

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



N° Ref :.....

Centre Universitaire de Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

## La théorie des bifurcations

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de licence en  
Mathématiques

Préparé par : Benyahia Selwa  
Omara Saida  
Lahcene Amina

Encadré par : Laouira Widad

Filière : mathématique

Année universitaire :2012/2013

# Remerciement

*Mes remerciements premièrement à Dieu toute puissant pour La volonté, la santé et la patience qu'il nous a données pour réaliser ce Travail.*

*Madame Laouira Widad, qui a dirigé ce travail, pour ses conseils de valeur et ses orientations constrictives.*

*Avec nous profonds sentiment de respect et de reconnaissance, nous Tenons à présenter nos sincères remerciements à tous ceux qui de près ou loin, ont contribué à l'élaboration de ce mémoire.*

*Nous adressons également, mes remerciements chaleurs aux Membres de l'institut des sciences et de la technologie.*

*MERCI A VOUS TOUS*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Systèmes dynamiques</b>	<b>4</b>
1.1	Définition du système dynamique . . . . .	4
1.2	Systèmes autonomes et non-autonomes . . . . .	5
1.3	Flot et points fixes . . . . .	5
1.3.1	Stabilité des points fixes . . . . .	6
1.3.2	Les variétés stables . . . . .	6
1.3.3	Système linéarisé-valeurs propres . . . . .	7
1.4	Théorème de Poincaré-Bendixson . . . . .	9
1.5	La fonction de Lyapunov . . . . .	10
<b>2</b>	<b>La théorie des bifurcations</b>	<b>13</b>
2.1	Diagramme de bifurcation . . . . .	13
2.2	Notions de déploiement universel et de codimension d'une bifurcation . . . . .	14
2.3	Le théorème de sotomayor, le pli, la bifurcation transcritique, la fronce et la fourche pour les champs de vecteurs généraux . . . . .	14
2.4	Calculs explicites en dimension 1 . . . . .	16
2.4.1	Bifurcation pli pour un système différentiel de dimension un . . . . .	16
2.4.2	La bifurcation transcritique pour un système différentiel de dimension 1 . . . . .	17
2.4.3	Bifurcation fronce pour un système différentiel de dimension 1 . . . . .	17
2.5	La bifurcation de Hopf . . . . .	18
2.6	La théorie de Hopf-Takens et la théorie de Bautin . . . . .	22
2.7	Bifurcations d'orbites périodiques . . . . .	27
2.8	La bifurcation pli d'un cycle limite . . . . .	27
2.8.1	La bifurcation homocline de champs de vecteurs du plan . . . . .	29

2.8.2	La doublement de période . . . . .	30
2.9	La bifurcation de Bogdanov-takens . . . . .	31

# Introduction Générale

La théorie de bifurcation est l'étude mathématique des changements dans la structure qualitative ou topologique d'une famille donnée, tels que les courbes intégrales d'une famille de champs de vecteurs, et les solutions d'une famille d'équations différentielles.

Le plus souvent appliquée à l'étude mathématique des systèmes dynamiques, une bifurcation se produit quand un petit changement en douceur rapportée aux valeurs des paramètres (les paramètres des bifurcations) d'un système provoque un brusque changement "qualitatif" ou topologique dans son comportement. Bifurcations se produisent dans les deux systèmes continus, et des systèmes discrets (décrit par cartes). Le nom de "bifurcation" a été introduit par Henri Poincaré en 1885 dans le premier document en mathématiques montrant un tel comportement Henri Poincaré également nommé plus tard différents types de points fixes et les classer.

La notion de bifurcation est une des plus récentes notions dégagées par les mathématiciens et dont la signification est des plus intéressantes. Nous allons voir que les lieux de bifurcation sont des ensembles singuliers et donc rares, en lesquels le milieu, déstructure par rapport à ses voisins, est donc changé de potentiel de développement, et par lesquels la transition entre structures différentes s'accomplit en général de manière extrêmement rapide.

Ce mémoire constitue une introduction générale et deux chapitres. Le premier chapitre nous définissons le système dynamique, après quelques rappels sur le système autonome et non autonome, les flots et les points fixes, le théorème de Poincaré-Bendixon et la fonction de Lyapunov. Dans le deuxième chapitre nous essayons d'étudier certains théorèmes des bifurcations et en particulier les modèles des bifurcations.

# Chapitre 1

## Systemes dynamiques

### 1.1 Définition du système dynamique

Nous étudions des systèmes d'équations différentielles de la forme (cas continu) :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x, t, v), \quad x \in U \subseteq \mathbb{R}^n, \quad v \in V \subseteq \mathbb{R}^p \quad (1.1)$$

ou des applications (cas discret) :

$$x_{k+1} = f(x_k, v), \quad x_k \in U \subseteq \mathbb{R}^n, \quad v \in V \subseteq \mathbb{R}^p \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

Les systèmes (1.1), (1.2) s'appellent des systèmes dynamiques.  $\mathbb{R}^n$  est l'espace des phases,  $\mathbb{R}^p$  est l'espace des paramètres.

**Exemple 1.1.1** *L'oscillateur de Duffing :*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = x - x^3 - \delta y + \gamma \cos \omega t, \end{cases}$$

où  $\delta, \gamma$  et  $\omega$  sont des paramètres physiques réels. L'espace des phases est  $\mathbb{R}^2$  et L'espace des paramètres est  $\mathbb{R}^3$ .

**Exemple 1.1.2** *L'application de Hénon :*

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= y_k + 1 - ax_k^2, \\ y_{k+1} &= bx_k \end{aligned}$$

**Remarque 1.1.3** 1)-où  $a$  et  $b$  sont des paramètres réels. L'espace des phases est  $\mathbb{R}^2$  et L'espace des paramètres est  $\mathbb{R}^2$ .

2)-notre travail concerne seulement le cas continu.

## 1.2 Systèmes autonomes et non-autonomes

**Définition 1.2.1** Un système différentielle est dit autonome si  $f$  ne dépend pas explicitement de  $t$ . Dans ce cas on l'écrira :

$$\dot{x} = f(x, u)$$

Dans le cas contraire on dira qu'il est non autonome. On peut également noter qu'un système autonome peut devenir non autonome si la commande dépend explicitement du temps, c'est à dire si par exemple :  $u = g(x, t)$ .

**Exemple 1.2.2** Soit l'équation :

$$\dot{x} = -\frac{x}{1+t}$$

cette équation est non autonome.

## 1.3 Flot et points fixes

Considérons le système autonome :

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in C^r(U), \quad U \subseteq \mathbb{R}^n. \quad (1.3)$$

**Définition 1.3.1** Soit  $x(x_0, t)$ ,  $x_0 \in D$ , une solution de (1.3) avec conditions initiales  $x(0) = x_0$ . On appelle flot de (1.3), ou du champ de vecteurs  $f$ , l'application  $\phi_t : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par

$$\phi_t(x_0) = x(x_0, t).$$

$\phi_t(x_0)$  possède les propriétés suivantes :

(i)  $\phi_t(x_0)$  est de classe  $C^r$ .

(ii)  $\phi_t(x_0) = x$ .

(iii)  $\phi_{t+s}(x_0) = \phi_t(\phi_s(x_0))$ .

**Exemple 1.3.2** Considérons le système linéaire :

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

avec condition initiale  $x(0) = x_0$ . La solution est :

$$x(x_0, t) = e^{At}x_0, \quad \text{avec } e^{At} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix},$$

$\phi_t = e^{At}$  est la flot de (1.4)

La famille d'applications  $\phi_t$  est aussi appelée un semi-groupe.

Un point  $a \in U$  est le point limite  $\omega$  d'une trajectoire  $x(x_0, t)$  s'il existe une séquence  $t_n \rightarrow \infty$  telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{t_n} = a.$$

De même, un point  $b \in U$  est le point limite  $a$  d'une trajectoire  $x(x_0, t)$  s'il existe une séquence  $t_n \rightarrow \infty$  telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{t_n} = b.$$

L'ensemble des points limites  $a$  (resp. limites  $\omega$ ) de  $x(x_0, t)$  est désigné (resp.  $\omega(x)$ ).

L'ensemble  $a(x) \cup \omega(x)$  est appelé l'ensemble limite de  $x(x_0, t)$ .

Un cycle limite  $a$  (resp. cycle limites  $\omega$ ) est une orbite fermée  $T$  telle que  $T \subset a(x)$  (resp.  $T \subset \omega(x)$ ). Présente un cycle limite  $\omega$  de l'oscillateur de Van der Pol :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \epsilon(1 - x^2)y. \end{cases} \quad \epsilon = 1.$$

Un ensemble  $W \subset \mathbb{R}^n$  est appelé variété invariante de (1.3)

**Définition 1.3.3** On appelle point fixe (ou point stationnaire ou point d'équilibre ou point critique) de (1.3), le point  $\bar{x}$  de l'espace des phases obtenu en annulant le second membre de (1.3) :

$$f(\bar{x}) = 0. \tag{1.5}$$

par le changement de variables  $\xi = x - \bar{x}$ , on peut ramener le point  $\bar{x}$  à l'origine.

