الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Minstère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

---

CENTRE UNIVERSITAIRE DE MILA
INSTITUT DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

Réf. /11

Mémoire de fin d'étude
Présenté pour l'obtention du diplôme de

Licence Académique

Domaine : **Mathématiques et Informatique**
Filière : **Mathématiques**
Spécialité : **Mathématiques Fondamentales**

Thème

Stabilité des équations différentielles non linéaires

Présenté par :
1- Safa Bourafa
2- Sabah Benaldjia

Dirigé par :
- Mohammed-Salah Abdelouahab

Année universitaire 2010-2011

Remerciments

Ce travail a été réalisé dans le cadre du projet de fin d'études, au sein de l'institut des sciences et de technologie de Mila.

Avant tout, nous remercions **ALLAH** tout puissant de nous avoir donné la volonté et le courage de mener ce travail.

D'une façon toute particulière, On tient à remercier notre encadreur Mr Mohammed-Salah AbdeAlouhab, pour nous avoir fait travailler sur un projet aussi intéressant et riche. Nous lui sommes reconnaissants tout particulièrement pour la confiance qu'il nous a témoignée et la liberté qui nous a laissé.

Nous tenons également à exprimer notre gratitude aux nombreuses personnes qui nous ont apporté leur aide précieuse avec beaucoup de gentillesse.

Nous remercions aussi tous ceux qui, tout au long de ces années d'études, nous ont encadrés, observé, aidé, conseillé et même supporté.

On tient également à remercier ici toutes les personnes, les amis, dont on a croisé le chemin au l'institut des sciences et de technologie de Mila et ailleurs.

Enfin, on souhaite exprimer toute notre gratitude à l'ensemble des personnes, qui ont contribué largement à son aboutissement.

SABAH
ET
SAFA

Table des matières

Introduction Générale

Un des concepts les plus importants en théorie des systèmes dynamiques est celui de la stabilité. un système instable est sans usage et potentiellement dangereux. Qualitativement un système est stable si chaque fois qu'il est perturbé de son point d'équilibre, il reste autour de ce point d'équilibre par la suite.

Depuis les travaux d'**Isaac Newton** (1642-1727) la science était dominée par le déterminisme, les scientifiques pensaient pouvoir prédire complètement et précisément l'évolution d'un système donné. Un siècle après Newton, **Pierre-Simon Laplace** (1749-1827) fut le fervent apôtre du déterminisme affirmant que l'état présent de l'Univers permettait, en principe, de prédire complètement son futur.[8]

L'histoire des systèmes dynamiques modernes est relativement récente. Elle commence avec **Henri Poincaré** (1854-1912) qui fut le premier a entreprendre l'étude formelle d'un système dynamique chaotique. Il avait la conviction que le comportement global de toute solution d'un système dynamique était plus important que le comportement local. Cette conviction l'a conduit à développer une théorie qualitative des équations différentielles étudiant le mouvement des corps célestes qui consistait à savoir si les orbites décrites par ces corps étaient stables ou instables. Il fut le premier à affirmer que le déterminisme d'une loi n'implique pas nécessairement sa prédictibilité. Vint ensuite le mathématicien **Birkhoff** qui développa au début du $XX^{ième}$ siècle l'étude des systèmes dynamiques discrets qui, selon lui, permettaient de mieux comprendre la dynamique plus complexe résultant des équations différentielles.

La théorie des systèmes dynamique tomba ensuite partiellement dans l'oubli, sauf en **URSS** ou le travail fut poursuivi par **Lyapunov** et **Pontrjagin** qui développèrent notamment la notion de stabilité d'une solution d'un système différentiel et l'influence de la perturbation des conditions initiales sur le comportement asymptotique de ses solutions.[3]

Ce mémoire constitué de trois chapitres, on présente quelques notions fondamentales sur la différentiation puis on présente la théorie de la stabilité.

Le premier chapitre présente les équations et les systèmes différentiels, et l'étude quantitative.

Au deuxième chapitre on présente l'étude qualitative des systèmes différentiels par les deux méthodes de Lyapunov (méthode directe et la méthode indirecte).

Le troisième chapitre est consacré à l'application des notions théoriques étudiés dans le deuxième chapitre sur deux systèmes différentiels puis on confirme les résultats par des testes numériques.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Équations différentielles

Les équations différentielles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomènes physiques et biologiques, par exemple pour l'étude de la radioactivité ou la mécanique céleste, par conséquent les équations différentielles représentent un vaste champ d'étude, aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées.

1.1.1 Définitions

Définition 1.1 ***(Équation différentielle) :***
On appelle équation différentielle toute équation dans laquelle figurent, une variable $t \in I \subset \mathbb{R}$, la fonction inconnue $y = f(t)$ et ses dérivées $y', y'', ..., y^{(n)}$, on peut écrire symboliquement une équation différentielle comme suite :

$$F(t, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

Définition 1.2 ***(Ordre d'une équation) :***
On appelle ordre d'une équation différentielle l'ordre de la dérivée la plus élevée contenue dans cette équation.

Exemple 1.1 *: $y' = f(t, y)$, est une équation de premier ordre.*

Définition 1.3 ***(Solution maximale et globale) :***
On appelle solution ou intégrale de l'équation différentielle (1.1) tout couple (J, f) formé d'un intervalle $J \subseteq I \subseteq \mathbb{R}$ et d'une fonction f définie sur J et vérifient les conditions suivantes :
1- *f est n fois dérivable sur$J$.*

2-$\forall t \in J,\ F(t, f(t), f'(t), ..., f^{(n)}(t)) = 0$.
-Si la solution prolongeant f est f elle même, alors f est dite ***solution maximale.***
-Si la solution f définie sur l'intervalle $J = I$, alors f est dite ***solution globale.***

1.1.2 Théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz

Problème de Cauchy

Un problème est dit de **Cauchy** s'il se présente sous la forme :

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad tq \quad f : \ I \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

et I est un ouvert contenant (t_0, y_0).

Théorème 1.1 ***(Cauchy-Lipschitz)***
Soit f est une fonction continue et localement lipschitzienne en la deuxième variable sur un ouvert I de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tq $(t_0, y_0) \in I$. Alors il existe une unique solution maximale de l'équation $y' = f(t, y)$ sur l'intervalle J content t_0 vérifiant la condition initiale
$y(t_0) = y_0$.

1.1.3 Résolution des équations différentielles

Pour résoudre une équation différentielle, on a deux types de méthodes les méthodes de résolution analytiques (exactes), et les méthodes de résolution numériques (approchées).

Les méthodes analytiques (exactes)

On a deux types d'équations différentielles de premier ordre :
-Equations différentielles linéaires, elles sont de la forme :

$$y' = a(t)y + b(t) \tag{1.2}$$

-Equations différentielles non linéaires, elles sont de la forme :

$$f(t, y, y') = 0 \tag{1.3}$$

tq f est une fonction non linéaire par rapport à y et y'.
Si (1.3) est de la forme

$$y' + P(t)y = Q(t)y^{\alpha}$$

tq $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ fixée et P, Q deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on dit que (1.3) est une équation de **Bernoulli.**

Si (1.3) est de la forme

$$y' + P(t)y^2 + Q(t)y + R(t) = 0$$

on dit que c'est une équation de **Ricatti.**

Si (1.3) est de la forme

$$y = tp(y') + Q(y')$$

on dit que c'est une équation de **Lagrange.**

– **Résolution d'équation linéaire :**

Pour résoudre une équation différentielle linéaire de premier ordre, on a le théorème suivant :

Théorème 1.2 *La solution générale de (1.2) s'écrit :*

$$y = y_1 + z$$

où y_1 est une solution particulière de (1.2), et z est la solution générale de l'équation homogène associée à (1.2).

