begin{aligned} f &= (f_1, f_2, ..., f_n)^\top, x = (x_1, x_2, ..., x_n)^\top, \\ Df(x)x &= \sum_j \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right) x_j, \ D^2 f(x)(x, x) = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right) x_i x_j, \\ D^3 f(x)(x, x, x) &= \sum_{i,j,k} \left(\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\right) x_i x_j x_k ... \end{aligned}$$

La matrice :

$$Df(x) = \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right) \tag{2.2}$$

S'appelle matrice jacobienne de $f(x)$ (son déterminant est jacobien). Pour x petit, (2.1) montre que le comportement du système au voisinage de 0 est celui du système linéairisé :

$$\dot{x} = Df(0)x \tag{2.3}$$

Dans le cas où la matrice $Df(0)$ possède n valeurs propre λ_i, i=1,...,n. distinctes, la solution de (2.3)est :

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i a^{(i)} \lambda_i t$$

Où $a^{(i)}$ est le vecteur propre correspondant à la valeur propre λ_i et les c_i, i=1,...,n sont des constantes (déterminées par les conditions initiales).

La stabilité des points d'équilibre

Le coportement des orbites au voisinage du point d'équilibre $\dot{x}$ est lié aux valeurs propres λ_i de (2.3) :

1) Si $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$, pour $\forall\ \lambda_i$, le point d'équilibre $\dot{x}$ est **asymptotique stable**.

2) Si $\mathrm{Re}(\lambda_i) \leq 0$, pour $\forall\ \lambda_i, \dot{x}$ est **stable** au **sens de Lyapunov**.

3) Si $\exists\ \lambda_i \in \mathbb{R}$, tel que : $\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$, $\dot{x}$ est **instable.**

Le type des points d'équilibre

1) Un point d'équilibre $\dot{x}$ est dit point **"hyperbolique"** si la matrice $Df\,(0)$ n'a pas des valeurs propre nulle ou imaginaire.

2) Un point d'équilibre $\dot{x}$ est dit point **"selle"** si le nombre des valeurs propres positives est égal à celui des valeurs propres négatives.

3) Un point d'équilibre $\dot{x}$ est dit point **"nœud"** si toutes les valeurs propres ont le même signe.

4) Un point d'équilibre $\dot{x}$ est dit point **"foyer"** si des valeurs propres sont des paires complexes conjuguées.

Exemple 2.1 *[1]*

Dans l'espace des phases $\mathbb{R}^2$, l'équation (2.3) s'écrit:

$$\dot{x} = Ax \ \textit{avec}\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Les valeurs propres de la matrice A sont solutions de l'équation :

$$\lambda^2 - p\lambda + q = 0, \ \ \textit{avec} \ \ p = a + d, q = ad - bc.$$

Supposons que la matrice A soit diagonalisable, les solutions de (2.4) sont alors de la forme :

$$\begin{aligned} x\,(t) &= c_1 a^1 \exp\left(\lambda_1 t\right) + c_2 a^2 \exp\left(\lambda_2 t\right), \ \lambda_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \ \ \textit{si}\ \Delta = p^2 - 4q \neq 0. \\ x\,(t) &= \left(c_1 a^1 + t c_2 a^2\right) \exp\left(\frac{pt}{2}\right), \textit{si}\ \Delta = p^2 - 4q = 0. \end{aligned}$$

Où a^1, a^2 sont des vecteurs propres de A,c_1 ,c_2 sont des constantes d'intégration. On déduit la classification des points fixes :

a) Si $\Delta = p^2 - 4q < 0, p \neq 0$:le point fixe est ***asymptotiquement stable*** *si $p < 0$,* ***instable*** *si $p > 0$. Les trajectoires au voisinage de 0 sont des spirales. Le point fixe s'appelé un* ***foyer****.*

b) Si $\Delta = p^2 - 4q = 0, p = 0$:le point fixe est ***centre*** *ou un point* ***elliptique****. Les trajectoires au voisinage de 0 sont des ellipses. L'origine est un point fixe stable mais pas asymptotiquement stable.*

c) Si $\Delta = p^2 - 4q = 0, p \neq 0$: le point fixe est ***un nœud*** *,* ***asymptotiquement stable*** *si $p < 0$, instable si $p > 0$.*

d) Si $\Delta = p^2 - 4q > 0, p > 0$ et $q > 0$: les valeurs propres sont réelles et de même signe. Le point fixe est ***un nœud impropre****,* ***asymptotiquement stable*** *si $p < 0$,* ***instable*** *si $p > 0$.*

e) Si $\Delta = p^2 - 4q > 0, q < 0$: les valeurs propres sont réelles et de signe différents. Le point fixe est un point ***selle****.*

Théorème 2.1 *(Hartmann-Grobman)[10]*

Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un C^1 Difféomorphisme avec un poit d'équilibre x^* hyperbolique.