### 1.3.1 Stabilité des points fixes

**Définition 1.3.4** Un point fixe  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  est stable si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \|x(0) - \bar{x}\| < \delta \implies \|x(t) - \bar{x}\| < \epsilon$$

( $\|\cdot\|$  désigne la norme dans  $\mathbb{R}^n$ ). Si de plus, il existe  $\delta_0$  avec  $0 < \delta_0 < \delta$  tel que

$$\|x(0) - \bar{x}\| < \delta_0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x},$$

$x$  est asymptotiquement stable. Si  $\bar{x}$  n'est pas stable, alors il est instable.

### 1.3.2 Les variétés stables

Les variétés stables jouent un rôle centrale dans les systèmes dynamiques différentiables en temps continu. Soit  $F$  une fonction différentiable sur une variété différentielle

compact  $M$  de dimension  $n$ , considérons une métrique riemannienne  $g$  sur  $M$ . Le champ de gradient  $X$  de  $F$  est défini par

$$g[\text{grad } F, \cdot] = dF.$$

Un point  $x$  est dit non dégénéré lorsque la hessienne  $\nabla dF(x)$  est une forme bilinéaire non dégénérée sur  $T_x M$ .

Comme  $M$  est compact, le flot de  $\text{grad } F$  est complet et définit un groupe à un paramètre de difféomorphisme

$$\phi_t : M \rightarrow M.$$

Si  $x$  est un point critique non dégénéré on appelle variété stable

$$W^s(x) = \left\{ y, \lim_{t \rightarrow +\infty} d(x, \phi_t y) = 0 \right\}$$

**Définition 1.3.5** *Sous les notions précédentes la variété stable  $W^s(x)$  est une sous-variété plongée de  $M$  de dimension  $\mu(x)$ . De plus, l'espace tangent en l'élément  $X$  est :  $T_x W^s(x) = E^s(x)$*

*ici :  $\mu(x)$  désigne l'indice de la hessienne, c'est à dire la dimension maximum d'un sous-espace sur lequel elle est définie négative.*

### 1.3.3 Système linéarisé-valeurs propres

Supposons que, par un changement de coordonnées, le point fixe ait été ramené à l'origine :  $f(0) = 0$ . Le développement de Taylor en  $x = 0$  s'écrit :

$$f(x) = Df(0)x + \frac{1}{2!}D^2f(0)(x, x) + \frac{1}{3!}D^3f(0)(x, x, x) + \dots \quad (1.6)$$

où l'on a posé  $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$

$$\begin{aligned} Df(x)x &= \sum_j \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right) x_j, \quad D^2f(x)(x; x) = \sum_{i,j} \left( \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right) x_i x_j, \\ D^3f(x)(x; x, x) &= \sum_{i,j,k} \left( \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right) x_i x_j x_k, \dots \end{aligned} \quad (1.7)$$

la matrice

$$Df(x) \equiv \left( \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right)$$

s'appelle matrice jacobienne de  $f(x)$  (son déterminant est le jacobien). Pour  $x$  petit, (1.6) montre que le comportement du système au voisinage de 0 est celui du système linéarisé :

$$\dot{x} = Df(0)x. \quad (1.8)$$

Dans le cas où la matrice  $Df(0)$  possède  $n$  valeurs propres  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  distinctes, la solution de (1.8) est :

$$x = \sum_{i=1}^n c_i a^{(i)} \exp \lambda_i t.$$

où  $a^{(i)}$  est le vecteur propre correspondant à la valeur propre  $\lambda_i$  et les  $c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  sont des (constantes déterminées par les conditions initiales). On déduit que :

a) Si toutes les valeurs propres  $\lambda_i$  ont leur partie réelle négative le point fixe est asymptotiquement stable.

b) Si une ou plusieurs valeurs propres sont des imaginaires pures, les autres valeurs propre ayant leur partie réelle négative, le point fixe est un centre ou un point elliptique (stable mais pas asymptotiquement stable),

c) Si une des valeurs propres a sa partie réelle positive le point fixe est instable,

d) Si  $Df(0)$  n'est pas de valeur propre nulle ou purement imaginaire le point fixe est un point hyperbolique, dans le cas contraire il est non-hyperbolique,

e) S'il existe  $i$  et  $j$  tels que  $R\lambda_i < 0$  et  $R\lambda_j > 0$ , le point fixe est un point selle,

f) Si toutes les valeurs propres de  $Df(0)$  sont réelles et de même signe, le point fixe est un noeud. Un noeud stable est un puits. Un noeud instable est une source.

**Exemple 1.3.6** Dans l'espace des phases  $\mathbb{R}^2$ . L'équation (1.8) s'écrit :

$$\dot{x} = Ax, \text{ avec } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

les valeurs propres de la matrice  $A$  sont les solutions de l'équation :

$$\lambda^2 - p\lambda + q = 0, \text{ avec } p = a + d, q = ad - bc.$$

Supposons que la matrice  $A$  soit diagonalisable, les solutions de (1.9) sont alors de la forme :

$$x(t) = c_1 a^{(1)} \exp(\lambda_1 t) + c_2 a^{(2)} \exp(\lambda_2 t), \lambda_{1,2} = (p \pm \sqrt{\Delta})/2, \text{ si } \Delta = p^2 - 4q \neq 0.$$

$$x(t) = (c_1 a^{(1)} + t c_2 a^{(2)}) \exp\left(\frac{pt}{2}\right), \text{ si } \Delta = p^2 - 4q = 0$$

où  $a^{(1)}$ ,  $a^{(2)}$  sont ces vecteurs propres de  $A$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  sont des constantes d'intégration.

On en déduit la classification des points fixes.

a) Si  $\Delta = p^2 - 4q < 0$ ,  $p \neq 0$  : le point fixe est asymptotiquement stable si  $p < 0$ , instable si  $p > 0$ . Les trajectoires au voisinage de 0 sont des spirales. Le point fixe s'appelle

un foyer.

b) Si  $\Delta = p^2 - 4q < 0$ ,  $p = 0$  : le point fixe est un centre ou un point elliptique. Les trajectoires au voisinage de 0 sont des ellipses. L'origine est un point fixe stable mais pas asymptotiquement stable.

c) Si  $\Delta = p^2 - 4q = 0$ ,  $p \neq 0$  : le point fixe est un noeud, asymptotiquement stable si  $p < 0$ , instable si  $p > 0$

d) Si  $\Delta = p^2 - 4q > 0$  et  $q > 0$  : les valeurs propres sont réelles et de même signe le point fixe est un noeud impropre, asymptotiquement stable si  $p < 0$ , instable si  $p > 0$

e) Si  $\Delta = p^2 - 4q > 0$  et  $q < 0$  : les valeurs propres sont réelles et de signe différent le point fixe est un point selle.

## 1.4 Théorème de Poincaré-Bendixson

Dans un espace des phases à deux dimensions, il est souvent possible de démontrer que orbites d'un système non- linéaire spiralent, vers une courbe fermée ou cycle limite même si l'on ne sait pas résoudre ce système, ceci grâce au théorème suivant :

**Théorème 1.4.1** (Poincaré-Bendixson)

Supposons qu'une orbite  $x(x_0, t)$  du système de deux équations

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x = (x_1, x_2)^T, \quad f = (f_1, f_2)^T \quad (1.10)$$

reste dans un domaine compact  $D \subset \mathbb{R}^2$  pour tout  $t \geq 0$ , alors

(i) ou bien  $x(x_0, t)$  est une solution périodique de (1.10)

(ii) ou bien  $x(x_0, t)$  tend vers une solution périodique de (1.10)

(iii) ou bien  $x(x_0, t)$  tend vers un point fixe de (1.10)

**Exemple 1.4.2** pour les équations de Van der pol,

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = Q(x, y) = -x + c(1 - x^2)y. \end{cases}$$

Si  $D$  un domaine simplement connexe (c'est-à-dire, il n'y a pas de trou dans  $D$ ), alors on a le théorème suivant :

**Théorème 1.4.3** (Critère de Bendixson) Si dans un domaine simplement connexe,

$D \subset \mathbb{R}^2$ , l'expression

$$\text{Div } f \equiv \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

n'est pas identiquement nulle et ne change pas de signe, alors le système (1.10) n'a pas d'orbite périodique contenue dans  $D$ .

**Preuve.** Soit  $T$ ,  $x = x(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , une orbite périodique de période  $T$  contenue entièrement dans  $D$ . Si  $S$  désigne l'intérieure de  $T$ , on a d'après le théorème de Green :

$$\begin{aligned} \int \int_s \operatorname{Div} f \, dx_1 dx_2 &= \oint_T (f_1 dx_2 - f_2 dx_1) \\ &= \int_0^T (f_1 \dot{x}_2 - f_2 \dot{x}_1) dt \\ &= \int_0^T (f_1 f_2 - f_2 f_1) dt = 0. \end{aligned}$$

Si  $\operatorname{Div} f$  n'est pas identiquement nul et ne change pas de signe alors l'intégrale double précédente est soit positive soit négative, d'où la contradiction. ■

## 1.5 La fonction de Lyapunov

Soit  $\bar{x}$  un point fixe de (1.3). Soit  $v : W \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction différentiable définie sur un voisinage  $W$  de  $\bar{x}$  telle que  $V(\bar{x}) = 0$  et  $V(x) > 0$  si  $x \neq \bar{x}$ . Posons que :

$$\dot{v} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} \dot{x}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j(x).$$

alors on a le théorème suivant.

