الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Ref :……………

Centre Universitaire de MILA

Centre Universitaire de Mila

Institut des sciences et de la technologie **Département de Mathématiques et Informatique**

Etude du comportement périodique dans les systèmes fractionnaires

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Préparé par : - Safa Bourafa
- Sabah Benaldjia

Filière: Mathématiques **Spécialité**: Mathématiques Fondamentales et Appliquées

Soutenue le……. Juin 2013 devant le jury composé de :

Président :	N. Hamri	Professeur	C. U. Mila
Encadreur :	M. Abdelouahab	Maître assistant (A)	C. U. Mila
Examinateur :	W. Laouira	Maître assistant (A)	C. U. Mila

Année universitaire : 2012/2013

Remerciments

Avant tout, nous remercions **ALLAH** tout puissant de nous avoir donné la volonté et le courage de mener ce travail.

D'une façon toute particulière, On tient à remercier notre encadreur Mr Mohammed-Salah AbdeAlouhab, pour nous avoir fait travailler sur un Projet aussi intéressant et riche. Nous lui sommes reconnaissants tout particulièrement pour la confiance qu'il nous a témoignée et la liberté qui nous a laissé. Nous remercions le professeur Nasr-eddine Hamri ait accepté de présider le Jury de ce travail. Nous remercions aussi Madame Laouira Widad pour avoir acceptée d'examiner ce travail.

Nous tenons également à exprimer notre gratitude aux nombreuses personnes qui nous ont apporté leur aide précieuse avec beaucoup de gentillesse.

Nous remercions aussi tous ceux qui, tout au long de ces années d'études, nous ont encadrés, observé, aidé, conseillé et même supporté.

On tient également à remercier ici toutes les personnes, les amis, dont on a croisé le chemin au l'institut des sciences et de technologie de Mila et ailleurs.

Enfin, on souhaite exprimer toute notre gratitude à l'ensemble des personnes, qui ont contribué largement à son aboutissement

SABAH ET SAFA

Table des matières

Table des figures

Introduction

La théorie des équations différentielles fractionnaires a émergé comme un domaine intéressant à explorer ces dernières années. Notons que cette théorie à de nombreuses applications, dans la description de nombreux évènements dans le monde réel. Par exemple les équations différentielles fractionnaires sont souvent appliqués dans l'ingénierie, la physique[18], la chimie, la biologie,...etc.
Dans la littérature, on attribue souvent le nom de la dérivation fractionnaire à la généralisation de la dérivation à un ordre quelconque, entier, réel ou complexe. [12]
La question des dérivées fractionnaires est été abordée en 1695 par Leibniz dans une lettre adressé à l'Hôpital, mais lorsque celui-ci lui demande quelle pourrait être la dérivées d'ordre un demi de la fonction $x(t)$?, Leibniz répond que cela mène à un paradoxe dont, un jour on tirera des conséquences utiles.

De nombreux mathématiciens ont été penchés sur cette question, en particulier Euler (1730), Fourier (1822), Abel (1823), Liouville (1832), Riemann (1847) [7, 10].
L'idée du calcul fractionnaire consiste a généraliser les opérateurs d'intégration et de différentiation en utilisant un seul opérateur fondamental ${}_aD_t^\alpha$ où a et t sont les bornes de l'opérateur, et on a :

$$
{}_aD_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}; \quad \alpha > 0 \\ 1; \qquad\quad \alpha = 0 \\ \int\limits_a^t (d\tau)^{-\alpha}; \alpha < 0 \end{cases} ;
$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ est l'ordre de l'opération.
Dans ce travail nous présentons quelques notions fondamentales sur les équations différentielles d'ordre fractionnaire puis on fera des études sur l'existence ou non existence des solutions périodiques de ces équations.
Ce mémoire comprend quatre chapitres :

Dans le premier chapitre : Nous donnerons les notions de base de la dérivation d'ordre fractionnaire.

Dans le deuxième chapitre : On présentera l'étude des équations différentielles d'ordre fractionnaire analytiquement et numériquement.

Dans le troisième chapitre : Nous discutons le problème d'existence ou non existence des solutions périodiques.

Le quatrième chapitre : Est consacré à l'application des notions présentées dans les trois chapitres sur deux systèmes différentiels d'ordre fractionnaire..

Chapitre 1

Les dérivées fractionnaires

En mathématiques, le calcul fractionnaire est une branche de l'analyse qui étudier la possibilité qu'un opérateur différentiel puisse être élevé à un ordre non entier. Par ce procédé On peut définir des dérivées et des intégrations fractionnaires. Qui rentrent dans le cadre plus générale des opérateurs pseudo-différentiels.
Les dérivées fractionnaires sont utilisées par exemple dans certains domaines de la physique faisant intervenir des phénomènes de diffusion comme l'électromagnétisme, l'acoustique ou la thermique, en définissant des opérateurs pseudo-différentiels diffusifs, avec des conditions au bord à géométrie fractale.

1.1 Préliminaires

Dans cette section nous présentons quelques outils de base qui ils sont bien détaillés dans [4, 8, 11].

1.1.1 La fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma qui prolonge la factoriel aux valeurs non entières.

Définition 1.1.
La fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} dt;\ \Re(z) > 0$$

Quelques propriétés de la fonction Gamma

– **Propriété fondamentale :**

Intégrons par parties la formule d'Euler :

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} dt,\\ &= \frac{1}{z} t^z \mathrm{e}^{-t}|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} \frac{t^z}{z} dt,\\ &= \frac{1}{z} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^z dt,\\ &= \frac{1}{z}\Gamma(z+1).\end{aligned}$$

Donc

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{1.1}$$

C'est la relation de récurrence de la fonction Γ.
Cette formule permet de calculer $\Gamma(z)$ pour $z > 0$ quelconque si on connait $\Gamma(z)$ pour z variant dans un intervalle de longueur 1, (par exemple $z \in [1, 2]$).
Mais cette relation de récurrence permet aussi de définir $\Gamma(z)$ pour les valeurs négatives de z.

– **Prolongement de $\Gamma(z)$ pour z négatives :**

Supposons $-1 < z < 0$ donc $0 < z + 1 < 1$.

Dans ce cas $\Gamma(z + 1)$ est bien définie par la formule d'Euler, mais pas $\Gamma(z)$.

Il convient alors de définir $\Gamma(z)$ par la relation

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}.$$

Et tendon le procédé de proche en proche.
Ainsi pour $-(n-1) < z < -n$ (n entier positif ou nul), on aura

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)};\ 0 < z+n+1 < 1$$

La fonction Gamma généralise la factorielle car $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\Gamma(z)$ est indéfinie pour toutes les valeurs entières négatives.

- La figure (1.1) représente le graphe de la fonction Gamma d'Euler

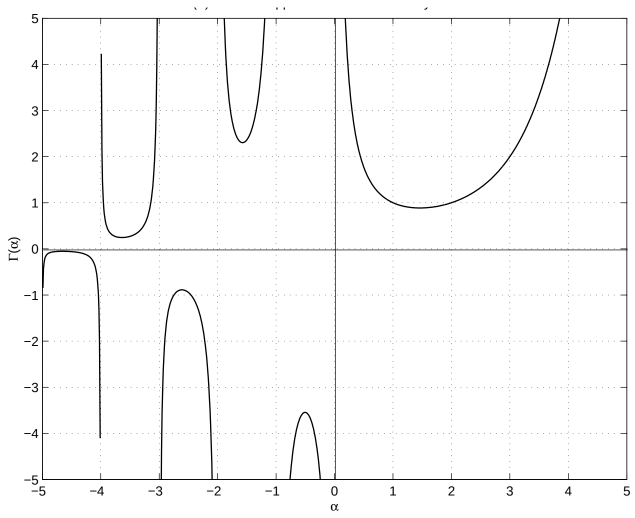

FIGURE 1.1: La fonction Gamma d'Eleur pour $z = \alpha$

Définition 1.2. (La fonction Bêta)
La fonction Bêta d'Euler est définie par l'intégrale suivante :

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt;\ (\Re(x) > 0;\ \Re(y) > 0).$$

La relation entre la fonction Bêta d'Euler et la fonction Gamma est donnée par :

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

1.1.2 La fonction de Mittag-Leffler

La fonction de Mittag-Leffler est une fonction importante pour le calcul fractionnaire. Son rôle est analogue à celui joué par la fonction exponentielle dans le cas du calcul différentiel classique.

* La fonction de Mittag-Leffler à un paramètre est définie par :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}\ ;\ \alpha > 0$$

* La fonction de Mittag-Leffler avec deux paramètres α et β, est définie par :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}\ ;\ \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

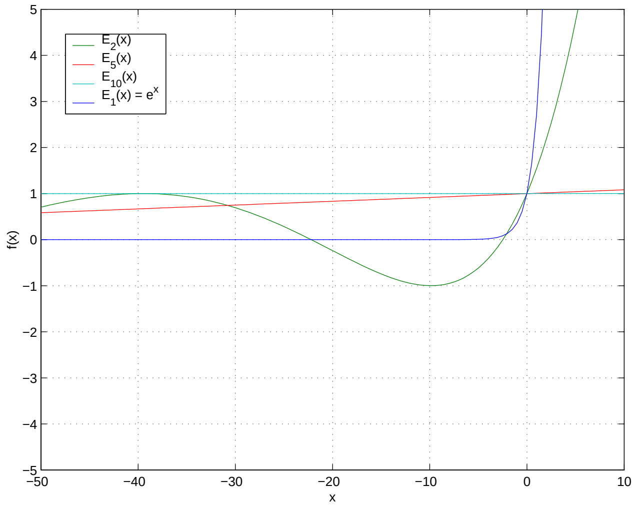

FIGURE 1.2: La fonction de Mittag-leffler pour $z = x$, $\alpha > 0$ et $\beta = 1$.

Remarque 1.3. :

La fonction exponentielle usuelle correspond à la valeur $\alpha = 1$

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp(z)$$

- La figure (1.2) représente le graphe de la fonction de Mittag-Leffler.

1.1.3 La transformée de Laplace

Soit, La transformée de Laplace $F(s)$ d'une fonction $f(t)$ est définie par

$$F(s) = L\{f(t), s\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \tag{1.2}$$

La fonction originale $f(t)$ peut être obtenue par la transformée inverse de Laplace de $F(s)$.

$$f(t) = L^{-1}(F(s)) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{-st} F(s) ds;\ c = \Re(s) > c_0 \tag{1.3}$$

où c_0 est l'indice de convergence de l'intégrale (1.3).
Pour l'existence de l'intégrale (1.2) la fonction $f(t)$ doit être d'ordre exponentiel c_0, ce qui veut dire qu'il existe deux constantes positives M et T telles que :

$$e^{-c_0 t} \mid f(t) \mid \leq M \text{ pour tout } t > T$$

Le produit de convolution des deux fonctions f et g est donné par :

$$\begin{aligned} f(t) * g(t) &= \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau, \\ &= \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau, \end{aligned} \tag{1.4}$$

et sa transformée de Laplace est donnée par :

$$L\{f(t) * g(t), s\} = F(s)G(s), \tag{1.5}$$

sous l'hypothèse que les fonctions $F(s)$ et $G(s)$ existent.

La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre entier n de $f(t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} L\{f^{(n)}(t), s\} &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \\ &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0). \end{aligned} \tag{1.6}$$

1.2 L'intégration et la dérivation d'ordre fractionnaire

Il ya plusieurs approches pour la dérivation fractionnaire, nous allons souligner deux approches qui sont fréquemment utilisées dans les applications.

1.2.1 la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Dans cette section nous présentons la définition de l'intégrale et de la dérivée d'ordre arbitraire au sens de Riemann-Liouville, et quelques propriétés [2].

Soit $f : [a, b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue, b peut être fini ou infini.

Définition 1.4.
On appelle dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $p \in \mathbb{R}$ de la fonction f, la fonction ${}_aD_t^p f$ donner par :

$${}_aD_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(-p+n+1)}(\frac{d}{dt})^{n+1} \int_a^t (t-\tau)^{n-p} f(\tau)d\tau \tag{1.7}$$

où $n \leq p < n+1$ et $t > a$.

1.2.1.1 Intégrale d'ordre arbitraire

Pour étendre la notion d'n-uple intégration aux valeurs non-entières n, on peut démarrer de la formule de Cauchy :

$$f^{(-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \tag{1.8}$$

et remplacer l'entier n par un réel $p > 0$

$${}_aD_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau. \tag{1.9}$$

Dans (1.8) l'entier n doit être supérieur ou égale à 1 ; la condition correspondante pour p est plus faible, pour l'existence de l'intégrale de Riemann-Liouville (1.9) on doit avoir $p > 0$.

Exemple 1.1. *:*
Considérons la fonction $f(t) = t^q$.
On a

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{-p} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-\tau)^{p-1} \tau^q d\tau. \end{aligned}$$

On utilisant le changement de variable $\tau = xt$ donc $t - \tau = (1-x)t$. On obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-\tau)^{p-1} \tau^q d\tau &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^1 (1-x)^{p-1} t^{p-1} x^q t^{q+1} dx \\ &= \frac{t^{p+q}}{\Gamma(p)} \int_0^1 (1-x)^{p-1} x^q dx \\ &= \frac{t^{p+q}}{\Gamma(p)} \beta(p, q+1) \\ &= t^{p+q} \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+1)} \end{aligned}$$

Si $f(t) = K$ alors ${}_0D_t^{-p} f(t) = \frac{K}{\Gamma(p+1)} t^p$.