-z s'écrit sous la forme : $z = ce^{\int_{t_0}^{t} a(x)dx} = ce^{A(t)}$.

Si aucune solution évidente n'apparait on peut utiliser la méthode de variation des constantes (c-à-d $y_1(t) = c(t)e^{A(t)}$).

Donc d'après le théorème précédent la solution générale de (1.2) est donnée sous la forme

$$y(t) = e^{A(t)}(c + \int_{t_0}^{t} b(x)e^{-A(x)}dx) \text{ et } y(t_0) = y_0.$$

– **Résolution d'équation non linéaire :**

Il n y a pas une méthode générale pour la résolution des équations différentielles non linéaires, par exemple pour résoudre une équation de **Bernoulli**.

$$y' + P(t)y = Q(t)y^\alpha \tag{1.4}$$

On applique les étapes suivantes :

-On devise les deux membres par y^α tq ($y^\alpha \neq 0$), on obtient l'équation

$$y^{-\alpha y'} + P(t)y^{1-\alpha} = Q(t).$$

Posons $z = y^{1-\alpha}$, alors
$$z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y',$$
d'où
$$\frac{1}{1-\alpha}z' = P(t)z + Q(t),$$
donc (1.4) est ramenée à une équation linéaire en z.

Exemple 1.2
$$y' + ty = t^3y^3 \tag{1.5}$$
-Si $y = 0$ est solution de (1.5).
-Si $y \neq 0$ on trouve
$$y'y^{-3} + ty^{-2} = t^3 \tag{1.6}$$
On pose $z = y^{-2} \Longrightarrow z' = -2y'y^{-3}$.
Substituent dans (1.6) on obtient
$$z' = -2tz - 2t^3 \tag{1.7}$$
(c'est une équation linéaire de 1^{er} ordre).
On a donc $z_1(t) = ce^{t^2}$ solution de l'équation homogène associée.
On cherche :
$$z(t) = c(t)e^{t^2} \Longrightarrow z'(t) = c'(t)e^{t^2} + 2tc(t)e^{t^2}$$
Substituant dans (1.7) on trouve :
$$c'(t) = -2t^3e^{-t^2} \Longrightarrow c(t) = t^2e^{-t^2} + e^{-t^2} + c,$$
donc la solution générale de (1.7) est $z(t) = ce^{-t^2} + t^2 + 1$.
D'ou
$$y^{-2}(t) = ce^{t^2} + t^2 + 1 \Longrightarrow y^2 = \frac{1}{ce^{t^2} + t^2 + 1} \Longrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{\sqrt{ce^{t^2}+t^2+1}} \\ \quad ou \\ y = \frac{-1}{\sqrt{ce^{t^2}+t^2+1}} \end{cases}.$$

Remarque 1.1 *Dans le cas générale et surtout dans le cas des équations différentielles non linéaires, on ne peut pas utiliser les méthodes de la résolution analytiques, ce qui nous oblige à utiliser les méthodes numériques.*

Les méthodes numériques :

Les méthodes numériques sont très utilisées pour approximée les solutions des équations différentielles, elles existent plusieurs, comme les méthodes de **Taylor**, les méthodes de **Runge-Kutta** et la méthode d'**Adams pashforth**.

Dans cette section nous allons étudier la méthode de **Runge-Kutta** d'ordre 4.

Méthode de Runge-Kutta (RK4) :

La méthode de **RK4** est sans doute la plus utilisée pour obtenir une solution numérique d'une équation différentielle, elle utilise le développement en série de Taylor jusqu'à l'ordre 4, et elle est définie par ses cinq équations :

$$\begin{cases} K_1 = f(t_i, y_i) \\ K_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_1) \\ K_3 = f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_2) \\ K_4 = f(t_i + h, y_i + hK_3) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \end{cases}$$

Pour une étude détaillée de cette méthode voir ([6], [13]).

Exemple 1.3 *: Considérons l'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dt} = -2ty$$

avec $y(0) = 1$.

la solution analytique est $y = e^{-t^2}$.

Méthode de RK4 :

i	t_i	$y_i(exacte)$	$y_i(approchée)$	K_1	K_2	K_3	K_4
0	0	1	1	0	-1.10^{-1}	$-9.95.10^{-2}$	$-1.98.10^{-1}$
1	0.1	0.9900	0.9900	$-1.98.10^{-1}$	$-2.94.10^{-1}$	$-2.92.10^{-1}$	$-3.84.10^{-1}$
2	0.2	0.9608	0.9607	$-3.84.10^{-1}$	$-4.7.10^{-1}$	$-4.68.10^{-1}$	$-5.40.10^{-1}$
3	0.3	0.9139	0.9140	$-5.49.10^{-1}$	$-6.20.10^{-1}$	$-6.10.10^{-1}$	$-6.82.10^{-1}$
4	0.4	0.8521	0.8524	$-6.82.10^{-1}$	$-7.36.10^{-1}$	$-7.34.10^{-1}$	$-7.78.10^{-1}$
5	0.5	0.7788	0.7790				

1.2 Systèmes différentiels

On appelle système différentiel (linéaire ou non) de 1^{er} ordre tout système de la forme :

$$y' = f(t,y) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(t, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases}, \tag{1.8}$$

où les $f_i : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ pour $1 \leq i \leq n$, U est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^n$ est la fonction inconnue.

1.2.1 Généralités

Définition 1.4 ***(Système différentiel autonome ou non)***

- Le système (1.8) est appelé système différentiel ***autonome*** *si f ne dépend pas de t, il s'écrit $y' = f(y)$.*

- Si f dépend de t, alors on dit que le système (1.8) est ***non autonome****, il s'écrit $y' = f(t, y)$.*

Exemple 1.4 *Le système*

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 \\ y_2' = cy_1 - dy_2 \end{cases}$$

est ***autonome,*** *mais le système*

$$\begin{cases} y_1' = \frac{1}{t} y_1 \\ y_2' = y_1 - \frac{1}{t} y_2 \end{cases}$$

est ***non autonome.***

Définition 1.5 ***(Système différentiel à coefficients constants ou variables) :***
Soit le système différentiel suivant :

$$y' = A(t)\, y + B(t)$$

tq : $y \in \mathbb{R}^n$; $A(t) \in M_n(\mathbb{R})$ et $B(t) \in \mathbb{R}^n$.
On dit que le système différentiel est à coefficients constants si la matrice A est indépendante de t, dans le cas contraire on dit que le système différentiel est à coefficients variables.