**Théorème 1.5.1** (*Lyapunov*)

- (i) Si  $V(x) \leq 0$  dans  $W - \{\bar{x}\}$  alors  $\bar{x}$  est stable.
- (ii) Si  $V(x) < 0$  dans  $W - \{\bar{x}\}$  alors  $\bar{x}$  est asymptotiquement stable.
- (iii) Si  $V(x) > 0$  dans  $W - \{\bar{x}\}$  alors  $\bar{x}$  est instable.

On dit aussi que la fonction  $V$  est semi-définie négative dans le premier cas, définie négative dans la deuxième cas et définie positive dans le troisième cas. Il n'y a pas de règle générale pour trouver une fonction de Lyapunov, cependant, dans des problèmes de mécanique, l'énergie est souvent un bon candidat.

**Exemple 1.5.2** Le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y + ax(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = -x + ay(x^2 + y^2). \end{cases}$$

a un point fixe unique  $(0, 0)$ . Soit  $V = x^2 + y^2$ , alors :

$$\dot{V} = 2(x\dot{x} + y\dot{y}) = 2a(x^2 + y^2)^2.$$

D'où, d'après le théorème de Lyapounov, si  $a < 0$  le point fixe à l'origine est asymptotiquement stable, si  $a = 0$ , le point est stable (i.e : les trajectoires sont des cercles), si  $a > 0$ , le point instable.

**Exemple 1.5.3** Considérons le mouvement d'une particule de masse  $m$  attachée a un ressort de raideur  $k(x + x^3)$ ,  $k > 0$ , ou  $x$  est le déplacement. L'équation différentielle gouvernant le système est :

$$m\ddot{x} + k(x + x^3) = 0.$$

ou, en posant  $\dot{x} = y$ ,

$$\dot{x} = y; \dot{y} = -\frac{k}{m}(x + x^3). \quad (1.11)$$

Etudions la stabilité du système (1.11) au point  $(x; y) = (0, 0)$ . L'énergie totale du système est :

$$E(x; y) = \frac{my^2}{2} + k\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right).$$

$E(x; y)$  est aussi une fonction de Lyapunov pour (1.11), car  $E(0, 0) = 0$  et  $E(x; y) > 0$  pour  $(x, y) \neq (0, 0)$  et

$$\dot{E} = my\dot{y} + k(x + x^3)\dot{x} = -ky(x + x^3) + k(x + x^3)y \equiv 0.$$

Donc le point fixe  $(x, y) = (0, 0)$  est stable, d'après le théorème de Lyapunov.

**Théorème 1.5.4** (Théorème de la Divergence) Soient  $\phi_t$  le flot de (1.3) un volume de l'espace des phases au temps  $t = 0$ ,  $V(t) = \phi_t(V)$  l'image de  $V$  par  $\phi_t$ , on a :

$$\frac{dV}{dt} \Big|_{t=0} = \int_v \text{Div } f \, dx_1, \dots, dx_n, \quad \text{Div } f \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \quad (1.12)$$

**Preuve.** Par définition :

$$\phi_t(x) = \begin{bmatrix} u_1(x, t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n(x, t) \end{bmatrix}$$

où

$$u_i(x, t) = x_i + tf_i(x) + O(t^2), \quad i = 1, \dots, n$$

car  $\phi_t(x)$  est une solution de (1.3). On a, d'après la formule de changement de variables

dans une intégrale multiple :

$$V(t) = \int_V \left| \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right| dx. \left| \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right| \equiv \det \left[ \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right].$$

on en déduit :

$$\frac{dV(t)}{dt} = \int_v \frac{d}{dt} \left| \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right| dx.$$

comme

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \begin{cases} t \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + o(t^2) & \text{si } i \neq j, \\ 1 + t \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + o(t^2) & \text{si } i = j, \end{cases}$$

on en déduit :

$$\left| \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right| = 1 + t \operatorname{Div} f + O(t^2). \quad (1.13)$$

D'où en dérivant (1.13) par rapport à  $t$  et en faisant  $t \rightarrow 0$ , on obtient (1.12). En particulier si

$$\operatorname{Div} f = \mu = \text{cte},$$

on a alors :

$$\frac{dV}{dt} = \mu \int_v dx = \mu V,$$

d'où  $\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \mu$ . En intégrant, nous obtenons :

$$V(t) = V_0 \exp(\mu t), \quad V_0 = V(0)$$

qui tend vers zéro quand  $t \rightarrow +\infty$  et  $\mu < 0$ . ■

**Remarque 1.5.5** *Le système est dissipatif (resp. conservatif) si  $\frac{dV}{dt} < 0$  (resp.  $\frac{dV}{dt} = 0$ ). Dans le cas  $\mu = 0$  (système conservatif), le théorème de la Divergence s'appelle théorème de Liouville.*

# Chapitre 2

## La théorie des bifurcations

La théorie des bifurcations des champs de vecteurs a pour but de décrire les modifications des portraits de phase des champs de vecteurs qui dépendent différemment d'un paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}^k$  :

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad (2.1)$$

lorsque le paramètre  $\lambda$  varie. On dit que une valeur  $\lambda_0$  du paramètre  $\lambda$  est une valeur de bifurcation si le champ de vecteurs  $f(x, \lambda_0)$  n'est pas topologiquement équivalent à  $f(x, \lambda)$  quel que soit  $\lambda$  au voisinage de  $\lambda_0$ .

### 2.1 Diagramme de bifurcation

L'objectif d'une analyse de bifurcation est d'arriver à un, ou plusieurs, diagrammes de bifurcations.

**Définition 2.1.1** *Un diagramme de bifurcation est une portion de l'espace des paramètres sur laquelle sont représentés tous les points de bifurcation.*

Les logiciels actuels ne permettent de construire que des diagrammes de bifurcation en deux dimensions.

Les ensembles de points de bifurcation de même nature (Hopf, saddlenode etc.) forment donc des courbes, appelées courbes de bifurcation. Elles délimitent des zones de l'espace dans lesquelles le comportement qualitatif du système est monomorphe. Par exemple, trois zones sont délimitées dans la Figure.

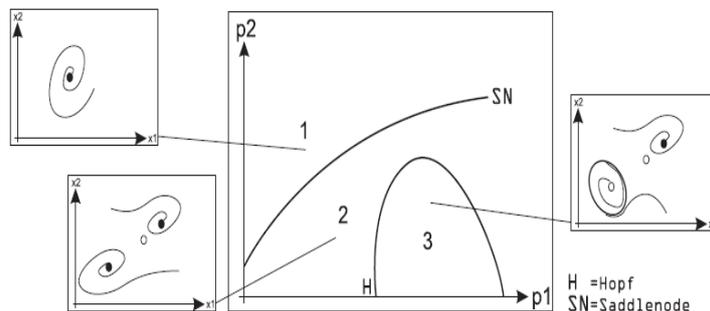


FIG. 2-1 – Exemple diagramme de bifurcation

## 2.2 Notions de déploiement universel et de codimension d'une bifurcation

**Définition 2.2.1** Si un champ de vecteurs  $f_0(x)$  est plongé dans une famille à paramètre  $\lambda$ , c'est à dire qu'il existe une valeur particulière  $\lambda = \lambda_0$  telle que  $f(x, \lambda_0) = f_0(x)$ , et que  $f(x, \lambda)$  dépend différemment de  $x$  et de  $\lambda$ , on dit que la famille est un déploiement du champ de vecteurs.

On dit qu'un déploiement d'un champ de vecteurs est un déploiement universel si tout déploiement de  $f_0(x)$  est topologiquement équivalent (c'est à dire qu'il existe un homéomorphisme qui envoie les trajectoires sur les trajectoires et respecte l'orientation) à un déploiement induit par une restriction du déploiement universel.

**Définition 2.2.2** La codimension de la bifurcation est le nombre minimum de paramètres d'un déploiement universel.

## 2.3 Le théorème de sotomayor, le pli, la bifurcation transcritique, la fronce et la fourche pour les champs de vecteurs généraux

On considère d'abord les bifurcations d'un champ de vecteur général.