Proposition 1.5. *: Soient $f \in C^0([a,b])$, $p > 0$. Alors on a*

$$\lim_{p \longrightarrow 0} ({}_aD_t^{-p} f(t)) = f(t). \tag{1.10}$$

Proposition 1.6. *: Soient $f \in C^0([a,b])$, $p > 0$ et $q > 0$. Alors*

$${}_aD_t^{-p}({}_aD_t^{-q} f(t)) = {}_aD_t^{-(p+q)} f(t) = {}_aD_t^{-q}({}_aD_t^{-p} f(t)). \tag{1.11}$$

Démonstration. 1. On a f est continue sur $[a,b]$ donc par définition :

$$\begin{aligned}
&\forall\, \epsilon > 0;\ \exists\, \delta > 0 \ tel\ que\ \forall t \in [a,b]; \forall \tau \in [a,b];\\
&|\tau - t| < \delta \ \Rightarrow |f(\tau) - f(t)| < \epsilon.\\
{}_aD_t^{-p} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1}(f(\tau) - f(t))d\tau + \frac{f(t)}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} d\tau,\\
&= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{p-1}(f(\tau) - f(t))d\tau,\\
&+ \frac{1}{\Gamma(p)} \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{p-1}(f(\tau) - f(t))d\tau + \frac{f(t)(t-a)^p}{\Gamma(p+1)},
\end{aligned}$$

On prend

$$I_1 = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{p-1}(f(\tau)-f(t))d\tau \text{ et } I_2 = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{p-1}(f(\tau)-f(t))d\tau.$$

Donc

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{p-1} \mid f(\tau) - f(t) \mid d\tau,\\
&\leq \frac{M}{\Gamma(p)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{p-1} d\tau = \frac{M}{\Gamma(p+1)}(-\delta^p + (t-a)^p),
\end{aligned}$$

où $M = 2 \sup\limits_{x \in [a,t]} \mid f(x) \mid$.
Alors, pour tout $\delta > 0$ fixé

$$\lim_{\delta \to 0} \mid I_1 \mid = 0 \tag{1.12}$$

$$\mid I_2 \mid < \frac{\epsilon}{\Gamma(p)} \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{p-1} d\tau = \frac{\epsilon}{\Gamma(p+1)} \delta^p,$$

et en tenant compte du fait que $\epsilon \longrightarrow 0$ lorsque $\delta \longrightarrow 0$, nous obtenons pour tout $p \geq 0$

$$\lim_{\delta \to 0} \mid I_2 \mid = 0 \tag{1.13}$$

Prenons maintenant un $\epsilon > 0$ arbitraire et choisissons δ tel que :

$$|I_2| < \epsilon. \tag{1.14}$$

En considérant

$$\begin{aligned}
&|_a\, D_t^{-p} f(t) \ - f(t) \,|\leq|\, I_1 + I_2 + f(t)(\frac{(t-a)^p}{\Gamma(p+1)} - 1)\,|, \\
&\leq|\, I_1 \,|+|\, I_2 \,|+|\, f(t) \,||\, \frac{(t-a)^p}{\Gamma(p+1)} - 1 \,|,
\end{aligned}$$

et en tenant compte des limites (1.13) et(1.12) et l'estimation (1.14), nous obtenons

$$\lim_{p\to 0} \sup |_a\, D_t^{-p} f(t) \ - f(t) \,|\leq \epsilon,$$

où ϵ peut être, choisi assez petit que l'on désire. Ainsi

$$\lim_{p\to 0} \sup |\ \ {}_aD_t^{-p} f(t) - f(t) \,| = 0,$$

et (1.10) a lieu si $f(t)$ est continue pour $t \geq a$.

2. Par définition on a :

$$\begin{aligned}
{}_aD_t^{-p}({}_aD_t^{-q} f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^t (t-\tau)^{q-1} ({}_aD_\tau^{-p} f(\tau)) d\tau, \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_a^t (t-\tau)^{q-1} d\tau \left(\int_a^\tau (\tau - x)^{p-1} f(x) dx \right), \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_a^t f(x) dx \int_x^t (t-\tau)^{q-1} (\tau - x)^{p-1} d\tau, \\
&= \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_a^t (t-x)^{p+q-1} f(x) dx, \\
&= \ {}_aD_t^{-p-q} f(t).
\end{aligned}$$

Pour calculer l'intégrale de x à t, nous avons utilisé le changement de variable $\tau = x + y(t-x)$, ce qui nous permet de l'exprimer en termes de la fonction Bêta.

Evidement, on peut interchanger p et q, nous avons alors

$${}_aD_t^{-p}({}_aD_t^{-q} f(t)) = \ {}_aD_t^{-(p+q)} f(t) = \ {}_aD_t^{-q}({}_aD_t^{-p} f(t))$$

$\square$

1.2.1.2 La dérivée d'ordre arbitraire

Soit $n-1 \leq p < n$; et f une fonction intégrable sur $[a, b]$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $p > 0$ de la fonction f est :

$$\begin{aligned} {}_aD_t^p f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau, \qquad (1.15) \\ &= \frac{d^n}{dt^n} ({}_aD_t^{-(n-p)} f(t)). \end{aligned}$$

Si $p = n-1$, alors nous avons une dérivée conventionnelle d'ordre $n-1$:

$${}_aD_t^{n-1} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} ({}_aD_t^{-1} f(t)) = f^{(n-1)}(t).$$

- **Quelques propriétés des dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville :**

1. ${}_aD_t^p ({}_aD_t^{-p} f(t)) = f(t)$.
   Cette propriété et peut être la plus importante, de la dérivée au sens de Riemann-Liouville pour $p > 0$; $t > a$.
2. ${}_aD_t^{-p} ({}_aD_t^p f(t)) = f(t) - \sum_{j=1}^n \left[{}_aD_t^{p-j} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)}$; $p > 0$; $t > a$.
3. En générale on a :
   pour $p \geqslant q > 0$:
   $${}_aD_t^p ({}_aD_t^{-q} f(t)) = {}_aD_t^{p-q} f(t),$$
   et
   $${}_aD_t^{-q} ({}_aD_t^p f(t)) = {}_aD_t^{p-q} f(t) - \sum_{j=1}^n \left[{}_aD_t^{p-j} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(1+q-j)}.$$
   La différentiation et l'intégration fractionnaires au sens de Riemann-Liouville ne commutent pas en général.
4. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, On a :
   $$\frac{d^n}{dt^n} ({}_aD_t^p f(t)) = {}_aD_t^{n+p} f(t)$$
   mais
   $${}_aD_t^p \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) = {}_aD_t^{p+n} f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-p-n}}{\Gamma(j+1-p-n)}$$

Donc l'opérateur de dérivation fractionnaire ${}_aD_t^p$ de Riemann-Liouville commute avec $\frac{d^n}{dt^n}$ seulement si $f^{(j)}(a)=0$; $(j=0,1,\cdots,n-1)$.

5. Soit $(m-1\leqslant p<m)$ et $(n-1\leqslant q<n)$, on a

$$ {}_aD_t^p\left({}_aD_t^q f(t)\right)=\left({}_aD_t^{p+q}f(t)\right)-\sum_{j=1}^{n}\left[{}_aD_t^{q-j}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-p-j}}{\Gamma(1-p-j)}, \quad (1.16) $$

et

$$ {}_aD_t^q\left({}_aD_t^p f(t)\right)=\left({}_aD_t^{p+q}f(t)\right)-\sum_{j=1}^{m}\left[{}_aD_t^{p-j}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-q-j}}{\Gamma(1-q-j)}. \quad (1.17) $$

En tenant conte des relations (1.16) et (1.17) en déduit que dans le cas générale les opérateurs ${}_aD_t^p$ et ${}_aD_t^q$ de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville ne commutent que si $p=q$ ou $f^{(j)}(a)=0$ $(j=1,2,\cdots,r-1)$ où $r=max(n,m)$.

Exemple 1.2. *:*

1. Considérons la fonction $f(t)=(t-a)^q$.

$$ {}_aD_t^p f(t)=\frac{d^n}{dt^n}\left({}_aD_t^{-(n-p)}f(t)\right)\ ; \quad (n-1)\leqslant p<n $$

On a :

$$ \begin{aligned} {}_aD_t^{-(n-p)}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}f(\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^q d\tau \end{aligned} $$

Pour calculer cette intégrale nous avons utilisé le changement de variable $\tau=a+x(t-a)$ donc $t-\tau=(t-a)(1-x)$.
Alors

$$ \begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^q d\tau &= \frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_0^1 (t-a)^{n-p-1}(1-x)^{n-p-1}x^q(t-a)^{q+1}dx \\ &= \frac{(t-a)^{n-p+q}}{\Gamma(n-p)}\int_0^1 (1-x)^{n-p-1}x^q dx, \\ &= \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(n+q-p+1)}(t-a)^{n-p+q}, \end{aligned} $$

donc

$$ {}_aD_t^p f(t)=\frac{d^n}{dt^n}\left((t-a)^{n-p+q}\frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(n+q-p+1)}\right)=\frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-p+1)}(t-a)^{q-p}. $$

Si $f(t) = K$ (constant). Alors

$$\begin{aligned} {}_aD_t^p f(t) &= \frac{d^n}{dt^n}\left({}_aD_t^{-(n-p)}K\right), \\ &= \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{K}{\Gamma(n-p+1)}(t-a)^{n-p}\right), \\ &= \frac{K}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p}. \end{aligned}$$

1.2.1.3 La transformée de Laplace de la dérivée au sens de Riemann-Liouville

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville peut notamment s'écrire comme le produit de convolution de la fonction $g(t) = t^{p-1}$ et $f(t)$.

On a

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{-p} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau)d\tau, \qquad (1.18) \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)}(g(t) * f(t)), \end{aligned}$$

et comme la transformée de Laplace de la fonction $g(t) = t^{p-1}$ est donnée par

$$G(s) = L\{t^{p-1}, s\} = \Gamma(p)s^{-p},$$

alors en utilisant la formule (1.5), on obtient la transformée de Laplace de l'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

$$L\{{}_0D_t^{-p} f(t), s\} = s^{-p}F(s), \tag{1.19}$$

Pour obtenir la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction $f(t)$ posons

$${}_0D_t^p f(t) = g^{(n)}(t)$$

$$g(t) = {}_0D_t^{-(n-p)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_0^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau)d\tau; \; n-1 \leq p < n.$$

L'utilisation de la formule (1.6) donne :

$$L\{{}_0D_t^p f(t), s\} = s^n G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0), \tag{1.20}$$

où

$$G(s) = s^{-(n-p)} F(s). \tag{1.21}$$

A partir de la définition de la dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville il vient

$$g^{(n-k-1)}(t) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} \,{}_0D_t^{-(n-p)} f(t) = \,{}_0D_t^{p-n-1} f(t) \tag{1.22}$$

En substituant (1.21) et (1.22) dans (1.20). Nous obtenons l'expression finale de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

$$L\{{}_0D_t^p f(t), s\} = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [{}_0D_t^{p-k-1} f(t)]_{t=0};\ n-1 \le p < n \tag{1.23}$$

1.2.2 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Dans cette section nous présentons la définition et quelques propriétés des dérivées fractionnaires au sens de Caputo.

Définition 1.7.
Soit $f \in C^n([a,b])$, $p > 0$ la dérivée fractionnaire de la fonction f au sens de Caputo est défini par :

$${}_a^cD_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{p-n+1}} = \,{}_aD_t^{-(n-p)}\left(\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right) \tag{1.24}$$

où $n-1 < p < n$ et $t > a$.

Remarque 1.8. :
La relation entre la dérivée au sens de Caputo et la dérivée au sens de Riemann-Liouville est donnée par [4] :

$${}_a^cD_t^p f(t) = \,{}_aD_t^p f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-p+1)} (t-a)^{k-p}. \tag{1.25}$$

Lemme 1.9. *: Soit $p > 0$. On a*

a) Si $f \in C[a,b]$ *alors*

$${}_a^cD_t^p({}_aD_t^{-p}f(t)) = f(t)$$

b) Si $f \in C^n[a,b]$ *alors*

$${}_aD_t^{-p}({}_a^cD_t^pf(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k,$$

En particulier, si $0 < p \leq 1$ *et* $f(t) \in C[a,b]$ *alors*

$${}_aD_t^{-p}({}_a^cD_t^pf(t)) = f(t) - f(a).$$

Propriétés : Soit $f \in C^{n+1}[a,b]$

1. La dérivée de au sens de Caputo d'une fonction constante est nulle par contre la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction constante n'est pas nulle.
2. $\lim\limits_{p \longrightarrow n}({}_a^cD_t^pf(t)) = f^{(n)}(t)\,;\ n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq n-1 < p < n$
3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $n-1 < p < n\,$; on a

$${}_a^cD_t^p({}_a^cD_t^mf(t)) = {}_a^cD_t^{p+m}f(t)$$

mais

$${}_a^cD_t^p({}_a^cD_t^mf(t)) = {}_a^cD_t^m({}_a^cD_t^pf(t)) = {}_a^cD_t^{m+p}f(t)$$

seulement si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = n, n+1, \ldots, m$.