1.2.2 Systèmes différentiels linéaires

On appelle système différentiel linéaire d'ordre 1 dans $\mathbb{R}^n$ résoluble en y' toute équation différentielle de la forme

$$y' = A(t)\, y + B(t) \tag{S}$$

où $y(t) \in \mathbb{R}^n$ est la fonction inconnue et $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues données.

Remarque 1.2 *:*
1- Si $B(t) = 0$; on dit que le système est homogène.
2- Si $B(t) \neq 0$; on dit que le système est non homogène.

Exponentielle d'une matrice

Définition 1.6 *:*
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

converge dans $M_n(\mathbb{R})$ et elle s'appele exponentielle de la matrice A, on note $\exp(A)$ *ou* e^A *la somme de cette série.*

Proposition 1.1 *Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui commutent.*
Alors

$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A \tag{1.9}$$

-Dans le cas générale la relation (1.9) n'est pas vérifiée.
Donc le calcule de l'exponentielle d'une matrice repose sur l'observation suivante :
Si A et B sont semblable. Alors il existe P inversible telle que :

$$A = PBP^{-1}$$

B est une matrice diagonale par blocs

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & B_n \end{pmatrix}$$

et $\forall\ 1 \leq i \leq n$

$$B_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

donc $B_i = \lambda_i I + M$ tq : M est une matrice nilpotente. Alors $e^B = e^{\lambda_i} e^M$; donc

$$e^A = Pe^B P^{-1}.$$

Remarque 1.3 *:*

1-Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

pour toute condition initiale, il existe une solution unique sous la forme

$$y(t) = \exp(At)y_0.$$

2-La solution générale du système (S) est donnée par :

$$y(t) = e^{tA}v + y_1(t)$$

tq : $y_1(t)$ *solution particulière de (S)*

-Si aucune solution évidente n'apparaît donc d'après la méthode de variation des constants on obtient

$$y(t) = e^{tA}v + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}B(s)ds.$$

Equations différentielles scalaires d'ordre n

Intéressons nous maintenant à la résolution des équations différentielles scalaires d'ordre n de type :

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{^{(n-1)}} + ... + a_1 y' + a_0 y = b(t) \tag{1.10}$$

Avec $(a_0, a_1, ..., a_n)$ sont des constants et $a_n \neq 0$.

Cette équation s'écrit aussi sous la forme : $y^{(n)} = (c_1, c_2, ..., c_n)\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} + \frac{b(t)}{a_n}$

avec $c_i = \frac{-a_{i-1}}{a_n}$; $i = \overline{1, n}$.

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n \end{pmatrix}, \ B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{b(t)}{a_n} \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

L'équation (1.10) s'écrit sous la forme matricielle :

$$X^{'} = AX + B(t).$$

1.2.3 Systèmes différentiels non linéaires

On appelle système différentiel non linéaire, tout système de la forme :

$$\begin{aligned} Y'(t) &= F(Y(t)), \\ \text{tq } Y(t) &= \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \text{ et } F(y) = \begin{pmatrix} f_1(y) \\ \vdots \\ f_n(y) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les f_i sont des fonctions de la variable Y définies et continues sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemple d'équation non linéaire d'ordre supérieure à un

Considérons une équation différentielle (générale) d'ordre p

$$X^{(p)} = f(t, X, X^{'}, ..., X^{(p-1)}) \tag{1.11}$$

tq $f : U \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Il est clair que plus p est grand, plus la résolution est difficile. On a donc ci dessous quelques exemples de situations que l'on peut transformer (1.11) en une équation différentielle d'ordre $(p-1)$ moyennent un changement d'inconnue astucieux.

– **Equation différentielle homogène de degré** 1 **par rapport à** x,$x^{'}, ..., x^{(n-1)}$:

On suppose que pour tout $\lambda > 0$, on a :

$$f(t, \lambda x_0, ..., \lambda x_{n-1}) = \lambda f(t, x_0, ..., x_{n-1})$$

Formellement, l'EDO s'écrit donc :

$$\frac{x^{(n)}}{x} = f(t, 1, \frac{x^{'}}{x}, ..., \frac{x^{(n-1)}}{x}).$$

Par récurrence, on vérifie que $\frac{x^{(k)}}{x}$ peut s'exprimer à l'aide des dérivées d'ordre 0 à $(k-1)$ de $\frac{x^{'}}{x}$. Cela suggère de poser

$$y = \frac{x'}{x} \tag{1.12}$$

afin de se ramener à une équation de type :

$$y^{(n-1)} = g(t, y, ..., y^{(n-2)}).$$

Pour revenir à x, il ne reste plus qu'à résoudre l'équation différentielle linéaire $x' = xy$.

Exemple 1.5 *Par le changement d'inconnue (1.12). l'EDO $xx'' + 2(x')^2 = 0$ se transforme en $y' + 3y^2 = 0$ .qui s'intègre à vue.*

-Si f ne dépend pas de x, on peut interpréter (1.11) comme une équation différentielle d'ordre $(n-1)$ par rapport à x.

-Si f ne dépend pas de t, dans ce cas on considère x comme une variable, et on pose $y = x'$, la fonction inconnue de variable x, alors $x'' = yy'$, et $x^{(3)} = y(y')^2 + y^2y''$

Exemple 1.6 *Par ce changement d'inconnue , l'EDO $xx'' + 2(x')^2 = 0$, se transforme en l'EDO linéaire $xy' + 2y = 0$.*

Systèmes différentiels presque linéaires

Considérons le système autonome de type :

$$\begin{cases} y_1' = f_1(y_1, y_2, ..., y_n) \\ \quad\vdots \\ y_n' = f_1(y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \qquad f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Ce système est dit presque linéaire si $0_{\mathbb{R}^n}$ est un point critique isolé, et s'il peut être écrit sous la forme :

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + ... + a_{1n}y_{n+}g_1(y_1, y_2, ..., y_n) \\ \quad\vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + ... + a_{nn}y_{n+}g_n(y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \quad \text{avec} \lim_{(y_1,...,y_n)\longrightarrow 0} \frac{g_i(y_1, ...y_n)}{\|y_1, ..., y_n\|} = 0$$

Et on appelle système différentiel linéairisé associé le système

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + ... + a_{1n}y_n \\ \quad\vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + ... + a_{nn}y_n \end{cases}.$$

Chapitre 2

Stabilité des équations différentielles

L'étude qualitative permet de voir le comportement des solutions sans avoir à résoudre l'équation différentielle, en particulier elle permet l'étude locale des solutions autour des points particuliers.

Considère le problème de Cauchy associé à l'équation différentielle

$$y' = f(t, y) \ / \ f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$

avec condition initiale $y(t_0) = z_0$. On suppose que la solution de ce problème existe sur $[t_0, +\infty[$.