Alors il existe un homéomorphisme h d'un voisinage du point $x^* \in U$ dans $\mathbb{R}^n$

$h : U \to \mathbb{R}^n$,mettant en correspondance les trajectoires du système non linéaire et celles du système linéairisé $\dot{z} = Az$.En particulier :

$$h\left(x^*\right) = 0$$

$$\text{et } h\left(F\left(x\right)\right) = Ah\left(x\right), \forall x$$

Exemple 2.2 *(équation de Duffing)*

L'équation $\ddot{x} + \delta\dot{x} - x + x^3 = 0$ $(0 < \delta < 2\sqrt{2})$ c'est une équation d'ordre 2 équivalente à un système de deux équation du premier ordre :

$$\begin{cases} \dot{x} = x_1 \\ \dot{x}_1 = x_1 - x_1^3 - \delta x2 \end{cases}$$

Ayant pour points équilibre $(0,0), (\underline{+}1, 0)$ .Le système linéairisé est le suivant :

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x & -\delta \end{pmatrix} z$$

Les valeurs propres du jacobien au point d'équilibre $(0,0)$ *sont :*

$$\lambda_1 = \frac{-\delta - \sqrt{\delta^2+4}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2+4}}{2}$$

Donc $(0,0)$ *est un point selle hyperbolique.*

Les valeurs propres du jacobien au point d'équilibre $(\pm 1,0)$ *sont :*

$$\lambda_1 = \frac{-\delta - i\sqrt{-\left(\delta^2-8\right)}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-\delta + i\sqrt{-\left(\delta^2-8\right)}}{2}$$

Alor$(\pm 1,0)$ *sont des foyer asymptotiquement stables. D'après le théorème (Hartmann-Grobman), le portrait de phases du système non linéaire de Duffing est homéomorphe avec le portrait de phases du système linearrisé aux point d'équilibre hyperboliques :* $(0,0)\,,(\pm 1,0)\,.$

2.3 La fonction de Lyapunov

Définition 2.3 *(la fonction de Lyapunov)*

Soit U *un ensemble ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *tel que* $(0,0)\in U$. *Une fonction* $V \in C^1(U)$ *à valeurs réelles :*

$$\begin{array}{llll} V: & U & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & V(x) \end{array}$$

Définition 2.4 *La fonction* V *est dite positive sur* U *si :*

$-V(0)=0$

$-V(x)>0$ *pour* $\forall\ x\in U$ *avec* $x\neq(0,0)$

La fonction V *est dit défini négative si* $(-V)$ *est défini positive. L'ensemble* $V^{-1}(k)$ *est appelé courbe de niveau tel que*

$$V^{-1}(k)=\{x\in\mathbb{R}^2\backslash V(x)=k\}\ (\forall k\succ 0)$$

Théorème 2.2 *(Lyapunov)[1]*

Soit système différentiel $\dot{x}=f(x)$ *ayant l'origine* 0 *pour point d'équilibre , et* V *est une fonction à valeurs réelles définie positive* C^1*sur un voisinage* U *de* 0.

1)*Si* $\dot{V}\leq 0,\forall x\in U-\{0\}$ *,alors l'origine ,alors l'origine est* ***stable*** *.*

2)Si $\dot{V} < 0, \forall x \in U - \{0\}$,alors l'origine est ***asymptotiquement stable.***
3)Si $\dot{V} > 0, \forall x \in U - \{0\}$alors l'origine est ***instable.***

Définition 2.5 *(Fonction stricte de Lyapunov)*

Une fonction définie positive V sur un voisinage ouvert U de l'origine est dite fonction stricte de Lyapunov pour $\dot{x} = f(x)$
1) Si $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in U - \{0\}$.
2) Si$\dot{V} < 0, \forall x \in U - \{0\}$,V est appellée fonction stricte de Lyapunov