**Théorème 2.3.1** Théorème de sotomayor.

On suppose que  $f(x_0, \lambda_0) = 0$  et que la matrice  $A = D_x f(x_0, \lambda_0)$  admet  $\mu = 0$  comme valeur propre simple de vecteur propre  $v$ . On désigne par  $\omega$  un vecteur propre de la transposée  $A^t$  pour la même valeur propre  $\mu = 0$ . On suppose de plus que  $A$  a  $k$  valeurs

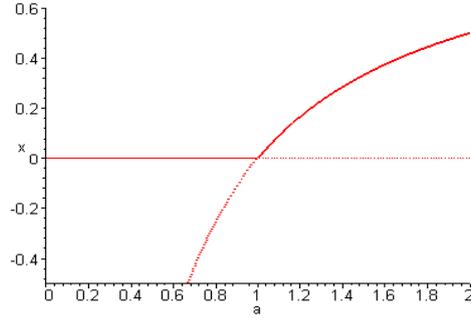


FIG. 2-2 – diagramme d’une bifurcation transcritique

propres de partie réelle négative et  $n - k - 1$  valeurs propres de partie réelle positive. On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\omega^t D_\lambda f(x_0, \lambda_0) \neq 0,$$

$$\omega^t D_x^2 f(x_0, \lambda_0)(v, v) \neq 0.$$

Alors, il existe une courbe différentiable de points singuliers du système différentiel

$$\dot{x} = f(x, \lambda),$$

dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  qui passe par  $(x_0, \lambda_0)$  et qui est tangente à l’hyperplan  $\mathbb{R}^n \times \{\lambda_0\}$  près de  $x_0$ , il n’y a aucun point singulier si  $\lambda < \lambda_0$  et il y a deux points singuliers si  $\lambda > \lambda_0$ . Les deux points singuliers sont hyperboliques et possèdent des variétés stables de dimension  $k$  et  $k + 1$  respectivement. L’ensemble des champs de vecteurs différentiables qui satisfont la condition ci-dessus est un ouvert dense de l’espace de Banach des champs de vecteurs différentiables qui ont le point  $x_0$  comme point singulier avec une valeur propre nulle simple.

La bifurcation ainsi décrite s’appelle la bifurcation pli. Si on modifie les conditions de la sorte :

$$\omega^t D_\lambda f(x_0, \lambda_0) = 0,$$

$$\omega^t D_x D_\lambda f(x_0, \lambda_0)v \neq 0,$$

$$\omega^t D_x^2 f(x_0, \lambda_0)(v, v) \neq 0,$$

la bifurcation s’appelle bifurcation transcritique.

Si on les modifie comme suit

$$\omega^t D_\lambda f(x_0, \lambda_0) = 0,$$

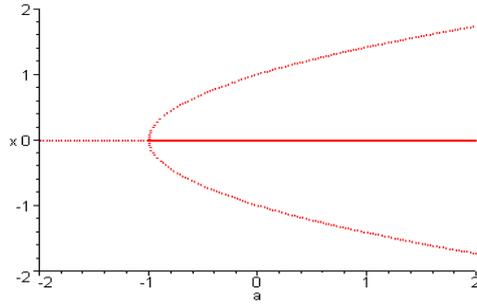


FIG. 2-3 – diagramme de bifurcation fourche

$$\omega^t D_x D_\lambda f(x_0, \lambda_0) v \neq 0,$$

$$\omega^t D_x^2 f(x_0, \lambda_0)(v, v) \neq 0,$$

$$\omega^t D_x^3 f(x_0, \lambda_0)(v, v, v) \neq 0,$$

la bifurcation s'appelle la fourche.

La bifurcation pli représente donc la plus simple (et générique) des façons pour un système de perdre sa stabilité structurale. On ne donne pas la démonstration du théorème de Sotomayor mais on va l'expliciter dans le cas de la dimension un.

## 2.4 Calculs explicites en dimension 1

### 2.4.1 Bifurcation pli pour un système différentiel de dimension un

Un système différentiel de dimension un :

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

présente une bifurcation noeud-col (ou pli) au point de bifurcation  $(0, 0)$  si :

$$i) f(0, 0) = 0,$$

$$ii) \partial f / \partial x(0, 0) = 0,$$

$$iii) \partial^2 f / \partial x^2(0, 0) \neq 0,$$

$$iv) a = \partial f / \partial \lambda(0, 0) \neq 0.$$

Ceci implique que le système s'écrit

$$\dot{x} = a + bx^2 + \dots$$

et un changement de variable le ramène à

$$\dot{x} = a + bx^2.$$

Pour fixer les idées, on peut supposer que  $b > 0$ . Si  $a > 0$ , le système ne présente aucun point singulier. Si  $a < 0$ , le système présente deux points singuliers  $x_0 = \sqrt{-\frac{a}{b}}$ , et  $x_1 = -\sqrt{-\frac{a}{b}}$ . Si on suspend cette dynamique de dimension un en une dynamique du plan :

$$\dot{x} = a + bx^2,$$

$$\dot{y} = y,$$

on trouve que les deux points singuliers  $(x_0, 0)$  et  $(x_1, 0)$  sont du type noeud et col respectivement. D'où la bifurcation noeud-col qui se produit pour  $a = 0$ .

## 2.4.2 La bifurcation transcritique pour un système différentiel de dimension 1

La forme normale de la bifurcation transcritique est :

$$\dot{x} = \lambda x - x^2.$$

pour  $\lambda < 0$ , il y a un point singulier instable pour  $x = \lambda$  et un point singulier stable  $x = 0$ . Lorsque  $\lambda > 0$ , le point singulier  $x = \lambda$  devient stable tandis que  $x = 0$  devient instable. A la différence de la bifurcation pli, après la bifurcation, il n'y a pas disparition des deux points singuliers mais plutôt un échange de stabilité entre les points singuliers.

## 2.4.3 Bifurcation fonce pour un système différentiel de dimension 1

Le système (2.1) présente une bifurcation de type fonce si :

$$\text{i) } f(0, 0) = \partial f / \partial x(0, 0) = 0,$$

$$\text{ii) } \partial^2 f / \partial x^2 = 0,$$

$$\text{iii)} \sigma = (1/6) \partial^3 f / \partial x^3 (0, 0) \neq 0,$$

et si les deux vecteurs

$$a = \partial f / \partial \lambda (0, 0),$$

et

$$b = \partial^2 f / \partial \lambda \partial x (0, 0),$$

sont linéairement indépendants. Dans le cas de la dimension un (2.2), on obtient :

$$\dot{x} = a + bx + \sigma x^3.$$

Les points singuliers sont sur la courbe d'équation

$$a + bx + \sigma x^3 = 0,$$

qui se projette sur le plan des paramètres  $(a, b)$ . Il y a une ligne de bifurcation de type pli

$$a^2 = (1/9) b^3, b \neq 0.$$

le point  $(a, b) = (0, 0)$  est dit point fonce.

Dans le cas où  $a = 0$ , la bifurcation s'appelle la fourche. On peut dans ce cas absorber  $|\sigma|$  par changement de variable et distinguer, la bifurcation fourche surcritique

$$\dot{x} = bx - x^3,$$

et la bifurcation fourche sous-critique

$$\dot{x} = bx + x^3.$$

## 2.5 La bifurcation de Hopf

On considère un champ de vecteurs  $X_\lambda$  de classe  $C^k, k \geq 3$

$$\dot{x} = F(x, \lambda),$$

défini sur un domaine  $Dx [-\lambda_0, +\lambda_0]$

**Théorème 2.5.1** *On suppose que  $X_\lambda(0) = 0$  pour toute valeur de  $\lambda$  et que le linéarisé de  $X_\lambda$  à l'origine a deux valeurs propres complexes conjuguées  $\mu(\lambda)$  et  $\overline{\mu(\lambda)}$ , telle que*

pour  $\lambda > 0$ ,  $\operatorname{Re}(\mu(\lambda)) > 0$ , et  $\operatorname{Re}(\mu(0)) = 0$ . Si on a de plus

$$\frac{d(\operatorname{Re}(\mu(\lambda)))}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} > 0,$$

alors il y a une fonction de classe  $C^{k-2}$   $\lambda : (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $(x_1, 0, \lambda(x_1))$  appartient à une orbite périodique de période proche de  $2\pi/|\mu(0)|$  et de rayon proche de  $\sqrt{\lambda}$ , telle que  $\lambda(0) = 0$ .