Démonstration. :

1. Si $f(t) = K$ (constant) alors $f^{(k)}(t) = 0$ pour $k = 1, \ldots, n$ donc

$${}_a^cD_t^pK = \frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_a^t \frac{f^{(k)}(a)}{(t-\tau)^{p-n+1}}d\tau = 0.$$

Par contre on a

$$ {}_aD_t^pK = \frac{Kt^{-p}}{\Gamma(1-p)}. $$

2.

$$ \begin{aligned} \lim_{p\longrightarrow n}({}_a^cD_t^pf(t)) &= \lim_{p\longrightarrow n}(\frac{f^{(n)}(a)(t-a)^{n-p}}{\Gamma(n-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p+1)}\int_a^t (t-\tau)^{n-p}f^{(n+1)}(\tau)d\tau) \\ &= f^{(n)}(a) + \int_a^t f^{(n+1)}(\tau)d\tau \\ &= f^{(n)}(t);\ n = 1, 2, \ldots \end{aligned} $$

3.

a) Montrons que :

$$ {}_a^cD_t^p({}_a^cD_t^mf(t)) ={}_a^c D_t^{m+p}f(t). $$

On a

$$ \begin{aligned} {}_a^cD_t^p({}_a^cD_t^mf(t)) &= \ {}_aD_t^{-(n-p)}{}_aD_t^n({}_a^cD_t^mf(t)) \\ &= \ {}_aD_t^{-(n-p)}{}_aD_t^{n+m}f(t) \\ &= \ {}_aD_t^{n+m-(p+m)}{}_aD_t^{n+m}f(t) \\ &= \ {}_a^cD_t^{p+m}f(t). \end{aligned} $$

b) Montrons que :

$$ {}_a^cD_t^m({}_a^cD_t^pf(t)) = \ {}_a^cD_t^{m+p}f(t), $$

seulement si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = n, n+1, \ldots, m$. On a

$$\begin{aligned}
D^m({}_a^cD_t^p f(t)) &= D^m(D^p f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-p+1)}(t-a)^{k-p}), \\
&= D^m(D^p f(t)) - D^m(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-p+1)}(t-a)^{k-p}), \\
&= D^{p+m} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-p+1)} D^m (t-a)^{k-p}, \\
&= D^{p+m} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(p+m)+1)}(t-a)^{k-(p+m)}, \\
&= D^{p+m} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(p+m)+1)}(t-a)^{k-(p+m)}, \\
&- \sum_{k=n}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(p+m)+1)}(t-a)^{k-(p+m)}, \\
&+ \sum_{k=n}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(p+m)+1)}(t-a)^{k-(p+m)}, \\
&= D^{p+m} f(t) - \sum_{k=0}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(p+m)+1)}(t-a)^{k-(p+m)}, \\
&+ \sum_{k=n}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(p+m)+1)}, \\
&= {}^cD^{p+m} f(t) + \sum_{k=n}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(p+m)+1)}(t-a)^{k-(p+m)}.
\end{aligned}$$

Donc

$${}_a^cD_t^m({}_a^cD_t^p f(t)) ={}_a^c D_t^{m+p} f(t)$$

seulement si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = n, n+1, \ldots, m$.

$\square$

Remarque 1.10. : Soit $f \in C^n(I)$. On a

$${}_{-\infty}^{\;\;c}Df(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_{-\infty}^{t} \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{p-n+1}} d\tau = {}_{-\infty}D_t^p f(t); \;\; \forall t \in I = \mathbb{R}. \qquad (1.26)$$

La formule (1.26) montre que pour l'étude des processus équilibrés, la définition de Riemann-Liouville et celle de Caputo doivent donner les mêmes résultats [2].

Exemple 1.3.
Considérons la fonction $f(t) = (t-a)^{\beta}$ *tel que* $\beta > n$ *et* $n = [p] + 1$.

On a
$$ {}_{a}^{c}D_{t}^{p} f(t) = {}_{a}D_{t}^{p} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-p+1)} (t-a)^{k-p}. $$
Et
$$ f^{(k)}(a) = 0;\ \forall k = 0, 1, \ldots, n-1. $$
Donc
$$ \begin{aligned} {}_{a}^{c}D_{t}^{p} (t-a)^{\beta} &= {}_{a}D_{t}^{p} (t-a)^{\beta} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-p+1)} (t-a)^{\beta-p}. \end{aligned} $$
Et si $\beta = 0, 1, \ldots, n-1$ alors
$$ {}_{a}^{c}D_{t}^{p} (t-a)^{\beta} = 0. $$

1.2.2.1 La transformée de Laplace de la dérivée au sens de Caputo

Grâce à la relation (1.24), on arrive la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.
$$ L\{{}_{0}^{c}D_{t}^{p} f(t), s\} = s^{p} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{p-k-1} f^{(k)}(0);\ n-1 < p \leq n. \tag{1.27} $$

1.2.3 Propriétés des dérivées fractionnaires

Nous nous intéressons dans cette section aux propriétés d'intégration et de différentiation fractionnaire, qui sont souvent utilisées dans les applications [2].

1.2.3.1 Linéarité

Similairement à la différentiation d'ordre entier, la différentiation fractionnaire est une opération linéaire :
$$ D^{p}(\lambda f(t) + \beta g(t)) = \lambda D^{p} f(t) + \beta D^{p} g(t), $$

où D^p désigne n'importe quelle mutation de la différentiation fractionnaire considérée dans ce mémoire.
La linéarité de différentiation fractionnaire vient directement de la définition correspondante. par exemple pour la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre p; $(k-1 \leq p < k)$ définie par (1.15), on a :

$$\begin{aligned}
D^p(\lambda f(t)+\beta g(t)) &= \frac{1}{\Gamma(k-p)}\frac{d^k}{dt^k}\int_a^t (t-\tau)^{k-p-1}(\lambda f(\tau)+\beta g(\tau))d\tau,\\
&= \frac{\lambda}{\Gamma(k-p)}\frac{d^k}{dt^k}\int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} f(\tau)d\tau,\\
&+ \frac{\beta}{\Gamma(k-p)}\frac{d^k}{dt^k}\int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} g(\tau)d\tau,\\
&= \lambda D^p f(t) + \beta D^p g(t).
\end{aligned}$$

1.2.3.2 La règle de Leibniz pour les dérivées fractionnaires

La règle de Leibniz pour la dérivée fractionnaire est la suivante :
Si $f(t)$ est continue dans $[a,t]$ et $\varphi(t)$ admet $(n+1)$ dérivées continues dans $[a,t]$, alors la dérivée fractionnaire du produit $\varphi(t)f(t)$ est donnée par :

$$ {}_aD_t^p(\varphi(t)f(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\varphi^{(k)}(t)\,{}_aD_t^{p-k}f(t) - R_n^p(t);$$

où $\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)}{k!}$, $n \geq p+1$ et

$$R_n^p(t) = \frac{1}{n!\Gamma(-p)}\int_a^t (t-\tau)^{-p-1} f(\tau)d\tau \int_\tau^t \varphi^{(n+1)}(\xi)(\tau-\xi)^n d\xi,$$

avec

$$\lim_{n\to\infty} R_n^p(t) = 0,$$

si f et φ avec toutes ses dérivées sont continues dans $[a,t]$, alors la règle de Leibniz pour la dérivation fractionnaire est donnée par :

$$ {}_aD_t^p(\varphi(t)f(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k}\varphi^{(k)}(t)\,{}_aD_t^{p-k}f(t).$$

Chapitre 2

Equations différentielles d'ordre fractionnaire

Tout équation de la forme :

$$D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t));\ \ \alpha \in \mathbb{R}_+ \tag{2.1}$$

est une équation différentielle fractionnaire d'ordre α.

On dit que l'équation (2.1) est linéaire si

$$f(t, y(t)) = g(t)y(t) + h(t), \tag{2.2}$$

tel que g, h deux fonctions continues.
De plus si $h(t) = 0$ alors (2.1) est une équation différentielle fractionnaire linéaire homogène.

2.1 Théorème d'existence et unicité

Dans cette section nous allons étudier l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire [1].

Soient α un réel positif et $n = \lceil \alpha \rceil$ (où $\lceil \alpha \rceil = \min\{z \in \mathbb{Z} : z \geq \alpha\}$).
Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)), \\ D^{k}y(0) = y^{(k)}(0); \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \end{cases} \tag{2.3}$$

Théorème 2.1. *(existence et unicité)*
Soient $y_0^{(0)}, \dots, y_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}$, $h^* > 0$ et $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ (tel que $G = [0, h^*] \times \mathbb{R}$) est une fonction continue Lipshitzienne par rapport à y (i.e. il existe un constant $L > 0$ independent de t, y_1 et y_2 tel que $\mid f(t, y_1) - f(t, y_2 \mid \leq L \mid y_1 - y_2 \mid$), alors il existe une unique solution y du problème (2.3) tel que $y \in C[0, h^*]$.

En particulier ce théorème est applicable pour les équations linéaires (2.2), où $h, g \in C[0, h^*]$ car nous choisissons $L = \| f \|_\infty$.

Lemme 2.2.
La fonction $y \in C[0, h]$ est une solution du problème (2.3) si et seulement si y est solution de l'équation intégrale non linéaire de Volterra.

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau \tag{2.4}$$

Démonstration.
Premièrement supposons que y est solution de (2.4), on peut écrire cette équation sous la forme réduit :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + D_0^{-\alpha} f(t, y(t)).$$

En appliquant l'opérateur de différentiation D_0^α sur les deux cotés de cette relation on aura immédiatement que y est solution de l'équation différentielle (2.3).
Appliquons maintenant l'opérateur D_0^k; $0 \leq k \leq n-1$ sur l'équation de Volterra (2.4), on obtient

$$D_0^k y(t) = \sum_{j=0}^{n-1} D_0^k \frac{t^j}{j!} y_0^{(j)} + D_0^k D_0^{-k} D_0^{-(\alpha-k)} f(t, y(t)).$$

$D_0^k t^j = 0$ pour $j < k$ alors si $t = 0$ on a :

$$D_0^k y(0) = D_0^k \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} \bigg|_{t=0} + D_0^{-(\alpha-k)} f(t, y(t)) \Big|_{t=0}.$$

et comme $\alpha - k \geq 1$; l'intégrale est nul $D_0^{-(\alpha-k)} f(t, y(t)) \Big|_{t=0} = 0$; par suite $D_0^k y(0) = y_0^{(k)}$.

d'autre part on définit $z(t) = f(t, y(t))$ alors $z \in C[0, h]$ on récrit l'équation de la forme :

$$z(t) = f(t, y(t)) = {}^{c}D^{\alpha}y(t) = D_0^{\alpha}(y - T_{n-1}[y; 0])(t) = D_0^{n}\ D_0^{-(n-\alpha)}(y - T_{n-1}[y; 0])(t)$$

tel que $T_{n-1}[y; 0] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)}$ est le polynôme de Taylor de degré $n - 1$ pour la fonction f autour de 0.

En appliquant l'opérateur D_0^{-n} sur les deux membres de cette relation elle devient :

$$D_0^{-n} z(t) = D_0^{-(n-\alpha)}(y - T_{n-1}[y; 0])(t) + q(t).$$

Avec q un polynôme de degré ne dépassant pas $n - 1$.

Comme z est continue, la fonction $D_0^{-n} z$ a un zéro d'ordre au moins n à l'origine.

En outre la différence $y - T_{n-1}[y; 0]$ a la même propriété par construction.

Et donc la fonction $D_0^{-(n-\alpha)}(y - T_{n-1}[y; 0])$ doit avoir un zéro d'ordre n aussi.

Par suite le polynôme q a la même propriété mais comme il est de degré ne dépassant pas $n - 1$ il en résulte que $q = 0$, par conséquent

$$D_0^{-n} z(t) = D_0^{-(n-\alpha)}(y - T_{n-1}[y; 0])(t).$$

En appliquant l'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville $D_0^{n-\alpha}$ sur les deux membres de cette équation on obtient

$$y(t) - T_{n-1}[y; 0](t) = D_0^{-\alpha} z(t).$$

En substituant $z(t)$ et $y - T_{n-1}[y; 0](t)$ on retrouve l'équation de Volterra :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha - 1} f(\tau, y(\tau)) d\tau.$$

$\square$

2.2 Résolution analytique des équations différentielles d'ordre fractionnaires

En générale, les méthodes analytiques sont utilisées pour résoudre les équations différentielles fractionnaires linéaires par contre pour résoudre une équation différentielle fractionnaire non linéaire on utilise généralement des méthodes numériques. Dans cette section nous présentons la résolution analytique dans le cas unidimensionnelle [1] et multidimensionnelle [9].

2.2.0.3 Cas unidimensionnelle

Théorème 2.3.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; la solution générale du problème :

$$\begin{cases} D^{\alpha}y(t) = \lambda y(t) + q(t) \\ y^{(k)}(0) = y_0^{(k)} \qquad (k = 0, 1, \cdots, n-1) \end{cases} \tag{2.5}$$

où $q \in C[0, h]$, est sous la forme :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} u_k(t) + \tilde{y}(t). \tag{2.6}$$

Avec

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} D^{-\alpha}q(t) & si\ \lambda = 0 \\ \frac{1}{\lambda}\int_0^t q(t-\tau)u_0'(\tau)d\tau & si\ \lambda \neq 0 \end{cases} ;$$

où

$$u_k(t) = D^{-k}e_{\alpha}(t) \ \ tel\ que\ e_{\alpha}(t) = E_{\alpha}(\lambda t^{\alpha});\ \ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Démonstration.
Si $\lambda = 0$: Donc le problème (2.5) devient sous la forme

$$\begin{cases} D^{\alpha}y(t) = q(t) \\ y^{(k)}(0) = y_0^{(k)} \qquad (k = 0, 1, \cdots, n-1) \end{cases} .$$

On a $e_{\alpha}(t) = E_{\alpha}(0) = 1$, alors $u_k(t) = \frac{t^k}{k!}$ quelque soit k.
Donc d'après la relation (1.25)

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = D^{\alpha}y(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{y^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)}t^{k-\alpha} = q(t).$$

Donc

$$D^\alpha y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha} + q(t).$$

On applique l'intégrale de Riemann-Liouville d'ordre α sur les deux cotés

$$\begin{aligned} D^{-\alpha} D^\alpha y(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0) D^{-\alpha} t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + D^{-\alpha} q(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0) t^k}{k!} + D^{-\alpha} q(t). \end{aligned}$$

Donc

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} u_k(t) + \tilde{y}(t); \text{ où } \tilde{y}(t) = D^{-\alpha} q(t)$$

Si $\lambda \neq 0$: la preuve se faite en deux étapes (a) et (b) :

a) La fonction u_k satisfait l'équation différentielle homogène, c'est à dire : ${}^cD^\alpha u_k = \lambda u_k$, $\forall k = 1, \cdots, n-1$ et vérifie les conditions initiales $u_k^{(k)}(0) = \delta_{ij}$ (delta de Kronecker) pour $j, k = 0, \ldots, n-1$.

b) La fonction $\tilde{y}$ est une solution de l'équation différentielle non homogène avec les conditions initiales homogènes.

