الجمهوريـــة الجزائـــريـــة الديمقراطيـــة الشعبيـــة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـــــم العالـــي والبحـــث العلمـــي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Ref :……

Centre Universitaire de Mila

Institut des sciences et de la technologie **Département de Mathématiques et Informatique**

Nombre de Stirling et séries de Catalan

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de licence en Mathématiques

Encadré par :Ahmed yahia rakia

Préparé par :

- **Basli Mehdi**
- **Belhous Hamza**
- **Boulaiche Daoud**

Filière : Mathématiques

Année universitaire :2012 /2013

REMERCIMENTS

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et ma gratitude à toutes les personnes qui m'ont apporté une aide pour la réalisation de ce travail de recherche. Principalement :

Ma directrice de recherche : Ahmed yahia Rakia, qui a guidé et suivi ce travail de près, sans jamais douter de son aboutissement.

Tous les enseignants chercheurs de la spécialité.

Mes collègues et amis.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

A mes chères parents, pour leur soutien, leur patience et leur amour

A ma chère grande mère

A mon Cher frère Anoir

A mon cher petit adorable Mondir

A mes chères soeurs

A tout ma grande famille

A mes fideles amis :

Kol , Hamza , Moussab ,Nabil et Daoud,Stam

A tous mes amis

Amon binôme Ahlam et tout sa famille

Mehdi

DEDICACE

Je dédicace notre travail au personne qu'il donne l'honneur et l'espoir à ma vie et qu'il fait le possible pour notre bonheur à mon support dans ma vie à mon père SAID .

Je le dédicace aussi à celle qui ma donne la tendresse à la source d'amour incessible la femme qui ma dirigé et ma bénie par sa prières et qui ne cesse pas de M'encourager A celle qui attend avec patience les résultats de ma éducation à ma mère ZAKIA.

A le bonheur de notre famille mon unique frère SAMIR et à tout ma grande famille à tout mes oncles.

A mes chéries amies: DAOUD,
MEHDI,RAMEZI,HAFSA ,NINA ,BICHA ,MANO,SALI, OUMAIMA

et tout mes collègues et mes amies sans exception et a fin à tout la promotion 2012-2013

H A M Z A

Table des matières

Introduction Générale

Dans ce mémoire on applique la relation des nombre de Stirling avec les séries de catalan en analyse combinatoire

Les nombres de Stirling apparaissent dans plusieurs problèmes combinatoires. Ils tirent leur nom de James Stirling, qui les a introduits au XVIIIe siècle. Il en existe deux sortes, nommés les nombres de Stirling de première espèce et les nombres de Stirling de seconde espèce.

Les nombres de Catalan forment une suite d'entiers naturels utilisée dans divers problèmes de dénombrement, impliquant souvent de façon récursive des objets définis. Ils sont nommés ainsi d'après le mathématicien belge Eugène Charles Catalan (1814-1894).

Dans ce mémoire nous exposons une introduction générale, deux chapitre et une conclusion générale sur les nombres de Stirling et série de catalan. Dans le premier chapitre nous exposons les nombres de Stirling : (les nombres de Stirling de première espèce et les nombres de Stirling de seconde espèce) . Dans le deuxième chapitre on commence l'étude des nombres de catalan.

Chapitre 1

Nombre de Stirling

Les **nombres de Stirling** apparaissent dans plusieurs problèmes combinatoires. Ils tirent leur nom de James Stirling, qui les a introduits au XVIIIe siècle. Il en existe deux sortes, nommés **les nombres de Stirling de première espèce** et les **nombres de Stirling de seconde espèce.**

Notation 1.0.1 *Diverses notations sont utilisées pour les nombres de Stirling, mais celles que l'on rencontre le plus souvent sont*
$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ *,pour les nombres de Stirling de première espèce, et* $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$ *,pour les nombres de Stirling de seconde espèce.*

1.1 Nombre de Stirling de première espèce

Définition 1.1.1 *En combinatoire,* ***les nombres de Stirling de première espèce*** *non signés comptent le nombre de permutations de n éléments se décomposant en k cycles disjoints. De manière plus générale, ces nombres sont les valeurs absolues* ***des nombres de Stirling de première*** *espèce(signés), qui sont les coefficients du développement de*

$$(x)_n = \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

où $(x)_n$ est la factorielle décroissante $(x)_n = x(x-1)(x-2)\ldots..(x-n+1)$.

On peut inverser la définition afin d'exprimer x^n comme une suite de factorielles croissantes :

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (x)_k$$

Des relations similaires lient les nombres de Stirling de première espèce aux polynômes de Bernoulli. Un grand nombre de relations liées aux nombres de Stirling cachent des relations similaires liées aux coefficients binomiaux. L'étude des relations entre ces deux nombres est le calcul ombra et est un domaine important de la théorie des suites de Scheffer.

