

Réf. /12

**Mémoire de fin d'étude**  
Présenté pour l'obtention du diplôme de

## **Licence Académique**

Domaine : **Mathématiques et Informatique**  
Filière : **Mathématiques**  
Spécialité : **Mathématiques Fondamentales**

### **Thème**

# **Calculer l'exposant de Lyapunov.**

*Présenté par :*

- 1- MERMOULE ABD ELFETTAH.
- 2- GUERDOUH MOSBAH.
- 3- ATMANI AMINE.

*Dirigé par :*

**LAOUIRA WIDAD.**

**Année universitaire 2012-2013**

## شكرو عرفان

أولا و قبل كل شيء نحمد الله تعالى على نعمه التي أحاطنا بها.

نتقدم بشكرنا الجزيل إلى الأستاذة لعويرة وداد على كافة مساعداتها وتوجيهاتها، و نسأل الله أن يزيدها فضلا على فضل، و علما على علم، كما نتوجه بشكرنا إلى كافة أساتذة معهد العلوم والتكنولوجيا الذين رافقونا في فترة دراستنا الجامعية.

مرمول عبد الفتاح، قردوح مصباح، عثمانى أمين.

# Table des matières

<b>Introduction Générale</b>	<b>2</b>
<b>1 Système dynamique</b>	<b>3</b>
1.1 Définition du système dynamique . . . . .	3
1.2 Systèmes autonomes et non-autonomes . . . . .	4
1.3 Espace des phases . . . . .	5
1.4 Flot et trajectoires . . . . .	6
1.5 Orbite . . . . .	7
1.6 Stabilité des Points critique . . . . .	7
1.6.1 Points critique (fixe, d'équilibre) . . . . .	7
1.7 Système linéarisé-valeurs propres . . . . .	8
1.8 Nature des points fixes . . . . .	9
1.9 Les théorèmes fondamentaux . . . . .	9
1.10 Théorème de Poincaré-Bendixon . . . . .	11
1.11 La fonction de Lyapunov . . . . .	13
1.12 Attracteurs et attracteurs étranges . . . . .	13
1.12.1 Attracteurs . . . . .	13
1.12.2 La fonction sphérique de Lorenz . . . . .	14
1.12.3 Attracteurs étranges . . . . .	15
1.13 Systèmes chaotiques . . . . .	17
<b>2 Exposants et dimension de Lyapunov</b>	<b>18</b>
2.1 Exposants de Lyapunov . . . . .	18

2.2	Calcul des exposants de Lyapunov . . . . .	18
2.3	Exposants de Lyapunov d'une application mono-dimonsionnelle . . . . .	18
2.4	Cas d'une application à $n$ dimensions . . . . .	20
2.5	Méthodes de calcul des exposants de Lyapunov . . . . .	22
2.6	Cas d'un système différentiel . . . . .	23
2.7	Cas d'un application unidimensionnelle . . . . .	24
2.8	Utilisation au calcul de dimension de l'attracteur . . . . .	25
2.8.1	Dimension de Mori . . . . .	26
2.8.2	Formule de Kaplan-Yorkan et dimension de lyapunov . . . . .	26
	<b>Conclusion Générale</b>	<b>28</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>28</b>

# Introduction Générale

Dans ce mémoire on étudié les méthodes de calcul l'exposant de Lyapunov que ce trouve par Alexandre Mikhalovitch Lyapunov (1857,1918).

Dans l'analyse des systèmes dynamiques l'exposant de Lyapunov permet de quantifier l'idée de sensibilité aux conditions initiales à la base de la notion de chaos. Il mesure les évolutions d'une incertitude sur les données initiales, et de divergence exponentielle de trajectoires voisines dans l'espace de phase.

L'exposant de Lyapunov a la capacité de décrire deux algorithmes de calcul ces valeurs.

Le premier algorithme, développé par Wolf et Vastano (1985), qu'est le plus utilisé dans la mesure de l'exposant de Lyapunov. Ce mémoire est contient à deux chapitres ; dans le premier chapitre on présente les propriétés et définitions de système dynamique, et pour le deuxième chapitre on donne les méthodes de calcul d'exposant de Lyapunov.

# Chapitre 1

## Systeme dynamique

On appelle système dynamique tout système évolutif par l'intermédiaire d'au moins un paramètre réel (qui pourra jouer le rôle de temps par exemple), qui utilise des équations différentielles (ordinaires, aux dérivées partielles,...), des équations intégro-différentielles, des itérations ou un ensemble composite de tout cela et de façon générale qui soit décrit par une ou des "relations" entre un état du système et un (ou des) état(s) à une autre étape (ou instant). Donc pratiquement toute description d'un phénomène qui évolue est en soit un système dynamique.

### 1.1 Définition du système dynamique

Un Système dynamique décrit par une fonction mathématique présente deux types de variables : dynamiques et statiques, les variables dynamiques sont les quantités fondamentales qui changent avec le temps, les variables statiques, encore appelé paramètres du système sont fixes.  
Cas continue

Dans le cas continu un système dynamique est décrit par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x, t, v) \tag{1.1}$$

Ou de la forme généralisée :

$$\frac{d^\alpha x}{d^\alpha t} = f(x, t, v) \tag{1.2}$$

Cas discret

Dans le cas discret un système dynamique est décrit par une itération de la forme :

$$x_{k+1} = f(x_k, v) \tag{1.3}$$

$x \in U \subseteq \mathbb{R}^n; v \in V \subseteq \mathbb{R}^p, k \in \mathbb{N}, \mathbb{R}^n$  est l'espace des phases  $\mathbb{R}^p$  et  $\mathbb{R}^2$  est l'espace des paramètres et  $\mathbb{R}^3$

## 1.2 Systèmes autonomes et non-autonomes

Considérons un système de  $n$  équations différentielles du premier ordre :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \tag{1.4}$$

avec  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  et  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$  est un champ de vecteurs (pour simplifier l'écriture, nous ne mentionnons pas les paramètres qui se trouvent dans les  $f_i$ ).