Exemple 2.3 *Soit le système [3] :*

$$\begin{cases} \dot{x} = y + ax\left(x^2 + y^2\right) \\ \dot{y} = -x + ay\left(x^2 + y^2\right) \end{cases} \tag{2.5}$$

A un point fixe $(0,0)$. Soit $V = x^2 + y^2$, alors :

$$\dot{V} = 2\left(\dot{x}x + \dot{y}y\right) = 2a\left(x^2 + y^2\right)^2$$

D'où d'après la théorème de Lypunov, si $a < 0$ le point fixe à l'origine est ***asymptotiquement stable****; si a=0, le point est* ***stable****; si a>0, le point est* ***instable.***

Exemple 2.4 *(le pendule)*
Le pendule évolue dans $\mathbb{R}^2$ selon la loi suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \frac{-g}{l}\sin x_1 \end{aligned}$$

La fonction de Lyapunov au voisinage de 0 est donnée par :

$$V(x,y) = \frac{1}{2}l^2y^2 + gl\left(1 - \cos x\right)$$

Elle satisfait les conditions du théorème dans Lyapunov dans un voisinage de l'origine $V(x) = 0$ donc l'origine est stable.

Chapitre 3

Système conservatifs et système dissipatif

3.1 Attracteurs et attracteurs étranges

Attracteurs

Considérant un système dynamique déterminé par un flot Φ. Lors de l'étude du comportement asymptotique des solutions d'un système dynamique, on trouve des objets dans l'espace des phases qui attirent un grand nombre de solutions issues de conditions initiales différentes. Ces objets sont appelés attracteurs ou ensembles attractants. Plus formellement :

Définition 3.1 *Attracteurs [3] [4]*

Soit A un ensemble compact, fermé de l'espace des phases. On suppose que A est un ensemble invariant.

On dit que A est stable si pour tout voisinage U de A, il existe un voisinage V de A tel que tout solution $x(x_0, t) = \Phi_t(x_0)$ restera dans U si $x_0 \in V$. Si de plus :

$$\cap_{t \geq 0} \Phi_t (V) = A$$

Et s'il existe une orbite dense dans A. Alors A est un attracteur.

Lorsque A est un attracteur, l'ensemble :

$$W = \cup_{t<0} \Phi_t (V)$$

Est appelé le bassin d'attracteur de A. C'est l'ensemble des points dont les trajectoires asymptotiques convergentes vers A.

L'attracteur le plus simple est un point fixe. Un deuxième type d'attracteur pour un champ de vecteurs est le cycle limite ω : c'est une trajectoire fermé qui attire toutes les orbites proches.

Les différents types d'attracteurs

Il existe plusieurs types d'attracteurs

-**points fixes**: Il s'agit là du cas le plus simple d'attracteur, Il représente par un point dans l'espace des phases.

-**Attracteur périodique** :Il se représente par une courbe fermée dans l'espace des phases. Si cet espace est de dimension deux l'attracteur sera un cercle, une ellipse, ou toute autre forme géométrique fermée. Pour revenir à son état initial, Le système met exactement une période, Si en travaille dans un espace de dimension supérieure à deux, Il faut tenir compte de certaines subtilités. En effet, dans un tel espace, une trajectoire générée par le système dans l'espace de phases.

Dans un espace bidimensionnel, les seuls attracteurs possibles étaient le point et la courbe fermée, correspondant au point fixe et au deux cycles. Mais le passage à de plus hautes dimensions permet de considérer des cycles d'ordre plus élevé.

3.2 Variétés centrales

Théorème de la variété centrale

Soit x un point fixe de

$$\frac{dx}{dt} = f(x)\,,\ x \in \mathbb{R}^n,\ f \in C^n(D)\,,\ D \subseteq \mathbb{R}^n \tag{3.1}$$

La linéarisation de(3.1) autour de $\bar{x}$ s'écrit :

$$\frac{d\xi}{dt} = J\xi \tag{3.2}$$

Où $\xi = x - \bar{x}$ et J est la matrice jacobienne.

$$J = Df(\bar{x}) = \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|_{x=\bar{x}} \tag{3.3}$$