On commence par (a), nous savons que

$$e_\alpha(t) = E_\alpha(\lambda t^\alpha) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j t^{\alpha j}}{\Gamma(\alpha j + 1)}.$$

Donc

$$u_k(t) = D^{-k} e_\alpha(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j t^{\alpha j + k}}{\Gamma(\alpha j + 1 + k)}.$$

Montrons maintenant que u_k est une solution de l'équation différentielle non homogène.

$$\begin{aligned}
{}^cD^{\alpha}u(t) &= {}^cD^{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j t^{\alpha j+k}}{\Gamma(\alpha j+1+k)},\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{\Gamma(\alpha j+1+k)}\ {}^cD^{\alpha}t^{\alpha j+k},\\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^j}{\Gamma(\alpha(j-1)+1+k)}\ t^{\alpha(j-1)+k},\\
&= \lambda\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{\Gamma(\alpha j+1+k)}t^{\alpha j+k},\\
&= \lambda u_k(t).
\end{aligned}$$

Donc u_k est une solution de l'équation homogène.
Et $u_k^{(k)}(0) = D^kD^{-k}e_\alpha(0) = e_\alpha(0) = 1$.
Pour $j < k$ on a :

$$u_k^{(j)}(0) = D^jD^{-k}e_\alpha(0) = D^{-(k-j)}e_\alpha(0) = 0$$

Car e_α est une fonction continue.
Pour $j > k$:
On a

$$u_k^{(j)}(0) = D^jD^{-k}e_\alpha(0) = D^{j-k}e_\alpha(0) = 0.$$

On a

$$\begin{aligned}
\tilde{y}(t) &= \frac{1}{\lambda}\int_0^t q(t-\tau)u_0^{'}(\tau)d\tau,\\
&= \frac{1}{\lambda}\int_0^t q(t-\tau)e_\alpha^{'}(\tau)d\tau,\\
&= \frac{1}{\lambda}\int_0^t q(\tau)e_\alpha^{'}(t-\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Cet intégrale existe quelque soit t, car (q est une fonction continue et $e_\alpha^{'}$ intégrable), et est une fonction continue (par rapport à t) et $\tilde{y}(0) = 0$. De plus, pour $\alpha > 1$ (i.e. $n \geq 2$) d'après la règle standard (Annex-a) de la différentiation d'une intégrale qui dépend d'un paramètre on a :

$$D\tilde{y}(t) = \frac{1}{\lambda}\int_0^t q(\tau)e_\alpha^{''}(t-\tau)d\tau + \frac{1}{\lambda}q(t)\underbrace{e_\alpha^{'}(0)}_{=0}$$

De la même manière comme ci dessus (la continuité de q et la singularité faible de $e_\alpha^{''}$) on voit que $\tilde{y}^{'}(0) = 0$.
De la même manière

$$D^k\tilde{y}(t) = \frac{1}{\lambda}\int_0^t q(\tau)e_\alpha^{(k+1)}(t-\tau)d\tau \text{ pour } k = 0, \dots, n-1.$$

Donc $D^k\tilde{y}(0) = 0$.
Alors $\tilde{y}$ satisfait toutes les conditions initiales homogènes, et il reste a montrer que $\tilde{y}$ résoudre l'équation différentielle non homogène. Pour ce la on écrit

$$e_\alpha(u) = \frac{d}{du}e_\alpha(u) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^j u^{\alpha j-1}}{\Gamma(\alpha j)}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\tilde{y}(t) = \frac{1}{\lambda}\int_0^t q(\tau)e_\alpha^{'}(t-\tau)d\tau = \tilde{y}(t) &= \frac{1}{\lambda}\int_0^t q(\tau)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^j(t-\tau)^{\alpha j-1}}{\Gamma(\alpha j)}d\tau,\\ = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda^{j-1}\frac{1}{\Gamma(\alpha j)}\int_0^t q(\tau)(t-\tau)^{\alpha j-1}d\tau &= \sum_{j=1}^{\infty}\lambda^{j-1}D^{-\alpha j}q(t),\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}{}^cD^\alpha\tilde{y}(t) &= \sum_{j=1}^{\infty}\lambda^{j-1}\ {}^cD^\alpha D^{-\alpha j}q(t) = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda^{j-1}D^{-\alpha(j-1)}q(t),\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j D^{-\alpha j}q(t) = q(t) + \sum_{j=1}^{\infty}\lambda^j D^{-\alpha j}q(t),\\ &= q(t) + \lambda\tilde{y}(t).\end{aligned}$$

□

Exemple 2.1. *:*

On considère le problème :

$$\begin{cases} D^\alpha y(t) = -y(t) + 1, \\ y(0) = 0;\ y'(0) = 0. \end{cases} \tag{P}$$

On a : $\lambda = -1$ et $q(t) = 1$.

$y(t) = \sum_{k=0}^{1} y_0^{(k)} u_k(t) + \tilde{y}(t)$ tel que

$$\begin{aligned}
\tilde{y}(t) &= \frac{1}{\lambda}\int_0^t q(t-\tau)u_0^{'}(\tau)d\tau,\\
&= -\int_0^t u_0^{'}(\tau)d\tau,\\
&= -[E_\alpha(-\tau^\alpha)\mid_0^t,\\
&= -E_\alpha(-\tau^\alpha)+1,
\end{aligned}$$

et

$$\sum_{k=0}^{1} y_0^{(k)} u_k(t) = y(0)E_\alpha(-t^\alpha) + y'(0)\int_0^t E_\alpha(-\tau^\alpha)d\tau = 0.$$

Donc la solution générale de (P) est :

$$y(t) = 1 - E_\alpha(-t^\alpha).$$

2.2.0.4 Cas multidimensionnelle

On considère l'équation différentielle fractionnaire :

$$D^\alpha y(t) = Ay(t) + q(t), \tag{2.7}$$

avec $0 < \alpha < 1$; $A \in M_n(\mathbb{R})$ $y(t) \in \mathbb{R}^n$ et $q : [0,h] \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Pour résoudre le problème (2.7) on commence avec le problème homogène correspondant (i.e $q(t) = 0$; $\forall t \in [0,h]$).

Donc

$$D^\alpha y(t) = Ay(t). \tag{2.8}$$

- Si A admet des valeurs propres simples

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A, et $v_1, v_2, \ldots, v_n$ les vecteurs propres associes. Alors la solution de (2.8) est de la forme

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k E_\alpha(\lambda_k t^\alpha), \tag{2.9}$$

où $c_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, \ldots, n$.

Exemple 2.2. *: On considère le système suivant :*

$$D^\alpha y(t) = Ay(t),$$

tel que $y(t) \in \mathbb{R}^2$ *et* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs propres de A *sont :* $v_1 = (1, -3/2)^T$ *associés à* $\lambda_1 = -2$ *et* $v_2 = (1, 1)^T$ *associe à* $\lambda_2 = 3$.

La solution générale de ce système est

$$y(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \end{pmatrix} E_\alpha(-2t^\alpha) + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} E_\alpha(3t^\alpha).$$

Si $y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *alors* $c_1 = 2/5$ *et* $c_2 = 8/5$.

Donc

$$y(t) = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \end{pmatrix} E_\alpha(-2t^\alpha) + \frac{8}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} E_\alpha(3t^\alpha).$$

- Si A admet des valeurs propres multiple, par exemple λ de degré de multiplicité k donc on a deux cas :

* Si le nombre de vecteurs propres linéairement indépendants associé à λ est égale à k, dans ce cas la solution de (2.8) est de la forme (2.9).

* Si le nombre de vecteurs propres linéairement indépendants associé à λ est égale à m (où $m < k$) et dans ce cas les autres $(k - m)$ solutions qui sont linéairement indépendantes sont données par :

$$y^{(i)} = \sum_{j=m}^{i} u^{(j)} t^{(i-j)\alpha} E_\alpha^{(i-j)}(\lambda t^\alpha); \qquad \text{pour } i = m, \ldots, k,$$

tel que les vecteurs propres $u^{(i)}$ sont les solutions du système linéaire non homogène (Annex-b) :

$$(A - \lambda I)u^{(i+1)} = u^{(i)}.$$

Exemple 2.3.

On considère le système $D^\alpha y(t) = Ay(t)$ *tel que* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs propres de A sont : $v_1 = (-3, 4, 2)^T$ *associés à* $\lambda_1 = -1$ *et* $v_2 = (0, 1, -1)^T$ *associe à* $\lambda_2 = -2$.
Donc la solution générale est

$$y(t) = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} E_\alpha(-t^\alpha) + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} E_\alpha(2t^\alpha) + c_3 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t^\alpha E'_\alpha(2t^\alpha) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} E_\alpha(2t^\alpha) \right].$$

Remarque 2.4.
Soient $(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))^T$ la solution du problème homogène (2.8), alors la solution du problème non homogène (2.7) avec la condition initiale $y(0) = y_0$ est $(Y_I(t), Y_2(t), \ldots, Y_n(t))^T$ tel que [2]

$$Y_i(t) = y_i(t) + \int_0^t y_i(\tau - t) q_i(\tau) d\tau; \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

2.3 Résolution numérique des équations differentielles d'ordre fractionnaires

La résolution analytique des équations différentielle non linéaire d'ordre fractionnaire est impossible dans le cas général, alors on a recouru à des méthodes numériques.
Il existe deux classes de méthodes numériques pour la résolution d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire : les méthodes fréquentiel, et les méthodes temporel par exemple la méthode de Diethelm, la méthode d'Adams-Basheforth-Moulton et la méthode de décomposition d'Adomian (ADM) [6].
Dans notre travail nous allons utiliser la méthode d'Adams-Basheforth-Moulton (PECE) [1].

La méthode d'Adams-Basheforth-Moulton généralisée
La méthode d'Adams-Basheforth-Moulton est une méthode numérique introduite par Diethelm et Freed, basée sur l'équation de Volterra (2.4).
On suppose que y_j est l'approximation de $y(t_j)$ pour $j = 1, \ldots, k$ dans l'intervalle $[0, T]$.
Pour obtenir y_{k+1} on remplace l'intégrale dans l'équation de Volterra (2.4), en utilisant la formule de produit de quadrature des trapèzes où les nœuds t_j pour $j = 0, \ldots, k+1$ s'en prennent respectivement à la fonction $(t_{k+1} - .)^{\alpha-1}$.

Premièrement on obtient l'approximation :

$$\begin{aligned}\int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1}-\tau)^{\alpha-1} g(\tau)d\tau &\backsimeq \int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1}-\tau)^{\alpha-1} \tilde{g}_{k+1}(\tau)d\tau \\ &= \sum_{j=0}^{k+1} a_{j,k+1} g(t_j)\end{aligned}$$

où $\tilde{g}_{k+1}$ est une interpolation linéaire de g (avec $g(t) = f(t, y(t))$),

$$a_{j,k+1} = \int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1}-\tau)^{\alpha-1} \Phi_{j,k+1}(\tau)d\tau \tag{2.10}$$

$$\text{et } \Phi_{j,k+1}(\tau) = \begin{cases} \frac{\tau-t_{j-1}}{t_j-t_{j-1}} & \text{si } t_{j-1} < \tau \leq t_j \\ \frac{t_{j+1}-\tau}{t_{j+1}-t_j} & \text{si } t_j < \tau < t_{j+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Et comme $t_j = jh$ pour $j = 0, 1, \ldots, N$, alors

$$a_{j,k+1} = \begin{cases} \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)}(k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha) & \text{si } \ j=0 \\ \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)}(k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2(k-j+1)^{\alpha+1}) & \text{si } 1 \leq j \leq k \\ \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} & \text{si } j = k+1 \end{cases}.$$

Donc, on obtient la formule de correction (la méthode d'Adams-Moulton fractionnaire à un pas).

$$y_{k+1} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t_{k+1}^j}{j!} y_0^{(j)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\sum_{j=0}^{k} a_{j,k+1} f(t_j, y_j) + a_{k+1,k+1} f(t_{k+1}, y_{k+1}^p), \tag{2.11}$$

où, y_{k+1}^p le terme de prédiction.
Pour déterminer y_{k+1}^p on utilise la méthode d'Adams-Bashforth à un pas (de la même manière pour la formule de correction), mais on remplace l'intégrale par la règle de produit des rectangles.

$$\int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1}-\tau)^{\alpha-1} g(\tau)d\tau \backsimeq \sum_{j=0}^{k+1} b_{j,k+1} g(t_j).$$

Où

$$b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha}(k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha. \tag{2.12}$$

Alors,

$$y_{k+1}^{p} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t_{k+1}^{j}}{j!} y_0^{(j)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{k} b_{j,k+1} f(t_j, y_j). \tag{2.13}$$

Finalement, les expressions (2.11) et (2.13) avec $a_{j,k+1}$ et $b_{j,k+1}$ qui sont calculées à partir de (2.10) et (2.12) respectivement forment la méthode d'Adams-Bashforth-Moulton fractionnaire.