Nous supposons que les  $f_i$  sont de classe  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) en  $x$  et  $t$ . dans ce cas les fonctions  $x_{i(t)}$  sont aussi de classe  $C^r$ . Par un changement de variables approprié, les équations différentielles d'ordre  $n, n \geq 1$  peuvent se transformer en un système de  $n$  équations différentielles du premier ordre. Par exemple l'équation différentielle d'ordre  $n$  :

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2 x}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}, t\right)$$

Peut s'écrire sous la forme d'un système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n \\ \frac{dx_n}{dt} = f(x_1, \dots, x_n, t) \end{array} \right.$$

ou l'on a posé  $x_1 = x$  (à noter que cette transformation n'est pas unique).

La solution de (1.4) avec conditions initiales  $x(t_0) = x_0$  sera notée  $x(x_0, t)$ , elle décrit dans l'espace des phases  $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ , une courbe intégrale appelé trajectoire ou orbite.

Lorsque le champ de vecteurs  $f$  dépend explicitement du temps le système est autonome. Dans un système autonome, la trajectoire  $x(x_0, t)$  ne dépend pas du temps initial  $t_0$ , alors que dans un système non-autonome elle dépend de  $t_0$ .

### Exemple 1

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= t \\ \dot{x}_{n+1} &= f_{n+1}(x, \alpha) = 1 \end{aligned}$$

*On augmente ainsi la dimension du système d'une unité, mais cela permet de remplacer systématiquement  $t$  dans les équation par  $x_{n+1}$ . Les algorithmes de résolution de systèmes d'équations différentielles vous en remercieront.*

## 1.3 Espace des phases

L'état du système, à un instant  $t$ , est représenté par un point (extrémité du vecteur d'état  $x$ ).

Au cours du temps, le point décrit une ligne courbe : la trajectoire du système, ou orbite  $f(x)$  représente le vecteur vitesse dans l'espace des phases, il est donc tangent en tout point à la trajectoire.

Le déterminisme de la dynamique interdit à la trajectoire de repasser deux fois par le même



point.

**Exemple 2** *cas continu (L'oscillateur de Duffing)*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x - x^3 - \delta y + \gamma \cos \omega t \end{cases}$$

Où  $\delta, \gamma, \omega$  sont des paramètres physiques réels (variables statiques). L'espace des phases est  $\mathbb{R}^2$ , l'espace des paramètres est  $\mathbb{R}^3$  : Ce système est non linéaire, non autonome, il peut être dissipatif ou conservatif (suivant le mouvement avec ou sans frottement).

## 1.4 Flot et trajectoires

Soit le système dynamique autonome :

$$\frac{dx}{dt} = f(x), x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in C^r(U), \quad U \subseteq \mathbb{R}^n \quad (1.5)$$

On suppose que les solutions du système (1.5) sont définies pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

Le flot du système (1.5) est la famille avec un paramètre d'applications  $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  de  $U$  dans lui-même définies par  $\phi_t(\alpha) = x(t, \alpha)$ , pour tout  $\alpha \in U$ ,  $x(t, \alpha)$  est l'unique solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, t, v) \\ x(0) = \alpha \end{cases}$$

\*  $\phi_t(x_0)$  est ce classe  $C^r$ .

\*  $\phi_0(x_0) = x_0$ .

\*  $\phi_{t+s}(x_0) = \phi_t(\phi_s(x_0))$ .

Soit  $x_0 \in U$  une condition initiale et  $x(t, x_0)$  la solution de (1.5). L'ensemble des points  $\{\forall t \in \mathbb{R}, x(t, x_0)\}$  est la trajectoire dans l'espace d'état passant au point  $x_0$  à l'instant initial.

Donc, deux trajectoires identiques émanent obligatoirement du même état initial :

$$\forall t, \phi(t, x_1) = \phi(t, x_2) \implies x_1 = x_2$$

## 1.5 Orbite

Une solution du système (1.1) est une fonction dérivable  $t \mapsto x(t)$ , définie d'un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  dans  $U$  telle que pour tout

$t \in I$  on a :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x, t, v)$$

L'image d'une solution  $x$  est appelée orbite et notée :

$$\gamma_x = \{\alpha \in U; \exists t \in I \ x(t) = \alpha\}$$

L'orbite est tangente en chacun de ses points au champ de vecteur  $f$ .

**Remarque 3** *La notion d'orbite en temps discret est équivalente à celle de trajectoire en temps continu.*

## 1.6 Stabilité des Points critique

### 1.6.1 Points critique (fixe, d'équilibre)

Un point  $x$  est dit point d'équilibre du système (1.1) s'il satisfait  $f(x) = 0$ , (ou pour tout  $t \in \mathbb{R} : \phi_t(x) = 0$ ) sinon  $x$ , est dit point fixe).

Nous illustrons les concepts de points fixes stable, asymptotiquement stable et instable.

Un point critique  $\dot{x} \in \mathbb{R}^n$  est stable si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma > 0$  tel que :

$$\|x(0) - \dot{x}\| < \sigma \implies \|x(t) - \dot{x}\| < \varepsilon$$

( $\|\cdot\|$  désigne la norme dans  $\mathbb{R}^n$ ) si de plus, il existe  $\sigma_0$  avec  $0 < \sigma_0 < \sigma$  tel que :

$$\|x(0) - \dot{x}\| < \sigma \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \dot{x}$$

$\dot{x}$  est asymptotiquement stable. Si  $\dot{x}$  n'est pas stable, alors il est instable.

## 1.7 Système linéarisé-valeurs propres

Supposons que par un changement de coordonnées le point fixe ait été ramené à l'origine :  $f(0) = 0$ .