Définition 2.1 *Soit $y(t, z)$ la solution maximale de (2.1) tel que $y(t_0, z) = z$.*
On dira que la solution $y(t, z_0)$ est stable s'il existe une boule $\overline{B}(z_0, r)$ et une constante $c \geq 0$ telles que :
i/ *Pour tout $z \in \overline{B}(z_0, r)$, $t \longmapsto y(t, z)$ est définie sur $[t_0, +\infty[$.*
ii/ *Pour tout $z \in \overline{B}(z_0, r)$ et $t \geq t_0$ on a*

$$\|y(t, z) - y(t, z_{0)} \| \leq c \parallel z - z_0 \parallel .$$

La solution $y(t, z_0)$ est dite asymptotiquement stable, si elle est stable et si la condition (iii) plus forte que (ii) est satisfaite.
iii/ *Il existe une boule $\overline{B}(z_0, r)$ et une fonction $\gamma : [t_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue avec $\lim\limits_{t \to +\infty} \gamma(t) = 0$ telle que pour tous $z \in \overline{B}(z_0, r)$ et $t \geq t_0$ on ait*

$$\|y(t, z) - y(t, z_{0)} \| \leq \gamma(t) \parallel z - z_0 \parallel .$$

*On dit que $\tilde{y} \in \mathbb{R}^n$ est un point d'**équilibre** (critique, singulier) du système (2.1) si $f(t, \widetilde{y}) = 0$, $\forall \ t \geq t_0$.*

2.1 Stabilité des systèmes différentiels linéaires

Soit le système homogène

$$Y^{'} = AY.$$

La solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(t_0) = Z \end{cases}$$

est $Y(t, z) = e^{(t-t_0)A}z$.

D'où

$$\|y(t, z) - y(t, z_0)\| \leq \|e^{(t-t_0)A}\|\|z - z_0\|,$$

donc la stabilité est liée au comportement de la norme $\|e^{(t-t_0)A}\|$ lorsque $t \longrightarrow +\infty$ qui doit rester bornée. On distingue deux cas :

– Le cas scalaire $n = 1$:

$$A = (a) et \mid e^{(t-t_0)a} \mid = e^{(t-t_0)\,\mathrm{Re}(a)}.$$

-Si $\mathrm{Re}(a) > 0$; alors $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \mid e^{(t-t_0)a} \mid = +\infty$, dans ce cas les solutions sont **instables.**

-Si $\mathrm{Re}(a) = 0$; alors $\mid e^{(t-t_0)a} \mid = 1$, les solutions sont **stables.**

-Si $\mathrm{Re}(a) < 0$; alors $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \mid e^{(t-t_0)a} \mid = 0$, les solutions sont **asymptotiquement stables.**

– Le cas générale $n > 1$:

-Si A est diagonalisable : on se ramène après changement de variables linéaire au système $\tilde{Y} = \tilde{A}\widetilde{Y}$ avec $\tilde{Y} = P^{-1}Y$ et

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sont les valeurs propres de A, le système se ramène au équations

$$y_i' = \lambda_i y_i, \ (1 \leq i \leq n),$$

qui admetent pour solutions

$$y_i(t, z) = z_i e^{\lambda i(t-t_0)}, \ (1 \leq i \leq n).$$

Les solutions sont **stables** ssi $\mathrm{Re}(\lambda_i) \leq 0$, et **asymptotiquement stables** ssi $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

-**Si** A **n'est pas diagonalisable** : On peut mettre A sous la forme d'une matrice diagonale par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\omega_1} + N_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_p I_{\omega_p} + N_p \end{pmatrix}$$

tel que N_i est nilpotente non nulle d'indice $\leq \omega_i$.

Dans ce cas il suffit d'examiner chaque bloc d'une triangulation de A.

Supposons que

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

donc

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda I + N$$

tel que $N^\alpha = 0$ (cette décomposition s'appelle la décomposition de Dunford).

Donc

$$e^{(t-t_0)A} = e^{\lambda(t-t_0)} e^{(t-t_0)N} = e^{\lambda(t-t_0)} \sum_{k=0}^{\alpha-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} N^k.$$

Les composantes de $e^{(t-t_0)A}$ sont les produits de $e^{\lambda(t-t_0)}$ par des polynômes de degré $\leq \alpha-1$ (comme $N \neq 0$ il y a au moins un polynôme de degré ≥ 1).

Si $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ les modules des composants tendent vers 0, et les solutions sont asymptotiquement stables.

Si $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ les modules tend vers $+\infty$, et les solutions sont instables.

Si $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ donc $\mid e^{\lambda(t-t_0)} \mid = 1$, il y a au moins une composante de module tend vers $+\infty$, et les solutions sont instables.

Théorème 2.1

Soit $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *les valeurs propres complexes de la matrice* A*, alors les solutions du système linéaire* $Y' = AY$ *sont :*

-Asymptotiquement stable ssi $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$*, pour tout* $1 \leq i \leq n$*.*

-Stable ssi $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$*, (ou* $\mathrm{Re}(\lambda_i) = 0$*, est le bloc correspondant est diagonalisable) pour tout* $1 \leq i \leq n$ *.*

Exemple 2.1 *Considérons le système*

$$y' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} y.$$

les valeurs propres sont $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3$.
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ *donc les solutions sont instables et le point critique est un point selle.*

– Pour étudier les signes des parties réelles des valeurs propres de A on peut appliquer le critère suivant [11] :

Critère 2.1 *(Routh-Hurwitz)*
Soit donné le polynôme caractiristique de A,

$$P_A(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n$$

tel que les coefficients a_i, $i = 1...n$ *sont des réelles constants. On définit les* n *matrices d'Hurwitz* H_i, $i = 1...n$ *par.*

$$H_1 = (a_1),\ H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}, ..., H_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \ tq\ a_i = 0\ si\ i > n.$$

-Toutes les racines de $P_A(\lambda)$ *ont des parties réelles négatives si et seulement si les déterminants des* $H_i, i = 1...n$ *sont positives (ie* $(Re(\lambda_i) < 0, \forall i = 1...n) \iff (\det(H_i) > 0, \forall i = 1...n)$*).*
-Si n=3

$$(Re(\lambda_i) < 0, \forall i = 1, 2, 3) \iff (a_1 > 0, a_3 > 0 \ et\ a_1a_2 - a_3 > 0).$$

Classification des points d'équilibres :

On suppose que la dimension des systèmes est égale à 2.
Soit le système

$$Y' = AY, \text{ avec } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

qui s'écrit

$$\begin{cases} x' = ax + by. \\ y' = cx + dy \end{cases}, \ Y \in \mathbb{R}^2$$

On a

$$AY = 0 \Longrightarrow Y^{'} = 0$$

alors les points singuliers correspondent aux solutions constantes.

On suppose que $det(A) \neq 0$. dans ce cas, l'origine est le seul point singulier on distingue plusieurs cas en fonctions des valeurs propres de la matrice A.