**Preuve.** On fait d'abord la démonstration dans le cas de la dimension deux. La première étape de la démonstration n'utilise que de l'algèbre linéaire et elle permet de se ramener, après un changement linéaire de coordonnées dépendant différemment du paramètre  $\lambda$ , au cas où la partie linéaire du champ de vecteurs à l'origine est :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \operatorname{Re} \mu(\lambda)x - \operatorname{Im} \mu(\lambda)y \\ \frac{dy}{dt} = \operatorname{Im} \mu(\lambda)x - \operatorname{Re} \mu(\lambda)y. \end{cases}$$

On passe alors en coordonnées polaires. On note

$$\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \Psi : (r, \theta) \rightarrow (r \cos \theta, r \sin \theta),$$

le changement de coordonnées des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires. On définit en dehors de  $r = 0$  le champ de vecteurs

$$\bar{X}_\lambda = \Psi * (X_\lambda) = \bar{X}_{\mu r} \frac{\partial}{\partial r} + \bar{X}_{\mu \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

On calcule explicitement les composantes du champ  $\bar{X}_\lambda$  et on constate facilement que la première composante  $\bar{X}_{\lambda r}$  est définie même en  $r = 0$  et que la deuxième composante  $\bar{X}_{\lambda \theta}$  tend vers une limite finie lorsque  $r \rightarrow 0$  :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \bar{X}_{\lambda \theta} = 1.$$

On vérifie de plus que cette dernière composante peut être prolongée à  $r = 0$  en une fonction de classe  $\mathbb{C}^2$ . Le champ de vecteurs  $\bar{X}_\lambda$  est donc de classe  $\mathbb{C}^2$ . Si on désigne par  $\phi(t)$  et  $\bar{\phi}(t)$  les flots des champs  $X_\mu$  et  $\bar{X}_\mu$ , on a  $\psi \circ \bar{\phi}_t = \phi_t \circ \psi$ . On a de plus  $\bar{\phi}_t(0, \theta) = (0, \theta - t, \lambda)$ . L'orbite de  $\bar{X}$  de l'origine est donc périodique de période  $\frac{2\pi}{|\mu(0)|}$ . Elle possède une application de premier retour de classe  $\mathbb{C}^2$ . Avec le changement de coordonnées polaires, ceci donne une application de premier retour définie au voisinage de  $(x, 0, \mu)$ .  $x \in (-\epsilon, +\epsilon)$ ,  $\lambda \in (-\epsilon, +\epsilon)$   $P(x, \lambda) = x + V(x, \lambda)$  de classe  $\mathbb{C}^2$ . On calcule alors la dérivée  $\frac{\partial P(x, \lambda)}{\partial x}$  pour  $(x, \lambda) = (0, 0)$ . Pour cela, on remarque que la système différentiel

associé au champ de vecteurs  $\overline{X}_\lambda$  est de la forme :

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{[\operatorname{Re} \mu(\lambda)] r + r^2 A(r, \theta)}{\operatorname{Im} \mu(\lambda) + r B(r, \theta)}.$$

Cette équation admet une solution  $r(\theta)$  qui est une fonction différentiable de la donnée initiale  $r_0 = x$  et on trouve

$$\frac{dr}{dx} = \exp\left(\frac{\operatorname{Re} \mu(\lambda)}{\operatorname{Im} \mu(\lambda)} \theta\right).$$

En particulier pour  $\theta = 2\pi$ , on trouve que la dérivée cherchée vaut  $\exp\left(2\pi \frac{\operatorname{Re} \mu(\lambda)}{\operatorname{Im} \mu(\lambda)}\right)$ . La dernière étape de la démonstration de l'existence d'une orbite périodique se fait en étudiant les zéros de  $V(x, \lambda)$ . On ne peut pas directement appliquer le théorème des fonctions implicites à l'équation  $V(x, \lambda) = 0$  parce que  $\frac{\partial V}{\partial \lambda}(0, 0) = 0$  et  $\frac{\partial V}{\partial x}(0, 0) = 0$ . Mais au lieu de  $V(x, \lambda)$ , on considère la fonction  $\overline{V}$  définie par  $\frac{V(x, \lambda)}{x}$ ,  $x \neq 0$  et  $\frac{\partial V}{\partial x}(0, \lambda)$  pour  $x = 0$ . On montre facilement que cette extension est de classe  $\mathbb{C}^1$ . On a alors

$$\overline{V}(0, 0) = \frac{\partial V}{\partial x}(0, 0) = \exp\left(2\pi \frac{\operatorname{Re} \mu(0)}{\operatorname{Im} \mu(0)}\right) - 1 = 0$$

puisque  $\operatorname{Re} \lambda(0) = 0$ . On a de plus

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{V}}{\partial \lambda} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \left[ \frac{\partial V}{\partial x}(0, \lambda) - \frac{\partial V}{\partial x}(0, 0) \right] = \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda \partial x}(0, 0) &= \frac{2\pi}{\operatorname{Im} \mu(0)} \frac{[\operatorname{Re} \mu(\lambda)]}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} \neq 0. \end{aligned}$$

On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites et en déduire qu'il existe une fonction de classe  $\mathbb{C}^1$ ,  $\lambda(x)$  telle que  $V(x, \lambda(x)) = 0$ . On termine la démonstration en dimension quelconque en utilisant le théorème de la variété centrale appliqué en dimension  $n + 1$  au système  $(x(\lambda), 0)$ . On se ramène à une variété centrale de dimension 3 et qui donne un champ de vecteurs en dimension 2 dépendant du paramètre  $\lambda$ . ■

La démonstration précédente peut être complétée en introduisant une condition supplémentaire qui assure la stabilité de l'orbite périodique. On suppose maintenant le champ de vecteurs au moins de classe  $c^4$ . On obtient en suivant la démonstration du théorème précédent, que l'application de premier retour est au moins de classe  $c^3$ .

**Théorème 2.5.2** *On suppose que l'application de premier retour est telle que :*

$$\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}(0, 0) < 0,$$

en sus des conditions du théorème précédent, alors l'orbite périodique est stable.

**Preuve.** On commence par remarquer que l'existence d'une orbite périodique, passant par le point  $(x, 0)$  tel que  $V(x, \lambda(x)) = 0$ , implique que cette orbite intersecte aussi l'axe  $y = 0$  en le point  $(-x, 0)$ . On a donc existence d'une suite de valeurs  $x_n$  et  $-x_n$  telles que  $x_n \rightarrow 0$  et que  $\frac{\lambda(x_n)}{x_n}$  et  $\frac{\lambda(-x_n)}{-x_n}$  sont de signes opposés et tendent vers  $\lambda'(0)$  lorsque  $x_n \rightarrow \infty$ . Ceci implique que  $\lambda'(0) = 0$ . En dérivant deux fois la relation

$$V(x, \lambda(x)) \equiv 0.$$

et en utilisant le fait que

$$V(0, 0) = \frac{\partial V}{\partial x}(0, 0) = \lambda'(0) = 0,$$

On obtient

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(0, 0) = 0.$$

On va montrer que  $\frac{\partial V}{\partial x}(x, \lambda(x))$  a un maximum local en 0. Ceci entraîne en effet que  $\frac{\partial P}{\partial x} < 1$  et comme par continuité  $\frac{\partial P}{\partial x} > 0$ , le fait que l'orbite est attractive.

On remarque pour cela que 0 est un point critique de la fonction  $f(x) = \frac{\partial V}{\partial x}(x, \lambda(x))$  et que

$$f''(0) = \frac{2}{3} \frac{\partial^3 V}{\partial x^3}(0, 0) < 0.$$

■

Dans le cas du plan, on peut faire quelques calculs plus explicites. On considère le champ de vecteurs du plan

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda x - y + p(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = x + \lambda y + q(x, y), \end{cases}$$

où la perturbation  $p(x, y)$ ,  $q(x, y)$  s'écrit

$$p(x, y) = (a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2) + (a_{30}x^3 + a_{12}x^2y + a_{21}xy^2 + a_{03}y^3) + \dots$$

$$q(x, y) = (b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2) + (b_{30}x^3 + b_{12}x^2y + b_{21}xy^2 + b_{03}y^3) + \dots$$

Le système possède une application de premier retour à l'origine notée  $s \rightarrow P(s)$ . La dérivée première de l'application  $s \rightarrow P(s)$  vaut  $P'(0) = \exp(2\pi\lambda)$ .

Si  $\lambda = 0$ , la dérivée d'ordre deux est

$$\delta = \frac{3\pi}{2} [3(a_{30} + b_{03}) + (a_{12} + b_{21}) - 2(a_{20}b_{20} - a_{02}b_{02}) + a_{11}(a_{02} + a_{20}) - b_{11}(b_{02} + b_{20})].$$

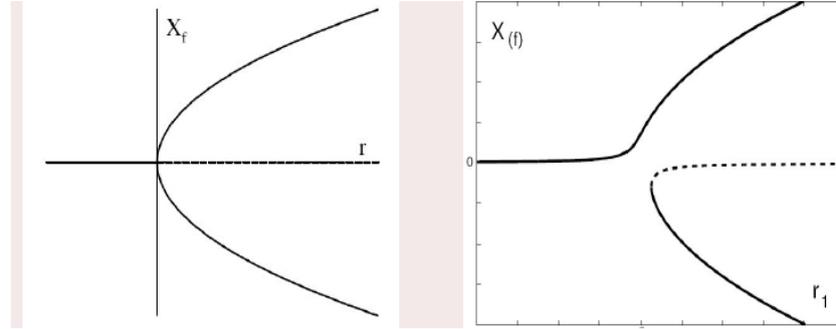


FIG. 2-4 – bifurcation sur critique et sous critique

Si  $\delta \neq 0$ , une bifurcation de Hopf se produit à l'origine si  $\mu = 0$ . Si  $\delta < 0$ , il y a un unique cycle limite stable qui naît à l'origine pour  $\mu$  croissant à partir de 0. Si  $\delta > 0$ , il y a un unique cycle limite instable qui bifurque à partir de l'origine lorsque  $\mu$  décroît à partir de 0. Dans le premier cas, on dit que la bifurcation de Hopf est surcritique et dans le second cas, on dit qu'elle est sous-critique.

