الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Minstère de lôEnseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

CENTRE UNIVERSITAIRE DE MILA
INSTITUT DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

Réf.   /11

Mémoire de fin dôétude
Présenté pour lôobtention du diplôme de

Licence Académique

Domaine : **Mathématiques et Informatique**
Filière : **Mathématiques**
Spécialité : **Mathématiques Fondamentales**

Thème

Les opérateurs linéaires

Présenté par :
Boumelit Imane
Hebboul Khadidja

Dirigé par :
Ahmed Yahia Rakia

Année universitaire 2010-2011

Remerciements

Avant tout, nous tenons à remercier Allah pour tout puissant qui nous aidé à terminer ce travail.

Nous tenons tiens à exprimer nos gratitudes ainsi que nos vifs remerciements à notre encadreur " Ahmed Yahya Rakia" pour les précieux conseils, et les encouragements dont elle nous fait bénéficier.

Nous tenons à remercier tous nos enseignants durant toutes nos vies scolaires.

En fin nous n'oublierons pas tous ceux qui nous ont encouragé pour terminer ce travail du loin ou du près, à tous ceux-ci,

Merci. . . .Merci. . . .Merci. . . .Merci.

Table des matières

Introduction

La mécanique quantique utilise un ensemble d'outils mathématiques indispensables à l'étude rigoureuse des phénomènes physiques, et parmi ces outils, les opérateurs linéaires. Lorsque ces opérateurs sont continus, leurs manipulation n'offre pas de difficulté majeure, mais dans le cas contraire, il faut être d'une extrême prudence, car le domaine de définition d'opérateur est très important.

L'importance que constitue l'étude des opérateurs linéaires, nous à poussé à choisir ce thème pour l'étudier et l'analyser.

Nous débutons, tout d'abord par décrire en détail leurs structures, leurs types, ..., puis, on citera en premier lieu, les opérateurs bornés leurs définitions, les propriétés, leurs principes fondamentaux,...en suite l'adjoint et l'auto-adjoint, on les étudie dans les espaces euclidiens et unitaires, ces notions s'enrichissent considérablement, en dimension infinie, par exemple, bon nombre d'opérateurs en physique mathématique s'avèrent auto-adjoint ; la mécanique quantique se laisse décrire en termes d'opérateurs auto-adjoint dans un espace de Hilbert complexe, puis les compacts qui constituent une classe particulières d'opérateurs bornés et qui présentent de grandes analogies avec les opérateurs linéaires dans un espace de dimension finie, en dernier lieu, nous signalons qu'il existe un autre type d'opérateurs linéaires, le non borné.

Notre étude s'achève par une conclusion générale.

Généralités

0.1 *Définition générale de l'opérateur*

Soient X, Y deux ensembles quelconques. Soit $D \subseteq X$. Si à tout élément $x \in D$ correspond un élément $y \in Y$, on dit que $y = A(x)$ est un opérateur. L'ensemble D s'appelle alors ensemble de définition de A et se note généralement $D(A)$. L'ensemble $R = R(A) = \{y \in Y;\ y = A(x),\ x \in D\}$ s'appelle ensemble des valeurs de A. On dit aussi que A est un opérateur défini sur $D(A)$, à valeurs dans $R(A)$ et aussi écrit :

$$X \supseteq D(A) \xrightarrow{A} R(A) \subseteq Y,$$

ou (plus souvent) en abrégé :

$$A : X \to Y.$$

Remarque 1

1. Si $D(A) = X$ on dit que l'opérateur A est défini partout.
2. Introduisons quelques autres notions. On dit que deux opérateur $A : X \to Y$ et $\Phi : X \to Y$ sont égaux s'ils ont même ensemble de définition $D(A) = D(\Phi)$, et si $A(x) = \Phi(x)$ pour tout $x \in D$.
3. On dit que l'opérateur Φ est une extension de l'opérateur A (où que A est une restriction de Φ) si $D(\Phi) \supset D(A)$ et $\Phi(x) = A(x)$ pour tout $x \in D(A)$.
4. Les opérateurs dont nous venons de parler sont injectifs (univalents) : à chaque image réciproque x l'opérateur A fait correspondre une seule image y. On rencontre aussi des opérateurs non injectifs (multivalents), qui à chaque x font correspondre tout un ensemble $A(x) \subset Y$.

