الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية

Année universitaire 2010-2011

الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Minstère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

---

CENTRE UNIVERSITAIRE DE MILA
INSTITUT DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

Réf. ***/11***

Mémoire de fin d'étude
Présenté pour l'obtention du diplôme de

Licence Académique

Domaine : **Mathématiques et Informatique**
Filière : **Mathématiques**
Spécialité : **Mathématiques Fondamentales**

<u>Thème</u>

LES OPERATEURS NON BORNES DANS UN ESPACE DE HIBERT

Présenté par :
ATMA Manal
FRAHTA Meriem

Dirigé par :
LAIDOUN Karima

Année universitaire 2010-2011

Table des matières

Introduction Générale **2**

1 Espace de Hilbert **3**
- 1.1 Introduction 3
- 1.2 Produit scalaire 3
- 1.3 Projection orthogonale 4

2 opérateurs non bornés dans un espace de Hilbert **7**
- 2.1 Opérateurs non bornés : définition et propriétés élémentaires 7
- 2.2 Domaine, graphe et fermeture 8
- 2.3 Adjoint 10
- 2.4 opérateur symétriques et auto-adjoints 10
- 2.5 Formes quadratiques et extension de Friedrichs 14
- 2.6 Théorème spectral et calcul fonctionnel 18

Conclusion Générale **20**

Bibliographie **20**

Introduction Générale

.

Beaucoup de questions en sciences exactes ou appliquées armement à des problèmes de résolution d'équations différentielles. Résoudre ces équations revient dans la plupart du temps à inverser des applications définies sur un espace fonctionnel adéquat lorsque ces équation sons linéaires, on les appelle opérateurs linéaires.
L'objet de cette mémoire est d'étudier les opérateurs non bornés dans un espace de Hilbert. Pour cette raison, on a travaille sur deux chapitres :
chapitre1 :Espace de Hilbert.
Dans ce chapitre on donne quelques propriétés des espaces Hilbertiennes, et compris l'existence de la projection orthogonale, ensuite on donne les caractérisations des bases Hilbertiennes.
Chapitre2 : On étude dans ce chapitre les opérateur non bornés dans un espace de Hilbert (définitions et propriétés).

Chapitre 1

Espace de Hilbert

1.1 Introduction

Les espaces de Hilbert sont des espaces vectoriels sur les quels on défini non seulement une norme complet mais aussi une notion d'angle donc d'orthogonalité ce sont les espaces qui se rapprochent le plus des espaces Euclidiens de dimension finie on comprend donc à quel point ils sont importants en analyse.

1.2 Produit scalaire

Définition 1.1 *:*
On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel réel E (espace complexe), une application f de $E \times E$
dans $\mathbb{R}$ (resp $\mathbb{C}$) qui possède les propriétés suivantes :

$$f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y).$$

$$f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$$

$$f(y, x) = \overline{f(x, y)}.$$

$$f(x, x) \geq 0.$$

$$f(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Où x, x' et y sont des élément quelconques de E et λ un élément
quelconque dans $\mathbb{R}$ (resp $\mathbb{C}$), On déduit immédiatement de cette définition les propriétés suivantes :
$f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y')$

$f(x,\lambda y)=\lambda f(x,y)$
Si l'espace vectoriel E est réel l'application f est une forme bilinéaire symétrique,si E est complexe,f semi_linéaire en x et linéaire en y,on dit alors que la forme f est ses qui linéaire et $\forall x,y\in E$

$$f(x,y)=\frac{1}{4}\left(f(x+y,x+y)-if(x+iy,x+iy)-f(x-y,x-y)+if(x-iy,x-iy)\right)$$

Remarque 1.2 *:*
Dans ce travail $f(x,y)$ qu'on appelle produit scalaire de x et de y sera notée $\langle x,y\rangle$.
L'application : $x\longrightarrow\sqrt{\langle x,x\rangle}$ satisfait aux axiomes de la norme on posera donc :

$$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}.$$

Définition 1.3 *:*
1.Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et de la norme associée à ce produit scalaire est dit préhilbertien.
2.Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet.

Exemple 1.4 *:*
(i) L'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire :$\langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k$ est un espace de Hilbert réel.
(ii) L'espace $\mathbb{C}^n$ muni de produit hermitien $\langle z,z'\rangle=\sum_{k=1}^{n}z_kz'_k$ est un espace de Hilbert complexe.
(iii) Pour toute partie borélienne A de $\mathbb{R}^n$, l'ensemble de classe d'équivalence(pour la relation l'égalité presque par tout) de fonction mesurables sur A à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de module au carré intégrable muni de produit scalaire $\langle f,g\rangle=\int_A f(x)\overline{g}(x)dx$ est un espace de Hilbert.
(iiii) L'ensemble $L^2(\mathbb{N})$ des suits réels ou complexe de carrés sommables muni du produit scalaire.

Remarque 1.5 *:*
$\langle (U_n),(V_n)\rangle=\sum_{i=0}^{\infty}U_n\overline{V_n}$ *est un espace de Hilbert.*

1.3 Projection orthogonale

Définition 1.6 *:*
Soit V une sous espace complet d'un espace préhilbertien $(E,\langle,\rangle)$ alors il existe une application : $p:E\longrightarrow V$ associant à tout point $x_0=p(x)$ réalisant la distance minimale x

à V et caractérisé par : $\forall z \in V$: $\mathrm{Re}\,(x - x_0, z) = 0$.
L'application P est appeler projection orthogonale de E sur V elle est continue de norme $\|p\| = 1$ en effet pour tout $x \in E$ On a : $\|x\|^2 = \|x - x_0\|^2 + \|x_0\|^2$.
Donc $\|p(x)\| \leq \|x\|$ et comme pouvant l'identité sur V. On a :$\|p\| = 1$.