Le développement de Taylor en  $x = 0$  s'écrit :

$$f(x) = Df(0)x + \frac{1}{2!}D^2f(0)(x, x) + \frac{1}{3!}D^3f(0)(x, x, x) + \dots \quad (1.6)$$

ou l'on a posé :  $f = (f_1, \dots, f_n)^T, x = (x_1, \dots, x_n)^T$

$$Df(x)x = \sum_j \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right) x_j$$

$$D^2f(x)(x, x) = \sum_{i,j} \left( \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right) x_i x_j$$

$$D^3f(x)(x, x, x) = \sum_{i,j,k} \left( \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right) x_i x_j x_k \dots \quad (1.7)$$

la matrice

$$Df(x) = \left( \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right)$$

S'appelle la matrice Jacobienne de  $f(x)$ . pour  $x$  petit, (1.6) montre que le comportement du système au voisinage de 0 est celui du système linéarisé :

$$\dot{x} = Df(0)x \quad (1.8)$$

Dans le cas où la matrice  $Df(0)$  possède  $n$  valeurs propres  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$  distinctes, la solution de (1.6) est :

$$x = \sum_{i=1}^n c_i \alpha^{(i)} \exp \lambda_i t$$

tel que :  $\alpha^{(i)}$  est les vecteurs propres,  $c_i$  les constantes (déterminées par les conditions initiales).

## 1.8 Nature des points fixes

Toutes les valeurs propres ont une partie réelle négative *alors* point fixe asymptotiquement stable.

Une valeur propre au moins a une partie réelle positive *alors* point fixe instable.

Les Valeurs propres imaginaires pures (par paires conjuguées) *alors* centre ou point elliptique (stable sans l'être asymptotiquement).

Si pas de valeur propre nulle ou imaginaire pure *alors* point hyperbolique.

Si une partie réelle négative, une autre positive *alors* point selle.

Si toutes les valeurs propres de  $Df(0)$  sont réelles de même signe *alors* le point fixe est noeud, un noeud stable est un puits. Un noeud stable est une source.

## 1.9 Les théorèmes fondamentaux

On considère un 'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$$

et on suppose que le second membre de l'équation est donné par une fonction  $f$  qui est Lipschitzienne de rapport  $K$  par rapport a  $x$ , uniformément en  $t \in [-a, a]$ . Soit  $x_0$  une donnée initiale, il existe une seule solution  $x(t)$  de l'équation différentielle qui satisfait  $x(0) = x_0$  et qui est définie sur l'intervalle  $[-c, c]$  avec  $c < \min(a, 1/k)$ .

**Preuve.** Cette solution satisfait l'équation intégrale

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(x(u), u) du$$

On considère l'espace des fonctions continues  $y \in C^0([-a, a])$  muni de la norme  $\|y\| = \max_{t \in [-a, a]} \|y(t)\|$ .

Soit  $L: C^0([-a, a]) \mapsto C^0([-a, a])$  l'opérateur linéaire défini par :

$$L(y)(t) = x(0) + \int_0^t f(y(u), u) du$$

Cet opérateur satisfait

$$L(y)(t) - L(\dot{y})(t) = \int_0^t [f(y(u), u) - f(\dot{y}(u), u)] du$$

$$L(y)(t) - L(\dot{y})(t) = \int_0^t [f(y(u), u) - f(\dot{y}(u), u)] du$$

$$\|L(y) - L(\dot{y})\| \leq c.k \|y - \dot{y}\|$$

Si on impose  $c < \min(a, 1/K)$ , on obtient que l'opérateur  $L$  est une contraction. Il possède donc un unique point fixe dans l'espace fonctionnel  $C^0([-a, a])$ . Cet unique point fixe est une fonction continue qui est solution de l'équation différentielle et ceci démontre l'existence et l'unicité cherchée.

Un cas particulier important pour les applications est celui où  $f$  est supposée différentiable. Dans ce cas, le théorème des accroissements finis démontre que  $f$  satisfait une condition de Lipschitz locale. ■

**Théorème 4** (le lemme de Gronwall)

$\phi(t)$  une fonction continue, à valeurs positives définie sur un intervalle  $t_0 \leq t \leq t_0 + T$  qui satisfait une inégalité du type :

$$\phi(t) \leq \delta_1 \int_{t_0}^t \phi(s) ds + \delta_2(t - t_0) + \delta_3$$

Alors on peut majorer la fonction par :

$$\phi(t) \leq \left( \frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_2 \right) \exp[\delta_1(t - t_0)] + \frac{\delta_3}{\delta_1}$$

pour toute valeur de  $t$  comprise dans l'intervalle  $[t_0, t_0 + T]$ .

**Preuve.** On peut poser

$$\psi(t) = \phi(t) + \frac{\delta_2}{\delta_1}$$

et obtenir l'inégalité

$$\psi(t) \leq \delta_1 \int_{t_0}^t \psi(s) ds + \frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3$$

Ceci donne donc l'inégalité

$$\frac{\delta_1 \psi(t)}{\int_{t_0}^t \psi(s) ds + \frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3} \leq \delta_1$$

Puis par intégration

$$\log \left[ \delta_1 \int_{t_0}^t \psi(s) ds + \frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3 \right] - \log \left( \frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3 \right) \leq \delta_1 (t - t_0)$$

Ce qui donne

$$\delta_1 \int_{t_0}^t \psi(s) ds + \frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3 \leq \left( \frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3 \right) \exp(\delta_1(t - t_0))$$

Si on applique à nouveau l'inégalité initiale, il vient

$$\psi(t) \leq \left( \frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3 \right) \exp(\delta_1(t - t_0))$$

et en revenant à la fonction  $(t)$ , on obtient l'inégalité cherchée. ■

## 1.10 Théorème de Poincaré-Bendixon

Dans un espace des phases à deux dimensions, il est souvent possible de démontrer que les orbites d'un système non linéaire spiralent vers une courbe fermée ou cycle limite même si l'on ne sait résoudre ce système, ceci grâce au théorème suivant.

supposons qu'une orbite  $x(x_0, t)$  du système de deux équations :

$$\frac{dx}{dt} = f(x), x = (x_1, x_2)^T, f = (f_1, f_2) \quad (1.9)$$

Reste dans un domaine compact  $D \subset \mathbb{R}^2$  pour tout  $t \geq 0$ , alors :

- \* Ou bien  $x(x_0, t)$  est une solution périodique.
- \* Ou bien  $x(x_0, t)$  tend vers solution périodique.
- \* Ou bien  $x(x_0, t)$  tend vers un point fixe.