1 **Les valeurs propres λ_1, λ_2 sont réels :**

-Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$: La matrice A est diagonalisable, après un changement de base, on peut supposer

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

le système s'écrit

$$\begin{cases} x' = \lambda_1 x \\ y' = \lambda_2 y \end{cases},$$

donc les solutions sont :

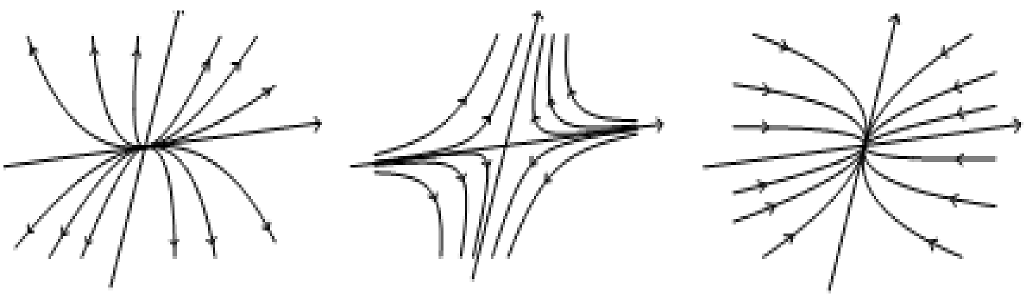
$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = y_0 e^{\lambda 2t} \end{cases}.$$

Les trajectoires sont données par

$$x = 0 \text{ et } y = c \mid x \mid^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}},\ c \in \mathbb{R}.$$

-Supposons de plus que λ_1, λ_2 sont de même signes et $\mid \lambda_1 \mid < \mid \lambda_2 \mid$ dans ce cas $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$ le point singulier est un **nœud (source ou puit).**

-Supposons que λ_1, λ_2 sont de signes opposés ($\lambda_1 < 0 < \lambda_2$) dons ce cas le point singulier est un **col (selle)** instable, voir figure(2-1).



(a) $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ (b) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ (c) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

FIG. 2-1 – Valeurs propres réelles non nulles et distinctes

- Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$: Il existe une base (v_1, v_2), dans la quelle on a

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

On distinct deux cas :

a) Si $\alpha = 0$ (A diagonalisable) alors :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

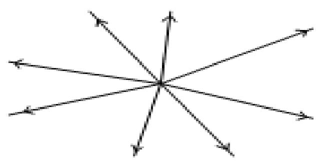
Les solutions sont données par

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{\lambda t} \\ y(t) = y_0 e^{\lambda t} \end{cases}.$$

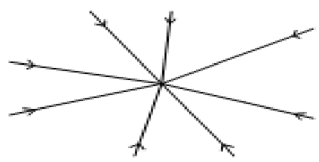
Les trajectoires sont les droites d'équations

$$x = 0 \text{ et } y = cx, \quad c \in \mathbb{R},$$

le point singulier est un **nœud propre, voir figure(2-2).**



(a) $\lambda > 0$



(b) $\lambda < 0$

FIG. 2-2 – Valeurs propres égales avec $\alpha = 0$

b) Si $\alpha \neq 0$ (A non diagonalisable) alors

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

le système s'écrit

$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = x + \lambda y \end{cases}.$$

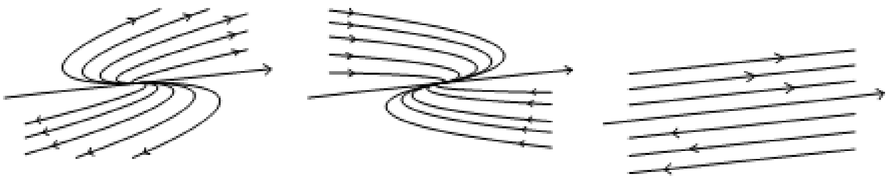
Les solutions sont données par

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{\lambda t} \\ y(t) = (y_0 + x_0 t) e^{\lambda t} \end{cases}.$$

Les trajectoires sont données par

$$x = 0 \text{ et } y = \frac{y_0}{x_0} x + \frac{x}{\lambda} \ln \frac{x}{x_0},$$

le point singulier est un **nœud impropre (dégénéré), voir figure(2-3).**



(a) $\lambda > 0$ (b) $\lambda < 0$ (c) $\lambda = 0$

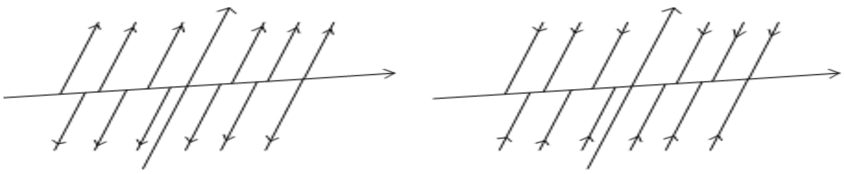
FIG. 2-3 – Valeurs propres égales avec $\alpha \neq 0$.

- Si $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 \neq 0$:

Dans ce cas λ_2 est réelles et v_1, v_2 forment une base de vecteurs propres et la solution est

$$Y(t) = a_1 v_1 + a_2 e^{\lambda_2 t} v_2;$$

tous les points de la droite kv_1 sont des points d'équilibres. Cette droite est une source si $\lambda_2 > 0$ et un puit si $\lambda_2 < 0$,voir figure **(2-3)**.



(a) $\lambda_2 > 0$ (b) $\lambda_2 < 0$

FIG. 2-4 – Une valeur propre est nulle

2 Les valeurs propres sont complexes :

Soit $\lambda_1 = \alpha + i\beta$; $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ et $\beta > 0$, il existe une base dans la quelle A s'écrit de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

le système s'écrit

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta y \\ y' = \beta x + \alpha y \end{cases}.$$

On pose $z(t) = x(t) + iy(t)$ donc $z'(t) = x' + iy' = (\alpha + i\beta)z(t)$.
La solution est donnée par

$$z(t) = z_0 e^{(\alpha+i\beta)t},$$

en cordonnées polaires on a $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$; $z = re^{i\theta}$ donc

$$\begin{cases} r = r_0 e^{\alpha t} \\ \theta = \theta_0 + \beta t \end{cases}.$$

Alors il y a une **spirale logarithmique** si $\alpha \neq 0$ et un **cercle** si $\alpha = 0$ (en généralement une ellipse car la base n'est pas nécessairement orthonormée), le point singulier est un **foyer** dans le premier cas et un **centre** dans le deuxième cas, voir figure**(2-3)**.

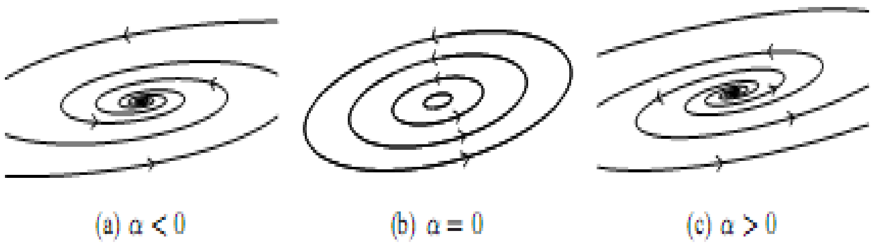


FIG. 2-5 – Valeurs propres complexes

2.2 Stabilité des systèmes différentiels non linéaires

L'analyse de la stabilité d'un système induit deux méthodes, la méthode indirect de Lyapunov (linéarisation) qui permet de tirer des conclusions concernant la stabilité locale d'un système autour d'un point d'équilibre, et la méthode directe de Lyapunov, qui n'est pas restreinte à un caractère local et permet de déterminer les propriétés de stabilité d'un système non linéaire à l'aide d'une fonction d'énergie.