Exemple 2.4.
On considère le système de Lorenz d'ordre fractionnaire :

$$\begin{cases} D^{\alpha} x = a(y - x), \\ D^{\beta} y = x(b - z - y), \\ D^{\gamma} z = xy - cz, \end{cases} .$$

où $0 < \alpha,\ \beta,\ \gamma \leq 1$ *et* $a, b, c > 0$.
L'application de la méthode d'Adams-Bashforth-Moulton sur le système précédent, donne le système suivant :

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_0 + \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)}(a(y_{k+1}^{p} - x_{k+1}^{p})) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum\limits_{j=0}^{k} a_{1,j,k+1}(a(y_j - x_j)) \\ y_{k+1} = y_0 + \frac{h^{\beta}}{\Gamma(\beta+2)}(x_{k+1}^{p}(b - z_{k+1}^{p} - y_{k+1}^{p}) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum\limits_{j=0}^{k} a_{2,j,k+1}(x_j(b - z_j - y_j)) \\ z_{k+1} = z_0 + \frac{h^{\gamma}}{\Gamma(\gamma+2)}(x_{k+1}^{p} y_{k+1}^{p} - c z_{k+1}^{p}) + \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sum\limits_{j=0}^{k} a_{3,j,k+1}(x_j y_j - c z_j) \end{cases}$$

Où

$$\begin{cases} x_{k+1}^{p} = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum\limits_{j=0}^{k} b_{1,j,k+1}(a(y_j - x_j)) \\ y_{k+1}^{p} = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum\limits_{j=0}^{k} b_{2,j,k+1}(x_j(b - z_j - y_j)) \\ z_{k+1}^{p} = z_0 + \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sum\limits_{j=0}^{k} b_{3,j,k+1}(x_j y_j - c z_j) \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} b_{1,j,k+1} = \frac{h^{\alpha}}{\alpha}((k+1-j)^{\alpha} - (k-j)^{\alpha}) \\ b_{2,j,k+1} = \frac{h^{\beta}}{\beta}((k+1-j)^{\beta} - (k-j)^{\beta}) \\ b_{3,j,k+1} = \frac{h^{\gamma}}{\gamma}((k+1-j)^{\gamma} - (k-j)^{\gamma}) \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} a_{1,j,k+1} = \begin{cases} \frac{h^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)}(k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^{\alpha}) & \text{si } j = 0 \\ \frac{h^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)}((k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2(k-j+1)^{\alpha+1}) & \text{si } 1 \leq j \leq k \end{cases} \\ a_{2,j,k+1} = \begin{cases} \frac{h^{\beta}}{\beta(\beta+1)}(k^{\beta+1} - (k-\beta)(k+1)^{\beta}) & \text{si } j = 0 \\ \frac{h^{\beta}}{\beta(\beta+1)}((k-j+2)^{\beta+1} + (k-j)^{\beta+1} - 2(k-j+1)^{\beta+1}) & \text{si } 1 \leq j \leq k \end{cases} \\ a_{3,j,k+1} = \begin{cases} \frac{h^{\gamma}}{\gamma(\gamma+1)}(k^{\gamma+1} - (k-\gamma)(k+1)^{\gamma}) & \text{si } j = 0 \\ \frac{h^{\gamma}}{\gamma(\gamma+1)}((k-j+2)^{\gamma+1} + (k-j)^{\gamma+1} - 2(k-j+1)^{\gamma+1}) & \text{si } 1 \leq j \leq k \end{cases} \end{cases}$$

Chapitre 3

Solutions périodiques des systèmes fractionnaires

L'étude d'existences des solutions périodiques est parmi les sujets les plus importants dans le domaine des systèmes dynamiques. Dans ce chapitre nous présentons quelques théorèmes qui justifient l'existence ou non existence des solutions périodiques pour les systèmes fractionnaires [3, 13, 16].

- Une fonction g est dite périodique sur l'intervalle $[0, +\infty[$ s'il existe une constante $T > 0$ tel que :

$$g(t) = g(t + T); \ \forall t \geq 0 \tag{3.1}$$

Lemme 3.1.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $T > 0$; si $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction non constante T-périodique de classe $C^n([0, +\infty[)$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, la dérivée d'ordre k, $(\frac{d^k}{dt^k} g)$ est aussi une fonction non constante T-périodique.

3.1 Dérivation fractionnaire d'une fonction périodique

D'après le lemme précédent la dérivée d'ordre entier d'une fonction périodique est une fonction périodique maintenant est ce que cette assertion reste vrais pour la dérivation fractionnaire ? les sous sections suivantes donnent la repense à cette question.

3.1.1 Influence de la mémoire sur les solutions

Théorème 3.2. *Soit g est une fonction satisfaisant la condition de Lipschitz, alors les solutions du système d'ordre fractionnaire suivant dépendent de la mémoire.*

$$\begin{cases} {}_a^cD_t^\alpha x = g(x) \\ x(a) = x_a \end{cases} ; \tag{3.2}$$

C'est à dire la solution de l'équation (3.2) qui est notée par $\phi(t, x_a)$, et la solution de

$$\begin{cases} {}_b^cD_t^\alpha y = g(y) \\ y(b) = y_b \triangleq \phi(b, x_a) \end{cases} ; b > a \tag{3.3}$$

qui est notée par $\psi(t, y_b)$, ne coïncident pas pour $t \geq b$.

Démonstration.
On suppose que la solution ne dépend pas de la mémoire, d'après le théorème d'existence et unicité l'équation (3.2) admet une unique solution continue. Par intégration la solution de l'équation (3.2) est égale :

$$\phi(t, x_a) = x_a + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} g(\phi(\tau, x_a)) d\tau. \tag{3.4}$$

Donc on obtient :

$$y_b = \phi(b, x_a) = x_a + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-\tau)^{\alpha-1} g(\phi(\tau, x_a)) d\tau. \tag{3.5}$$

De la même façon la solution de l'équation (3.3) s'obtient par :

$$\psi(t, y_b) = y_b + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_b^t (t-\tau)^{\alpha-1} g(\psi(\tau, y_b)) d\tau. \tag{3.6}$$

En substituant l'équation (3.5) dans (3.6) on obtient :

$$\psi(t, y_b) = x_a + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-\tau)^{\alpha-1} g(\phi(\tau, x_a)) d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_b^t (t-\tau)^{\alpha-1} g(\psi(\tau, y_b)) d\tau \tag{3.7}$$

par l'hypothèse on a $\phi(t, x_a) = \psi(t, y_b)$ pour $t \geq b$ en tenant coute des deux équations (3.4) et (3.7) on obtient :

$$\begin{aligned}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} g(\phi(\tau, x_a))d\tau &= \int_a^b (t-\tau)^{\alpha-1} g(\phi(\tau, x_a))d\tau + \int_b^t (t-\tau)^{\alpha-1} g(\phi(\tau, x_a))d\tau \\ &= \int_a^b (b-\tau)^{\alpha-1} g(\phi(\tau, x_a))d\tau + \int_b^t (t-\tau)^{\alpha-1} g(\psi(\tau, y_b))d\tau \\ &= \int_a^b (b-\tau)^{\alpha-1} g(\phi(\tau, x_a))d\tau + \int_b^t (t-\tau)^{\alpha-1} g(\phi(\tau, x_a))d\tau.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Alors

$$\int_a^b (t-\tau)^{\alpha-1} g(\phi(\tau, x_a))d\tau = \int_a^b (b-\tau)^{\alpha-1} g(\phi(\tau, x_a))d\tau \tag{3.9}$$

pour $t \geq b$; c'est une contradiction.

Donc la supposition est fausse et la solution d'un système d'ordre fractionnaire dépend de la mémoire. □

3.1.2 Dérivation fractionnaire d'une fonction périodique

Les deux théorèmes présentés dans cette partie donnent la réponse à la question posée précédemment, concernant la périodicité de la dérivée fractionnaire d'une fonction périodique.

Théorème 3.3.
On suppose que g est une fonction non constante périodique de période T. Si g est m fois différentiable alors la fonction ${}_0^cD_t^\alpha g(t)$; où $0 < \alpha \notin \mathbb{N}^*$ et $m = \lceil \alpha \rceil$; ne peut pas être périodique de période T.

Pour démontrer ce théorème, on a besoin des lemmes suivants [14].

Considérons le système différentiel d'ordre fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D^{\alpha_i} x_i = f_i(x_1, x_2 \dots, x_n), \\ x_i(0) = x_{i_0} \quad \text{pour } i = 1, \dots, n. \end{cases} \tag{3.10}$$

Lemme 3.4.
Si $\tilde{x}(t) = (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t) \dots, \tilde{x}_n(t))$ est une solution T-périodique de (3.10) alors

$$\int_0^T (pT-\tau)^{\alpha_i-1} \tilde{g}_i(\tau)d\tau = 0; \;\; i = 1, 2, \dots, n. \tag{3.11}$$

pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration.

Pour démontrer ce lemme on utilise la démonstration par récurrence.

On suppose que la solution du système (3.10) est $\tilde{x}(t) = (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_n(t))$, tel que $\tilde{x}$ est une fonction continue et T-périodique.

On pose $g_i(t) = f_i(x_1(t), x_2(t) \dots, x_n(t))$.

D'après le lemme (2.2) on a :

$$\tilde{x}_i(t) = \tilde{x}_{i_0} + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_i - 1} g_i(\tau) d\tau; \; i = 1, 2, \dots, n. \tag{3.12}$$

Et comme $\tilde{x}$ est une fonction T-périodique donc $\tilde{x}_i(0) = \tilde{x}_i(T)$. Donc

$$\tilde{x}_i(0) = \tilde{x}_{i_0} + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_0^T (T-\tau)^{\alpha_i - 1} \tilde{g}_i(\tau) d\tau; \; i = 1, 2, \dots, n.$$

Alors

$$\int_0^T (T-\tau)^{\alpha_i - 1} \tilde{g}_i(\tau) d\tau = 0; \; i = 1, 2, \dots, n, \tag{3.13}$$

où $\tilde{g}_i(t) = f_i(\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t) \dots, \tilde{x}_n(t))$.

Donc (3.11) est vrais pour $p = 1$.

On suppose que la relation (3.11) est vrai pour $p = 1, \dots, k$ et on montre qu'elle est vrai pour $p = k+1$.

$$I_p = \int_0^T (pT-\tau)^{\alpha_i - 1} \tilde{g}_i(\tau) d\tau = 0; \; \forall p = 1, \cdots, k.$$

Si $p = k+1$:

$\tilde{x}_i(0) = \tilde{x}_i(nT) \;\; \forall n \in \mathbb{N}^*$, substituant dans (3.12) on prenant $n = k+1$ on obtient :

$$\tilde{x}_i(0) = \tilde{x}_i((k+1)T) = \tilde{x}_{i_0} + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_0^{(k+1)T} ((k+1)T-\tau)^{\alpha_i - 1} \tilde{g}_i(\tau) d\tau.$$

Alors

$$\int_0^{(k+1)T} ((k+1)T-\tau)^{\alpha_i - 1} \tilde{g}_i(\tau) d\tau = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Donc

$$\int_0^{(k+1)T} ((k+1)T-\tau)^{\alpha_i - 1} \tilde{g}_i(\tau) d\tau = \sum_{j=1}^{k+1} \int_{(j-1)T}^{jT} ((k+1)T-\tau)^{\alpha_i - 1} \tilde{g}_i(\tau) d\tau = 0.$$

Par le changement des variables $\tau^* = \tau - (j-1)T$, on obtient :

$$\sum_{j=1}^{k+1} \int_0^T ((k-j+2)T - \tau^*)^{\alpha_i - 1} \tilde{g}_i(\tau^* + (j-1)T) d\tau^* = 0. \tag{3.14}$$

Et comme $\tilde{x}$ est une fonction T-périodique alors $\tilde{g}$ est aussi T-périodique donc l'équation (3.14) devient

$$\sum_{j=1}^{k+1} \int_0^T ((k-j+2)T - \tau)^{\alpha_i - 1} \tilde{g}_i(\tau) d\tau = \sum_{j=1}^{k+1} I_{ij} = 0.$$

D'après la supposition $I_{ij} = 0;\ \forall j = 1, 2, \ldots, k$ il vien que $I_{i,k+1} = 0$ c'est à dire :

$$\int_0^T ((k+1)T - \tau)^{\alpha_i - 1} \tilde{g}_i(\tau) d\tau = 0; \quad \forall p = 1, \cdots, n.$$

$\square$

Lemme 3.5.
Si l'équation (3.11) est vrai pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, alors on peut déduire la relation suivante :

$$\int_0^T \tilde{g}_i(\tau) d\tau = 0;\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.15}$$

Démonstration.
On suppose que

$$\int_0^T \tilde{g}_i(\tau) d\tau \neq 0, \text{ et } \int_0^T \tilde{g}_i(\tau) d\tau = S_i^+ - S_i^-,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Avec $S_i^+ > 0$, $S_i^- > 0$.

S'il existe une fonction $h_i(t)$ positive dans $[0, T]$ et si $m_i = \min\{h_i(t);\ 0 \leq t \leq T\}$ et $M_i = \max\{h_i(t);\ 0 \leq t \leq T\}$ alors

$$\int_0^T m_i \tilde{g}_i(\tau) d\tau \leq \int_0^T h_i(\tau) \tilde{g}_i(\tau) d\tau \leq \int_0^T M_i \tilde{g}_i(\tau) d\tau.$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_0^T h_i(\tau)\tilde{g}_i(\tau)d\tau &\le M_i \int_0^T \tilde{g}_i(\tau)d\tau,\\ &= M_i(S_i^+ - S_i^-),\\ &\le M_i S_i^+ - m_i S_i^-,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^T h_i(\tau)\tilde{g}_i(\tau)d\tau &\ge m_i \int_0^T \tilde{g}_i(\tau)d\tau,\\ &= m_i(S_i^+ - S_i^-),\\ &\ge m_i S_i^+ - M_i S_i^-,\end{aligned}$$

Donc

$$m_i S_i^+ - M_i S_i^- \le \int_0^T h_i(\tau)\tilde{g}_i(\tau)d\tau \le M_i S_i^+ - m_i S_i^-.$$

Si on prend $h_i(t) = (pT - t)^{\alpha_i - 1}$ alors $m_i = h_i(0) = (pT)^{\alpha_i - 1}$;

et $M_i = h_i(T) = (pT - T)^{\alpha_i - 1}$.