Exemple 1.1.2 $s\,(0,0) = 1, S\,(1,0) = S\,(2,0) = ... = 0$

$s(1,1) = s(2,2) = \ldots = 1s(n,1)(-1)n - 1 = (n-1)!$

1.1.1 Table de valeurs

Voici une table donnant quelques valeurs des nombres de Stirling de première espèce de la même forme que le triangle de Pascal :

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	-1	1							
3	0	2	-3	1						
4	0	-6	11	-6	1					
5	0	24	-50	35	-10	1				
6	0	-120	274	-225	85	-15	1			
7	0	720	-1764	1624	-735	175	-21	1		
8	0	-5040	13068	-13132	6769	-1960	322	-28	1	
9	0	40320	-109584	118124	-67284	22449	-4536	546	-36	1

1.1.2 Relation de récurrence

Les nombres de Stirling de première espèce satisfont la relation de récurrence

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ K-1 \end{bmatrix} - n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

pour $1 \leq K \leq n-1$, avec les conditions initiales

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \text{ et } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

Ceci découle de la relation de récurrence des factorielles décroissantes :

$(x)_{n+1} = x\,(x)_n - n\,(x)_n$

1.1.3 Identités simples

Remarquons que

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (-1)^{n-1} (n-1)!$$

et

$$\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$$

et

$$\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = (-1)^{n} \binom{n}{2}$$

Il en existe d'autres, comme

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} &= (-1)^{n} (n-1)! H_{n-1} \\ \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} (-1)^{n-1} (n-1)! \left[(H_{n-1})^2 - H_{n-1}^{(2)} \right] \end{aligned}$$

où $H_n^{(m)}$ est un nombre harmonique généralisé.

1.1.4 Formules explicites

On peut montrer la relation suivante entre nombres de Stirling de première et seconde espèce :

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^{k} \binom{n-1+k}{n-m+k} \binom{2n-m}{n-m-k} \left\{ \begin{matrix} n-m+k \\ k \end{matrix} \right\},$$

d'où, utilisant la formule pour ces derniers qui sera donnée plus bas :

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n-m} \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^{2K-j}}{k!} \binom{n-1+k}{n-m+k} \binom{2n-m}{n-m-k} \binom{k}{j} j^{n-m+k},$$

ou encore, après simplifications :

$$\left[\begin{array}{c} n \\ m \end{array}\right] = \frac{(2n-m)!}{(m-1)!} \sum_{k=0}^{n-m} \frac{1}{(n+k)\,(n-m-k)!\,(n-m+k)!} \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j\, j^{n-m+k}}{j!\,(k-j)!}.$$

1.1.5 Fonction génératrice

Plusieurs identités peuvent être obtenues en manipulant la fonction génératrice

$$\begin{aligned}
(1+t)^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{x}{n} t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right] x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right] \\
&= \exp\left(x \ln(1+t)\right).
\end{aligned}$$

En particulier, l'ordre de la sommation peut être inversé ; on peut également prendre des dérivées, ou encore fixer t ou x,

1.1.6 Sommes finies

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right] = (-1)^n\, n!$$

1.1.7 Sommes infinies

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right] \frac{x^n}{n!} = \frac{(\ln(1+x))}{k!}$$

qui est valide pour $x \prec 1$.

1.1.8 Interprétation énumérative

La valeur absolue du nombre de Stirling de première espèce compte le nombre de permutations de n objets ayant exactement k cycles. Par exemple ; $\left[\begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array}\right] = 11$correspond au fait que le groupe symétrique S_4 possède trois permutations de la forme$(**)\,(**) \to 2$

cycles de longueur 2et huit permutations de la forme$(***) \rightarrow 1$ cycle de longueur 3 et 1 cycle de longueur 1.La valeur absolue du nombre de Stirling de première espèce compte aussi le nombre de permutations de n objets ayant exactement k records. Cette identité entre records et cycles résulte de la correspondance fondamentale de Foata. La forme produite de la série génératrice des nombres de Stirling de première espèce résulte de l'indépendance des termes du code de Lehmer d'une permutation, code très lié aux records d'une permutation. L'interprétation des nombres de Stirling en termes de nombre de records explique l'apparition des nombres de Stirling dans l'analyse de l'algorithme de recherche du maximum, qui est la première analyse d'algorithme traitée dans le livre fondateur de *Donald Knuth*, The art of computer programming.

1.2 Nombre de Stirling de seconde espèce

Définition 1.2.1 *Les nombres de* ***Stirling de seconde espèce*** $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ *comptent le nombre de relations d'équivalence ayant k classes d'équivalence définies sur un ensemble de n éléments, c'est-à-dire aussi le nombre de partitions en k sous-ensembles d'un ensemble de n objets. La somme*

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$$

est le $n^{\text{ème}}$ *nombre de Bell. Si nous posons*$(x)_n = x(x-1)(x-2)\ldots..(x-n+1)$.

(en particulier, $(x)_0 = 1$car il s'agit d'un produit vide) pour la factorielle décroissante, nous pouvons caractériser les nombres de Stirling de seconde espèce par

$$\sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (x)_k = x^n$$

si n=1,la seule partition de N (la « partition grossière ») est celle dont le seul bloc est N. Donc $S(1,1) = 1$.

Si $n = 2$, avec$N = \{a, b\}$, il y a deux partitions : $\{\{a\}, \{b\}\}$ et $\{a, b\}$. Donc :

$S(2,2) = S(2,1) = 1$

Si $n = 3$, $N = \{a, b, c\}$, on trouve les cinq partitions suivantes :

$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}, \{\{a\}, \{b, c\}\}, \{\{b\}, \{a, c\}\}, \{\{c\}, \{a, b\}\}, \{a, b, c\}$.