**Théorème 5** (*Critère de Bendixson*)

Si dans un domaine simplement connexe  $D \in \mathbb{R}^2$ ,  $\text{div } f$  n'est pas identiquement nulle et ne change pas de signe, alors le système dynamique n'a pas d'orbite périodique contenue dans  $D$ .

$$\text{div } f \equiv \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

**Preuve.** Soit  $T, x = x(t), 0 \leq t \leq T$ , une orbite périodique de période  $T$  contenue entièrement dans  $D$ . Si  $S$  désigne l'intérieur de  $T$ , on a d'après le théorème de Green :

$$\begin{aligned} \int \int_s \text{Div } f \, dx_1 dx_2 &= \oint_T (f_1 dx_2 - f_2 dx_1) \\ &= \int_0^T (f_1 \dot{x}_2 - f_2 \dot{x}_1) dt \\ &= \int_0^T (f_1 f_2 - f_2 f_1) dt = 0. \end{aligned}$$

Si  $\text{div } f$  n'est pas identiquement nulle et ne change pas de signe alors l'intégrale double précédente est soit positive soit négative, d'où la contradiction. ■

## 1.11 La fonction de Lyapunov

**Définition 6** Soit  $\dot{x}$  un point fixe du système. Soit  $V : W \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable définie sur un voisinage  $W$  de  $\dot{x}$

telle que  $V(\dot{x}) = 0$  et  $V(x) > 0$  si  $x \neq \dot{x}$ . Si :

$$\dot{v} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_j} \dot{x}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_j} f_j(x)$$

Si  $\dot{V} \leq 0$  dans  $W - \{\dot{x}\}$  alors  $\dot{x}$  est stable ( $V$  semi-définie négative).

Si  $\dot{V} < 0$  dans  $W - \{\dot{x}\}$  alors  $\dot{x}$  est asymptotiquement stable ( $V$  définie négative).

Si  $\dot{V} > 0$  dans  $W - \{\dot{x}\}$  alors  $\dot{x}$  est instable ( $V$  définie positive).

### Exemple 7

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + ax(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= -x + ay(x^2 + y^2)\end{aligned}$$

un point fixe unique  $(0, 0)$ . soit  $v = x^2 + y^2$ , alors :

$$\dot{v} = 2(x\dot{x} + y\dot{y}) = 2a(x^2 + y^2)^2$$

D'où, d'après le théorème de Lyapunov, si  $a < 0$  le point fixe à l'origine est asymptotiquement stable, si  $a = 0$ , le point est stable (ie : les trajectoires sont des cercles), si  $a > 0$ , le point est instable.

## 1.12 Attracteurs et attracteurs étranges

### 1.12.1 Attracteurs

**Définition 8** Soit  $A$  un ensemble compact, fermé, de l'espace des phases. On suppose  $A$  ensemble invariant par le flot :  $\phi_t(A) = A$  pour tout  $t$ .



$A$  est dit stable si pour tout voisinage  $U$  de  $A$ , il existe un voisinage  $V$  de  $A$  tel que toute solution  $X(X_0, t) = \phi_t(X_0)$

restera dans  $U$  si  $X_0 \in V$ . Si de plus :

$$\bigcap_{t \geq 0} \phi_t(V) = A$$

Et s'il existe une orbite dense dans  $A$ , alors  $A$  est un attracteur.

Lorsque  $A$  est un attracteur, l'ensemble :

$$W = \bigcup_{t < 0} \phi_t(V)$$

Est appelé bassin d'attraction. C'est l'ensemble des points dont les trajectoires asymptotiques convergent vers  $A$ .

L'attracteur le plus simple est un point fixe. Un deuxième type d'attracteur pour un champ de vecteurs est le cycle limite  $\varpi$  : c'est une trajectoire fermée qui attire toutes les orbites proches.

### 1.12.2 La fonction sphérique de Lorenz

Il n'est pas toujours possible de montrer que le système (1.5) possède une région d'attraction. Cependant, suivant un argument d'E.N.Lorenz, on peut le montrer pour un système de la forme :

$$\dot{x}_i = - \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j + \sum_{j,k=1}^n a_{ijk} x_j x_k + c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

où  $\sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j > 0$  (forme quadratique définie positive) et  $\sum_{i,j,k=1}^n a_{ijk} x_i x_j x_k \equiv 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $a_{ijk}$ ,  $b_{ij}$ , et  $c_i$  étant des constantes.

En effet, soit :

$$Q(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i \dot{x}_i$$

et soient  $e_1, e_2, \dots, e_n$  les racines du système linéaire :

$$\sum_{j=1}^n (b_{ij} + b_{ji}) x_j = c_i, \quad i = 1, \dots, n$$

on a alors :

$$\frac{dQ}{dt} = \sum_{i=1}^n x_i \dot{x}_i = \sum_{i,j=1}^n [b_{ij} e_i e_j - b_{ij} (x_i - e_i) (x_j - e_j)] \quad (1.10)$$

Le second membre de ( 1.10)s'annule seulement sur la surface d'un ellipsoïde  $E$  d'équation :

$$\sum_{i,j=1}^n b_{ij} (x_i - e_i) (x_j - e_j) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} e_i e_j$$

il est positif à l'intérieur de  $E$  et négatif à l'extérieur. Soit  $S$  une hyper sphère dont l'intérieur  $R_0$  contient ellipsoïde  $E$ , il est évident que toute trajectoire située à proximité de  $R_0$  sera attirée vers  $R_0$  .