2.2.1 La méthode indirecte de Lyapunov (linéarisation)

Pour étudier la stabilité d'un système non linéaire on remplace ce système par une approximation linéaire autour du point d'équilibre $\tilde{x}$, en utilisant le développement de Taylor d'ordre 1, de la fonction f au voisinage de $\tilde{x}$.

-On considère le système non linéaire

$$x' = f(x) \tag{2.2}$$

Tel que f de classe C^1. On note $Df(\tilde{x}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ la matrice jacobienne $n \times n$ de f, alors.

$$f(x) = f(\tilde{x}) + Df(\tilde{x})(x - \tilde{x}) + \|x - \tilde{x}\|\epsilon(x - \tilde{x})$$

avec $\lim\limits_{x \longrightarrow \tilde{x}} \epsilon(x - \tilde{x}) = 0 \in \mathbb{R}^n$.

Et comme $f(\tilde{x}) = 0$, donc

$$x' = Df(\tilde{x})(x - \tilde{x}) + \|x - \tilde{x}\|\epsilon(x - \tilde{x}).$$

On pose $y = x - \tilde{x} \Longrightarrow y' = x'$. le système linéairisé autour de $\tilde{x}$ s'écrire alors

$$\left\{ \begin{array}{c} y' = Df(\tilde{x})y \\ y(t_0) = x_0 - \tilde{x} \end{array} \right. .$$

Donc le système non linéaire (2.2) a le même comportement au voisinage de $\tilde{x}$ que celui du système linéairisé :

$$y' = Df(\tilde{x})y \tag{2.3}$$

Comme indique les deux théorèmes suivants [9] :

Théorème 2.2
Si le système linéairisé (2.3) est asymptotiquement stable alors le point d'équilibre du système non linéaire est asymptotiquement stable.
Si le système linéairisé (2.3) est instable alors le point d'équilibre du système non linéaire est instable.
Si le système linéairisé (2.3) est en limite de stabilité (toutes les valeurs propres de $Df(\tilde{x})$ sont dans le demi-plan complexe gauche et au moins une soit sur l'axe imaginaire) alors on ne peut rien conclure sur la stabilité du système non linéaire.

Théorème 2.3 *(Hartman-Grobman)*
Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un C^1 difféomorphisme avec un point d'équilibre $\tilde{x}$ ‘‘hyperbolique’’.

*Alors il existe un homéomorphisme H d'un voisinage de $\tilde{x} \in U \subseteq \mathbb{R}^n$.
tel que $H : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, mettant en correspondance les trajectoires du système non linéaire et celle du système linéairisé $y' = Df(\tilde{x})y$. En particulier : $H(\tilde{x}) = 0$
et $H(f(x)) = Df(\tilde{x})H(x)$, $\forall x \in U$.*

Exemple 2.2 *Soit le système*

$$x' = f(x) \;\; tq \; f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 - 1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}.$$

On a $f(x) = 0 \Longrightarrow x = (1, 0)^T$ et $x = (-1, 0)^T$ sont les points d'équilibre de f, on a

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

est la jacobienne de f, donc

$$Df(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

alors $(1, 0)$ est un source (car $\lambda_1 = \lambda_2 = 2 > 0$).

$$Df(-1, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc $(-1, 0)$ est un point selle (car $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$).

– **Variétés invarientes :**

Soit $\tilde{x}$ un point fixe de (2.2), $f \in C^r(D)$; $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Soient $u_1, u_2, ..., u_s$ les vecteurs propres de $Df(\tilde{x})$ correspondant aux valeurs propres λ dont la partie réelle est négative, $v_1, v_2, ..., v_u$ les vecteurs propres de $Df(\tilde{x})$ correspondant aux valeurs propres λ dont la partie réelle est positive, $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_c$ les vecteurs propres de $Df(\tilde{x})$ correspondant aux valeurs propres λ dont la partie réelle est nulle, avec $s + u + c = n$, et soient E^s le sous espace vectoriel (stable) engendré par $\{u_1, u_2, ..., u_s\}$, E^u le sous espace vectoriel (instable) engendré par $\{v_1, v_2, ..., v_u\}$, E^c le sous espace vectoriel (central) engendré par $\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_c\}$, avec $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$. On a le théorème suivant [5] :

Théorème 2.4 *(Variété centrale)*
Il existe des variétés de classe C^r, stable W^s, instable W^u et centrale W^c, tangentes respectivement à E^s, E^u et E^cen $\tilde{x}$. Ces variétés sont invariantes par rapport au flot Φ_t de (2.2). W^s et W^u sont uniques, mais W^c ne l'est pas nécessairement.

On a $\Phi_t(W^s) \subset W^s$; $\Phi_t(W^u) \subset W^u$ et $\Phi_t(W^c) \subset W^c$.
$\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \Phi_t(x) = \tilde{x}$ pour tout $x \in W^s$.
$\lim\limits_{t \longrightarrow -\infty} \Phi_t(x) = \tilde{x}$ pour tout $x \in W^u$.

Exemple 2.3 *soit le système non linéaire suivant :*

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y + x^2 \\ z' = z + x^2 \end{cases} .$$

le seul point fixe du système est l'origine et la matrice

$$Df(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est diagonale, par conséquence les sous-espaces E^s, E^u sont respectivement le plan x, y et l'axe z. Après avoir résolu la première équation $x\prime = -x$, le système non linéaire se réduit à deux équations différentielles linéaires qui peuvent être résolues facilement et on obtient :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{-t} \\ y(t) = y_0 e^{-t} + x_0^2(e^{-t} - e^{-2t}) \\ z(t) = z_0 e^t + \frac{x_0^2}{3}(e^t - e^{-2t}) \end{cases}$$

par conséquent, $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \Phi_t(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ *si et seulement si* $z_0 + x_0^2/3 = 0$*, d'où :*

$$W^s = \left\{(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 \ /z_0 = -x_0^2/3\right\}.$$

De même $\lim\limits_{t \longrightarrow -\infty} \Phi_t(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ *si et seulement si* $x_0 = y_0 = 0$*, d'où :*

$$W^u = \left\{(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 / x_0 = y_0 = 0\right\}.$$

W^s est tangente à E^s et $W^u = E^u =$ l'axe de z.

2.2.2 La méthode directe de Lyapunov (fonction de Lyapunov)

Soit $\tilde{x}$ un point fixe de (2.2). et Soit $V : U \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction différentiable définie sur un voisinage U de $\tilde{x}$ telle que : $V(\tilde{x}) = 0$ et $V(x) > 0$ si $x \neq \tilde{x}$, posons

$$V' = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} x_j' = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_j(x),$$

alors on a le théorème suivant [5] :

Théorème 2.5 *(Lyapunov)*
i)Si $V'(x) \leq 0$ *dans* $U - \{\tilde{x}\}$ *alors* $\tilde{x}$ *est stable.*
ii)Si $V'(x) < 0$ *dans* $U - \{\tilde{x}\}$ *alors* $\tilde{x}$ *est asymptotiquement stable.*
iii)Si $V'(x) \geq 0$ *dans* $U - \{\tilde{x}\}$ *alors* $\tilde{x}$ *est instable.*

Remarque 2.1 *Il n'y a pas de règle générale pour trouver une fonction de Lyapunov, cependant dans des problèmes mécanique, l'énergie est souvent un bon candidat.*

Exemple 2.4 *:Le système*

$$\begin{cases} x' = y + ax(x^2 + y^2) \\ y' = -x + ay(x^2 + y^2) \end{cases}$$

admet un point fixe unique $(0, 0)$. *Soit* $V = x^2 + y^2$, *donc*

$$V' = 2(xx' + yy') = 2a(x^2 + y^2)^2.$$

alors d'après le théorème de Lyaponuv, si $a < 0$ *le point fixe est asymptotiquement stable ; si* $a = 0$, *le point est stable (ici les trajectoires sont des cercles) ; si* $a > 0$, *le point est instable.*

Chapitre 3

Application

Dans ce chapitre nous allons étudier la stabilité de deux systèmes différentiels, le premier est un système optique modefié, et le deuxième c'est le système de **Lotka-Volterra,** en suite nous allons faire des tests numériques pour confirmer les résultats analytiques obtenus.