Donc :

$S(3,3) = 1S(3,2) = 3S(3,1) = 1$

Plus généralement, pour tout $n \geq 1$,$S(n,n) = 1$, qui correspond à la partition discrète de N, celle qui est constituée des n singletons (ou parties à un seul élément) de N. D'autre parts $S(n,1) = 1$, qui correspond à la partition grossière, dont le seul bloc est l'ensemble N lui-même..

Pour les partitions d'ensemble, une représentation graphique parfois commode est illustrée par la figure 1 où l'on a énuméré pour $N = \{a, b, c, d\}$, $n = 4$,les 15 partitions existantes selon leur nombre de blocs et selon la taille des blocs.

La donnée d'une partition de N équivaut à la donnée d'une relation d'équivalence sur N. Il suffit, pour définir la relation d'équivalence, de considérer que ses classes d'équivalence sont les blocs de la partition, et vice-versa. Etablissons maintenant une formule explicite, de rang pour ces nombres de Stirling de seconde espèce,

1.2.1 Table de valeurs

Voici quelques valeurs des nombres de Stirling de seconde espèce (suite $A008277$et suite $A008278$ de l'OEIS) :

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

1.2.2 Relation de récurrence

Ces nombres satisfont la relation de récurrence

$$\left\{ \begin{array}{c} n+1 \\ K \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right\} - k \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{c} n \\ 1 \end{array} \right\} = 1 et \left\{ \begin{array}{c} n \\ n \end{array} \right\} = 1$$

1.2.3 Identités simples

On a par exemple

$$\left\{ \begin{array}{c} n \\ n-1 \end{array} \right\} = \left(\begin{array}{c} n \\ 2 \end{array} \right)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{c} n \\ 2 \end{array} \right\} = 2^{n-1} - 1$$

1.2.4 Formule explicite

Les nombres de Stirling de seconde espèce sont donnés par la formule explicite

$$\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) j^n, 0^0 = 1$$

laquelle s'obtient en remarquens que le nombre de surjections (d'un ensemble de n éléments vers un ensemble de k éléments) peut se compter par la formule d'inclusion-exclusion : on compte toutes les applications moins celles n'atteignant pas un certain élément, plus celles n'atteignant pas deux éléments, moins...

1.2.5 Rapport avec la distribution de Poisson

Si x est une variable aléatoire suivant une distribution de Poisson avec une moyenne λ, alors son $n^{ème}$ moment est

$$E(X^n) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} \lambda^k$$

En particulier, le $n^{ème}$ moment d'une distribution de Poisson de moyenne 1 est précisément le nombre de partitions d'un ensemble de taille n, qui est le $n^{ème}$ nombre de Bell (formule de Dobinski).

1.2.6 Relation de réciprocité

Les nombres de Stirling de première et seconde espèce peuvent être considérés comme les inverses l'un de l'autre :

$$\sum_{n=0}^{\max\{j,k\}} \left[\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} k \\ n \end{array} \right\} = \delta_{jk}$$

et

$$\sum_{n=0}^{\max\{j,k\}} \left\{ \begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right\} \left[\begin{array}{c} k \\ n \end{array} \right] = \delta_{jk}$$

δ_{jk} est le symbole de Kronecker.

Chapitre 2

Nombre de catalan

Les nombres de Catalan forment une suite d'entiers naturels utilisée dans divers problèmes de dénombrement, impliquant souvent de façon récursive des objets définis. Ils sont nommés ainsi d'après le mathématicien belge Eugène Charles Catalan (1814-1894).

Le nombre de Catalan d'indice n, appelé $n^{ème}$ nombre de Catalan, est défini par

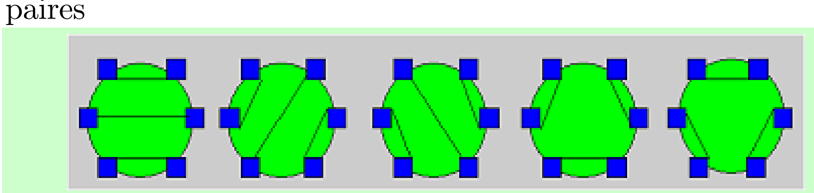
$$C_n = \frac{1}{n+1}\left(\begin{array}{c} 2n \\ n \end{array}\right) = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \prod_{k=2}^{n} \frac{n+k}{k} pour n \geqslant 0$$

Définition 2.0.2 *Nombre de Catalan. – Entier naturel de la suite* $1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 1$
Le terme général de rang n est le produit de $2(2n-3)/n$ *et du terme du rang précédent, sauf lorsque n est égal à l'unité où le terme est 1 par définition.*

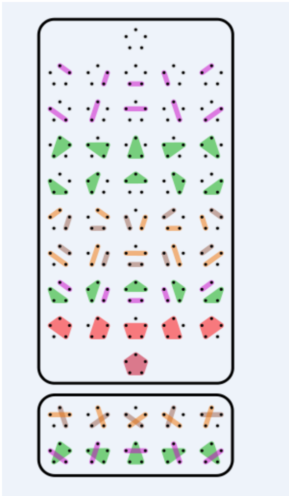
Euler (1707-1783) avait trouvé ces nombres en déterminant le nombre de façons de partager un polygone convexe quelconque en triangles sans qu'aucune diagonale se coupe.