Donc

$$(pT)^{\alpha_i-1}S_i^+ - (pT-T)^{\alpha_i-1}S_i^- \le \int_0^T (pT-t)^{\alpha_i-1}\tilde{g}_i(\tau)d\tau \le (pT-T)^{\alpha_i-1}S_i^+ - (pT)^{\alpha_i-1}S_i^-. \tag{3.16}$$

D'après la supposition que $\int_0^T \tilde{g}_i(\tau)d\tau \neq 0$; on a :

1. Si $\int_0^T \tilde{g}_i(\tau)d\tau > 0$ alors $S_i^+ > S_i^-$ donc

$$\frac{S_i^-}{S_i^+} < 1. \tag{3.17}$$

et on a

$$\lim_{p\to\infty} \frac{(pT)^{\alpha_i-1}}{(pT-t)^{\alpha_i-1}} = 1. \tag{3.18}$$

De (3.17) et (3.18) il existe $p \in \mathbb{N}^*$ très grand tel que

$$\frac{(pT)^{\alpha_i-1}}{(pT-t)^{\alpha_i-1}} > \frac{S_i^-}{S_i^+},$$

donc

$$(pT)^{\alpha_i-1}S_i^+ - (pT-t)^{\alpha_i-1}S_i^- > 0$$

D'après la relation (3.16) on a :

$$\int_0^T (pT-t)^{\alpha_i-1}\tilde{g}_i(\tau)d\tau > 0.$$

Qui est en contradiction avec le lemme (3.4), alors l'intégrale $\int_0^T (pT-t)^{\alpha_i-1}\tilde{g}_i(\tau)d\tau$ ne peut pas être positive.

2. Si $\int_0^T \tilde{g}_i(\tau)d\tau < 0$ alors $S_i^+ < S_i^-$ donc

$$\frac{S_i^+}{S_i^-} < 1. \tag{3.19}$$

De (3.18) et (3.19) on a :

$$\frac{(pT)^{\alpha_i-1}}{(pT-t)^{\alpha_i-1}} > \frac{S_i^+}{S_i^-},$$

donc

$$(pT-t)^{\alpha_i-1}S_i^+ - (pT)^{\alpha_i-1}S_i^- < 0.$$

D'après la relation (3.16) on a :

$$\int_0^T (pT-t)^{\alpha_i-1}\tilde{g}_i(\tau)d\tau < 0.$$

Qui est en contradiction avec le lemme (3.4).

Alors l'intégrale $\int_0^T (pT-t)^{\alpha_i-1}\tilde{g}_i(\tau)d\tau$ ne peut pas être négative.
Donc la relation (3.15) est vraie si la relation (3.11) est vraie. □

Lemme 3.6.
Si l'équation (3.11) est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, alors on peut déduire la relation suivante :

$$\int_0^T (pT-\tau)^{\beta_i-1}\tilde{g}_i(\tau)d\tau = 0;\; i = 1,2,\dots,n.$$

où β_i est un réel quelconque dans l'intervalle $]0,1[$.

Démonstration.
Supposons que

$$\int_0^T (pT-\tau)^{\beta_i-1}\tilde{g}_i(\tau)d\tau = \bar{S}_i^+ - \bar{S}_i^-;\; i = 1,2,\dots,n.$$

On prend

$$h_i(t) = \frac{(pT-t)^{\alpha_i-1}}{(pT-t)^{\beta_i-1}} = (pT-t)^{\alpha_i-\beta_i},$$

où $0 < \alpha_i < \beta_i < 1$ alors $m_i = h_i(0) = (pT)^{\alpha_i-\beta_i}$;

et $M_i = h_i(T) = (pT-T)^{\alpha_i-\beta_i}$; $i = 1, 2, \ldots, n$. Donc

$$\begin{aligned}\int_0^T h_i(\tau)(pT-\tau)^{\beta_i-1}\tilde{g}_i(\tau)d\tau &\leq M_i\bar{S}_i^+ - m_i\bar{S}_i^- \\ &\leq (pT-T)^{\alpha_i-\beta_i}\bar{S}_i^+ - (pT)^{\alpha_i-\beta_i}\bar{S}_i^-. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Et

$$\begin{aligned}\int_0^T h_i(\tau)(pT-\tau)^{\beta_i-1}\tilde{g}_i(\tau)d\tau &\geq m_i\bar{S}_i^+ - M_i\bar{S}_i^- \\ &\geq (pT)^{\alpha_i-\beta_i}\bar{S}_i^+ - (pT-T)^{\alpha_i-\beta_i}\bar{S}_i^-. \end{aligned} \tag{3.21}$$

On suppose que $\int_0^T (pT-\tau)^{\beta_i-1}\tilde{g}_i(\tau)d\tau \neq 0$; on a :

1. Si $\int_0^T (pT-\tau)^{\beta_i-1}\tilde{g}_i(\tau)d\tau > 0$ alors $\bar{S}_i^+ > \bar{S}_i^-$ donc

$$\frac{\bar{S}_i^-}{\bar{S}_i^+} < 1. \tag{3.22}$$

   et on a

$$\lim_{p\to\infty} \frac{(pT)^{\alpha_i-\beta_i}}{(pT-T)^{\alpha_i-\beta_i}} = 1. \tag{3.23}$$

   De (3.22) et (3.23) il existe $p \in \mathbb{N}^*$ très grand tel que

$$\frac{(pT)^{\alpha_i-\beta_i}}{(pT-T)^{\alpha_i-\beta_i}} > \frac{\bar{S}_i^-}{\bar{S}_i^+},$$

   de (3.21) on a :

$$\int_0^T (pT-\tau)^{\alpha_i-\beta_i}(pT-\tau)^{\beta_i-1}\tilde{g}_i(\tau)d\tau = \int_0^T (pT-\tau)^{\alpha_i-1}\tilde{g}_i(\tau)d\tau > 0.$$

   Mais d'après le lemme (3.4), l'intégrale $\int_0^T (pT-t)^{\alpha_i-1}\tilde{g}_i(\tau)d\tau$ ne peut pas être positive.

2. Si $\int_0^T (pT-\tau)^{\beta_i-1}\tilde{g}_i(\tau)d\tau < 0$ alors $\bar{S}_i^+ < \bar{S}_i^-$ donc

$$\frac{\bar{S}_i^+}{\bar{S}_i^-} < 1. \tag{3.24}$$

   De (3.23) et (3.24) il existe $p \in \mathbb{N}^*$ très grand tel que

$$\frac{(pT)^{\alpha_i-\beta_i}}{(pT-T)^{\alpha_i-\beta_i}} > \frac{\bar{S}_i^+}{\bar{S}_i^-}$$

d'après la relation (3.20) on a :

$$\int_0^T h_i(\tau)(pT-\tau)^{\beta_i-1}\tilde{g}_i(\tau)d\tau = \int_0^T (pT-\tau)^{\alpha_i-1}\tilde{g}_i(\tau)d\tau < 0.$$

Mais d'après le lemme (3.4), l'intégrale $\int_0^T (pT-t)^{\alpha_i-1}\tilde{g}_i(\tau)d\tau$ ne peut pas être négative.

De la même manière on donne la démonstration dans le cas $0 < \beta_i < \alpha_i < 1$.

□

Démonstration. (de théorème 3.3)

On suppose que ${}_0^cD_t^\alpha g(t)$ est une fonction périodique de période T,

c'est-à-dire :

$${}_0^cD_t^\alpha g(0) = {}_0^cD_t^\alpha g(nT);\ \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{3.25}$$

on a

$${}_0^cD_t^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1}g^{(m)}(\tau)d\tau,\ t < T$$

on pose $M = \max\limits_{t\in[0,T]} \mid g^{(m)}(t) \mid$, où M est un constant positive.

Alors

$$\mid {}_0^c D_t^\alpha g(t) \mid \leq \frac{M}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1}d\tau = \frac{M}{\Gamma(m-\alpha+1)}t^{m-\alpha}.$$

Donc ${}_0^cD_t^\alpha g(0) = 0$,

D'après (1.24) et (3.25), on conclut que :

$$\int_0^{nT} (nT-\tau)^{m-\alpha-1}g^{(m)}(\tau)d\tau = 0. \tag{3.26}$$

On montre que si la relation (3.26) est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$; alors :

$$I_n = \int_0^T (nT-\tau)^{m-\alpha-1}g^{(m)}(\tau)d\tau = 0. \tag{3.27}$$

On montre la relation (3.27) par récurrence.

D'après la relation (3.26) l'équation (3.27) est vraie pour $n = 1$.

On suppose que l'équation (3.27) est vraie pour $n = 1, 2, \ldots, k$, c'est-à-dire :

$$I_1 = I_2 = \ldots = I_k = 0 \tag{3.28}$$

et on montre que (3.27) est vraie pour $n = k+1$ (i.e. $I_{k+1} = 0$).
Pour $n = k+1$ et d'après la relation (3.26) on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{(k+1)T} ((k+1)T-\tau)^{m-\alpha-1} g^{(m)}(\tau)d\tau &= \sum_{j=1}^{k+1} \int_{(j-1)T}^{jT} ((k+1)T-\tau)^{m-\alpha-1} g^{(m)}(\tau)d\tau \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.29}$$

On fait le changement de variable $\tau^* = \tau - (j-1)T$; la relation (3.29) peut s'écrire de la forme :

$$\sum_{j=1}^{k+1} \int_0^T ((k-j+2)T-\tau)^{m-\alpha-1} g^{(m)}(\tau + (j-1)T)d\tau = 0. \tag{3.30}$$

D'après le lemme (3.4), la relation (3.30) est équivalente à :

$$\sum_{j=1}^{k+1} \int_0^T ((k-j+2)T-\tau)^{m-\alpha-1} g^{(m)}(\tau)d\tau = \sum_{j=1}^{k+1} I_j = 0. \tag{3.31}$$

De l'équation (3.31) et l'hypothèse (3.28) on conclut que $I_{k+1} = 0$.
Finalement, la relation (3.27) est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

On pose $m - \alpha - 1 = -\beta$, donc la relation (3.27) devient :

$$\int_0^T (nT-\tau)^{-\beta} g^{(m)}(\tau)d\tau = 0, \tag{3.32}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\beta \in [0, 1[$; (d'après les lemmes (3.5) et (3.6)).
Et comme l'intégrale $\int_0^T (nT-\tau)^{-\beta} g^{(m)}(\tau)d\tau$ est constante (zéro), pour tout $\beta \in [0, 1[$. Alors

$$\frac{d^k}{d\beta^k}(\int_0^T (nT-\tau)^{-\beta} g^{(m)}(\tau)d\tau = 0 \tag{3.33}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$; $n \in \mathbb{N}^*$ et $\beta \in]0, 1[$, d'après (3.33) :

$$\begin{aligned}\frac{d^k}{d\beta^k}(\int_0^T (nT-\tau)^{-\beta} g^{(m)}(\tau)d\tau &= \int_0^T \frac{d^k}{d\beta^k}(e^{-\beta\ln(nT-\tau)} g^{(m)}(\tau)d\tau \\ &= \int_0^T (-1)^k (\ln(nT-\tau))^k (nT-\tau)^{-\beta} g^{(m)}(\tau)d\tau \\ &= 0.\end{aligned}$$

donc

$$\int_0^T (\ln(nT-\tau))^k (nT-\tau)^{-\beta} g^{(m)}(\tau)d\tau = 0. \tag{3.34}$$

On remarque que

$$(nT-\tau)^{(r+\beta)} = e^{(r+\beta)\ln(nT-\tau)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r+\beta)^k}{k!} (\ln(nT-\tau))^k, \tag{3.35}$$

où $0 < \tau < nT$ et $r \in \mathbb{R}$. De (3.34) et (3.35), on déduit que :

$$\int_0^T (nT-\tau)^r g^{(m)}(\tau) d\tau = 0, \tag{3.36}$$

pour tout $r \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
De la relation (3.36), on peut démontrer facilement que

$$\int_0^T (\tau - t_0)^p g^{(m)}(\tau) d\tau = 0, \tag{3.37}$$

pour tout $t_0 \in [0, T]$ et $p \in \mathbb{N}$.
On prend $r = p \in \mathbb{N}^*$ et $n = 1$, on obtient

$$(T-\tau)^p = ((T-t_0) - (\tau - t_0))^p = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \binom{p}{j} (T-t_0)^{p-j} (\tau - t_0)^j.$$

Et par récurrence on obtient la relation (3.37).
D'autre part on a :

$$g^{(m)}(t_0) = \int_0^T \delta(\tau - t_0) g^{(m)}(\tau) d\tau, \tag{3.38}$$

où $t_0 \in]0, T[$ et δ est la fonction de Dirac, en plus δ peut s'écrire sous la forme :

$$\delta(\tau - t_0) = \lim_{b \to 0^+} \frac{e^{\frac{-(\tau - t_0)^2}{b^2}}}{b\sqrt{\pi}}, \tag{3.39}$$

l'équation (3.39) est équivalente à :

$$\delta(\tau - t_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{b \to 0^+} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\tau - t_0)^{2k}}{b^{2k+1} k!}. \tag{3.40}$$

Substituant (3.40) dans (3.38) en tenant coute de (3.37), on déduit que :

$$g^{(m)}(t_0) = 0, \tag{3.41}$$

pour chaque $t_0 \in]0, T[$. Comme g est une fonction différentiable périodique l'égalité (3.41) est vraie, pour tout $t_0 > 0$, alors la fonction g peut s'écrire sous la forme suivante :

$$g(t) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k t^k, \tag{3.42}$$

où $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ sont des constantes, donc $g(t)$ est un polynôme de degré $m-1$ qui n'est pas périodique c'est une contradiction avec l'hypothèse du théorème. □

Le théorème suivant donne la réponse au question de la périodicité de la dérivée au sens de Riemann-Liouville d'une fonction périodique.

Théorème 3.7.
Supposons que $g(t)$ est $(m-1)$ fois continument différentiable et que $g^m(t)$ bornée. Supposons en plus que g est une fonction périodique non constante de période T. Alors, la fonction ${}_0D_t^{\alpha}g(t)$; où $0 < \alpha \notin \mathbb{N}^*$; ne peut pas être une fonction périodique de période T.

Démonstration.
Si $g(t)$ est $(m-1)$ fois continument différentiable et $g^{(m)}$ intégrable alors :

$${}_0D_t^{\alpha}g(t) = {}_0^cD_t^{\alpha}g(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} g^{(k)}(0^+). \tag{3.43}$$

D'où

- S'il existe au moins une valeurs $g^{(k)}(0^+)$; $(k = 0, 1, \ldots m-1)$ non nulle, alors ${}_0D_t^{\alpha}g(0)$ elle sera infinie.