### 1.12.3 Attracteurs étranges

Un autre type d'attracteur intéressant est l'attracteurs étranges. Cet attracteurs a été introduit par Ruelle et Takens. Les caractéristiques d'un attracteurs étranges sont :

- 1) Dans l'espace des phases, l'attracteurs est du volume nul.
- 2) La dimension  $d$  de attracteurs est fractale (non-entière) avec  $2 < d < n$ , où  $n$  est la dimension de l'espace de phases.
- 3) Sensibilité aux conditions initiales : deux trajectoires de attracteurs initialement voisines finissent toujours par s'écarter l'une de l'autre.

**Remarque 9** *Le système de Duffing ci-dessus est non-autonome. Le rendre autonome conduit à augmenter d'une unité la dimension de l'espace des phases.*

Il est souvent possible de montrer que le volume de l'espace des phases tend vers zéro, sans avoir à résoudre le système :

grâce le théorème suivant.

**Théorème 10** *(théorème de la Divergence) soient  $\phi_t$  le flot de ( 1.5) un volume de l'espace des phases au temps  $t = 0$ ;  $V(t) = \phi_t(V)$  l'image de  $V$  par  $\phi_t$  on a :*

$$\left. \frac{dV(t)}{dt} \right|_{t=0} = \int_V \text{Div } f \, dx_1 \cdots dx_n; \quad \text{Div } f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \quad (1.11)$$

**Preuve.** par définition

$$\phi_t(x) = \begin{bmatrix} u_1(x, t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n(x, t) \end{bmatrix}$$

où

$$u_i(x, t) = x_i + t f_i(x) + O(t^2) \quad i = 1, \dots, n$$

car  $\phi_t(x)$  est une solution de (1.5). On a, d'après la formule de changement de variables dans une intégrale multiple :

$$V(t) = \int_V \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| dx. \quad \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \equiv \det \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right]$$

on en déduit :

$$\frac{dV(t)}{dt} = \int_V \frac{d}{dt} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| dx.$$

comme

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \begin{cases} t \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + O(t^2) & \text{si } i \neq j, \\ 1 + t \frac{\partial f_i}{\partial x_i} & \text{si } i = j, \end{cases}$$

on en déduit :

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| = 1 + t \operatorname{Div} f + O(t^2) \tag{1.12}$$

d'où en dérivant (1.12) par rapport à  $t$  et en faisant  $t \rightarrow 0$ , on obtient (1.11)

en particulier si

$$\operatorname{Div} f = \mu = \text{Cte},$$

on a alors :

$$\frac{dV}{dt} = \mu \int_V dx = \mu V,$$

d'où

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \mu.$$

en intégrant, nous obtenons :

$$V(t) = V_0 \exp(\mu t), \quad V_0 = V(0)$$

qui tend vers zéro quand  $t \rightarrow +\infty$  et  $\mu < 0$ . ■

**Remarque 11** *Le système est dissipatif (resp. conservatif) si  $\frac{dV}{dt} < 0$  (resp.  $\frac{dV}{dt} = 0$ ). Dans le cas  $\mu = 0$  (système conservatif), le théorème 7 s'appelle théorème de Liouville.*

### 1.13 Systèmes chaotiques

Les systèmes chaotiques sont des systèmes dynamiques décrits par des fonctions de transition déterministes, mais qui peuvent exhiber des comportements imprévisibles, pouvant sembler aléatoires. En particulier, ils se caractérisent par une très grande sensibilité aux conditions initiales. Cependant, chaque condition initiale détermine entièrement l'évolution future et il n'y a pas de hasard qui intervient dans le processus. Néanmoins, deux conditions initiales très proches peuvent avoir des évolutions complètement différentes. L'évolution du système peut alors être considérée imprévisible car une erreur insignifiante au départ conduit à des résultats complètement différents au bout d'un certain temps. C'est le chaos déterministe.

Les études théoriques actuelles concernent plus particulièrement les dynamiques chaotiques des systèmes, décrits par des modèles continus et/ou discrets. L'approche adoptée est celle des méthodes qualitatives de la dynamique, c'est-à-dire l'identification de la structure de l'espace d'états (dit aussi de phases) et l'espace paramétrique des systèmes modélisés en vue de leur analyse et de leur synthèse. L'évolution des systèmes considérés dépend généralement de leurs paramètres, rendant nécessaire de s'intéresser aux phénomènes de bifurcation, c'est-à-dire aux changements de comportements qualitatifs d'un système sous l'effet de petites variations quantitatives de ses paramètres.

## Chapitre 2

# Exposants et dimension de Lyapunov

### 2.1 Exposants de Lyapunov

Certains systèmes dynamiques sont très sensibles aux petites variations de leur condition initiale, ces variations peuvent rapidement prendre d'énormes proportions. Le mathématicien Russe Alexander Lyapunov s'est penché sur ce phénomène et à développer une quantitative permettant de mesurer la vitesse à laquelle ces petites variations peuvent s'amplifier.

Cette quantité appelée "exposant de Lyapunov" mesure en fait le degré de sensibilité d'un système dynamique.

### 2.2 Calcul des exposants de Lyapunov

### 2.3 Exposants de Lyapunov d'une application mono-dimensionnelle

Considérons à nouveau l'application logistique :

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{2.1}$$

Nous avons vu au chapitre précédent que pour  $r \geq 4$  la trajectoire est devenue chaotique. L'exposants de Lyapunov  $\lambda(x_0)$  mesure cet écartement de la façon suivante.