À partir du triangle de Pascal, on peut obtenir la suite de Catalan. On retient le terme du centre de chaque rangée qui contient un nombre impair de termes. Les nombres retenus sont : $1, 2, 6, 20, 70, \ldots$ On divise les nombres de cette suite successivement par $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ ce qui fait : $1.1 = 1.2.2 = 1.6.3 = 2.20.4 = 5.70.5 = 14. \ldots$

On peut illustrer cette suite en comptant le nombre de façons de joindre des paires de points sur un cercle sans que les cordes ne se croisent. Voici un exemple quand il y a trois paires



Propriétés et comportement asymptotique



Une autre expression pour Cn est

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} \textit{ pour } n \geqslant 0$$

ce qui est équivalent à l'expression précédente car $\binom{2n}{n+1} = \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n}$ Cela montre que C_n est un **Nomber naturel**, ce qui n'est pas évident de prime abord à partir de la première formule.

Les nombres de Catalan satisfont aussi la relation de récurrence

$$C_0 = 1\text{et} \quad C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i} \text{pour } n \geqslant 0$$

De plus

$$C_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$$

Cela est dû au fait que

$$\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$$

Ils satisfont :

$$C_0 = 1\text{et } C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n$$

ce qui peut être un moyen plus efficace pour les calculer

la formule de Stirling permet de calculer un équivalent asymptotique de la suite des nombres de Catalan :

$$C_n \sim \frac{4^n}{n^{3/2}\sqrt{\pi}}$$

Les seuls nombres de Catalan C_n impairs sont $n = 2^k - 1$ceux pour lesquels , tous les autres sont pairs.

2.1 Application en combinatoire

Il existe de nombreux problèmes combinatoires dont la solution est donnée par les nombres de Catalan. Les nombres de Catalan peuvent être interprétés de différentes façon dont voici quelques exemples :

C_n est égal au nombre de mots de Dyck de longueur $2n$.

C_n est également le nombre de façons différentes de placer des parenthèses autour de $n+1$ facteurs, pour préciser une expression faisant intervenir n fois une loi de composition interne non associative

C_n est également le nombre d'arbres binaires entiers à $n + 1$ feuilles.

C_n est aussi égal au nombre de façons de découper en triangles un polygone convexe à$n + 2$ côtés en reliant certains de ses sommets par des segments de droite.

C_n est le nombre de chemins monotones le long des arêtes d'une grille à $n \times n$ carrés, qui restent sous (ou au niveau de) la diagonale.

C_n est le nombre de trajectoires de longueur $2n + 1$d'une marche aléatoire simple qui ont la propriété d'aller de la hauteur 0 à la hauteur 1 en restant négatif ou nul lors des $2n$ premières étapes.

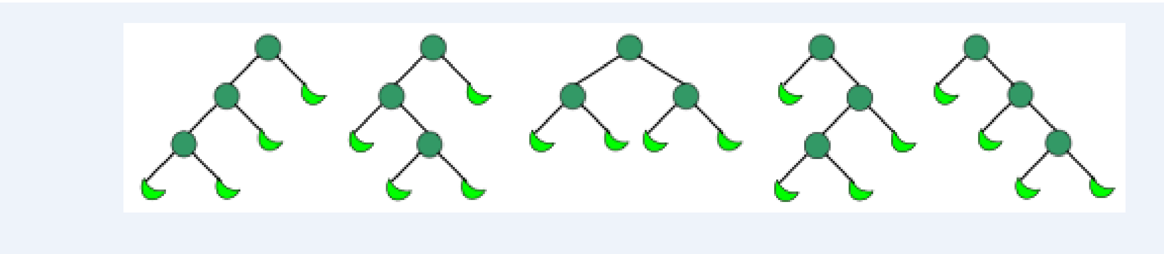
C_n est le nombre d'arbres planaires enracinés à n arêtes.

Ces exemples peuvent être regroupés en deux groupes : les symétriques={les produits non associatifs, les arbres binaires entiers, les triangulations des polygones convexes, ...} et les latéralisés={les mots de Dyck, les chemins monotones sous la diagonale, les marches aléatoires positives, les arbres planaires, ...}. Il est relativement facile de construire des bijections entre deux ensembles du même groupe, mais il est moins évident de le faire entre un ensemble du premier groupe et un du second.

2.2 Mots de Dyck

Un mot de Dyck est une chaîne de caractères formée de n lettres X et de n lettres Y, telle qu'aucun préfixe (mot obtenu en supprimant les dernières lettres à partir d'un rang quelconque) ne contienne plus de Y que de X. Autrement dit, lorsque nous parcourons un mot de Dyck de gauche à droite, le nombre de X rencontrés est toujours supérieur ou égal au nombre de Y. Par exemple, les mots de Dyck de la longueur 6 sont :

$XXXYYY, XYXXYY, XYXYXY, XXYYXY, XXYXYY$.



En l'occurrence, $C_3 = 5$.