0.2 ***Opérateur bijectif***

Soit $A : X \to Y$. Prenons un $y \in R(A)$ et considérons l'ensemble de ses images réciproques, noté $A^{-1}(y)$. Il est évidement non vide. On distingue un cas particulier important où $A^{-1}(y)$ se réduit à un seul élément x.

Définition 2 *Si pour chaque image $y \in R(A)$ il y a une seule image réciproque $x = A^{-1}(y)$, on dit que l'opérateur $y = A(x)$ est bijectif. Si A est bijectif, la formule $x = A^{-1}(y)$, où y parcourt R, définit un opérateur $A^{-1} : Y \to X$, dit opérateur inverse de A. Il est évident que*

$$D(A^{-1}) = R(A), \qquad R(A^{-1}) = D(A).$$

0.3 ***Composition d'opérateurs***

Soient trois ensembles quelconques X, Y, Z et deux opérateurs A, Φ tels que

$$D(A) \subseteq X, \qquad R(A) \subseteq Y;$$

$$D(\Phi) \subseteq Y, \qquad R(\Phi) \subseteq Z;$$

Si $R(A) \subseteq D(\Phi)$, on peut parler de la composée des opérateurs A et Φ, i. e. d'un opérateur $z = \Phi[A(x)]$ qui applique $D(A)$ dans $R(\Phi)$ de telle sorte que $\Phi[A(D(A))] \subseteq R(\Phi)$. Il est quelques fois noté $\Phi * A$ et appelé produit de composition des opérateurs Φ et A.

Si A est bijectif sur $D(A)$, on a

$$A^{-1} * A = I_X \text{ sur } D(A),$$

$$A * A^{-1} = I_Y \text{ sur } R(A),$$

I. ***Les opérateurs linéaires***

1.1 ***Définition d'un opérateur linéaire***

Soient X, Y deux espaces vectoriels, qui sont tous deux réels ou tous deux complexes.

Définition 3 *Un opérateur* $A : X \to Y$ *défini sur* $D(A)$ *est appelé linéaire si*

1° $D(A)$ est une variété linéaire (i. e. $\forall x_1,\ x_2 \in D(A),\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in D(A),\ \forall \lambda_1,\ \lambda_2$)

2° $A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2$

pour tous x_1, $x_2 \in D$ et pour deux scalaires quelconques λ_1, λ_2.

La notion d'opérateur linéaire généralise celle de fonction linéaire $y = \alpha x$, où les variables x, $y \in E$ et α est un nombre réel donné. Un exemple à peine plus compliqué d'opérateur linéaire est fourni par la fonction d'une variable complexe $\omega = az$, où les variables z, ω et le facteur a sont complexes.

En algèbre linéaire, on étudie les opérateurs linéaires dans les espaces vectoriels de dimension finie. Par analogie avec la notation d'une fonction linéaire, nous omettrons partout les parenthèses et nous écrirons simplement $y = Ax$ pour désigner un opérateur linéaire, auquel cas A intervient comme un coefficient opératoriel de x.

Théorème 4 *L'ensemble des valeurs de tout opérateur linéaire est une variété linéaire.*

Preuve. Soient deux éléments $y_1,\ y_2$ de $R(A)$ et λ_1, λ_2 deux scalaires. Cherchons dans $D(A)$ l'image réciproque x_1 de y_1 et l'image réciproque x_2 de y_2, de sorte que $Ax_1 = y_1$ et $Ax_2 = y_2$. Puisque A est linéaire (propriété 2° de la définition), on a

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2 = A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2).$$

Cela revient à dire que l'élément $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ appartenant à $D(A)$ en vertu de la propriété 1° de la définition est l'image réciproque de l'élément $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$, i. e. que ce dernier appartient à $R(A)$. Le théorème est démontré.