Théorème 1.7 *:*
Inégalité de cauchy_shawartz seul que soient les vecteurs x et y appartenant à un espace préhilbertien E. On a :$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \|y\|$

Preuve.
Quelque soit le scalaire (réel ou complexe) λ on a : $\langle x + \lambda y; x + \lambda y\rangle \geq 0$ c'est_à_dire :

$$\|x\|^2 + \lambda \langle x; y\rangle + \overline{\lambda} \langle x; y\rangle + \lambda\overline{\lambda} \|y\|^2 \geq 0$$

Si $\|y\| \neq 0$, on peut choisir : $\lambda = -\frac{\overline{\langle x,y\rangle}}{\|y\|2}$ et on en déduit le résultat cherché. Si $\|y\| = 0$ et $\|x\| \neq 0$ on considère l'inégalité : $\langle \lambda x + y, \lambda x + y\rangle \geq 0$. On choisit :$\lambda = -\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|^2}$ et on déduit $|\langle x, y\rangle|^2 = 0$.
En fin :si $\|x\| = 0$ et $\|y\| = 0$ on considère l'inégalité :$\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle \geq 0$. On choisit $\lambda = \langle \overline{x, y}\rangle$ et on en déduit : $|\langle x, y\rangle|^2 = 0$ l'inégalité ainsietablie dans tous les cas. ■

Définition 1.8 *:*
Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace préhilbertienne soit $\Sigma = (e_i)_{i\in I}$ (I une partie dénombrable) le systéme de vecteur dans E on dira que Σ est orthogonale si on a :
$\langle e_i, e_j\rangle = 0$ pour $i \neq j$ orthonormée (ou orthonormale) si pour tout i et tout j dans I on a : $\langle e_i, e_j\rangle = \left\{\begin{smallmatrix} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ si } i\neq j \end{smallmatrix}\right.$

Théorème 1.9 ***:(Inégalité de Bassel)***
Soient E un espace préhilbertienne (e_n) un système orthogonale de vecteur quelconque appartenant à E on a :

$$\sum_n |\langle e_n, x\rangle|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Définition 1.10 ***:(Base de hilbertienne)***
Un système orthogonal (e_n) de vecteurs d'un espace préhilbertienne E est dit complet ou topolpgiquement total si l'ensemble des combinaisons linéaires finies des vecteurs des système orthonormale (e_n) est par tout dense dans E,un système orthonormale complet et encore appelée une base Hilbertienne.

Théorème 1.11 ***:(Egalité de parseval)***
Soit (e_n) un système orthogonale de vecteurs de l'espace préhilbertienne E,pour que ce système constitue une base Hilbertienne il faut et il suffit que pour toute élément de X de E, on dit : $\|x\|^2 = \sum |\langle e_n, X\rangle|^2$.

Preuve. :

Si on suppose que le système (e_n) est totale pour toute $\varepsilon \succ 0$ il existe une combinais ou linéaire finie : $\sum\limits_{i\in I}\lambda_i e$ telle que : $\left\| X - \sum\limits_{i\in I}\lambda_i e_i \right\|^2 \leq \varepsilon$ or $\|X\|^2 - \sum\limits_{i\in I}|\langle e_{i,X}\rangle|^2 \leq \|X - \sum \lambda_i e_i\|^2$. Donc $\|X\|^2 \leq \sum\limits_{i\in I}|\langle e_{i,X}\rangle|^2 + \varepsilon$. ε pouvant être aussi petit qu'on vais ou en déduit : $\|X\|^2 \leq \sum\limits_{i\in I}|\langle e_{i,X}\rangle|^2$ et compte tenu de l'inégalité de Bassel,on contient l'égalité de parseval la condition est donc nécessaire : Si on suppose inversement que l'égalité de parseval est satisfaite pour toute X appartenant à E quelque soit $\varepsilon \succ 0$,il existe une partie finie I de l'ensemble des indices telle que :

$$\|X\|^2 - \sum_{i\in I}|\langle e_{i,X}\rangle|^2 \leq \varepsilon$$

Or $\|X\|^2 - \sum\limits_{i\in I}|\langle e_{i,X}\rangle|^2 = \left\| X - \sum\limits_{i\in I}\langle e_{i,X}\rangle e_i \right\|^2$ Donc $\left\| X - \sum\limits_{i\in I}\langle e_{i,X}\rangle e_i \right\| \leq \varepsilon$.Ce qui signifie que X appartient à l'adhérence du sous_espace engendré par les vecteurs e_i $(i \in I)$ la condition est donc suffisante. ■

Corollaire 1.12 *:*
Si (e_n) est une base Hilbertienne de l'espace préhilbertienne E et si X appartient à E la série $\sum \langle e_{n,X}\rangle e_n$ est convergent et de somme X.