On substitue $\xi = ue^{\lambda t}$, $u \in \mathbb{R}^n$, dans (3.2) et on obtient les équations aux vecteurs propres et aux valeurs propres :

$$(J - \lambda I)\, u = 0, \tag{3.4}$$

$$|J - \lambda I| = 0. \tag{3.5}$$

Soient $u_1, ..., u_s$ les vecteurs propres de J correspondant aux valeurs propres λ dont la partie réelle est négative, $v_1, ..., v_u$ les vecteurs propres de J correspondant aux valeurs propres λ dont la partie réelle est positive, $w_1, ..., w_c$ les vecteurs propres de J correspondant aux valeurs propres λ dont la partie réelle est nulle, avec $s + u + c = n$ et soient E^S le sous-espace vectoriel engendré par $\{u_1, ..., u_s\}$, E^u le sous-espace vectoriel engendré par $\{v_1, ..., v_u\}$, E^c le sous-espace vectoriel engendré par $\{w_1, ..., w_c\}$, avec $\mathbb{R}^n = E^S \oplus E^u \oplus E^c$. On la théorème suivant [3] [5]

Théorème 3.1 *Théorème de la variété centrale*

*Il existe des variétés de classe C^n, **stable** W^S, **instable** W^u,**centrale** W^c en $\bar{x}$. Ces variétés sont invariantes par rapport au flot Φ_t de (3.1).*

W^S et W^u sont uniques mais W^c ne l'est pas nécessairement.

On a $\Phi_t\left(W^S\right) \subset W^c$, $\Phi_t\left(W^u\right) \subset W^u$, $\Phi_t\left(W^c\right) \subset W^c$,

$$\lim_{t \to +\infty} \Phi_t(x) = \bar{x} \text{ pour tout } x \in W^S, \tag{3.6}$$

$$\lim_{t \to -\infty} \Phi_t(x) = \bar{x} \text{ pour tout } x \in W^u. \tag{3.7}$$

Noter que x est la limite ϖ (resp, la limite σ) de toute trajectoire $\Phi_t(x)$ appartenant à W^S (resp, appartenant à W^u).

*De plus, on ne peut attribuer de directions au flot de W^c sans connaître les premières termes du développement limité de f au voisinage de $\bar{x}$. Si $E^c = \emptyset$, le point $\bar{x}$ est un point fixe **hyperbolique.***

Exemple 3.1 *Soit le système non-linéaire suivant [7] :*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x, \\ \frac{dy}{dt} = -y + x^2, \\ \frac{dz}{dt} = z + x^2. \end{cases} \tag{3.8}$$

Le seul point fixe du système est l'origine et la matrice

$$J = Df(0) = \left\| \frac{\partial f_i(0)}{\partial x_j} \right\| = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Est déjà diagonale ; par conséquent les sous-espaces E^S et E^u sont respectivement le plan x,y et l'axe z. Après avoir résolu la première équation $\frac{dx}{dt} = -x$, le système non-

linéaire se réduit à deux équations différentielles linéaires qui peuvent être résolues facilement et on obtient :

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{-t}, \\ y(t) &= y_0 e^{-t} + x_0^2 \left(e^{-t} - e^{-2t}\right), \\ z(t) &= z_0 e^{t} + \frac{x_0^2}{3} \left(e^{t} - e^{-2t}\right). \end{aligned}$$

Où $(x_0, y_0, z_0) = (x(0),\ y(0),\ z(0))$. *Par conséquent,* $\lim_{t \to +\infty} \Phi_t (x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$ *si seulement si :* $z_0 + \frac{x_0^2}{3} = 0$ *:d'où :*

$$W^S = \left\{ (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 \ \textit{tel que}\ z_0 = -\frac{x_0^2}{3} \right\}.$$

De même, $\lim_{t \to -\infty} \Phi_t (x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$ *si seulement si :* $x_0 = y_0 = 0$, *d'où :*

$$W^u = \left\{ (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 x_0 \ \textit{tel que}\ x_0 = y_0 = 0 \right\}.$$