Assimilant X à une parenthèse ouvrante et Y a une parenthèse fermante, un mot de Dyck de longueur $2n$ peut être vu comme une expression formée de n paires de parenthèses correctement assemblées :$((())), ()(()), ()()(), (())(), (()())$; voir aussi Langage de Dyck. Les mots de Dyck peuvent être naturellement représentés comme des chemins dans un quadrillage de $n+1$ points par $n+1$ points, reliant certains points par les traits verticaux et horizontaux. Ces chemins commencent dans le coin inférieur gauche, et se terminent dans le coin supérieur droit, en allant toujours vers le haut ou vers la droite, mais ne passant jamais au-dessus de la diagonale principale. X représente alors un « déplacement vers la droite » et Y représente un « déplacement vers le haut ».

Nous pouvons compter les mots de Dyck avec l'astuce suivante due à Désiré André (principe de symétrie) : intéressons-nous aux mots contenant n X et n Y qui ne sont pas des mots de Dyck. Dans de tels mots, déterminons le premier Y qui brise la condition de Dyck, puis modifions toutes les lettres qui suivent ce Y, en échangeant X avec Y et vice versa. Nous obtenons un mot avec $n+1$ Y et $n-1$ X, et en fait tous les mots comportant $n+1$ Y et $n-1$ X peuvent être obtenus par ce moyen et de manière unique. Le nombre de ces mots est le nombre de façons de placer les $n-1$ X dans $2n$ emplacements et est égal à

$\begin{pmatrix} 2n \\ n-1 \end{pmatrix}$

ce qui donne le nombre de mots qui ne sont pas de Dyck ; le nombre de mots de Dyck s'en déduit et est égal à

$$\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2n \\ n-1 \end{pmatrix}$$

qui est le $n^{ème}$ nombre de Catalan

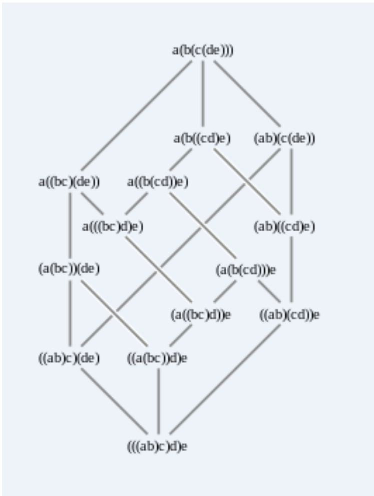
2.3 Table de parenthèses équilibrés

$$
\begin{array}{lll}
n=0 & * & \text{1 ways} \\
n=1 & () & \text{1 ways} \\
n=2 & ()(),(()) & \text{2 ways} \\
n=3 & ()()(),()(()),(())(),(()()),((())) & \text{5 ways} \\
n=4 & \begin{bmatrix} ()()()(),()()(()),()(())(),()(()()),()((())), \\ (())()(),(())(()),(()())(),((()))(),(()()()), \\ (()(())),((())()),((()())),(((()))) \end{bmatrix} & \text{14 ways} \\
n=5 & \begin{bmatrix} ()()()()(),()()()(()),()()(())(),()()(()()),()()((())), \\ ()(())()(),()(())(()),()(()())(),()((()))(),()(()()()), \\ ()(()(())),()((())()),()((()())),()(((()))),(())()()(), \\ (())()(()),(())(())(),(())(()()),(())((())),(()())()(), \\ (()())(()),((()))()(),((()))(()),(()()())(),(()(()))(), \\ ((())())(),((()()))(),(((())))(),(()()()()),(()()(())), \\ (()(())()),(()(()())),(()((()))),((())()()),((())(())), \\ ((()())()),(((()))))),((()()())),((()(()))),(((())())), \\ (((()()))),((((())))) \end{bmatrix} & \text{42 ways}
\end{array}
$$

2.4 Produits non associatifs

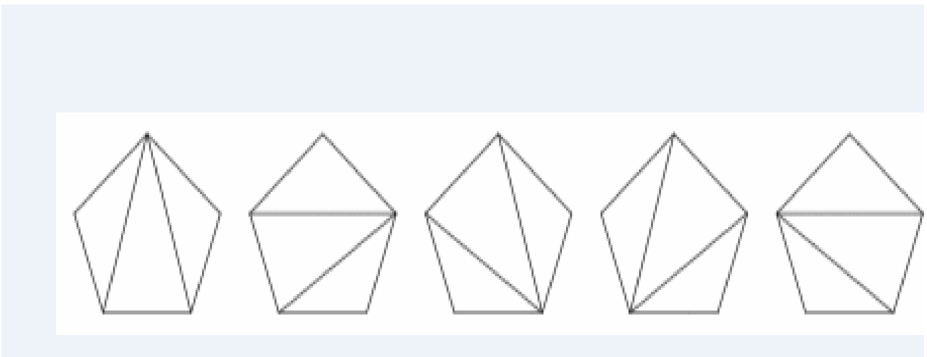
C_n est le nombre de façons différentes de placer des parenthèses autour de $n+1$ facteurs, pour préciser une expression faisant intervenir n fois une loi de composition interne non associative. Pour $n=4$ par exemple, nous obtenons 5 façons différentes de placer des parenthèses autour de 5 facteurs :

$$
\begin{bmatrix} a(b(c(de))),a(b((cd)e)),(ab)(c(de)),a((bc)(de)),a((b(cb))e), \\ a(((bc)d)e),(ab)((cd)e),(a(bc))(de),(a(b(cd)))e,(a((bc)d))e, \\ ((ab)(cd))e,((ab)c)(de),((a(bc))d)e,(((ab)c)d)e. \end{bmatrix}
$$