Preuve. *:*
$\forall \varepsilon \succ 0$ en vertu de l'égalité de parseval il existe une partie finie I_0 de l'ensemble des indices telle que :

$$\|x\|^2 - \sum_{i\in I_0}|\langle e_i, x\rangle|^2 \leq \varepsilon$$

Donc pour toute partie finie $I_0 \subset I$ on a :$\|x - \sum \langle e_i, x\rangle e_i\|^2 = \|x\|^2 - \sum\limits_{i\in I}|\langle e_i, x\rangle|^2 \leq \varepsilon$.Ce qui démontre que la série est convergente et que sa somme est égale à x il est donc parfaitement justifié d'écrire :

$$X = \sum_n \langle e_n, x\rangle e_n.$$

■

Chapitre 2

opérateurs non bornés dans un espace de Hilbert

2.1 Opérateurs non bornés : définition et propriétés élémentaires

Soit H un espace de Hilbert et A un opérateur dans H,c'est_à_dire,une application linéaire définie sur un espace vectoriel $D(A) \subset H$ à valeurs dans H dans la suit,on suppose que $D(A)$ est dense dans H.

Exemple 2.1 *:*
Soit $H = L^2(\mathbb{R})$ *et* $D(A) = \{u \in H : xu \in H\}$ *on définit* A *par* $(Au)(x) = xu(x)$ *pour* $u \in D(A)$.
Alors A *est un opérateur linéaire non borné avec un domaine de définition dense.Le graphe d'un opérateur* $A : D(A) \to H$ *est un sous_espace vectoriel dans* $H \times H$ *défini par* $\Gamma(A) = \{[u, f] \in H \times H : u \in D(A), f = Au\}$.
L'opérateur A *est dit fermée si* $\Gamma(A)$ *est fermée dans l'espace* $H \times H$ *muni du produit scalaire* $([u_1, u_2], [v_1, v_2]) = (u_1, v_1) + (u_2, v_2)$*Et de la norme correspondante si* A_1 *est un autre opérateur dans* H *tel que* $\Gamma(A) \subset \Gamma(A_1)$*,alors* A_1 *est appelé extension de* A*.dans ce cas on écrit* $A \subset A_1$.
Il est claire que A_1*est une extension de* A *si et seulement si* $D(A) \subset D(A_1)$ *et* $Au = A_1u$ *pour* $u \in D(A)$*.L'opérateur* A *est dit fermable s'il existe une extension fermée de* A.

Proposition 2.2 *:*
Soit A *un opérateur fermable.alors il existe une extension* $\overline{A}$ *de* A *telle que* $\overline{A} \subset A_1$*pour toute autre extension fermée* A_1*.de plus* $\Gamma\left(\overline{A}\right) = \overline{\Gamma(A)}$.

Preuve. :
Soit A_1 une extension fermée de A.Alors $\Gamma(A_1) \supset \Gamma(A)$ et donc $\Gamma(A_1) \supset \overline{\Gamma(A)}$.
on conclut que $\overline{\Gamma(A)}$ ne contient pas des élément de la forme $[0, f]$ avec $f \neq 0$ on définit un opérateur B par $D(B) = \left\{ u \in H : \text{il existe } f \in H \text{ tel que } [u, f] \in \overline{\Gamma(A)} \right\}, Bu = f$, où f est l'unique vecteur tel que $[u, f] \in \overline{\Gamma(A)}$.
Il est évident que $\Gamma(B) = \overline{\Gamma(A)}$ et $\Gamma(B) \subset \Gamma(A_1)$ pour toute extension fermée A_1.Donc, $B = \overline{A}$.Dans la suite on appelle $\overline{A}$ la fermeture de A.Signalons qu'il existe des opérateurs qui ne sont pas fermables. ■

Définition 2.3 *:*
Soit A un opérateur fermé dans H.l'ensemble résolvant de A,noté $\rho(A)$ est constitué de tous les nombres $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que l'opérateur $\lambda I - A$ est une bijection de $D(A)$ sur H avec un inverse borné.Si $\lambda \in \rho(A)$, l'opérateur $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$ est appelé la résolvante de A au point λ.
Le complémentaire de $\rho(A)$ dans $\mathbb{C}$,noté $\sigma(A)$,s'appelle le spectre de A.Soit A un opérateur fermé dans un espace de Hilbert H alors $\rho(A)$ est un ensemble ouvert.

2.2 Domaine, graphe et fermeture

Soit H un espace de Hilbert.On rappelle que $H \oplus H$ est l'espace de Hilbert $H \times H$ muni du produit scalaire $\langle (x, y), (x', y') \rangle = \langle x, x' \rangle_H + \langle y, y' \rangle_H$.

Définition 2.4 *:*
Un opérateur dans H est une application linéaire A définie sur un sous-espace vectoriel $D(A) \subset H$.la valeurs dans H.$D(A)$ est appelé le domaine de l'opérateur.On note un opérateur par$(A, D(A))$ mais s'il n'y a pas ambiguité concernant son domaine on pourra noter simplement par A.On dit q'une opérateur $(A, D(A))$ dans H est borné si $D(A) = H$ et $A : H \to H$ est continue.

Définition 2.5 *:*
*1. **Le graphe** d'un opérateur $(A, D(A))$ est le sous-espace de $H \oplus H$ donné par :*

$$\Gamma(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset H \oplus H.$$

*2.On dit que $(S, D(S))$ est une **extension** de $(A, D(A))$ si $D(A) \subset D(S)$ et $Ax = Sx$ pour tout $x \in D(A)$, (Autrement dit $\Gamma(A) \subset \Gamma(S)$).*
*3. On dit que $(A, D(A))$ est **fermé** si son graphe $\Gamma(A)$ est un fermé de $H \oplus H$.*

Proposition 2.6 *:*
Un opérateur $(A, D(A))$ est fermé si et seulement si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de $D(A)$ telle que $\lim_n x_n = x$ et $\lim_n Ax_n = y$ ona alors $x \in D(A)$ et $y = Ax$.