## 2.6 La théorie de Hopf-Takens et la théorie de Bautin

L'extension de la bifurcation de Hopf à des codimensions plus grandes se fait à l'aide de la forme normale de Birkhoff à paramètres. On admet ici sans démonstration l'énoncé suivant :

**Proposition 2.6.1** *Soit  $X_\lambda$  une famille différentiable à  $p$  paramètres ( $\lambda \in R^p$ ) de champ de vecteurs du plan tel que 0 est une point singulier et la partie linéaire du champ en 0 est :*

$$j_1(X_\lambda) = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y},$$

*il existe un changement différentiable de coordonnées qui conjugue la famille à*

$$\dot{r} = r f(r^2, \lambda) + g(r \cos \theta, r \sin \theta, \lambda) \quad \dot{\theta} = 1, \quad (2.3)$$

*où  $g$  est une fonction  $C^\infty$ -plate à l'origine 0 pour tout  $\lambda$ .*

Takens a développé une théorie qui permet de ramener l'étude des bifurcations possibles des cycles limites d'une famille  $X_\lambda$  à celle d'une forme normale polynômiale  $X_\pm^l$  :

$$X_\pm^l = \left( y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) \pm (r^{2l} + a_{l-1} r^{2(l-1)} + \dots + a_1 r^2 + a_0) \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

La forme normale de Birkhoff ne permet pas d'aller au delà de la proposition précédente. Il faut alors plusieurs outils supplémentaires pour développer la théorie de Takens. On ne peut que les résumer rapidement en espérant donner l'essentiel des idées. Takens commence par construire une fonction différentiable  $D(r^2, \lambda)$  dont les zéros donnent les cycles limites (au voisinage de l'origine) de la famille de champs  $X_\lambda$ . On fixe maintenant une valeur  $\lambda = \lambda_0$  et on voit la famille comme un déploiement du champ de vecteurs  $X_{\lambda_0}$ . On introduit la multiplicité  $L$  à l'origine de la fonction  $D(r^2, \lambda_0)$  définie comme ceci :

$$D(r^2, \lambda_0) = r^{2l+2} F_l(r), \quad F_l(0) \neq 0.$$

On désigne aussi par  $\delta$  le signe de  $F_l(0)$ . Il s'agit d'étudier les zéros de la fonction  $D(x, \lambda)$ . Dans le cas  $l = 1$  qui est celui de la bifurcation de Hopf, il nous avait suffi d'appliquer (après quelques divisions) le théorème des fonctions implicites. Ce théorème n'est plus suffisant dans le cas qui nous occupe ici  $l > 1$ . Il faut utiliser le théorème de préparation. Dans le cas analytique, ce théorème est dû à Weierstrass :

**Théorème 2.6.2 Théorème de préparation de Weierstrass** soit  $F(x, \lambda)$  une fonction analytique en  $x \in \mathbb{R}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  définie au voisinage de  $(0, 0)$ . On suppose que pour  $\lambda = 0$ , la dérivée d'ordre  $l$  de  $F(x, \lambda)$  par rapport à  $x$  est différente de 0. Alors il existe un polynôme distingué  $P(x, \lambda) = x^l + a_{l-1}(\lambda)x^{l-1} + \dots + a_0(\lambda)$ , dont les coefficients sont des fonctions analytiques de  $\lambda$  au voisinage de  $\lambda = 0$ , et une fonction  $U(x, \lambda)$  qui ne s'annule pas dans un voisinage de l'origine  $(0, 0)$  tels que :  $F(x, \lambda) = U(x, \lambda)p(x, \lambda)$ .

Ce théorème peut s'étendre à la classe différentiable et cette extension est le théorème de préparation de Malgrange. Il est facile de vérifier que la fonction qui détermine les cycles limites de  $X_\pm^l$  est :

$$D_\pm^l(r, \mu) = \pm r^2 (r^{2l} + \mu_{l-1} r^{2(l-1)} + \dots + \mu_1 r^2 + \mu_0).$$

Utilisant le théorème de Malgrange, Takens démontre d'abord qu'il existe un difféomorphisme  $h$  et une submersion  $\phi$  tels que :

$$D(r, \lambda) = D_\sigma^l(h(r, \lambda), \phi(\lambda)).$$

Il en déduit alors le

**Théorème 2.6.3 Théorème de Takens** Il existe un voisinage  $U \times W$  de  $(0, \lambda_0)$  dans  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^p$ , une application  $h_\lambda, U \rightarrow \mathbb{R}^2$  qui détermine un difféomorphisme de  $U$  sur  $h_\lambda(U)$  et une application  $\phi : W \rightarrow \mathbb{R}^l$  qui réalise une submersion de  $W$  sur  $\phi(W)$  tels que :

$$\phi((x, y), y) = (h_\lambda(x, y), \phi(\lambda)),$$

on ait

$$\phi_* X_\lambda(x, y) = X_\sigma^l(\phi(x, y), y).$$

Une version plus récente de la théorie de Takens a donné lieu à des énoncés plus faciles à vérifier sur des exemples. Cette version est dans les références. On peut en effet calculer de façon explicite (avec un bon logiciel de calcul formel) les coefficients de la forme normale de Birkhoff. Ils sont le plus souvent polynômiaux en les paramètres du déploiement. La question se pose concrètement de savoir quelles bifurcations de cycles limites la famille peut présenter, et en particulier quel est le nombre et le type de cycle limite qui peuvent apparaître. On peut alors considérer les coefficients

$$a_0(\lambda), a_1(\lambda), \dots, a_l(\lambda),$$

de cette forme normale (écriture en coordonnées polaires comme en (2.3))

**Théorème 2.6.4** *Théorème de Caubergh-Dumortier*

*Si l'application*

$$\lambda \rightarrow (a_0(\lambda), \dots, a_l(\lambda))$$

*est une submersion locale au voisinage de 0, alors la famille présente une bifurcation de Hopf-Takens de codimension  $l$ .*

La théorie de Hopf-Takens concerne donc le cas où la multiplicité est finie égale à  $l$  au voisinage du champ particulier correspondant à la valeur  $\lambda = \lambda_0$ .

La théorie de Bautin (qui est antérieure à la théorie de Hopf-Takens) est plus délicate puisqu'elle concerne les familles pour lesquelles il n'existe pas de borne a priori.

On considère le champ de vecteurs analytique :

$$\dot{x} = -y + cx + \sum_{i,j/i+j \geq d} a_{i,j} x^i y^j = -y + cx + p(x, y), \quad (2.4)$$

$$\dot{y} = x + cy + \sum_{i,j/i+j \geq d} b_{i,j} x^i y^j = x + cy + Q(x, y), \quad (2.5)$$

On écrit (2.4-2.5) en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  :

$$x = r \cos(\theta), y = r \sin \theta$$

Ceci conduit à :

$$\begin{aligned} 2r\dot{r} &= 2(x\dot{x} + y\dot{y}), r\dot{\theta} = xP + yQ = cr + r^{d+1}A(r, \theta), \\ \dot{\theta} &= (x\dot{y} - y\dot{x}) / (x^2 + y^2) = 1 + r^{d-1}B(r, \theta), \end{aligned}$$

où  $A(r, \theta)$  et  $B(r, \theta)$  sont deux polynômes trigonométriques en  $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ , linéaires en les paramètres  $(a, b)$  ceci donne

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = [cr + r^d A(r, \theta)] / [1 + r^{d-1} B(r, \theta)],$$

et donc

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = cr + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k r^{k(d-1)+d} A(\theta) B(\theta)^K$$

Cette équation peut être écrite

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = cr + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k r^{k(d-1)+d} A(\theta) B(\theta)^K \quad (2.6)$$

où les coefficients  $R_K(\theta)$  sont des polynômes trigonométriques en  $(\cos(\theta), \sin(\theta))$  qui dépendent polynômialement des paramètres  $(a, b)$ . Bautin propose de chercher la solution de (2.6)  $r = r(\theta)$  telle que  $r(0) = r_0$ , comme une série :

$$r = v_1(\theta) r_0 + v_2(\theta) r_0^2 + \dots + v_K(\theta) r_0^K + \dots \quad (2.7)$$

La comparaison entre (2.6) et (2.7) produit :

$$v_1(\theta) = c$$

$$v_2(\theta) = \dots = v_{d-1}(\theta) = 0,$$

$$v_d(\theta) = R_d(\theta),$$

$$v_k(\theta) = \sum_{i=2}^k B_{ik} [v_d(\theta), \dots, v_{k-1}(\theta)] R_i(\theta), \quad k \geq d+1.$$

Le polynôme  $B_{ik} [a_d, \dots, a_{k-1}]$  est à coefficients entiers et coïncide avec le coefficient de  $X^{k-i}$  dans  $(X + a_d X^d + \dots + a_p X^p + \dots)^i$ .