2.5 Triangulations d'un polygone

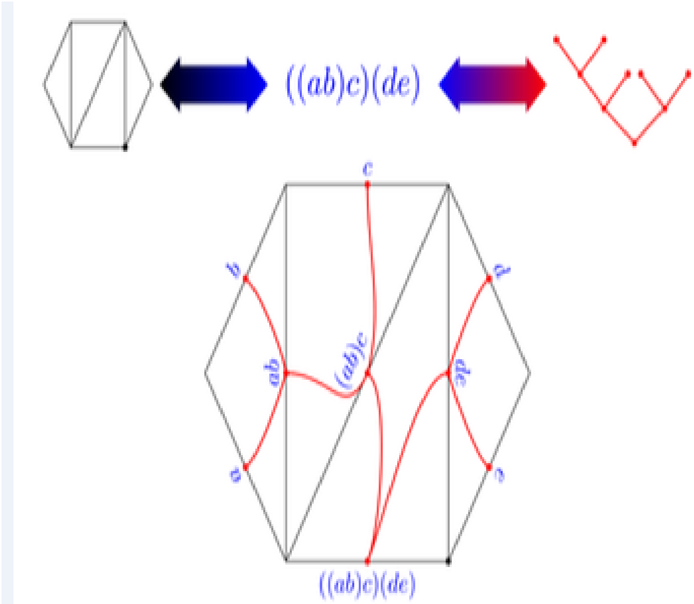
Cn est aussi égal au nombre de façons de découper en triangles un polygone convexe à $n+2$ côtés en reliant certains de ses sommets par des segments de droite.



Pour $n = 3$, un polygone à $n+2$ sommets est un pentagone : le nombre de ses triangulations est $C_3 = 5$.

2.6 Arbres binaires entiers

C_n est également le nombre d'arbres binaires entiers à $n+1$ feuilles (c'est-à-dire à $2n$ arêtes). La correspondance entre les produits non associatifs, les triangulations d'un polygone et les arbres binaires entiers est illustré sur l'image ci-dessous.



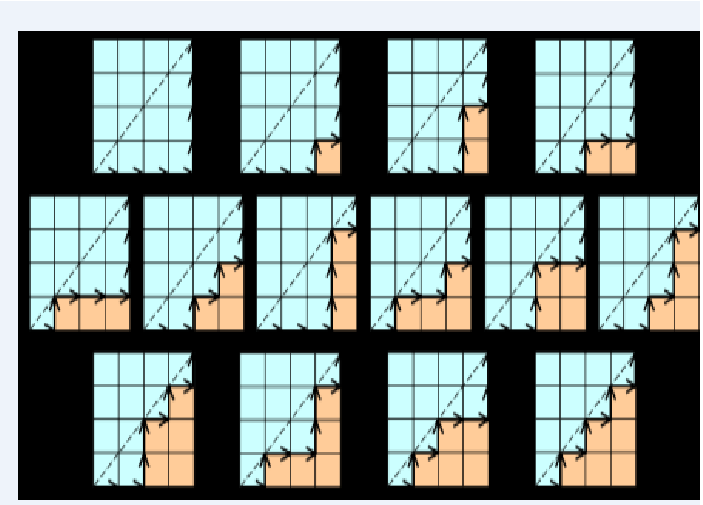
llustration de la bijection entre les triangulation d'un polygone, les produits non associatifs et les arbres binaires (pour $n = 4$).

2.7 Partitions non croisées

Cn est également le nombre de partitions non croisées de l'ensemble $\{1, ..., n\ \}$. A fortiori, C_n n'excède jamais le n-ième nombre de Bell.

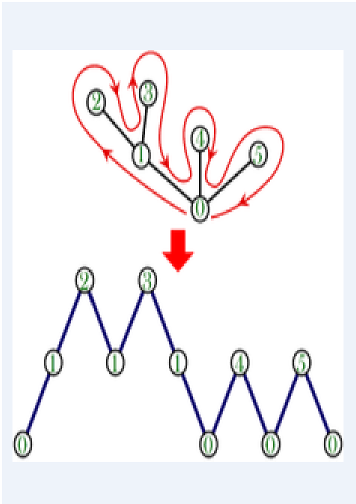
2.8 Chemins sous-diagonaux dans le carré

C_n est le nombre de chemins monotones le long des arêtes d'une grille à $n \times n$ carrés, qui restent sous (ou au niveau de) la diagonale. Un chemin monotone part du coin Sud-Ouest, arrive dans le coin Nord-Est, et est constitué d'arêtes dirigées à droite ou vers le haut. Un mot de Dyck encode un tel chemin de la manière suivante : X signifie « va à droite » et Y signifie « monte ». Les diagrammes ci-dessous représentent le cas $n = 4$