Lemme 2.7 *:*
Un sous-espace G de $H \oplus H$ est le graphe d'un opérateur si et seulement si :

$$((0, y) \in G \Rightarrow y = 0). \tag{2.1}$$

Preuve. :
Si la propriété (2.1) est vraie alors $(x, y_1) \in G$ et $(x, y_2) \in G$ implique que $y_1 = y_2$ donc l'application $A : p_1G \to H$ qui associe à $x \in p_1G$, l'unique $y \in H$ tel que $(x, y) \in G$ est bien définie et possède G comme son graphe. ■

Exemple 2.8 *:*
Si $D(A) = \left\{(x_n)_n \in l^2(\mathbb{N}) : \sum_{n=0}^{\infty} n^2 |x_n|^2 \prec \infty\right\}, A : D(A) \to l^2(\mathbb{N})$ avec $(Ax_n)_n = (nx_n)_n$,alors $(A, D(A))$est un opérateur.

Proposition 2.9 *:*
*Soit $(A, D(A))$un opérateur fermé.Alors A est borné si et seulement si $D(A) = H$.On dit qu' un opérateur $(A, D(A))$ est **fermable** s'il possède une extension fermé.*
Tout opérateur fermable$(A, D(A))$ admet une plus petite extension fermé notée $\overline{A}$.De plus, on a :

$$\Gamma\left(\overline{A}\right) = \overline{\Gamma(A)}.$$

Preuve. :
Pour toute extension S fermée de A, il en existe au moins une, on a $\Gamma(A) \subset \Gamma(S)$ avec $\Gamma(S)$ une fermé de $H \oplus H$.D'où ona $\overline{\Gamma(A)} \subset \Gamma(S)$.De plus, par lemme précédent $\overline{\Gamma(A)}$ est le graphe d'un opérateur fermé, noté $\overline{A}$, puisque que $(0, y) \in \overline{\Gamma(A)} \subset \Gamma(S)$ implique que $y = 0$.En fin, il est claire $\overline{A}$ est la plus petite extension fermée de A puisque $\Gamma\left(\overline{A}\right) = \overline{\Gamma(A)} \subset \Gamma(S)$ pour toute extension fermée S de A.On remarque aussi que si $(A, D(A))$ est un opérateur fermable alors :

$$\overline{\Gamma(A)} = \underset{i \in I}{\cap} \Gamma(A_i),$$

Où $(A_i, D(A_i))_{i \in I}$ est la famille de toutes les extensions fermés de $(A, D(A))$ (il existe au moins une). ■

Définition 2.10 *:*
*On dit qu'un opérateur $(A, D(A))$ est **domaine dense** si $\overline{D(A)} = H$.*

2.3 Adjoint

Définition 2.11 *:*
L'adjoint d'un opérateur $(A, D(A))$ *à domaine est l'unique opérateur* A^**ayant pour domaine :*

$$D(A^*) = \{x \in H : y \in D(A) \to \langle x, Ay \rangle \ \ \textit{est continue}\}$$

Et vérifiant

$$\forall x \in D(A^*), \forall y \in D(A) \qquad \langle A^* x, y \rangle = \langle x, Ay \rangle .$$

Grâce à la densité de $D(A)$ *dans* H*, pour chaque* $x \in D(A^*)$*la forme linéaire* $y \to \langle x, Ay \rangle$ *s'étend à un unique élément de* H^**qu'on écrit par le théorème Riesz comme* $\langle A^* x, . \rangle_H$ *.on considère l'isométrie* $J : H \oplus H \to H \oplus H, J(x, y) = (-y, x)$*pour tout* $x, y \in H$*.En particulier, on a* $J^2(x, y) = -(x, y)$ *et si* E *est un sous-espace de* $H \oplus H$ *alors* $J\left(E^\perp\right) = J(E)^\perp$ *.*

Proposition 2.12 *:*
Soit $(A, D(A))$ *un opérateur à domaine dense.Alors*
(i) $\Gamma(A^*) = [J\Gamma(A)]^\perp$ *.*
(ii) $\overline{\Gamma(A)} = [J\Gamma(A^*)]^\perp$ *.*

Preuve. :
(i) on a

$$(x, y) \in \Gamma(A^*) \Longleftrightarrow (x, Az) = (y, z)\,; \forall z \in D(A)$$

$$\Longleftrightarrow \langle (x, y), (-Az, z) \rangle = 0, \forall z \in D(A)$$

$$\Longleftrightarrow (x, y) \in J\Gamma(A)^\perp .$$

(ii) on a

$$\overline{\Gamma(A)} = \left(\Gamma(A)^\perp\right)^\perp = \left(J^2\Gamma(A)^\perp\right)^\perp = \left(J[J\Gamma(A)]^\perp\right)^\perp = J\Gamma(A^*)^\perp .$$

■

2.4 opérateur symétriques et auto-adjoints

Définition 2.13 *:*
Soit A *un opérateur dans un espace de Hilbert* H*.On note* $D(A^*)$ *l'ensemble des vecteurs* $v \in H$ *pour lesquels il existe* $f \in H$ *tel que :*

$$(Au, v) = (u, f) \ \ \textit{pour tout}\ u \in D(A)$$

Pour tout $v \in D(A^*)$ on pose $A^*v = f$,où f désigne le vecteurs vérifiant (1) on appelle A^*l'opérateur adjoint de A.