Mais, d'autre part on a :

$${}_0^cD_t^{\alpha}g(T) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^T (T-\tau)^{m-\alpha-1} g^{(m)}(\tau) d\tau,$$

donc

$$\begin{aligned} |{}_0^cD_t^{\alpha}g(T)| &\leq \left| \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^T (T-\tau)^{m-\alpha-1} g^{(m)}(\tau) d\tau \right|, \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^T (T-\tau)^{m-\alpha-1}(\tau) d\tau = \frac{M}{\Gamma(m-\alpha)} T^{m-\alpha}, \end{aligned} \tag{3.44}$$

où $M = \max\limits_{t\in[0,T]} \mid g^{(m)}(\tau) \mid$.

De (3.43) et (3.44) on déduit que ${}_0D_t^{\alpha}g(T)$ ne peut pas être infinie.

Donc ${}_0D_t^\alpha g(0) \neq {}_0D_t^\alpha g(T)$; c'est-à-dire que ${}_0D_t^\alpha g(t)$ ne peut pas être une fonction périodique de période T.

- Si toute les valeurs $g^{(k)}(0^+)$; $(k = 0, 1, \ldots m-1)$ sont nulles,

alors d'après la relation (3.43) ${}_0D_t^\alpha g(t) = {}_0^cD_t^\alpha g(t)$, et comme ${}_0^cD_t^\alpha g(t)$ n'est pas une fonction périodique (d'après le théorème 3.3) alors ${}_0D_t^\alpha g(t)$ aussi c'est pas une fonction périodique de période T.

Finalement, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'une fonction périodique de période T ne peut pas être une fonction périodique de période T. $\square$

Exemple 3.1.
Considérons la fonction $f(t) = \sin(t)$.

On a

$$\sin(t) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
{}_0D_t^\alpha f(t) = {}_0D_t^\alpha \sin(t) = {}_0D_t^\alpha \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{{}_0D_t^\alpha t^{2p+1}}{(2p+1)!} \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{t^{2p+1-\alpha}}{\Gamma(2p-\alpha+2)} \\
&= t^{1-\alpha} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^p}{\Gamma(2p-\alpha+2)} \\
&= t^{1-\alpha} E_{2,2-\alpha}(-t^2).
\end{aligned}$$

Numériquement on montre que $t^{1-\alpha}E_{2,2-\alpha}(-t^2)$ n'est pas est une fonction périodique pour $0 < \alpha < 1$, mais si $\alpha = 1$ cette fonction est périodique ($t^{1-\alpha}E_{2,2-\alpha}(-t^2) = \cos t$), la figure (3.1) représente le graphe de la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction sinus.

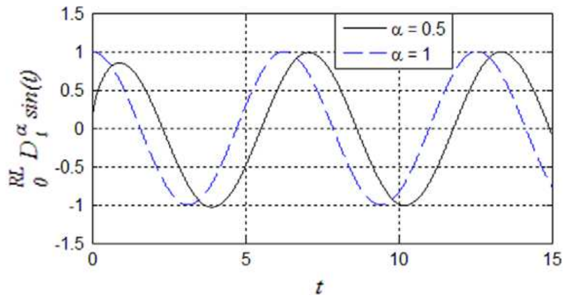

FIGURE 3.1: La dérivée fractionnaire au sens de R-L de la fonction sinus

3.2 Equations d'ordre fractionnaire et solutions périodiques

3.2.1 Non existence des solutions périodiques

D'après les théorèmes (3.3) et (3.7), on a les corollaires suivants :

Corollaire 3.8.
L'équation différentielle d'ordre fractionnaire de la forme :

$$ {}_0D_t^{\alpha} f(t) + \psi(f(t), f^{(1)}(t), \ldots, f^{(n)}(t)) = 0 \tag{3.45}$$

où $0 < \alpha \notin \mathbb{N}^*$; *n'admet pas des solutions non constantes et périodiques.*

Démonstration.
On suppose que $\tilde{f}$ est la solution de l'équation différentielle (3.45).
Si $\tilde{f}$ est une fonction non constante et T-périodique, alors

$$\psi(\tilde{f}(t), \tilde{f}^{(1)}(t), \ldots, \tilde{f}^{(n)}(t)) = \psi(\tilde{f}(t+T), \tilde{f}^{(1)}(t+T), \ldots, \tilde{f}^{(n)}(t+T)); \ \forall t \geq 0. \tag{3.46}$$

De l'équation (3.45) et (3.46) on déduit que :

$$ {}_0D_t^{\alpha} \tilde{f}(t) = {}_0D_t^{\alpha} \tilde{f}(t+T); \ \forall t \geq 0.$$

Mais d'après les théorèmes (3.3) et (3.7), la fonction $D^{\alpha}\tilde{f}$ ne peut pas être une fonction non constante et périodique. □

Corollaire 3.9.
Le système autonome d'ordre fractionnaire de la forme :

$$ {}_0D^{\alpha_i}x_i = f_i(x_1, x_2 \ldots, x_n);\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.47}$$

où $0 < \alpha_i < 1$; *n'admet aucune solution non constante et périodique.*

La preuve de ce corollaire est similaire à la preuve du corollaire précédent.

3.2.2 Existence des solutions périodiques

Dans cette sous section nous présentons le théorème qui confirme l'existence des solution périodiques d'un système différentiel d'ordre fractionnaire dans un cas particulier.

Théorème 3.10.
Le système différentiel autonome d'ordre fractionnaire

$$\begin{cases} {}_a^cD_t^\alpha x = f(x) \\ x(a) = x_a \end{cases}, \tag{3.48}$$

n'admet aucune solution périodique, sauf si la borne inferieure de la dérivation est $\pm\infty$.

Démonstration.
On suppose que l'équation (3.48) admet une solution périodique de période T notée par $\phi(t, x_a)$, alors

$$\phi(t, x_a) = x_a + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\phi(\tau, x_a))d\tau, \tag{3.49}$$

et

$$\phi(t + T, x_a) = x_a + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t+T} (t + T - \tau)^{\alpha-1} f(\phi(\tau, x_a))d\tau. \tag{3.50}$$

Par l'hypothèse $\phi(t, x_a) = \phi(t + T, x_a)$. Donc

$$\int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\phi(\tau, x_a))d\tau = \int_a^{t+T} (t + T - \tau)^{\alpha-1} f(\phi(\tau, x_a))d\tau \tag{3.51}$$

En effectuant le changement des variables $\tau^* = \tau - T$, l'équation (3.50) peut s'écrire sous la forme

$$\phi(t+T, x_a) = x_a + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a-T}^{t} (t-\tau^*)^{\alpha-1} f(\phi(\tau^* + T, x_a)) d\tau^*. \tag{3.52}$$

Et comme le système (3.48) est autonome et admet une solution périodique alors

$$f(\phi(\tau^* + T, x_a)) = f(\phi(\tau^*, x_a)), \tag{3.53}$$

En substituant l'équation (3.53) en (3.52) on obtient

$$\phi(t+T, x_a) = x_a + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a-T}^{t} (t-\tau^*)^{\alpha-1} f(\phi(\tau^*, x_a)) d\tau^*. \tag{3.54}$$

On soustrait l'équation (3.54) de (3.49) on obtient :

$$\begin{aligned}
\phi(t, x_a) - \phi(t+T, x_a) &= \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\phi(\tau, x_a)) d\tau - \int_{a-T}^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\phi(\tau, x_a)) d\tau \\
&= \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\phi(\tau, x_a)) d\tau - \int_{a-T}^a (t-\tau)^{\alpha-1} f(\phi(\tau, x_a)) d\tau \\
&- \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\phi(\tau, x_a)) d\tau \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc

$$\int_{a-T}^{a} (t-\tau)^{\alpha-1} f(\phi(\tau, x_a)) d\tau = 0$$

Et comme $f(\phi(\tau, x_a)) \neq 0$, donc on conclut que les limites de l'intégrale sont égaux (ie $a = a - T$). Mais $T \neq 0$, alors $a = \pm\infty$.

Finalement les solutions des systèmes différentiels d'ordre fractionnaire de borne inférieure infinie ($\pm\infty$) peuvent être périodiques. □

Chapitre 4

Applications

Dans ce chapitre nous allons étudier deux systèmes d'ordre fractionnaire le premier est un système linéaire [15] et le deuxième est non linéaire.

Les résultats de l'étude théorique de ces deux systèmes sont confirmés par l'étude numérique qui est présentée dans les figures suivantes qui sont obtenus en appliquant l'algorithme d'Adams-Basheforth-Moulton généralisée(PECE).

4.1 Un système linéaire

On considère le système linéaire d'ordre fractionnaire suivant :

$$ {}_a^cD_t^\alpha x(t) = Ax(t). \tag{4.1} $$

où $x = \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2$; $k > 0$; et $A = \begin{pmatrix} k\cos(\frac{\alpha\pi}{2}) & k\sin(\frac{\alpha\pi}{2}) \\ -k\sin(\frac{\alpha\pi}{2}) & k\cos(\frac{\alpha\pi}{2}) \end{pmatrix}$.

- Si $\alpha = 1$ et $(x_1(0), x_2(0) \neq (0,0))$

Le système (4.1) devient : $\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}$.

La solution générale de ce système est donné par :

$$ x(t) = e^{At}x(0) = \begin{pmatrix} \cos(kt) & \sin(kt) \\ -\sin(kt) & \cos(kt) \end{pmatrix} x(0). $$

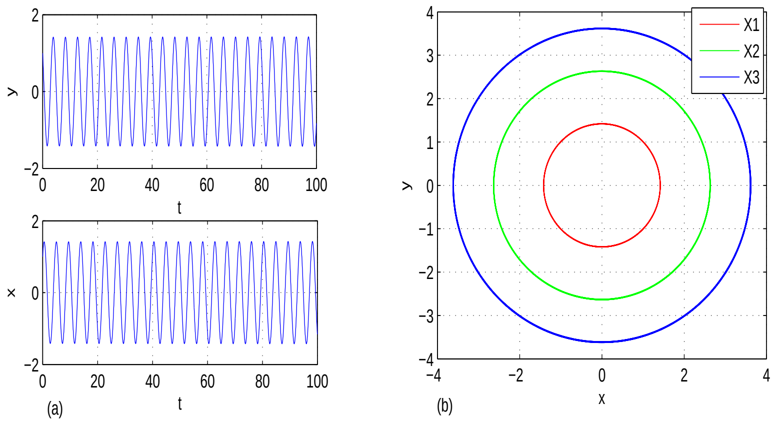

FIGURE 4.1: a)L'évolution temporelle de x, y. b) Trajectoire du système (4.1) avec k=$\sqrt{2}$.

où $x(0) = \binom{x_1(0)}{x_2(0)} = \binom{c_1}{c_2}$.

Donc

$$x(t) = \begin{pmatrix} c_1\cos(kt) + c_2\sin(kt) \\ -c_1\sin(kt) + c_2\cos(kt) \end{pmatrix}$$

Donc les solutions de système (4.1) dans ce cas sont périodique de période $\frac{2\pi}{k}$, ce résultat est présenté dans la figure (4.1).

- Si $0 < \alpha < 1$:

Pour etudier la stabilité du système (4.1) on applique le théorème de Matignon (Annex-c).

Les valeurs propres de A sont les racines du polynome

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_2) &= k^2((\cos(\frac{\alpha\pi}{2}) - \lambda)^2 + \sin^2(\frac{\alpha\pi}{2})) \\ &= \lambda^2 - 2\lambda k\cos(\frac{\alpha\pi}{2}) + k = 0. \end{aligned}$$

Donc

$\lambda_1 = k\cos(\frac{\alpha\pi}{2}) - ki\sin(\frac{\alpha\pi}{2}) = ke^{-i\frac{\alpha\pi}{2}}$ et $\lambda_2 = k\cos(\frac{\alpha\pi}{2}) + ki\sin(\frac{\alpha\pi}{2}) = ke^{i\frac{\alpha\pi}{2}}$.

Les vecteurs propres sont : $v_1 = \binom{1}{i}$ associe à λ_1 et $v_2 = \binom{1}{-i}$ associe à λ_2.

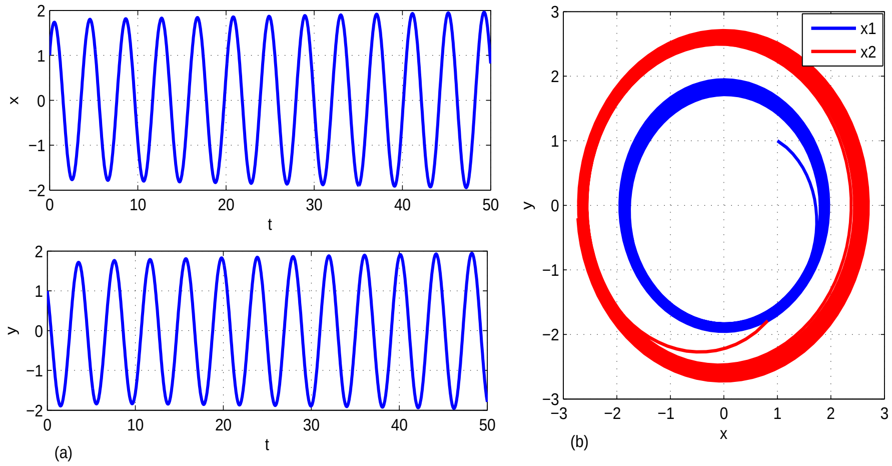

FIGURE 4.2: a)L'évolution temporelle de x, y. b) Trajectoire du système (4.1) avec $\alpha = 0.8$, $k{=}\sqrt{2}$.