On distingue deux types de définition d'opérateurs linéaires qui sont les plus importants pratiquement :

a) $D(A) = X$, i. e. A est défini partout dans X.

b) Soit X un espace normé, et soit $\overline{D} = X$ (la fermeture de l'ensemble D se confond avec X tout entier). On dit alors que l'ensemble de définition de A est dense dans X ou que A est défini dans une partie dense de X. ■

1.2 ***Opérateur linéaire continu***

Soient X, Y deux espaces normés et A un opérateur linéaire, $A : X \to Y$, défini partout dans X (i. e. $D(A) = X$).

On dit que l'opérateur A est continu en un point $x_0 \in X$ si $Ax \to Ax_0$ quand $x \to x_0$. On peut dire à priori si l'opérateur linéaire est continu ou non en un point quelconque $x_0 \in X$: il suffit de voir s'il est continu ou non au point nul de l'espace X.

Théorème 5 *Soit A un opérateur linéaire défini partout dans un espace de Banach X, à valeurs dans un espace de Banach Y, continu au point $0 \in X$: alors A est continu en tout point $x_0 \in X$.*

Preuve. Il suffit de considérer l'égalité $Ax - Ax_0 = A(x - x_0)$. Si $x \to x_0$, on a $z = x - x_0 \to 0$. Par continuité en 0 on a $Az \to 0$; on a alors aussi $Ax - Ax_0 \to 0$, ce qu'il fallait démontrer. ■

1.2.1 ***Exemples d'opérateurs linéaires.***

1. L'opérateur identique $(Ax = x, \ \forall x \in X)$.
2. L'opérateur nul $(0x = 0, \ \forall x \in X, \ 0 \in Y)$.

1.3 ***Les différences entre les opérateurs linéaires dans les espaces de dimension finie et infinie***

1. En dimension infinie, toutes les normes ne sont pas équivalentes.
2. En dimension infinie, la boule unité fermé n'est pas compacte.
3. En dimension infinie, une appllication linéaire n'est pas forcément continue.
4. En dimension infinie, il n'ya pas équivalente pour une application linéaire d'un espace vectoriel dans lui mème entre le caractère injectif et le caractère surjectif. en d'autre terme, si X désigne un espace vectoriel de dimension infinie, ce n'est pas parceque le noyan d'un opérateur A de X dans X est réduit à $\{0\}$ qu'on peut forcément inverser A.
5. En dimension infinie, on peut trés bien avoir un opérateur A tel que $\langle Ax, \ x\rangle > 0$ pour tout vecteur $x \neq 0$, et pourtant n'avoir l'existance d'une constante $c > 0$ telle que $\langle Ax, \ x\rangle \geq c\left\|x\right\|^2$.

II. Les opérateurs linéaires bornés

2.1 Définition et particularités des opérateurs linéaires bornés

Soient X, Y deux espaces vectoriels normés sur le corp $\Bbbk$ $(\Bbbk = \mathbb{R}$ où $\mathbb{C})$.

Définition 6 *On appelle opérateur linéaire borné, toute application linéaire continu de X vers Y.*

Définition 7 *Soit A un opérateur linéaire tel que $D(A) = X$ et $R(A) \subset X$. On dit que A est borné s'il est borné sur la boule unité $\overline{B}(0,1)$, i. e. si l'ensemble*

$$\{\|Ax\|, \ \|x\| \leq 1\} \text{ est borné.}$$

Conformément à cette définition, si A est borné, il existe constante $c > 0$ telle que pour tout x tel que $\|x\| \leq 1$ on a l'inégalité

$$\|Ax\| \leq c. \tag{1}$$

Théorème 8 *A est borné si et seulement si*

$$\|Ax\| \leq c\|x\|. \tag{2}$$

pour tout $x \in X$, où c est la constante tirée de (1).