Proposition 2.14 *:*
(i)-$u \in D(A^*)$ si et seulement si $|(Au, v)| \leq C\|v\|$ pour tout $u \in D(A)$.
(ii)-si $A \subset B$ alors $A^* \subset B^*$

Théorème 2.15 *:*
Soit A un opérateur dans H. Alors les propriétés suivantes ont lieu :
(a)-A^* est fermé.
(b)-A est fermable si et seulement si $D(A^*)$est dense ,et dans ce cas $\overline{A} = A^{**}$.
(c)-si A est fermable, Alors $\left(\overline{A}\right)^* = A^*$.

Preuve. :
On définit un opérateur unitaire $V : H \times H \to H \times H$ par $V[u, v] = [-v, u]$.Il est facile à vérifier que $V\left(E^{\perp}\right) = V(E)^{\perp}$ pour tout sous-espace $E \subset H \times H$.
la définition de l'opérateur adjoint implique que :

$$\Gamma(A^*) = V\Gamma(A)^{\perp} \tag{2.2}$$

Comme $V\Gamma(A)^{\perp}$ est toujours fermé,on conclut que A^* est fermé.
Supposons que $D(A^*)$ est dense.Alors

$$\overline{\Gamma(A)} = \left(\Gamma(A)^{\perp}\right)^{\perp} = \left(V^2\Gamma(A)^{\perp}\right)^{\perp} = (V\Gamma(A^*))^{\perp} = \Gamma(A^{**}) \tag{2.3}$$

Où on a utilisé la relation (2.2).La proposition précédant implique que $\overline{A} = A^{**}$.Réciproquement,si $D(A^*)$ n'est pas dense dans H, alors il existe un vecteur $w \neq 0$ tel que $w \in D(A^*)^{\perp}$.
Dans ce cas $[w, 0] \in \Gamma(A^*)^{\perp}$, d'où on voit que $[0, w] \in V\Gamma(A^*)^{\perp}$.
La relation (2.3) montre maintenant que $[0, w] \in \overline{\Gamma(A)}$,et donc A n'est pas fermable.Si A est fermable,alors

$$A^* = \overline{A^*} = A^{***} = \left(\overline{A}\right)^*.$$

■

Définition 2.16 *:*
Un opérateur A dans un espace de Hilbert est dit symétrique si $A \subset A^*$,c'est-à-dire

$$D(A) \subset D(A^*), Au = A^*u \text{ pour } u \in D(A).$$

Il est claire que A est symétrique si et seulement si

$$(Au, v) = (u, Av) \text{ pour } u \in D(A).$$

un opérateur A est dit auto-adjoint si $A = A^*$.

Proposition 2.17 *:*
1-Si A est symétrique, alors A fermable et $A \subset A^{**} \subset A^*$.
2-Si A est fermé et symétrique,alors $A = A^{**} \subset A^*$.
3-Si A est auto-adjoint, alors $A = A^{**} = A^*$.

Théorème 2.18 *:*
soit A un opérateur symétrique dans H alors les propriétés suivantes sont équivalentes :
1-A est auto-adjoint.
2-A est fermé et $Ker\left(A^* \pm iI\right) = \{0\}$.
3-$\operatorname{Im}\left(A \pm iI\right) = H$.

Preuve. :
(1)$\Longrightarrow$(2)
Comme l'opérateur A est auto-adjoint, Il est fermé.Si $A(^*u = \pm iu$, alors $Au = \pm iu$ et $(Au, u) = \pm i\left(u, u\right)$.Comme (Au, u) est réel on conclut que $u = 0$.
(2) $\Longrightarrow$ (3)
Montrons d'abord que $\operatorname{Im}\left(A - i\right)$ est dense dans H supposons que $v \in \operatorname{Im}\left(A - i\right)^{\perp}$.Alors $((A - i)\,u, v) = 0$ pour toute $u \in D\left(A\right)$.Donc

$$(Au, v) = (u, -iv) \text{ pour tout } u \in D\left(A\right)$$

D'où on voit que $v \in D\left(A^*\right)$ et $A^*v = -iv$.Comme $Ker\left(A^* + i\right) = \{0\}$, on conclut que $v = 0$.Montrons maintenant que $\operatorname{Im}\left(A - i\right)$ est fermé.Soit $\{u_n\} \subset D\left(A\right)$ une suite telle que $(A - i)\,u_n \longrightarrow g$.On veut montrer que $g \in \operatorname{Im}\left(A - i\right)$.Comme

$$\left\|(A - i)\,u\right\|^2 = \left\|Au\right\|^2 + \left\|u\right\|^2$$

On voit que la suite $\{u_n\}$ converge vers un élément u et Au_n converge $g+iu$.On utilisant le fait que A est fermé, on conclut que $u \in D\left(A\right)$ et $Au = g+iu$.Donc $(A - i)\,u = g$.L'espace vectoriel Im$(A - i)$.étant dense et fermé,il est confondu avec H.La démonstration de la relation $\operatorname{Im}\left(A + i\right) = H$ est analogue.
(3)$\Rightarrow$(1)
Il faut montrer que $D\left(A^*\right) \subset D\left(A\right)$.Soit $u \in D\left(A^*\right)$.Alors il existe $v \in D\left(A\right)$ tel que $(A - i)\,v = (A^* - i)\,u$ comme $A \subset A^*$,on voit que :

$$(A^* - i)\,(u - v) = 0 \tag{2.4}$$

L'argument utilisé dans la démonstration l'implication (2) $\Rightarrow$ (3) montre que si $\operatorname{Im}(A+i)=H$,alors $Ker\,(A^{*}-i)=\{0\}$.
Il résulte de (2.4) que $u=v\in D(A)$.Donc $D(A^{*})\subset D(A)$.Et l'opérateur A est auto-adjoint. ■

Définition 2.19 *:*
Soit A un opérateur symétrique.On dit que A est essentiellement auto-adjoint si sa fermeture est auto-adjoint.