Donc la solution générale est donnée par :

$$x(t) = \left(\begin{array}{c} c_1 E_\alpha((ke^{-i\frac{\alpha\pi}{2}})t^\alpha) + c_2 E_\alpha((ke^{i\frac{\alpha\pi}{2}})t^\alpha) \\ ic_1 E_\alpha((ke^{-i\frac{\alpha\pi}{2}})t^\alpha) - ic_2 E_\alpha((ke^{i\frac{\alpha\pi}{2}})t^\alpha) \end{array} \right).$$

On a $\mid \arg(\lambda_1) \mid = \mid \arg(\lambda_2) \mid = \frac{\alpha\pi}{2}$.

De plus la multiplicité algébrique et la multiplicité géométrique de λ_1 et λ_2 égale à 1, donc le système (4.1) est stable.

La figure (4.2) du système (4.1) pour $\alpha = 0.8$, $k{=}\sqrt{2}$ avec deux conditions initiales différentes (($x_1(1,1)$ et $x_2(0.819, -1.789)$) montre que les deux trajectoires ne sont pas périodiques, mais convergent vers des cycles qui ne sont pas des solutions du système (4.1).

4.2 Le système prédateurs proies

Après la première Guerre mondiale, la quantité de poissons prédateurs dans l'adriatique était beaucoup plus élevée que pendant les années précédentes. En effet, les hostilités entre l'Italie et l'Autriche avaient provoqué une grande diminution de la pêche. Pour essayer de comprendre et expliquer pourquoi ce fait avait favorisé les prédateurs plutôt que les proies, le mathématicien Voltera avait proposé les équations qui sont le sujet de cette section. Il suppose que le taux de croissance des populations des proies en absence des prédateurs, était donné par une constante a et qu'il décroissait linéairement en fonction de la densité y des prédateurs. Ceci donne

$$\frac{x'}{x} = a - by; \ (a, b > 0).$$

De plus il avait supposé qu'en absence de proies, le taux de croissance des populations des prédateurs était négatif (ce qui conduit à la disparition de la population) et qu'il croit linéairement en fonction de la densité x des proies, ceci implique :

$$\frac{y'}{y} = -c + dx; \ (c, d > 0).$$

On peut donc écrire le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = x(a - by) \\ y' = y(-c + dx) \end{cases}$$

Dans notre mémoire nous allons étudier le système précédent dans le cas

de la dérivation fractionnaire car elle est plus réaliste et possède l'effet mémoire que, donc le système devient :

$$\begin{cases} D^\alpha x = x(a - by) \\ D^\alpha y = y(-c + dx) \end{cases} \tag{4.2}$$

où $0 < \alpha \leq 1$ et $a, b, c, d > 0$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$.

Etude théorique

Les points d'équilibres de (4.2) sont $\tilde{x}_1 = (0, 0)$ et $\tilde{x}_2 = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$.

- Pour $\tilde{x}_1 = (0, 0)$: La matrice Jacobienne associée est

$$Df(\tilde{x}_1) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

et ses valeurs propres sont : $\lambda_1 = a$ et $\lambda_2 = -c$.

- Si $\alpha = 1$: le point d'équilibre $\tilde{x}_1$ est un selle instable car $\lambda_1 = a > 0$ et $\lambda_2 = -c < 0$.

- Si $0 < \alpha < 1$: le point d'équilibre $\tilde{x}_1$ est instable (car $\mid \arg(\lambda_1) \mid = 0 < \frac{\alpha\pi}{2}$; et $\mid \arg(\lambda_2) \mid = \pi > \frac{\alpha\pi}{2}$).

- Pour $\tilde{x}_2 = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$: La matrice Jacobienne associée est

$$Df(\tilde{x}_2) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{da}{b} & 0 \end{pmatrix}.$$

et ses valeurs propres sont : $\lambda_1 = -i\sqrt{ac}$ et $\lambda_2 = i\sqrt{ac}$

- Si $\alpha = 1$: Le point d'équilibre $\tilde{x}_2$ est un centre stable (d'après la figure(4.3)).
- Si $0 < \alpha < 1$: Le point d'équilibre $\tilde{x}_2$ est asymptotiquement stable (car $\mid \arg(\lambda_1) \mid = \mid \arg(\lambda_2) \mid = \frac{\pi}{2} > \frac{\alpha\pi}{2}$).

Etude numérique :

Dans cette partie on prend les valeurs de paramètres $a = b = c = 1$ et $d = 2$ donc les deux points d'équilibres du système (4.2) sont $\tilde{x}_1 = (0, 0)$ et $\tilde{x}_2 = (\frac{1}{2}, 1)$.

-La figure (4.3) pour $\alpha = 1$, obtenue a partir de quelques conditions initiales différentes, les deux conditions initiales x_1 et x_2 dans le voisinage de $\tilde{x}_1$ mais x_3 et x_4 dans le voisinage de $\tilde{x}_2$, on remarque que les trajectoires sont des cycles , donc le point d'équilibre $\tilde{x}_1$ est un point selle par contre $\tilde{x}_2$ est un centre stable.
Mais dans le cas ou $0 < \alpha < 1$, la figure (4.4) pour $\alpha = 0.8$ avec trois conditions initiales différentes x_1 dans le voisinage de $\tilde{x}_1$ et x_2 et x_3 dans le voisinage de $\tilde{x}_2$, on remarque que les trois trajectoires sont convergent vers le point d'équilibre $\tilde{x}_2$, donc on déduit que le point d'équilibre $\tilde{x}_1$ est instable, mais $\tilde{x}_2$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

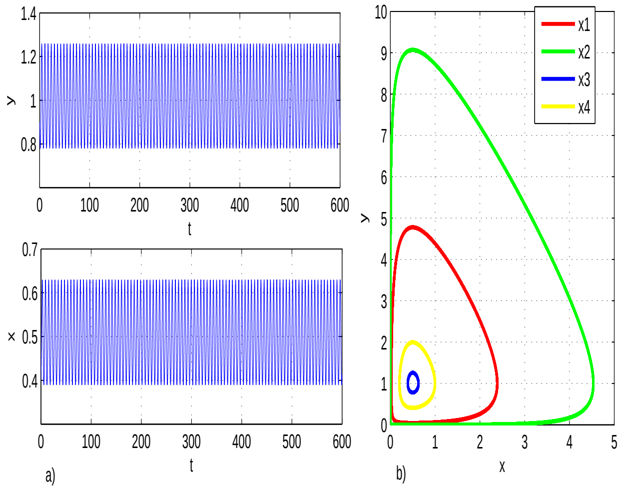

FIGURE 4.3: a)L'évolution temporelle de x, y. b) Trajectoire du système (4.2) pour $\alpha = 1$.

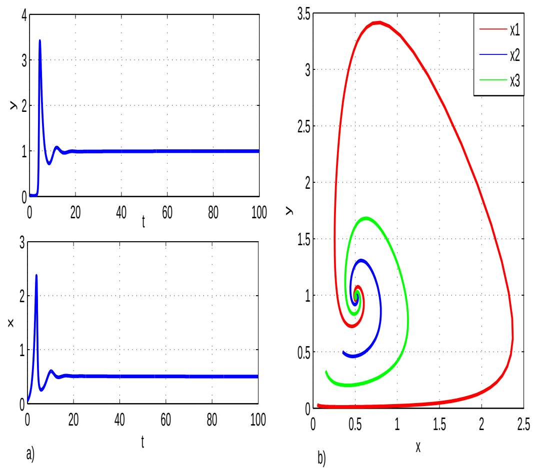

FIGURE 4.4: a) L'évolution temporelle de x, y. b) Trajectoire du système (4.2) avec $\alpha = 0.8$.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons présent les résultats des travaux qui donnent la réponse de la question de l'existence ou non existence des solutions périodiques d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire.
Nous avons trouver que dans le cas où la borne inférieur a de la dérivation fractionnaire est un constant fini, alors la dérivée d'une fonction périodique n'est pas une fonction périodique de la même période par conséquence les systèmes autonome d'ordre fractionnaire n'admettent pas des solutions périodiques par contre si la borne inférieur a est infini ($a = \pm\infty$) alors les système d'ordre fractionnaire peuvent avoir des solutions périodiques.

Finalement le mémoire est terminé par des applications numériques qui confirment les résultats théoriques.

Annexe

Dans cette annexe nous allons donner quelques outils qui sont utilisé dans ce travail.

a) Différentiation d'une intégrale dépendant d'un paramètre

* La règle standard de la différentiation d'une intégrale dépendant d'un paramètre dans le cas unidimensionnel pour les fonctions continûment différentiable $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$; $\beta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ on a :

$$\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dy + \frac{d\beta(x)}{dx} f(x,\beta(x)) - \frac{d\alpha(x)}{dx} f(x,\alpha(x)).$$

b) Bloc de Jordan

Définition 4.1. (Bloc de Jordan)
On appelle bloc de Jordan de dimension n et valeur propre λ, la matrice $J_{n,\lambda}$ de type $n \times n$ définie par les propriétés suivantes :

a) Les coefficients sur la diagonale sont tous égaux à λ.

b) Les coefficients d'indices $(i, i+1)$ sont tous égaux à 1, pour $i = 1 \cdots, n-1$.

c) Tous les autres coefficients sont nuls, et en particulier $J_{n,\lambda}$ est triangulaire supérieure.

Définition 4.2. (Matrice de Jordan)
Une matrice de Jardan est une matrice carré partagée en sous-matrices telle que :

a) Les blocs diagonaux sont des blocs de Jordan.

b) Les blocs extérieurs à la diagonale sont des matrices nulles.

c) Stabilité des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire

Pour etudier la stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire nous utilisé le théorème suivant introduit par Matignon [5].

Théorème 4.3. *(La stabilité des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire)*
On considère le système différentiel d'ordre fractionnaire

$$D^{\alpha}x(t) = Ax(t); \tag{4.3}$$

où A est une matrice $n \times n$ constante, $0 < \alpha < 1$.

a) La solution $x(t) = 0$ du système (4.3) est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres λ_i; $(i = 1, \cdots, n)$ de A satisfirent $\mid \arg(\lambda_i) \mid > \frac{\alpha\pi}{2}$.

b) La solution $x(t) = 0$ du système (4.3) est stable si et seulement si toutes les valeurs propres λ_i; $(i = 1, \cdots, n)$ de A satisfirent $\mid \arg(\lambda_i) \mid \geq \frac{\alpha\pi}{2}$ avec égalité si les valeurs correspondant ont une multiplicité géométrique qui coïncide avec la multiplicité algébrique.

Bibliographie

[1] K. Diethelm. *The Analysis of Fractional Differential Equations.* Springer, Verlag Berlin Heideberg, 2010.

[2] K. Haouam. *Existence et non existence de solution des équations différentielles fractionnaires.* Thèse de Doctorat Univ.Mentouri. Constantine, 2008.

[3] E. Kaslik and S. Sivasundaram. Non-existance of periodic solutions in fractional-order dynamical systems and a remarkable difference between integer and fractional-order derivatives of periodic functions. *Non linear analysis : Real World Application*, 13 :1489–1497, 2012.

[4] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equation.* Elserver,Amsterdam, 2006.

[5] D. Matignon. Stability result on fractional differential equations with applications to control processing. In *IMACS-SMC Proceedings, Lille-France*, pages 963–968, July 1996.

[6] P. Meier, A.Bonanomi, and D.Messina. *les équations de Lotka-Volterra pour les systèmes des populations.* Mini projet, Ecole poltechnique Féderale de Lausanne, 2006.

[7] K. S. Miller and B. Ross. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations.* John Wiley & Sons Inc, New York, 1993.

[8] I. N'Doye. *Généralisation du Lemme de Gronwall-ellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires.* Thèse de Doctorat Unniv.Henri poincaré-Nanay1 et de l'Univ Hassan Ain chock-Casablanca, 2011.

[9] Z. Odibat. Analytic study on linear systems of fractional differential equations. *computers and Mathematics with Applications*, 59 :1171–1183, 2010.

[10] K. B. Oldham and J. Spanier. *The fractional calculus : Theory and applications of Differentiation and integration to Arbitrary order.* Academic press, INC, New York, 1974.

[11] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations.* Academic Press, New york, 1999.

[12] M. Slman. *Équations différentielles d'ordre fractionnaires dans des espaces de Banach.* Thèse de Magistère Univ.Abou Beker Belkaid, Tlemcen, 2012.

[13] M. S. Tavazoei. A note on fractional-order derivatives of periodic functions. *Automatica*, 46 :945–948, 2010.

[14] M. S. Tavazoei and M. Haeri. A proof for non existence of periodic solutions in time invariant fractional order systems. *Automatica*, 45 :1886–1890, 2009.

[15] M. S. Tavazoei, M. Haeri, and N. Nazari. Analysis of undamped oxillations genrated by marginally stable fractinal order systems. *Signal processing*, 88 :2971–2978, 2008.

[16] M. Yazdani and H.Salarieh. On the existence of periodic solutions in time-invariant fractional ordre systems. *Automatica*, 47 :1834–1837, 2011.

ملخص

في هذه المذكرة تطرقنا إلى دراسة وجود حلول دورية أو عدم وجودها لمعادلات تفاضلية ذات رتبة ناطقة وذلك بعرض النظريات التي تثبت ذلك وللتأكيد على صحة هذه الدراسة استعنا بالنتائج العددية المتحصل عليها بتطبيق الطريقة العددية ل "أدمس-باشفورث-مولتن.

كلمات مفتاحية المعادلات التفاضلية ذات رتبة ناطقة- الحلول الدورية.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons présenté quelques résultats théoriques d'existence ou non existence des solutions périodiques des équations différentielles d'ordre fractionnaire, ces résultats théoriques ont été confirmés par des résultats numériques obtenus en appliquant la méthode d'Adams-Bashforth-Moulton PECE.

Mots clés les équations différentielles d'ordre fractionnaire, les solutions périodiques.

Abstract

In this work, we have presented the existence or non existence results of periodic solutions for fractional order differential equations. The numerical results obtained using the Adams-Bashforth-Moulton method (PECE) confirms the justness of the analytical study.

Key words: fractional order differential equations - periodic solutions.