W^S *est tangente à* E^S *et* $W^u = E^u$ *=l'axe des z.*

Etude de la variété centrale

Supposons que, par un changement de coordonnées, le point fixe $\bar{x}$ ait éte ramené à l'origine et les équations du système dynamique mises sous la forme :

$$\begin{aligned} \text{(a)}\ \dot{x} &= Ax + f(x,y), \\ \text{(b)}\ \dot{y} &= By + g(x,y). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Où x et f sont des n-vecteurs et A est un matrice $n \times n$ dont les valeurs propres ont leur partie réelle nulle. De même, y et g sont des m-vecteurs et B est un matrice $m \times m$ dont les valeurs propres ont leur partie réelle nigative. Dans la pratique, lorsque la matrice jacobienne est diagonalisable, on peut ramener le système dynamique à la forme (3.9) en utilisant la base des vecteurs propres. Localement la variété centrale W^c peut être représentée au voisinage de $\bar{x} = 0$ par :

$$W^c(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \text{ tel que } y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0,\ Dh(0) = 0\} \tag{3.10}$$

Pour δ suffisamment petit. Les conditions $h(0) = 0$ et $Dh(0) = 0$ impliquent que $W^c(0)$ est tangante à$E^c \equiv (y, 0)$ au point $(x,y) = (0,0)$.

Portant $y = h(x)$ avec $h(0) = 0 = Dh(0)$ dans (3.9 a), on obtient :

$$\dot{x} = Ax + f(x, h(x)), \ x \in \mathbb{R}^n, \ h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \tag{3.11}$$

Le théorème suivant permet de lier la dynamique de (3.9) à celle de (3.11).

Théorème 3.2 *Si l'origine x=0 de (3.11) est* ***asymptotiquement stable*** *(resp.* ***instable****), alors l'origine de (3.9) est aussi* ***localement asymptotiquement stable*** *(resp.* ***instable****).*

D'où le système donnant la fonction $h(x)$:

$$Dh(x)[Ax + f(x, h(x))] - Bh(x) - g(x, h(x)) = 0.$$

3.3 Système conservatifs et système dissipatif

En mécanique, on distingue deux classe de systèmes : les systèmes dissipatifs et les systèmes conservatifs. Dans les systèmes qualifiés de dissipatifs, " le frottement " entraîne une diminution continuelle de l'énergie. La présence d'une "friction interne" dans les systèmes dissipatifs a pour corollaire l'existence d'un attracteur" c'est-à-dire d'une limite asymptotique (pour $t \to +\infty$) des solutions. Les systèmes sans frottement ; dites conservatifs ou Hamiltoniens ont leur intérêt et leur utilité propres. Il relève de leur étude l'absence d'attracteur, les trajectoires évoluent sur des surfaces d'énergie constante [2].

Définitions et caractérisations

Un système qui conserve son énergie totale dans son évolution est dit **"conservatif"**, son comportement est décrit par une fonction de **"Hamilton"**, constante dans le temps, elle représente dans ce cas l'énergie E du système, et grâce à elle, on donne la modélisation mathématique des systèmes conservatifs :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \tag{3.12}$$

d'ou : $H(x, y) = E$ =constante.

Exemple 3.2 *(oxillateur harmonique est un exemple de système conservatif)*

Il est défini par le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

Le système admet la quantité d'énergie (énergie du pendule) :

$$H(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$$

comme constante du mouvement $\frac{dH}{dt} = 0$.

La propriété importante de ce système est la dynamique réversible ; c'est-à-dire ; l'invariance par renversement du temps. Ce qui correspond dans l'espace des phases à la conservation des aires (ou des voulmes). Par contre, un système dissipatif perd son énergie totale pendant son évolution est caractérisé l'irréversibilité du temps, et par l'absence de "hamiltonien".

Cependant pour certains systèmes dissipatifs, il existe une fonction de variable dynamique, la fonction de "Lyapunov", positive et décroissante de façon monotone au cours du temps. Une telle fonction sur laquelle peut s'appuyer l'étude de ces systèmes n'existe pas toujours. Dans l'espace des phases la contraction des aires (ou des volumes) fait que les trajectoires de phase sont attirées vers une figure géométrique appelée "attracteur" [2].