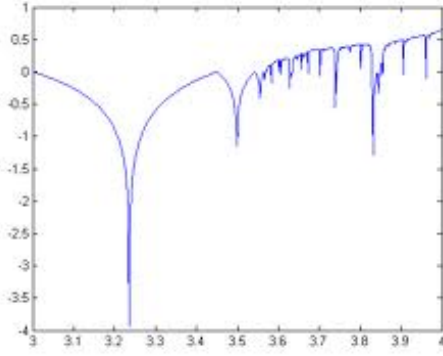


FIG. 2-1 – Application logistique : l'exposant de Lyapunov

Considérons deux points initiaux voisins  $x_0$  et  $x_0 + e$ . Après  $n$  itérations, l'exposant de Lyapunov  $\lambda(x_0)$  est défini par l'équation :

$$\varepsilon \exp(n\lambda(x_0)) = |f^n(x_0 + e) - f^n(x_0)|$$

A la limite  $e \rightarrow 0$  et  $n \rightarrow \infty$ , on obtient l'expression suivant pour  $\lambda$  :

$$\begin{aligned} \lambda(x_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{e \rightarrow 0} \frac{1}{n} \log \left| \frac{f^n(x_0 + e) - f^n(x_0)}{e} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left| \frac{df^n(x_0)}{dx} \right| \end{aligned} \quad (2.2)$$

Notons  $x_i = f^i(x_0)$  et rappelons que  $f^n(x_0) = f(f^{n-1}(x_0))$ , nous en déduire la règle de chaîne :

$$\frac{df^n(x_0)}{dx} = f'(x_{n-1})f'(x_{n-2}) \cdots f'(x_1)f'(x_0)$$

Par conséquent, l'équation (2.2) s'écrit :

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log |f'(x_i)| \quad (2.3)$$

## 2.4 Cas d'une application à $n$ dimensions

Considérons une application itérée  $n$  dimensions :

$$x_{k+1} = f(x_k), k = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

avec  $x_k \in \mathbb{R}^n, f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Soient  $J(x)$  la matrice jacobienne de  $f$ ;  $q_1(f^k(x)), \dots, q_n(f^k(x))$  les valeurs propres de  $J(f^k(x))$ , ordonnées dans l'ordre décroissant suivant leur module. Alors les  $n$  exposants de Lyapunov d'une orbite  $\{f^k(x)\}, k = 1, 2, 3, \dots, n$  sont définies par :

$$\lambda_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} \text{Log} |q_i(f^N(x))| \right). \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.5)$$

**Exemple 12** Calculons l'exposant de Lyapunov  $\lambda_k(x)$ , pour  $x \in [0, 1]$  et pour l'application  $f_k: x \mapsto kx(1-x)$  et diverses valeurs de  $k$ . La valeur de  $x_0$  n'est pas très importante, on prend comme valeur  $\bar{\lambda}_k = \int_0^1 \lambda_k(x) dx \simeq \frac{1}{m} \sum_{1 \leq l \leq m} x_l$ . Avec  $n = 200$  valeurs pour la somme (3.4) et avec une dizaine de valeurs de  $x$  pour calculer la moyenne des  $\lambda_k(x)$ , on obtient

$k$	3.8	3.84	3.842
$\bar{\lambda}_k$	0.42	0.01	0.03

Voici le code de la fonction qui calcule l'exposant de Lyapunov pour un  $x$  donné en utilisant la formule (2.3)

```

function l=lyapunov(x0, f, df, n)
//calcul exposant lyapunov(x0) connaissant f et f' = df
x = x0;
l = 0;
for i = 1 :n do,
x = f(x);
l = l + log(abs(df(x)));
end
l = l/n
endfunction

```

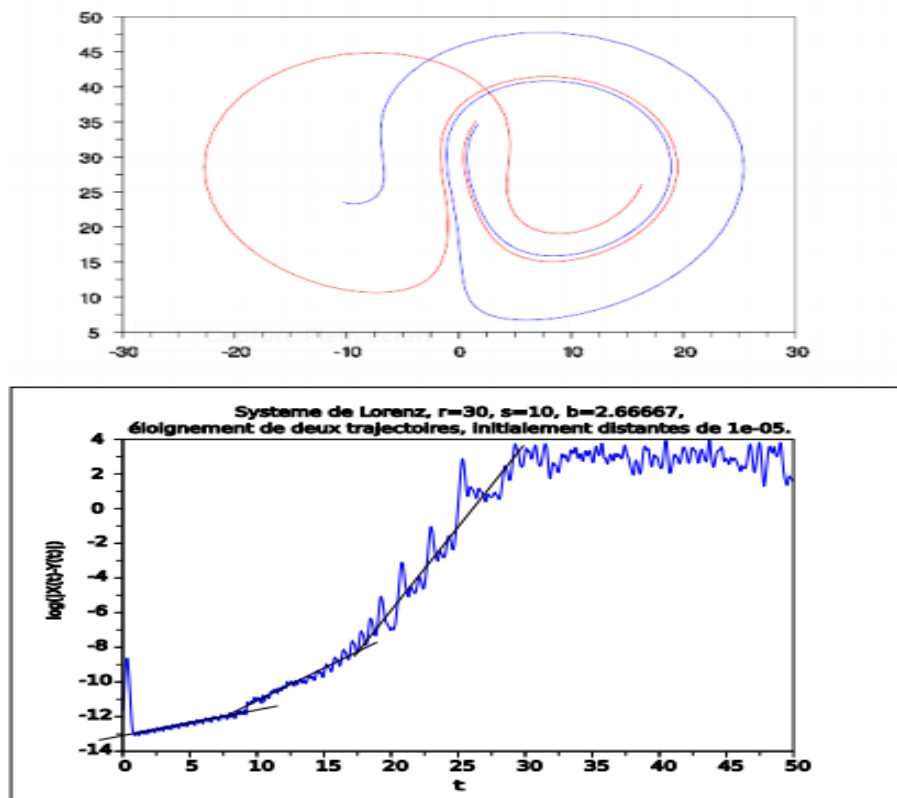


FIG. 2-2 – Attracteur de Lorenz,  $\sigma = 10$ ;  $b = \frac{8}{3}$  et  $r = 30$ , illustration de la SCI : (a) les deux trajectoires initialement proches  $\|X_0 - Y_0\| + 10^{-5}$  au bout d'un temps  $t = 25s$  et (b) le log de la distance entre ces trajectoires en fonction du temps  $\log(\|X(t) - Y(t)\|)$  sur la durée 50s