Corollaire 2.20 *:*
Soit A un opérateur symétrique dans H.Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :
1-A est essentiellement auto-adjoint.
2-$Ker\,(A^{*}\pm iI)=\{0\}$.
3-$\operatorname{Im}(A\pm iI)$ est dense dans H.

Exemple 2.21 *:*
Considérons un opérateur A dans $L^{2}(0,1)$ défini par :

$$D(a)=H_{0}^{1}(0,1),(Au)(x)=iu'(x).$$

Il est facile à voir que $A\subset A^{*}$.Calculons A^{*}.Montrons que d'abord que si $v\in L^{2}(0,1)$ et

$$\int_{0}^{1}\Psi'(x)\,\overline{v}(x)\,dx=0$$

Pour tout

$$\Psi\in C_{0}^{\infty}(0,1)\tag{2.5}$$

Alors $v\equiv const$.En effet,toute fonction $\varphi\in C_{0}^{\infty}(0,1)$ est représentable sous la forme :

$$\varphi(x)=\Psi'(x)+\left(\int_{0}^{1}\varphi(y)\,dy\right)\varphi_{0}(x)$$

Où $\varphi_{0}\in C_{0}^{\infty}(0,1)$ est une fonctiontelle que $\int_{0}^{1}\varphi_{0}dx=0$.Il résult de (2.5) que

$$\int_{0}^{1}\varphi\overline{v}dx=\int_{0}^{1}\Psi'\overline{v}dx+\int_{0}^{1}\varphi dy\int_{0}^{1}\varphi_{0}\overline{v}dx=c\int_{0}^{1}\varphi dy$$

Où $c=\int_{0}^{1}\varphi_{0}\overline{v}dx$.Comme (2.6) est vrai pour toute fonction $\varphi\in C_{0}^{\infty}(0,1)$,on conclut que $v\equiv\overline{c}$.Supposons maintenant que $v\in D(A^{*})$.Alors il existe $f\in L^{2}(0,1)$ tel que

$$\int_{0}^{1}i\varphi'\overline{v}dx=\int_{0}^{1}\varphi\overline{f}dx\text{ pour tout }\varphi\in C_{0}^{\infty}(0,1)$$

En intégrant par parties,On obtient

$$\int_0^1 i\varphi' \left(i\overline{v} + \int_0^x \overline{f}(y)\, dy \right) dx = 0 \textit{ pour tout } \varphi \in C_0^\infty(0,1)$$

D'où on conclut que

$$v(x) = -i \int_0^x f(y)\, dy + C$$

Donc, Si $v \in L^2(0,1)$ *et* $A^* v = iv'$*.Réciproquement,si* $v \in H^1(0,1)$ *,Alors :*

$$\int_0^1 i\grave{u}\overline{v} dx = -\int_0^1 iu\overline{v}' dx = \int_0^1 u\overline{iv'} dx$$

Ainsi on a montré que $D(A^*) = H^1(0,1)$ *et* $A^* v = iv'$*.L'opérateur* A *est fermé et donc n'est pas essentiellement auto-adjoint.Y-a-t-il des extensions auto-adjointes de* A*.*

2.5 Formes quadratiques et extension de Friedrichs

Soit $D \subset H$ un sous-espace vectoriel dense et$Q : D \times D \to \mathbb{C}$ une fonction Hermitienne, c'est-à-dire,

$$Q(\alpha u + \beta v, w) = \alpha Q(u,w) + \beta Q(v,w) \text{ pour tous } u,v,w \in D,\ \alpha,\beta \in \mathbb{C}$$

$$Q(u,v) = \overline{Q(v,u)} \text{ pour tous } u,v \in D$$

Dans ce cas, on dit que Q est une forme quadratique avec le domaine D et on note $Q(u) = Q(u,u)$.Si Q_1est une autre forme quadratique avec un domaine D_1 telle que

$$D \subset D_1, Q(u,v) = Q_1(u,v) \text{ pour tous } u,v \in D$$

Alors Q_1 est appelé une extension de Q.Dans ce cas, on écrit $Q \subset Q_1$

Définition 2.22 *:*
Une forme quadratique est dite semi-bornée inférieurement (on simplement semi-bornée) s'il existe une constante $M \succ 0$ *telle que :*

$$Q(u,u) \geq -M \|u\|^2 \textit{ pour tout } u \in D \tag{2.6}$$

Une forme quadratique semi-bornée Q *est dite fermée si l'espace* D *est complet par rapport* *à la norme*

$$\|u\|_Q = \left(Q\left(u\right) + \left(M+1\right)\|u\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Il est claire qu'une suite $\{u_n\} \subset D$ converge vers un élément $u \in D$ pour la norme $\|.\|_Q$ si et seulement si $u_{n\to}u$Dans H et $Q\left(u_n - u\right) \to 0$.

Remarque 2.23 *:*
Une forme quadratique semi-bornée Q est fermée si et seulement si elle vèrifie propriété suivant :
Soit $u \in H$ et $\{u_n\} \subset D$ une suite telle que

$$\|u_n - u\| \to 0, \quad Q\left(u_n - u_m\right) \to 0 \text{ quand } m, n \to \infty \tag{2.7}$$

Alors $u \in D$ et $Q\left(u_n - u\right) \to 0$.