Exemple 3.3 *(le pendule amorti est un exemple de système dissipatif).*
Sa dynamique est décrite par le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x - \gamma * y \\ (\gamma \neq 0) \end{cases}$$

Où : γ *coefficient d'amortissement du mouvement.*

3.4 Théorème de divergence (Liouville)

Théorème 3.3 *[1]*
Soit Φ_t *le flot* $f(x) = \frac{dx}{dt}, x \in \mathbb{R}^n, f \in C^n(U), u \subset \mathbb{R}^n$;*soit* V_0 *un volume initial de l'espace des phases au temps* $t = 0$, *soit* $V(t) = \Phi_t(V_0)$ *: l'image de* V *par* Φ_t, *on a :*

$$\frac{dV(t)}{dt} = \int_{V_0} div\ f\ dx_1 dx_2 ......dx_n = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

L'évolution d'un volume initial V_0 *de l'espace de phases par le flot continu par la loi exponentielle :*

$$V(t) = V_0 e^{(div\ f)t}$$

Théorème 3.4 *-si div* $f = 0$ *; le système continu est conservatif.*

-si div $f < 0$ *; le système continu est dissipatif.*

Exemple 3.4 *(système de lorenz) [1]*

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \sigma(y - x) \\
\dot{y} &= rx - y - xy \\
\dot{z} &= xy - bz
\end{aligned}$$

Le système de lorenz est dissipatif et sa divergence vaut :

$$div\ f = -(-\sigma + b + 1) < 0$$

3.5 Système différentiel dissipatif

Définition 3.2 *1) Le système différentiel :*$\dot{x} = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ *est dissipatif s'il existe un sous-espace borné* B *de* $\mathbb{R}^n$ *tel que* $B \subset \mathbb{R}^n$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ *,* $\exists\ t_0$*(un temps dépendant de* x_0 *et de* B*)*$\forall t \geq t_0 : \Phi_t(x_0) \in B$ *tel que :*

$$\omega(U) = \cap_{t \geq 0} \gamma^+ (\Phi(t, x))$$

2) L'ensemble ω*-limite de* U $(U \subset \mathbb{R}^n)$ *sous le flot* $\dot{x} = f(x)$ *est défini par l'ensemble des orbites positives passant par toute condition initiale* $x_0 \in U$*.*

3) Un ensemble A *est dit* ***attracteur globale*** *d'un système dissipatif si* A *est compact, connexe, invariant et* $\omega(U) \subset A$ *pour tout* U *ensemble borné.*

Conclusion Générale

Ce mémoire est consacré à l'étude analytique de système dynamique en cas continu.

D'une part, nous avons donné les notions de bases des systèmes dynamiques et le représenté par des équations différentielles.

Le deuxième chapitre étudié la stabilité d'un système linéarisé. Dans ce cas nous avons utilisé deux manières : les valeurs propres et la fonction de Lyapunov. Dans la troisième chapitre nous classifions deux systèmes dynamiques : conservatifs et dissipatifs et nous avons donné le théorème de la variété centrale.

Bibliographie

[1] Huyen DANG-. Claudine DELCARTE, "Bifurcation et chaos", Ellipses Edition, 2000.

[2] P. Bergé. Y. Pomeau.Ch.Vidal, "L'ordre dans le Chaos", Herman, 1984.

[3] J. F. Marsden et M. McCracken, The Hopf Bifurcation and Its applications, Springer, Berlin 1976.

[4] D. Ruelle et Commun. Math. Phys. 82, 137. 1981.

[5] J. Carr, Applications of center Manifold Theory, Springer, Berlin 1981.

[6] M. Humi et W. Miller, Second Course in Ordinary Differential Equations for Scientists and Engineers, Springer, Berlin 1988.

[7] L. Perko ; Differntial Equations and Dynamical Systems, Springer, Berlin 1991.

[8] H. POINCARE, Sur le problème de trois corps et les équations de la dynamique, Acta Math., Vol.13, 1890, pp.1-270, 1890.

[9] H. POINCARE, Science et méthode, Flammarion, Paris, pp. 68, 69, 91, 1908.

[10] K. Jack Hale. huseying Koçak, " Dynamique and Bifurcation", Springer-Verlag New York, Inc, 1991.

Résumé

Ce mémoire a pour objet de présenter la théorie de système dynamique en cas continu, après une étude détaillée des outils fondamentaux de l'étude des systèmes dynamiques, comment étudier la stabilité d'un système linéairisé(les valeurs propres, la fonction de Lyapunov).

Mots clefs

système dynamique, la stabilité, système linéairisé, valeurs propres, trajectoire, flot continu, dissipatifs, conservatifs, fonction de Lyapunov, attracteurs.