Preuve. Pour $x = 0$ l'inégalité (2) est évidente. ■

Soit $x \neq 0$. Posons $x' = \frac{x}{\|x\|}$. On a $\|x'\| = 1$; il ressort donc de (1) que $\|Ax'\| \leq c$, i. e. que $\left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq c$. Puisque A est linéaire, on a $A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{1}{\|x\|}Ax$, et puisque la norme est homogène, on a $\left\|\frac{1}{\|x\|}Ax\right\| = \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, d'où l'inégalité $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq c$ équivalente à (2).

Réciproquement, si (2) a lieu, on a $\|Ax\| \leq c$ dans $\overline{B}(0,1)$, i. e. A est borné. Le théorème est démontré.

Proposition 9 *Soient X et Y deux espaces vectoriels normés et on a $D(A) = X$ et A un opérateur linéaire de X dans Y, alors : Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. A continue sur X.
2. A continu au point 0.
3. A est borné sur $\overline{B}(0,1)$.
4. Il existe un réel $c \geq 0$ tel que: $\|Ax\| \leq c\|x\|, \forall x \in X$.
5. A est lipschitzien.

Preuve. $1° \Rightarrow 2°$ On a : A continu sur X et $0 \in X$ d'où A est continu en 0.

$2° \Rightarrow 3°$ Supposons que A est continu au point 0, alors :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in X, \|y\| \leq \delta \Rightarrow \|Ay\| \leq \varepsilon.$

Soit $\varepsilon = 1$ alors $\exists \delta > 0, \forall y \in X.$

$$\|y\| \leq \delta \Rightarrow \|Ay\| \leq 1$$

donc $x = \frac{y}{\delta} \in \overline{B}(0,1)$.

et on a : $\|Ax\| = \left\|\frac{Ay}{\delta}\right\| \leq \frac{1}{\delta} = M > 0.$

$3° \Rightarrow 4°$ Supposons que A est borné sur $\overline{B}(0,1)$ alors :

$\exists c > 0$, telle que $\forall y \in \overline{B}(0,1)$ $(\|y\| \leq 1)$, on a : $\|Ax\| \leq c$

Soit $x \in X$ alors $\frac{x}{\|x\|} \in \overline{B}(0,1)$.

Donc : $\left\|A\frac{x}{\|x\|}\right\| \leq c \Rightarrow \frac{1}{\|x\|}\|Ax\| \leq c$

D'où : $\|Ax\| \leq c\|x\|$.

$4° \Rightarrow 5°$ Supposons qu'il existe $c \geq 0$, tel que $\forall x \in X : \|Ax\| \leq c\|x\|$.

Soit $x_1, x_2 \in X$, alors : $\|Ax_1 - Ax_2\| = \|A(x_1 - x_2)\| \leq c\|x_1 - x_2\|$.

Donc : A est lipschitzien.

$5° \Rightarrow 1°$ Suppose que A est lipschitizien de rapport $K \geq 0$

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \frac{\varepsilon}{K}$ tel que : $\forall x_1,\, x_2 \in X,\, \|x_1 - x_2\| \leq \delta = \frac{\varepsilon}{K}$.

$\Rightarrow \|Ax_1 - Ax_2\| \leq K \|x_1 - x_2\| \leq K \frac{\varepsilon}{K}$.

Donc toute application lipschitzien est continue. ■

2.1.1 ***Opérateurs linéaires définis sur un espace vectoriel normé de dimension finie.***

Proposition 10 *Soit X un espace vectoriel normé, si X est de dimension finie alors : tout opérateur linéaire de X dans X est borné.*

Preuve. Soit $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ une base pour X. ■

Alors : pour tout $x \in X : X = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$, on a :

$AX = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i A x_i$ d'où :

$$\begin{aligned} \|AX\| = \|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i A x_i\| &\leq \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| \, \|Ax_i\| \\ &\leq \sup |\alpha_i| \sum_{i=1}^{m} \|Ax_i\| \\ &\leq c_1 \sum_{i=1}^{m} \|Ax_i\| \leq c_1 \|x\|_\infty \\ &\leq c \|x\| . \end{aligned}$$

$\Rightarrow A$ est borné.