Pour l'étude numérique des deux systèmes nous avons ecrit un code Matlab en utilisant la méthode RK4 et les résultats sont représenté dans les figures (fig2, fig3 et fig4).

3.1 Le système optique

La figure (3-1) est une réalisation d'operation de modélisation d'un système optique Figure(3-1-**a**) par une circuit électronique Figure(**3-1-b**)

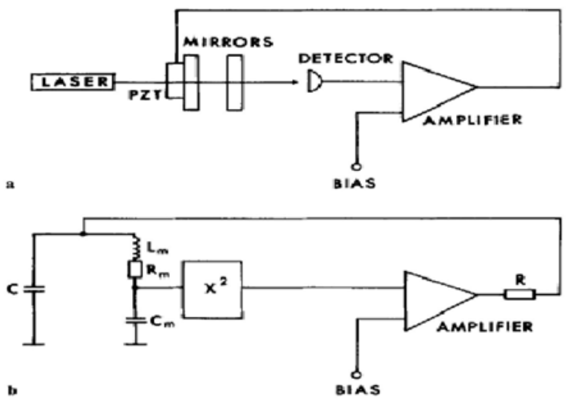


FIG. 3-1 – **a)**Système optique. **b)**Modèle électronique.

La dynamique de cette circuit est donnée par l'équation differentielle suivante :

$$U''' = -U''(\frac{L}{R} + R_m C) - U'(\frac{R_m}{R} + \frac{C}{C_m} + 1) - \frac{1}{RC_m}U + \frac{\vartheta^2}{RC_m}(U-\mu)^2$$

tel que U est le voltage dans la capacité, R resistance, R_m resistance variable, C capacité ; et C_m capacité variable, L indictance, ϑ gaine, μ bias.
Par un changement d'inconnue on obtient le système différentiele suivant :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = z \\ z' = -az - y + bx(1-x) \end{cases}, \text{ tq } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } a, b \in \mathbb{R}_+^*$$

Dans la réfference [10] les auteurs ont modifier ce système pour avoir un nouveau attracteur chaotique plus important, le système modifier est le suivant :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = z \\ z' = -az - y + bx(1-x^2) \end{cases} \tag{3.1}$$

qui sera étudiée dans cette section.

Etude théorique :

Pour l'étude de la stabilité nous allons appliquer la méthode indirecte de Lyapunov qui consiste a calculer la matrice jacobienne du système et édentifier le signe des parties réelles de ses valeurs propres.

Considerons alors le système (3.1), on pose $f(x) = \begin{pmatrix} y \\ z \\ -az - y + bx(1-x^2) \end{pmatrix}$.

Les points d'équilibre $\tilde{x}$ sont donnés par l'équation $f(\tilde{x}) = 0$, qui donne après résolution

$\tilde{x}_1 = (0,0,0)$, $\tilde{x}_2 = (1,0,0)$ et $\tilde{x}_3 = (-1,0,0)$. La matrice jacobienne de ce système en $\tilde{x} = (x_{eq}, y_{eq}, z_{eq})$ est

$$Df(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \beta(1-3x_{eq}^2) & -1 & -\alpha \end{pmatrix},$$

son èquation caractéristique est

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \lambda - \beta(1 - 3x_{eq}^2) = 0.$$

Pour étudier les signes des parties réelles des valeurs propres on applique le critère de Routh-Hurwitz sur le polynôme

$$P(\lambda) = \lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \lambda - \beta(1 - 3x_{eq}^2).$$

On a donc $a_1 = \alpha$, $a_2 = 1$ et $a_3 = -\beta(1 - 3x_{eq}^2)$.

Stabilité de $\tilde{x}_1$ **:**

$$P_{\tilde{x}_1}(\lambda) = \lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \lambda - \beta,$$

$a_1 = \alpha$, $a_2 = 1$ et $a_3 = -\beta < 0$ alors il y a au moins une valeur propre à partie réelle positive donc $\tilde{x}_1$ est instable pour touts $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Stabilité de $\tilde{x}_2$, $\tilde{x}_3$ **:**

$$P_{\tilde{x}_2,\tilde{x}_3}(\lambda) = \lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \lambda + 2\beta,$$

$a_1 = \alpha$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 2\beta$.
Si $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\alpha > 2\beta$ alors $\tilde{x}_2$ et $\tilde{x}_3$ sont asymptotiquements stables.

Etude némurique

Dans cette section prend $\alpha = 0.5$.

En utilisant différentes conditions initiales nous avons résolu le système numériquement pour quelques valeurs du paramètre β, les résultats sont représentés dans les figures (3-2 et 3-3)

Pour $\beta = 0.35$, la figure (3-2) montre que le point fixe est instable (car $a_3 = -0.35 < 0$) comme il a été preuvé théoriquement.

Pour $\beta = 0.2$, la figure (3-3) montre que le point fixe est stable
(car $\alpha = 0.5 > 2\beta = 0.4$) ce qui confirme l'etude qualitative vu précidement.

La figure (3-2) Représente l'instabilité de $\tilde{x}_1$ à partire à deux conditions initiales.

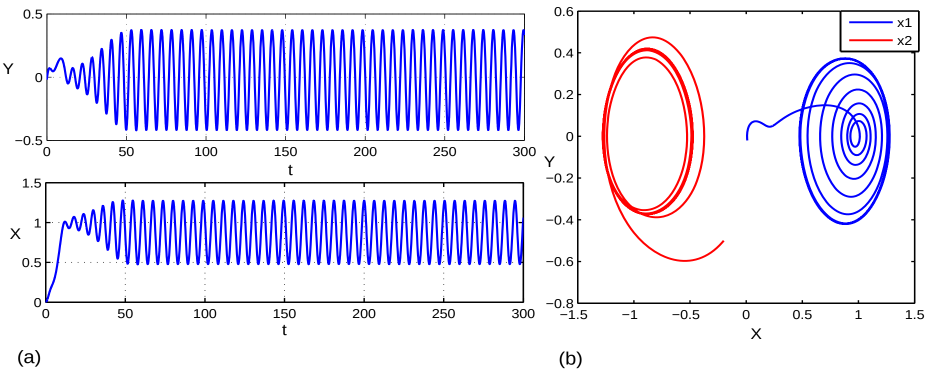


FIG. 3-2 – **a)** L'évolution temperel de x,y
b) Le portrait de phase de (3.1) $\alpha = 0.5$ et $\beta = 0.35$