## 2.5 Méthodes de calcul des exposants de Lyapunov

Il existe plusieurs méthodes de calcul des exposants de Lyapunov tels que la méthode (QR), (HQR) et (HQRB). L'une des méthodes les plus utilisées est l'algorithme de Wolf. On considère un système discret à  $n$  dimensions :

$$x_{n+1} = f(x_n) \text{ avec } f(x) = rx(1-x), n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

Le  $i$ -ème exposant de Lyapunov est défini en fonction du taux de croissance du  $i$ -ème axe principale  $i$   $v$  par la formule :

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \log \frac{\|v_i(N)\|}{\|v_i(0)\|} \quad i = 1; 2; \dots; n \quad (2.7)$$

Les vecteurs  $v_i(k)$  sont transformés d'après la formule :

$$v_i(k+1) = j(k)v_i(k); i = 1; 2; \dots; n \quad (2.8)$$

Où  $J(k)$  est la de  $f$  au point  $x_k$ . La formule ( 2.7) peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \log \left( \frac{\|v_i(1)\|}{\|v_i(0)\|} \frac{\|v_i(2)\|}{\|v_i(1)\|} \dots \frac{\|v_i(N)\|}{\|v_i(N-1)\|} \right) \quad (2.9)$$

$Ak = 0$  les vecteurs  $v_i, i = 1, 2, \dots, n$  sont définis par :

$$\begin{aligned} v_1 &= (0, 0, 0, 0, \dots, 0) \\ v_2 &= (0, 1, 0, 0, \dots, 0) \\ &\dots \\ v_n &= (0, 0, 0, 0, \dots, 1) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Pour éviter la divergence, à chaque itération les vecteurs  $v_1(k), v_2(k), \dots, v_n(k)$  seront orthonormés par le procédé de Gram Schmidt :

$$\begin{aligned}
v_1' &= \frac{v_1}{\|v_1\|} \\
v_2' &= \frac{v_2 - (v_2, v_1') v_1'}{\|v_2 - (v_2, v_1') v_1'\|} \\
&\dots \\
v_n' &= \frac{v_n - (v_n, v_{n-1}') v_{n-1}' - \dots - v_n - (v_n, v_1') v_1'}{\|v_n - (v_n, v_{n-1}') v_{n-1}' - \dots - v_n - (v_n, v_1') v_1'\|}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

**Remarque 13** Dans les définitions des exposants de Lyapunov (formules (2.3), (2.13) ainsi que la formule (2.13) du paragraphe suivant), on peut remplacer  $\log$  par  $\log_2$ . Ce qui revient à remplacer, dans le raisonnement précédent,  $e^{\lambda_1 k}, e^{(\lambda_1 + \lambda_2)k}$ , définies différemment par un facteur  $\log_2$  et ceci n'a pas d'incidence sur le calcul de la dimension de Lyapunov définie plus loin.

**Exemple 14** prenons l'exemple de l'application de Hénon :

$$x_{k+1} = 1 - ax_k^2 + y_k, \quad y_{k+1} = bx_k$$

La Jacobienne  $J(K)$  s'écrit :

$$J(K) = \begin{pmatrix} 2ax_k & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

Le programme Turbo Pascal calcule les exposants de Lyapunov pour  $a = 1.4$  et  $b = 0.3$ . Le résultat est :

$$\lambda_1 = 0.604, \quad \lambda_2 = -2.341$$

A comparer avec les valeurs  $\lambda_1 = 0.603$ ,  $\lambda_2 = -2.3$ , données par Wolf.

## 2.6 Cas d'un système différentiel

Le calcul des exposants de Lyapunov du système d'équations différentielles :

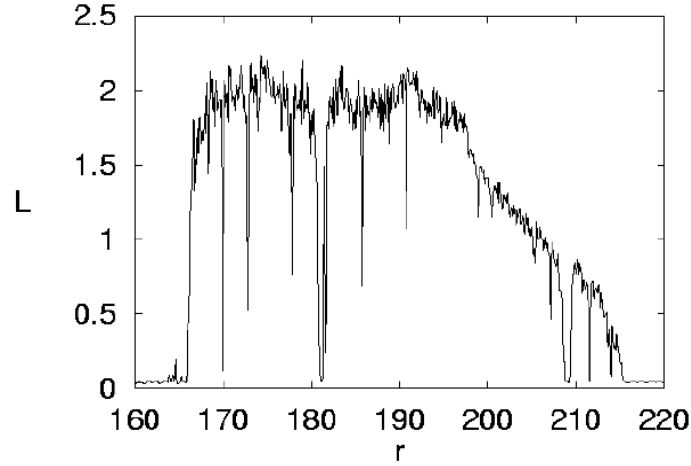


FIG. 2-3 – système de Lorenz : le plus grand exposant de lyapunov

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.12)$$

Se fait de façon analogue. Les équation (2.7) et (2.8) seront remplacées

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \frac{\|v_i(t)\|}{\|v_i(t_0)\|} \quad i = 1; 2; \dots; n \quad (2.13)$$

$$\dot{v}_i(t) = j(x)v_i(t); i = 1; 2; \dots; n \quad (2.14)$$

respectivement (2.12) et (2.13) est un système de  $n + n^2$  équations à résoudre ensemble. A chaque pas de temps, les vecteurs  $v_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ , définis à  $t_0$  par (2.10), seront calculés par (2.14) et orthonormés par le procédé de Gram-Schmidt.