Définition 2.24 *:*
La forme quadratique Q est dit formable s'il existe une extension(semi-bornée) fermée de Q.

Proposition 2.25 *:*
Soit Q une forme quadratique formable vérifiant l'inégalité (2.6).Alors il existe une extension fermée minimale de Q,et elle vérifie (2.6).

Preuve. :
Soit Q_1 une extension fermée de Q définie sur D_1.On note $\overline{D} \subset D_1$ l'adhérence de D pour la norme$\|.\|_{Q_1}$ et $\overline{Q}$ la restriction de Q_1 à'$\overline{D}$.
Par construction , un élément $u \in H$ appartient à $\overline{D}$ si et seulement si s'il existe une suite $\{u_n\} \subset D$ vérifiant (2.7) La remarque précidant implique que $\overline{Q}$ est fermée et que le domaine de définition de toute autre extension fermée contient $\overline{D}$.
Montrons que $\overline{Q}\left(u\right) \geq -M\|u\|^2$ pour tout $u \in \overline{D}$.En effet, soit $u \in \overline{D}$.Alors il existe une suite $\{u_n\} \subset D$ convergent ves u our la norme $\|.\|_{\overline{Q}}$.Comme

$$\|u_n - u\| \leq \|u_n - u\|_{\overline{Q}}, \left|\|u_n\|_{\overline{Q}} - \|u\|_{\overline{Q}}\right| \leq \|u_n - u\|_{\overline{Q}}$$

On voit que $\overline{Q}\left(u_n\right) = Q\left(u_n\right) \to \overline{Q}\left(u\right)$ quand $n \to \infty$.Il s'ensuit que

$$\overline{Q}\left(u\right) = \lim_{n\to\infty} Q\left(u_n\right) \geq -\lim_{n\to\infty} M\|u_n\|^2 = -M\|u\|^2.$$

La forme quadratique $\overline{Q}$ construite dans la proposition précidant s'appelle la fermeture de Q. ■

Exemple 2.26 *:*
Soit $H = L^2(\mathbb{R})$ *et* $D = C_0^\infty(\mathbb{R})$*.On définit* Q *par*

$$Q(u,v) = u(0)\overline{v}(0), \ u,v \in D.$$

Alors Q *est une forme quadratique semi-bornée, mais* Q *n'est pas fermable.En effet, soit* Q^* *une extension fermée de* Q *et* $\{u_n\} \subset D$ *une suite telle que :*

$$u_n \to 0 \text{ dans } H, \quad u_n(0) = 1 \text{ pour tout } n \geq 1.$$

La remarque (32) implique que la suite $\{Q^*(u_n)\}$ *doit converge vers* $Q^*(0) = 0$*.Comme ce n'est pas le cas, on conclut qu'il n'existe pas d'extension fermée de* Q*.*
Chaque opérateur symétrique A *définit une forme quadratique :*

$$Q(u,v) = (Au,v), \ u,v \in D(A).$$

Proposition 2.27 *:*
Soit Q *une forme quadratique engendrée par un opèrateur symétrique* A *tel que :*

$$(Au,u) \geq -M\|u\|^2 \text{ pour tout } u \in D(A). \tag{2.8}$$

Alors Q *est fermable et sa fermeture vérifie (2.6).*

Preuve. :
Sans perte de généralité, on peut supposer que l'inégalité (2.8) est vérifiée avec $M = -1$.Dans ce cas, $\|u\|_Q = (Au,u)^{\frac{1}{2}}$ .Soit D_1 l'ensemble des vecteurs $u \in H$ pour lesquels il existe une suite $\{u_n\} \subset D(A)$ telle que :

$$\|u_n - u\| \to 0, \ \|u_n - u_m\|_Q \to 0 \text{ quand } m,n \to \infty \tag{2.9}$$

Il est clair que D_1 est une espace vectoriel.De plus, comme

$$\left| \|u_n\|_Q - \|u_m\|_Q \right| \leq \|u_n - u_m\|_Q$$

La suite $\|u_n\|_Q$ converge.Montrons que sa limite ne dépend que de l'élément u.
En effet, soient $\{u_n\}, \{v_n\} \subset D(A)$ deus suites vérifiant (2.9).On pose $w_n = u_n - v_n$.Alors :

$$\|w_n\| \to 0, \ \|w_n - w_m\|_Q \to 0 \text{ qand } m,n \to \infty. \tag{2.10}$$

Comme
$$\|w_n - w_m\|_Q^2 = \|w_n\|_Q^2 + \|w_m\|_Q^2 - 2\operatorname{Re}(Aw_m, w_n),$$
On voit que
$$\|w_n\|_Q^2 + \|w_m\|_Q^2 \leq \|w_n - w_m\|_Q^2 + 2\|Aw_n\|\|w_m\|. \tag{2.11}$$
Soit $\varepsilon \succ 0$ une constante quelconque et $m \geq 1$ une entier tellement grand que :

$$\|w_n - w_m\|_Q \leq \varepsilon \text{ pour } n \geq m. \tag{2.12}$$

Il rèsulte de $(2.10)-(2.12)$ que :

$$\limsup_{n\to\infty} \|w_n\|_Q^2 \leq \varepsilon + 2\|Aw_m\| \limsup_{n\to\infty} \|w_n\| \leq \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon \succ 0$ était arbitaire, on conclut que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_Q = \lim_{n\to\infty} \|v_n\|_Q.$$