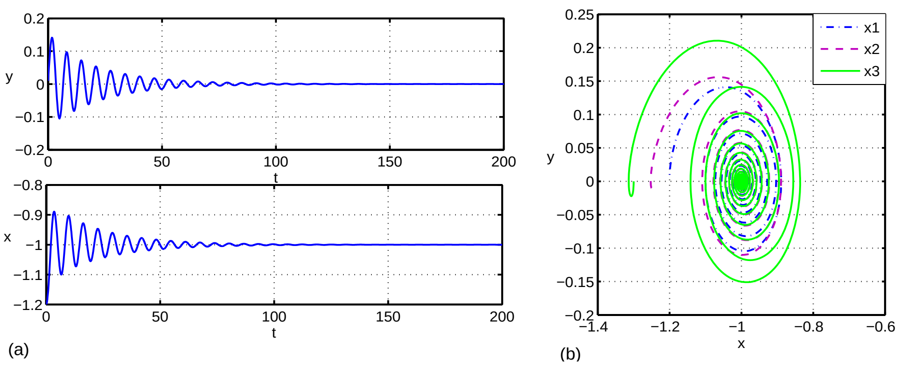


FIG. 3-3 – **a)** L'évolution temperel de x,y, **b)** Le portrait de phase du(3.1) $\alpha = 0.5$ et $\beta = 0.2$.

3.2 Le système de Lotka-volterra

le système de Lotka-volterra a été introduit pour modéliser l'évolution des population de deux espèses animales en compétition, par exemple des carpes et des brochetes dans un lac. Pour obtenir une description différentielle (évidemment approchée) de ce problème, on représente le nomber de carpes par une variable continue $x \in \mathbb{R}_+^*$et le nomber de brochets par une variable continue $y \in \mathbb{R}_+^*$, le système proposé est alors de la forme suivante : $\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \end{cases}$ ou a, b, c, d sont des constantes réeles strictement positives, ce système est en fait naturellement défini dans $\mathbb{R}^2$ mais nous limiterons dans un premier temps a sa restriction a l'ouvert $U = (\mathbb{R}_+^*)^2$.[7]

Etude théorique

Soit le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \end{cases} \tag{3.2}$$

Ce système admet un seul point d'équilibre qui est $\tilde{x} = (\frac{c}{b}, \frac{a}{d})$, la matrice jacobienne associée est

$$Df(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-bc}{d} \\ \frac{da}{b} & 0 \end{pmatrix},$$

et ses valeurs propres sont $\lambda_1 = i\sqrt{ac}$ et $\lambda_2 = -i\sqrt{ac}$. On a $\mathrm{Re}(\lambda_1) = \mathrm{Re}(\lambda_2) = 0$ donc $\tilde{x} = (\frac{c}{b}, \frac{a}{d})$ est un centre stable (car on a deux valeurs propres complexes conjigués à parties réelles nulles).

Etude numérique

Pour clarifier les résultats théoriques obtenus nous avons calculer numériquement la solution du systeme (3.2) à partire de quatre conditions initiales pour les valeurs des paramètres $a = b = c = d = 1$, les résultats obtenus sont représentés dans la figure (3-4) et on voi bien que le point d'équilibre $\tilde{x} = (1, 1)$ est un centre.

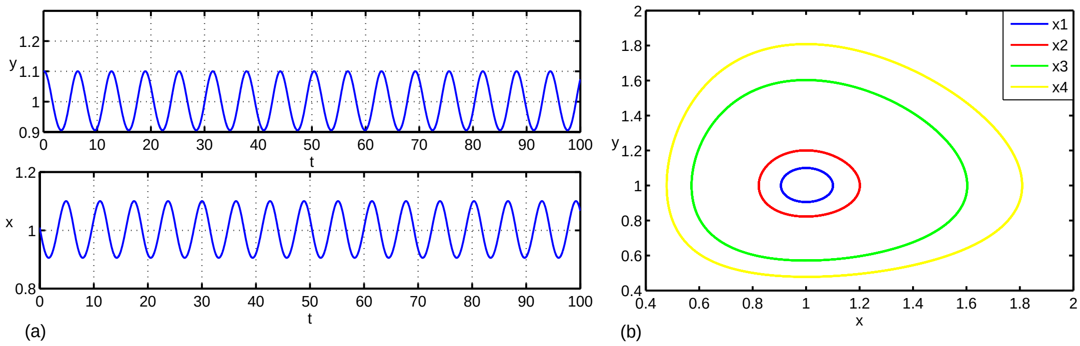


FIG. 3-4 – **a)** L'évolution temporel de x, y, **b)** Le portrait de phase du système (3.2) $a = b = c = d = 1$

Conclusion Générale

Nous rappelons que l'objectif de ce travail était d'approfondir les concepts de la stabilité d'une équation différentielle non linéaire grâce aux deux méthodes de Lyapunov.

Pour cela nous avons étudié à la finde notre projet deux systèmes différentiels, le premier est un système Optique modifié, et le deuxième c'est le système de Lotka-Volterra.Les tests numériques que nous avons faits ont confirmé les résultats théoriques obtenus.

Bibliographie

[1] A.Eljai, E.Zerrik, K.Ztot. "Systèmes dynamiques analyse et controle des système localisés", presses universitaires de perpigan, France, 2008.

[2] C. Gomez. "Système dynamique", claud.Gomez@inria.fr, 2007.

[3] F.Alin. "Constribution à la prédiction et au controle des comportements a periodiques dans les convertisseurs électromécaniques.Application de la théorie du chaos", Thèse doctora, 2005.

[4] G.Chicone. "ordinary défférential equations with Applications ", Spinger, 2000.

[5] H.Dong-Vu, C. Delcarte. "Bifurcations et chaos une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et mathématica", ellipses, paris, 2000.

[6] J-P.Demailly. "Annalyse Numérique est équations différentielles", EDP sciences, France, 2006.

[7] J-P.Marco, H.Boumaza. "Mathématiques L3 Analyse cours complet avec 600 tests et exercices corrigés", Pearson Education, France 2009.

[8] K. Bencharif. "Carictirésation de comportements chaotiques de système dynamique non linéaire", Mémoire de magistère, université mentouri-constantine-Algérie.

[9] M.Kesmia. "Phynomènes chaotiques dans des système dynamiques dissipatifs" Mémoire de magistère, université Mentouri-Constantine, Algérie, 2007.

[10] M.Abdlouhab, N.Hamri. "Anew choatic attractor from hybrid optical bistable systèm" Nonlinear Dyn, p 1-7, 2011.

[11] M.Aboldlouhab, N.Hamri, J.Wang. "Choas control of a franctional-ordre financia système" Math Prob in Engin, p1-18, 2010.

[12] R. Damchine. "Equations différentielles L3 de Mathématiques", 2009-2010.

[13] S. Aljbaae. "Méthodes de rung-kuttas", Mémoire de master, Observatoire de Paris, 2008-2009.

[14] W.Boyce,R.Diprima. "elementary differential Equations and Boundary value problèms".