Trajectoires de la marche aléatoire simple

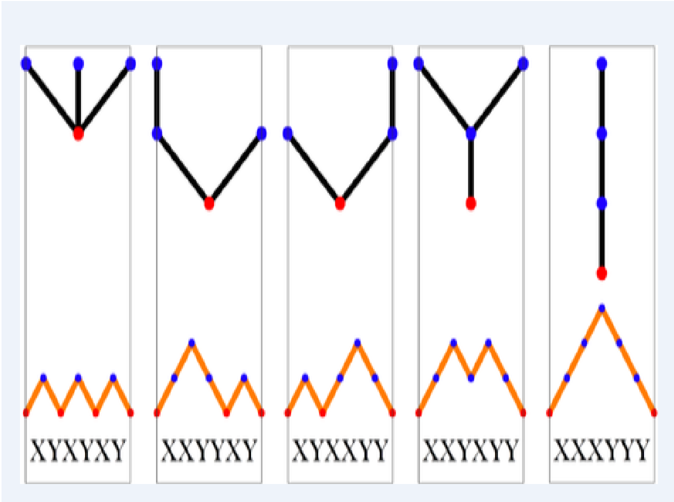
C_n est le nombre de trajectoires de longueur $2n+1$ d'une marche aléatoire simple qui ont la propriété d'aller de la hauteur 0 à la hauteur 1 en restant négatif ou nul lors des $2n$ premières étapes. On peut voir cela en faisant pivoter de 45 degrés le chemin entre les deux coins d'un carré décrit lors du premier exemple. C'est aussi le nombre de trajectoires de longueur $2n+2$ allant de la hauteur 0 à la hauteur 0 en restant strictement positives lors des $2n+1$ étapes intermédiaires, ou encore le nombre de trajectoires de longueur $2n$ allant de la hauteur 0 à la hauteur 0 en restant positives ou nulles lors des $2n-1$ étapes intermédiaires. Dans ce dernier cas on peut coder la trajectoire par une suite de $2n+1$ et de - (pour montée et descente), la condition de positivité se traduisant par le fait que cette suite est un mot de Dyck (car chaque préfixe a plus de montées que de descentes). Ainsi, pour la marche aléatoire simple, la probabilité que le premier temps de retour en 0, partant de 0, ait lieu à l'instant $2n+2$, est \scriptstyle $2C_np^{n+1}\left(1-p\right)^{n+1}$ le facteur 2 prenant en compte les trajectoires strictement négatives en plus des trajectoires strictement positives. De même, la probabilité que le premier temps d'atteinte de 1, partant de 0, ait lieu à l'instant $2n+1$, est $C_n p^{n+1} (1-p)^n$



Bijection entre chemins et arbres planaires

2.9 Arbres planaires

C_n est le nombre d'arbres planaires enracinés à n arêtes. La bijection avec les mots de Dyck, ou encore avec les trajectoires de marches aléatoires, est donnée très visuellement par un parcours extérieur de l'arbre. La trajectoire obtenue est le graphe de la fonction qui à chaque coin (secteur angulaire délimité par un sommet et deux arêtes contigües issues de ce sommet) associe la hauteur du sommet (la distance du sommet à la racine). Les coins sont parcourus dans l'ordre correspondant au parcours autour de l'arbre (voir figure en haut). Chaque sommet est visité autant de fois qu'il y a de coins issus de ce sommet, i.e. le nombre de visites à un sommet est le degré de ce sommet ; à titre d'exception, le nombre de visites à la racine est son degré plus un (plus le retour final à la racine, qui revient à visiter 2 fois le coin origine). Ainsi le nombre de pas de la marche est la somme des degrés du graphe, i.e. deux fois le nombre d'arêtes du graphe.

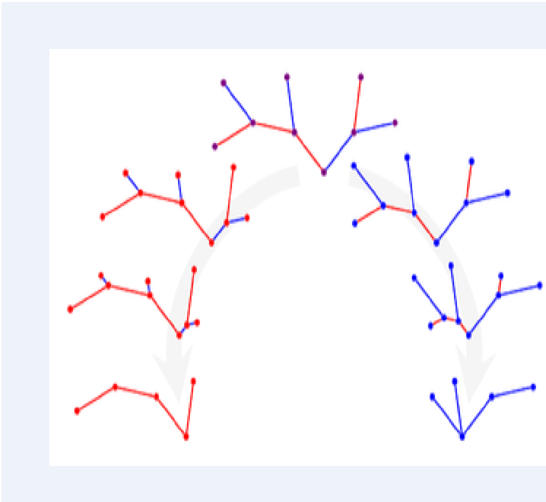


Bijection entre les 5 arbres à 3 arêtes (ligne supérieure), les 5 trajectoires positives de longueur 6 (ligne intermédiaire) et les mots de Dyck correspondants (ligne inférieure).

2.10 Bijections entre les exemples

Les ensembles décrits plus haut qui sont à C_n éléments sont clairement en bijection les uns avec les autres.

Les bijections entre deux ensembles symétriques (Produits non associatifs, Triangulations d'un polygone, Arbres binaires entiers) sont décrits plus haut. De même les bijections entre deux ensembles latéralisés (Mots de Dyck, Chemins monotones sous la diagonale, Marches aléatoires positives, Arbres planaires) sont décrits dans les sections précédents. La bijection entre les arbres binaires entiers à $2n$ arêtes et les arbres planaires à n arêtes se fait en contractant soit les arêtes gauches, soit les arêtes droites de l'arbre binaire. D'où les appellations "symétriques" et "latéralisés".