Ainsi, $\|.\|_Q$ s'étend à D_1.De plus, si $u \in D_1$et $\{u_n\}$ est une suite vérifiant (2.9), alors

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_Q = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} \|u_n - u_m\|_Q = \lim_{n,m\to\infty} \|u_n - u_m\|_Q = 0.$$

On définit maintenant une forme quadratique sur D_1 par

$$Q_1(u) = \lim_{n\to\infty} Q(u_n) = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_Q^2,$$

Où $\{u_n\} \subset D$ est une suite vérifiant (2.9).Il est claire que Q_1 est une extension semi-bornée de Q telle que $Q_1(u) \geq \|u\|^2$ pour tout $u \in D_1$.Il nous reste à montrer que Q_1 est fermée.Soit $\{u_n\} \subset D_1$ une suite de cauchy par rapport à la norme $\|.\|_Q$.Alors il existe une suite $\{u_n\} \subset D$. Telle que

$$\|u_n - v_n\|_Q \leq 2^{-n} \text{ pour tout } n \geq 1. \tag{2.13}$$

Alors
$$\lim_{n,m\to\infty} \|v_n - v_m\|_Q \leq \lim_{n,m\to\infty} \left(2^{-m} + 2^{-n} + \|u_n - u_m\|_Q\right) = 0.$$
Donc, $\{v_n\}$ est une suite de cauchy pour les normes $\|.\|$et$\|.\|_Q$.comme H est complet, il existe $u \in H$ tel que $v_n \to u$.La définition de D_1 entraine que $u \in D_1$.Il s'en suite que $v_n \to u$ pour la norme $\|.\|_Q$ .L'inégalité (2.13) implique que $u_n \to u$ pour la norme $\|.\|_Q$, et donc D_1 est complet. ■

Théorème 2.28 *:*
Soit Q une forme quadratique fermée semi-bornée définie sur un domaine D.Alors il existe un unique opérateur auto-adjoint A tel que la fermeture de la forme (Au, v), $u, v \in D(A)$, est confondue avec Q.
Cet opérateur est donné par

$$D(A) = \{u \in D : \exists f \in H \text{ tel que } Q(u,v) = (f,v) \text{ pour tout } v \in D\}, \quad Au = f. \tag{2.14}$$

La proposition (38) et le théorème (39) permettent de construire une extension auto-adjoint pour toute opérateur symétrique semi-borné A.En effet, d'aprés la proposition (38), la forme quadratique définie par A est fermable.Soit Q_1 sa fermeture et A_1 L'opérateur auto-adjoint construit dans le théorème (39).Alors les relations (2.14) impliquent que $D(A) \subset D(A_1)$ et la restriction de A_1 au sous-espace $D(A)$ est confondue avec A.L'opérateur A_1 s'appelle l'extension de Friedrichs pour A.

2.6 Théorème spectral et calcul fonctionnel

Le résultat suivant est un analogue du théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints bornès dans le cas d'opérateurs non bornés.

Théorème 2.29 *:*
Soit A un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert H. Alors il existe un espace mesuré (M, β, μ), une isométrie $U : H \to L^2(M, \mu)$ et une fonction mesurable $a(m)$ tels que, pour tout $f \in L^2(M, \mu)$,

$$\left(UAU^{-1}f\right)(m) = a(m)\, f(m) \ \ \mu\text{-presque partout.}$$

Ce théorème permet de définir l'opérateur $f(A)$ pour tout fonction bornée mesurable.

Corollaire 2.30 *:'*
Soit A un opérateur auto-adjoint dans H et $\beta^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bornées mesurables.Alors il existe une application $\Phi : \beta^\infty(\mathbb{R}) \to \xi(H)$ avec les propriétés suivantes :
(i) Φ est un homomorphisme algébrique, c'est-à-dire,

$$\Phi(fg) = \Phi(f)\,\Phi(g), \quad \Phi(\lambda f + g) = \lambda\Phi(f) + \Phi(g),$$

$$\Phi(1) = I, \quad \Phi\left(\overline{f}\right) = \Phi(f)^*.$$

(ii) Φ *est continue au sens que*

$$\|\Phi(f)\|_{\xi(H)} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \text{ pour tout } f \in \beta^{\infty}(\mathbb{R}).$$

(iii) Si $f_n \in \beta^{\infty}(\mathbb{R}), f_n(x) \to x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et* $|f_n(x)| \leq |x|$, *alors :*

$$\Phi(f_n)\, u \to Au \text{ pour tout } u \in D(A).$$

(iv) Si $f_n, f \in \beta^{\infty}(\mathbb{R})$, $f_n(x) \to f(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et* $\sup_n \|f_n\|_{\infty} \prec \infty$, *Alors* $\Phi(f_n) \to \Phi(f)$ *pour la topologie fort.(v) Si* $Au = \lambda u$, *alors* $\Phi(f)\, u = f(\lambda)\, u$ *pour tout* $f \in \beta^{\infty}(\mathbb{R})$.
(vi) Si $f \geq 0$, *alors* $\Phi(f) \geq 0$, *c'est -à-dire,* $(\Phi(f)\, u, u) \geq 0$ *por tout* $u \in H$.

Conclusion Générale

1. walter - rudin "Analyse fonctionnelle " E dixienne international , paris 1995.
2. mémoir " opérateurs linéaires bornés dans un Hilbert " .