La relation (2.8) permet de construire inductivement les fonction  $v_k(\theta)$

$$v_k(\theta) = \int_0^\theta \left[ \sum_{i=2}^k B_{ik} [v_d(\phi), \dots, v_{k-1}(\phi)] R_i(\phi) \right] d\phi.$$

La construction fait apparaître deux faits :

i) Le coefficient  $v_k(\theta)$  est un polynôme en  $\theta, \exp(c\theta)$ , (de degré moindre que  $k$ ) et en  $(\sin(\theta), \cos(\theta))$ .

ii) Le coefficient  $v_k(\theta)$  est polynôme en les paramètres  $(a, b)$  du champ de vecteurs. Dans en particulier, les coefficients  $v_k(2\pi)$  de l'application de premier retour sont des polynômes en les paramètre  $(a, b)$ . On obtient l'analyticité de l'application de premier retour de Poincaré exprimée par la série convergente

$$r = v_1(2\pi)r_0 + v_2(2\pi)r_0^2 + \dots + v_k(2\pi)r_0^k + \dots \quad (2.8)$$

Si on ajoute comme hypothèse que le premier terme non linéaire de l'équation est tel que  $v_2(2\pi) < 0$ , on peut facilement déduire de l'analyse de Bautin le théorème de Hopf (avec cette fois-ci en plus le résultat de la stabilité du cycle limite) dans ce contexte particulier. En effet, l'existence d'un cycle limite qui naît à partir de l'origine lorsque le paramètre  $\lambda$  devient positif est équivalente à l'existence

$$L(r, \lambda) - r = 0.$$

Cette équation est de la forme :

$$f(r, \lambda) = (\exp(2\pi\lambda) - 1) + v_2(2\pi)r + \dots = 0.$$

Le théorème des fonctions implicites implique qu'il existe une solution  $r = r(\lambda)$  telle que  $r(0) = 0$  puisque  $f_r(0, 0) = v_2(2\pi) \neq 0$ . Cette solution est positive puisque proche de  $-\frac{[\exp(2\pi\lambda) - 1]}{v_2(2\pi)}$ .

Si le deuxième coefficient de l'application de Poincaré est nul, il est nécessaire de reporter la discussion sur le troisième et ainsi de suite. En général, on a une bifurcation d'ordre supérieur qui est surcritique ou sous-critique dépendant du signe du premier coefficient de l'application de Poincaré qui est diff rent de zéro. Ce premier coefficient peut se calculer au moyen de l'algorithme des dérivées successives [Francoise, 1996]. Le point le plus important de la théorie de Bautin est l'idée de remplacer le théorème de préparation de Weierstrass, qui ne s'applique pas ici par le théorème suivant ( nonc  et démontré en toute généralité pour la première fois dans [Francoise-Pugh, 1987]).

**Théorème 2.6.5** *Soit  $f(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(\lambda)x^i$  un germe de fonction analytique dont les coefficients dépendent polyn mialement de  $\lambda$ . Soit  $\lambda_0$  une valeur de  $\lambda$  pour laquelle  $f(x, \lambda_0) = 0$ , quelque soit  $x$ . On considère la suite croissante des idéaux engendrés par les coefficients de  $f(x, \lambda)$  dans l'anneau des polynômes en  $\lambda$ . Cette suite croissante devient stationnaire et on appelle idéal de Bautin la limite de ces idéaux. Soit  $l$  le nombre d'éléments d'un système de générateurs. Il existe un voisinage de l'origine  $U$  dans  $\mathbb{R}$  et un voisinage  $V$  de  $\lambda_0$  dans  $\mathbb{R}^d$  tel que pour tout  $\lambda \in V$ , le nombre de  $x \in U$  qui sont des zéros isolés de  $f(x, \lambda)$  est plus petit que  $l$ .*

Ce théorème appliqué à l'application de premier retour conduit à une majoration du nombre de cycles limites qui peuvent apparaître dans un voisinage de l'origine.

La théorie de Bautin a donné lieu à des développements récents avec une version quantitative basée sur des méthodes d'analyse complexe difficiles à présenter dans le cadre de cet ouvrage. Elles conduisent non seulement à préciser les bornes du nombre de cycles limites mais donnent aussi des estimations sur leurs localisations.

Le lien entre les deux approches de Takens et de Bautin a été discuté plus récemment dans le cas particulier des équations de Liénard généralisées.

Dans la littérature biomathématique, on mentionne souvent la bifurcation de Bautin dans un sens beaucoup plus restreint que celui exposé précédemment. Il s'agit du cas particulier décrit par la forme normale de Poincaré-Birkhoff :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - wy + bx(x^2 + y^2) + cx(x^2 + y^2)^2, \\ \dot{y} &= ay - wx + by(x^2 + y^2) + cy(x^2 + y^2)^2,\end{aligned}$$

La bifurcation dite de Bautin se produit lorsqu'on a à la fois  $a = b = 0$ ,  $c \neq 0$ , et la famille à trois paramètres en est un déploiement. Dans l'espace des paramètres de ce déploiement, on trouve la bifurcation de Hopf pour  $a = 0$ , qui est surcritique si  $b < 0$  et sous-critique si  $b > 0$ . De plus si,  $b > 0$ , il y a une courbe d'équation  $b^2 = 4ac$  le long de laquelle, le système possède un cycle limite double.

## 2.7 Bifurcations d'orbites périodiques

La théorie des bifurcations des systèmes dynamiques discrets consiste à étudier les modifications des aspects qualitatifs des trajectoires formées par les itérés d'une famille d'applications

$$x \rightarrow F(x, \lambda),$$

lorsque le paramètre  $\lambda$  varie. En particulier, les bifurcations d'une application de retour d'un système différentiel décrivent des modifications des orbites périodiques.

## 2.8 La bifurcation pli d'un cycle limite

une analyse locale conduit à considérer le cas de l'application de premier retour

$$P(r) - r = l_0 r + l_1 r^3 + l_2 r^5 + \dots$$

qui est conjuguée a l'application polynômiale

$$p(r) - r = l_0 r + l_1 r^3 + l_2 r^5.$$

Les cycles limites au voisinage de l'origine correspondent aux racines de  $p(r) - r = 0$  et si on a

$$l_1^2 - 4l_0 l_2 > 0$$

$$-l_1/l_2 > 0$$

$$l_0/l_2 > 0$$

Les deux racines de l'équation sont réelles et positives et il ya deux cycles limites, un stable et un instable. La bifurcation se produit a la confluence des deux cycles, c'est a dire lorsque le polynôme a une racine double et donc pour

$$l_1^2 - 4l_0 l_2 = 0.$$

Cette bifurcation s'appelle la bifurcation pli d'un cycle limite

### **Bifurcation de cycle limites par déformation continue d'une orbite périodique d'un système périodique**

On considère une petite perturbation d'un système hamiltonien :

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} + \epsilon f(x, y),$$

$$\dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} + \epsilon g(x, y).$$

On suppose que le système hamiltonien possède un continuum d'orbites périodique dans un certain domaine du plan. On désigne par  $\gamma_c$  d'orbite périodique qui corespond a une des composantes connexes de  $H(x, y) = c$ .

On considère la un-forme différentielle associée au champ de vecteurs ci dessus

$$dH + \epsilon w = dH + \epsilon [f(x, y) dy - g(x, y) dx],$$

et qui s'annule identiquement le long des orbites de ce champ de vecteurs

la solution  $\gamma_c$  est une solution du système pour  $\epsilon = 0$ . Dans la parturbation, la solution se déforme légèrement et on peut calculer sa déformation au premier ordre en  $\epsilon$ , soit  $\sum$  une section transverse a la solution  $\gamma_c$  munie de la coordonnée  $u = H | \sum$ .

Pour  $\epsilon$  suffisamment petit, la section  $\Sigma$  reste transverse au flot du système différentiel perturbé. Avec comme donnée initiale un point  $u$  de  $\Sigma$ , l'orbite du système différentiel perturbée  $\gamma_{c,\epsilon}$  recoupe la section transverse en un point de coordonnée  $l(u, \epsilon)$ . On a

$$\int_{\gamma_{c,\epsilon}} [dH + \epsilon\omega] = 0.$$

Un développement au premier ordre en  $\epsilon$  donne

$$\frac{\partial L(u, \epsilon)}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = - \int_{\gamma_c} \omega.$$

Par le théorème de préparation de Weierstrass, on sait que les orbites périodiques isolées qui se déforment avec la perturbation en l'orbite périodique  $\gamma_c$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$  vont correspondre aux valeurs de  $c$  qui sont des zéros isolés de l'intégrale

$$f(c) = \int_{\gamma_c} \omega.$$

Dans le cas où cette fonction est identiquement nulle, il faut utiliser l'algorithme des dérivées successives.