Contractions gauche et droite d'unarbre binaire vers deux arbres planaires
L'image suivante illustre les différentes bijections avec un exemple concret

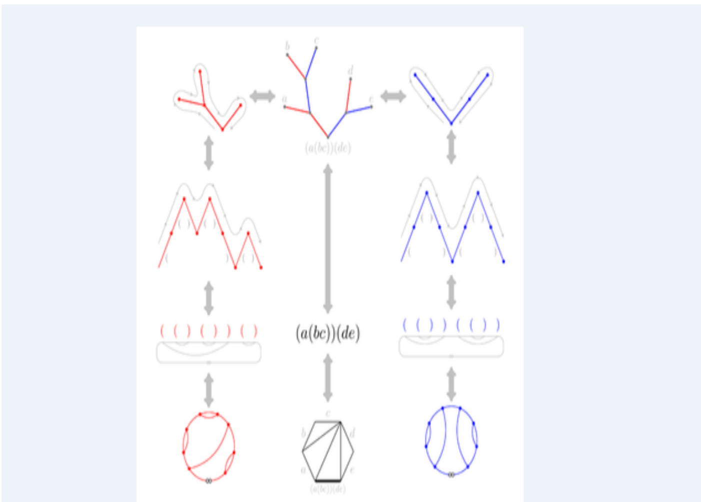


Illustration des différentes bijections entre les ensembles à C_n éléments (ici $n = 4$).

2.11 Relations de récurrence

Comme vu précédemment, les nombres de Catalan satisfont la relation de récurrence
$C_0 = 1$ et pour $n \geqslant 0$

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}$$

Ceci vient du fait que tout mot de Dyck ω de longueur supérieure à 2 peut s'écrire de manière unique sous la forme

$\omega = X\omega_1 Y,$

où ω_1 et ω_2 désignent des mots de Dyck (éventuellement vides). La fonction génératrice des nombres de Catalan est définie par

$$c(x) = \sum_{i=0}^{n} C_n x^n$$

et en utilisant la relation de récurrence ci-dessus nous voyons que

$$c(x) = 1 + xc(x)^2$$

et par conséquent

$$c(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

avec par prolongation par continuité :$C_0 = 1$

D'autre part, ils satisfont la relation de récurrence

$$C_0 = 1$$

$$C_n = \frac{2(2n-1)}{n+1} C_{n-1}$$

qui permet aussi de retrouver la série génératrice, en effet, cette relation montre que $c(x)$ est la solution de l'équation différentielle

$$\left(x - 4x^2\right) c'(x) + (1 - 2x) c(x) - 1 = 0$$

qui vaut 1 en 0.

2.12 Nombre de Catalan-Mersenne

Les nombres de la forme $C_n = 2^{c_{n-1}}$, avec $C_0 = 2$ sont appelés nombres de Catalan-Mersenne.

Leur suite constituent un sous-ensemble infini des nombres doubles de Mersenne.

Les premières occurrences de cette suite sont $2, 3, 7, 127, 170141183460469231731687303715884105727$, etc.

Ces cinq premières occurrences c_0à c_4 sont des nombres premiers. Il n'est pas encore prouvé que c_5 le soit aussi.

2.13 Matrice de Hankel

La matrice de Hankel d'ordre n dont le terme (i, j) est le nombre de Catalan $Ci+j-2$ a pour déterminant1, indépendamment de la valeur de n.

Ainsi, pour $n = 4$, nous avons

$$det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 14 \\ 2 & 5 & 14 & 42 \\ 5 & 14 & 42 & 132 \end{pmatrix} = 1$$

De plus, si les termes sont « décalés », en prenant les nombres de Catalan $Ci+j-1$, le déterminant est toujours 1, indépendamment de la valeur de n^2

Ainsi, pour $n = 4$, nous avons

$$det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 14 \\ 2 & 5 & 14 & 42 \\ 5 & 14 & 42 & 132 \\ 14 & 14 & 42 & 429 \end{pmatrix} = 1$$

Remarque 2.13.1 *La suite des nombres de Catalan est la seule suite de nombres ayant cette double propriété.*

Conclusion Générale

Dans ce mémoire nous avons étudié la relation entre les nombres de Stirling avec les séries de Catalan qui sont utilisées dans les probabilités, et nous avons déduit que les séries de catalan dépendent des nombres de Stirling.

Bibliographie

[1] Ankusha Vimawala. P-adic Arithmetic Methods for Exact Computation of Rational Numbers, School of Electrical Engineering and Computer Science, Oregon State University. June 2003

[2] Richard P. Stanley, Enumerative Combinatorics, vol. 1 et 2 [détail des éditions] (LCCN 96044267).

[3] Philippe Flajolet et Robert Sedgewick, Analytic Combinatorics, Cambridge University Press, 2008, ISBN 0-521-89806-4.

[4] Gessel, I. (1986). A probabilistic method for lattice path enumeration. J. Statist. Plann. Inference 14, 49-58.

[5] Gould, H.W. (1973). Improved evaluation of the nite hypergeometric series F(-n ; 1=2 ; j + 1). Proc. West Virginia Acad. Sci. 45, 317-323.

[6] Merlini, D. G., Sprugnoli, R., and Verri, M. C. (2002). The tennis ball problem. To appear in J. Comb. Th. A.

[7] Stanley, R.P. (1999). Enumerative Combinatorics, Vol. II, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

[8] Mohanty, S.G. (1979). Lattice Path Counting and Applications. Academic Press, New York.