## 2.7 Cas d'une application unidimensionnelle

Soit une application discrète  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui applique  $x_t$  sur  $x_{t+1}$ . Choisissons deux conditions initiales très proches, soit  $x_0$  et  $x_0 + \varepsilon$  et regardons comment se comportent les tra-

jectoires qui en soit issues. Supposons qu'elles s'écartent en moyenne à un rythme exponentiel. On pourra alors trouver un réel  $\lambda$  tel qu'après  $t$  itérations :

$$|f^t(x_0 + \varepsilon) - f^t(x_0)| = \varepsilon \exp \lambda t$$

En passant au logarithme, on trouve :

$$\ln \left| \frac{f^t(x_0 + \varepsilon) - f^t(x_0)}{\varepsilon} \right| = t\lambda$$

Si l'on fait tendre  $\varepsilon$  vers 0, il vient :

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln \left| \frac{d^t f(x_0)}{dx_0} \right|$$

Finalement, en faisant tendre  $t$  vers l'infini et en utilisant la règle de dérivation en chaine, on obtient :

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} \ln |f'(X_i)|$$

Moyennant la notation :

$$f'(X_i) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{X=X_0}$$

$\lambda$  est appelé exposant de Lyapunov. Si ce nombre est positif, il y a élongation et sensibilité aux condition initiales. Si, par contre, il est négatif, on perd de l'information sur les conditions initiales : les trajectoires se rapprochent.

## 2.8 Utilisation au calcul de dimension de l'attracteur

On remarque qu'il y a un lien, entre les exposants de Lyapunov et la dimension de l'attracteur, comme nous l'avons mentionné précédemment si tous les exposants sont positifs la sphère de conditions initiales va remplir tout l'espace, mais s'ils sont tous négatifs la sphère va se contracter en un point.

### 2.8.1 Dimension de Mori

Soient  $m_0$  le nombre des exposants de Lyapunov qui sont nuls,  $m_+$  le nombre d'exposants positifs,  $\bar{\lambda}_+$  la moyenne des exposants positifs et  $\bar{\lambda}_-$  celle des exposants négatifs.

La dimension de Mori est donnée par la relation suivante :

$$D_{M_0} = m_0 + m_+ \left( 1 + \frac{\bar{\lambda}_+}{|\bar{\lambda}_-|} \right)$$

### 2.8.2 Formule de Kaplan-Yorkan et dimension de lyapunov

Considérons, dans l'espace des phases à deux dimensions, un carré  $C$  de côté  $L$ .

Supposons que le système posséd un exposant de Lyapunov  $\lambda_1 > 0$  et un exposant de Lyapunov  $\lambda_2 < 0$ .

Dans ce cas, un direction sera rétrécie d'un facteur  $e^{\lambda_2 t}$  et l'autre direction sera allongée d'un facteur  $e^{\lambda_1 t}$ . L'aire de  $C$  varie comme  $C(t) = C e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}$  (). Soit  $N(t)$  le nombre de côté :

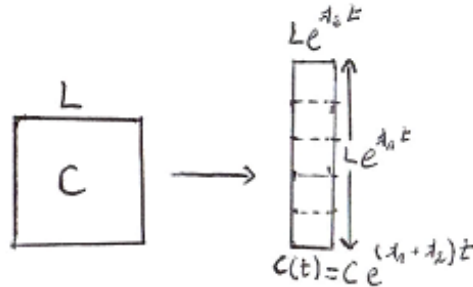


FIG. 2-4 – exposant de Lyapunov

$$e(t) = L e^{\lambda_2 t}$$

qui recouvrent  $C(t)$ . On a :

$$N(t) = \frac{C(t)}{e^2(t)} = \frac{C e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}}{C e^{2\lambda_2 t}}$$

On définit la dimension de Lyapunov  $d_L$ , par analogie avec la dimension de capacité, comme :

$$d_L = - \lim_{e \rightarrow 0} \left[ \frac{\log(N(e))}{\log(e(t))} \right] \quad (2.15)$$

On en déduit :

$$d_L = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad (2.16)$$

# Conclusion Générale

Dans ce mémoire nous avons étudié les méthodes de Calcul de l'exposant de Lyapunov que sont utilisé dans l'étude qualitative des systèmes dynamiques. Ce mémoire est constitué à deux chapitres ; dans le premier chapitre on présente les propriétés et définitions de système dynamique, et le deuxième chapitre définir les méthodes de calcul d'exposant de Lyapunov.

# Bibliographie

- [1] H. Dang-Vu et C. Delcarte, "Bifurcation et Chaos," Ellipses, Paris, 2000.
- [2] I. Ameer "Controle,chaotification et hyperchaotification des système dynamique." Thèse de magistère, Université de Constantine, 2007.
- [3] G. Kaddoum, " Contributions à l'amélioration des systèmes de communication multi-utilisateurs par Chaos : synchronisation et analyse des performances." Thèse de doctorat de l'Université de Toulouse, 2008.
- [4] Jean-Louis Pac, "Systèmes dynamiques, Cours et exercices corrigés" ; [www.dunod.com](http://www.dunod.com)
- [5] J. C. Sprott, [http ://sprott.physics.wisc.edu/chaos/comchaos.htm](http://sprott.physics.wisc.edu/chaos/comchaos.htm)
- [6] P. Maneville, "Systèmes dynamiques et chaos," Ecole polytechnique, Palaiseau, 1999.
- [7] Paul Manneville "Dynamique non linéaire et chaos" Laboratoire d'hydrodynamique, Ecole Polytechnique 2005.
- [8] E. Jackson, "On the control of complex dynamic systems," phys.
- [9] L. Chen and G. Chen, "Fuzzy predictive control of uncertain chaotic systems using time series," International Journal of Bifurcation and Chaos.
- [10] H. Alexandre, "Le chaos en finance. Deux mesure de l'exposant de Lyapunov comme signal de chaos à la bourse de Paris". Journal de la société statistique de Paris. <[http ://www.numdam.org/item?id=JSFS\\_1994\\_\\_135\\_3\\_35\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1994__135_3_35_0)>