### 2.8.1 La bifurcation homocline de champs de vecteurs du plan

La bifurcation homocline consiste en la naissance d'un cycle limite par déformation d'une connexion homocline. On suppose que le système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y), \end{cases}$$

possède un point singulier  $(x_0, y_0)$  de type col et qu'il présente une connexion homocline en ce point ; c'est à dire que la variété stable du col une fois prolongée vient se confondre avec la variété instable. On dit que la connexion homocline est simple si

$$\sigma_0 = \left[ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right] (x_0, y_0) \neq 0.$$

On peut démontrer le résultat suivant. Si la connexion homocline est simple, il ne peut naître par bifurcation de la connexion homocline qu'un cycle limite au plus et si ce cycle limite existe, il est stable si  $\sigma_0 < 0$  et instable si  $\sigma_0 > 0$ .

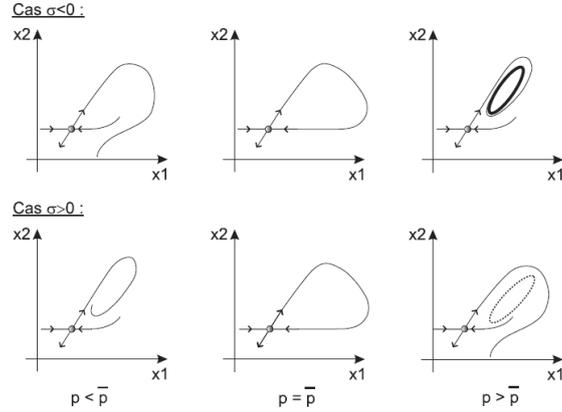


FIG. 2-5 – Bifurcation homoclinique

## 2.8.2 La doublement de période

Cette bifurcation peut se produire dans le cas où un des multiplicateurs de l'orbite périodique devient égal à  $-1$  tandis que les autres sont de module différent de  $1$ . La variété centrale de l'orbite périodique est donc de dimension  $1$ . D'après le théorème de la variété ambiante est égale à  $2$ . Une section transverse à l'orbite périodique détermine une application de premier retour qui est une application  $p$ . On suppose que le système est dans une famille dépendant d'un paramètre  $\lambda$  et que la bifurcation se produit pour la valeur  $\lambda = \lambda_0$ . On a donc

$$p(\lambda_0)(0) = 0, \quad p'(\lambda_0)(0) = -1.$$

Le théorème des fonctions implicites donne que  $p(\lambda)$  possède un unique point fixe voisin de  $0$ . Après translation, on peut supposer que  $p(\lambda)(0) = 0$ . Pour une famille générique, on peut supposer que  $\frac{dp(\lambda)(0)}{d\lambda}$  ne s'annule pas et prendre cette quantité comme paramètre de la déformation. On a donc

$$p(\lambda)(x) = (-1 + \lambda)x + o(x^2)$$

A conjugaison près, on se ramène au cas

$$p(\lambda) : x \rightarrow (-1 + \lambda)x - \epsilon x^3, \quad \epsilon = \pm.$$

L'orbite périodique est attractive si  $\lambda > 0$  et répulsive pour  $\lambda < 0$ .

On considère alors les points périodiques de  $p$  de période  $2$ . Ils s'obtiennent avec l'application  $p \circ p$

$$p \circ p : x \rightarrow x + (-2\lambda + \lambda^2)x + \epsilon [1 - \lambda - (\lambda - 1)^3]x + \dots$$

Si on néglige les termes en  $\lambda^2$ , on obtient que les points périodiques de période 2 sont donnés par  $x = 0$  et par une courbe :

$$\epsilon\lambda - x^2 + \dots = 0.$$

Pour  $\epsilon\lambda > 0$ , on obtient deux points qui sont sur une même orbite périodique de période double du champ de vecteurs. Elle est attractive si  $\lambda < 0$  et répulsive si  $\lambda > 0$ , (le multiplicateur vaut  $1 + 4\lambda$ ). Si on prend le cas  $\epsilon < 0$  par exemple, on a ainsi une orbite périodique attractive si  $\lambda > 0$ , suivie d'une orbite périodique attractive de période double si  $\lambda < 0$ . D'où le nom de bifurcation de doublement de période. L'orbite périodique de période double borde un ruban de mobius centré sur l'orbite périodique de période simple et de largeur de l'ordre de  $\epsilon\lambda$ .

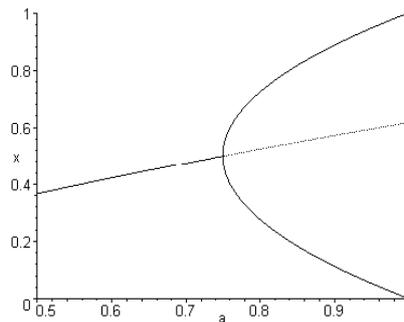


diagramme de bifurcation par  
doublement de priode

## 2.9 La bifurcation de Bogdanov-takens

Quand un pli et une bifurcation de Hopf se produisent en même temps on a une bifurcation de Bogdanov-takens. Son étude nécessite l'utilisation des méthodes employées pour la bifurcation homocline et c'est pourquoi elle est présentée après. Il ya différents modèles locaux possible qui conduisent de toute facon aux mêmes résultats. On considère ce système :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= a + by + x^2 + xy, \end{aligned}$$

L'espace des paramètres de la bifurcation est décrit dans le plan des  $(a, b)$  de la façon suivante :

les points singuliers sont donnés par les équations :

$$x = x^+ = \sqrt{-a}, \quad y = 0,$$

et

$$x = x^- = -\sqrt{-a}, \quad y = 0.$$

On a donc une première partition de l'espace des paramètres  $(a, b)$  déterminée par l'axe  $a = 0$ . Si  $a < 0$ , il ya deux points singuliers, sure l'axe  $a = 0$ , il y a un point singulier et si  $a > 0$ , il n'ya pas de points singuliers. Le linéarisé du système différentiel au voisinage du point singulier  $(\bar{x}, 0)$  est donné par

$$\dot{x} = y,$$

$$\dot{y} = by + 2\bar{x}x + \bar{x}y.$$

Les valeurs propres  $\lambda_1^-, \lambda_2^-$  et  $\lambda_1^+, \lambda_2^+$  correspondantes aux deux points singuliers sont telles que :

$$\lambda^2 - (b + \bar{x})\lambda - 2\bar{x} = 0$$

Le point  $(x^+, 0)$  est donc un col et le point  $(x^-, 0)$ , un noeud ou un foyer. Ce dernier point est stable si  $b - \sqrt{-a} < 0$  et instable si  $b - \sqrt{-a} > 0$ . On a donc l'axe  $a = 0$  correspond à une bifurcation pli. On peut vérifier que le changement de stabilité du point  $(x^-, 0)$  le long de la branche de parabole  $b = \sqrt{-a}$  correspond a une bifurcation de Hopf sous-critique. Il apparaît donc en dessous de la parabole un cycle limite instable. On peut se demander comment ce cycle disparaît. Ce n'est pas possible de s'en rendre compte uniquement par une analyse de point singuliers.

On fait le changement suivant :

$$x = \epsilon^2 u, \quad y = \epsilon^3 v, \quad a = \epsilon^4 \alpha, \quad b = \epsilon^2 \beta,$$

et on change le temps en  $t = \epsilon\tau$ . Ceci conduit au système

$$\dot{u} = v,$$

$$\dot{v} = \alpha + u^2 + \epsilon(\beta v + uv).$$

On examine alors la situation pour petit  $\epsilon$  (ce qui va correspondre dans le système initial à des petites valeurs de  $(a, b)$ ).

Pour  $\epsilon = 0$  le système est Hamiltonien pour la fonction :

$$H = \frac{1}{2}v^2 - \alpha u - \frac{u^3}{3}.$$

On note en particulier que ce système Hamiltonien présente une connexion homocline  $\gamma_0$  contenue dans la courbe  $H = \frac{2}{3}$ . On fixe  $\alpha$  et on cherche les valeurs de  $\beta$  pour lesquelles, lorsque  $\epsilon$  est petit, la connexion homocline persiste. On doit donc considérer la fonction

$$M(\beta) = \int_{\gamma_0} (\beta v + uv) dv.$$

Le calcul de cette fonction se ramène à des intégrales elliptiques et il conduit au fait que  $M(\beta)$  s'annule pour  $\beta = \frac{5}{7}$ . En revenant aux paramètres initiaux  $(a, b)$ , on peut achever l'analyse de la bifurcation en ajoutant l'arc de parabole  $a = -\frac{49}{25}b^2$  en dessous de l'arc de parabole de la bifurcation de Hopf et qui donne une approximation de la courbe le long de laquelle le cycle limite instable disparaît dans une bifurcation homocline.

# Bibliographie

- [1] Bifurcation et chaos- Une introduction à la Dynamique en Pascal, Foltran et Mathematica. Huyén. dang (Université paris-sud XI-Claudine delcarte) Université Pierre et Marie Curie -2000.
- [2] Mathématiques & Applications 46 jeu-pierre Froncoise Oscillations en boilogie "Analyse Qualitative et modèles" Mathematics Subject Classification (2000) : direction de la Colléction G.Allaine et M.Benaim, Pris, Octobre 2004.
- [3] P-Pouchon, mémoire "Systèmes Dynamiques et Modélisation". Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris Janvier 1993