2.1.2 ***Exemples d'opérateurs linéaires bornés.***

1) L'opérateur intégrale sur l'espace des fonctions continues est l'opérateur K tel que $Ku = v$ qui est défini par :

$$v(x) = \int_a^b K(x, s)\, u(s)\, ds$$

où $K(x, s)$ est continu sur $[a, b] \times [a, b]$ $\left(C[a, b], \|f\| = \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)| \text{ est de Banach} \right)$.

L'opérateur $K : C[a, b] \to C[a, b]$ est linéaire.

K borné $\Leftrightarrow \exists c > 0, \forall u \in C[a, b] : \|Ku\| \leq c \|u\| \Rightarrow \|v\|_{C[a,b]} \leq c \|u\|_{C[a,b]}$.

$$\left|\int_a^b K(x,s)\,u(s)\,ds\right| \leq \int_a^b |K(x,s)\,u(s)|\,ds$$

$$\leq \int_a^b \left|K(x,s)\sup_{a\leq s\leq b} u(s)\right| ds$$

$$\leq \|u\| \sup_{a\leq x,s\leq b} |K(x,s)|\,(b-a)$$

$\Rightarrow |v(x)| = \left|\int_a^b K(x,s)\,u(s)\,ds\right| \leq c\,\|u\|$

$\Rightarrow \sup_{a\leq x\leq b} |v(x)| \leq c\,\|u\|$.

$\Rightarrow \|Ku\| \leq c\,\|u\|$.

$\Rightarrow K$ est borné.

2) Soit X un espace normé, soit l'opérateur A tel que : $\forall x \in X$, $Ax = x$ est un opérateur borné (car $\|Ax\| \leq \|x\|$) cette opérateur s'appelle opérateur identique.

3) Tout opérateur linéaire dans un espace normé de dimension finie est nécessairement borné (car si T est une matrice associée à l'opérateur A alors $\|Ax\| = \|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\|$).

2.2 ***Espaces d'opérateurs linéaires***

2.2.1 ***Espace normé*** $\mathcal{L}(X,Y)$. Soient A, B, C, ...des opérateurs linéaires continus, définis partout dans un espace normé X, à valeurs dans un espace normé Y. Définissons,sur l'ensemble de tous les opérateurs de ce type, les opérations d'addition d'opérateurs et de multiplication d'un opérateur par un nombre. Soient par définition

$$(A+B)\,x = Ax + Bx,$$

$$(\lambda A)\,x = \lambda Ax.$$

- Notons $\mathcal{L}(X)$ l'espace de tous les opérateurs linéaires bornés de X dans X.
- Notons $\mathcal{L}(X,Y)$ l'espace de tous les opérateurs linéaires bornés de X dans Y.

2.3 ***Somme et produit d'opérateurs bornés***

Soient A, $B \in \mathcal{L}(X)$ l'opérateur $(A+B)$ est aussi borné et :

$$\|A+B\| \leq \|A\| \, \|B\| \qquad (*)$$

En effet : pour tout x on a :

$$\begin{aligned} \|(A+B)\,x\| &= \|Ax+Bx\| \\ &\leq \|Ax\| + \|Bx\|\,. \\ &\leq (\|A\| + \|B\|)\,(x)\,. \end{aligned}$$

D'où : le resultat $(*)$

Soient A, $B \in \mathcal{L}\,(X)$, l'opérateur (BA) est aussi borné et :

$$\|BA\| \leq \|B\| \, \|A\| \qquad (**)$$

En effet : $\|B\,(Ax)\| \leq \|B\| \, \|Ax\| \leq \|B\| \, \|A\| \, \|x\|$

D'où en obtient $(**)\,.$

2.4 ***Opérateurs inverses, inversibilité***

Soient X et Y deux espaces vectoriels topologiques, et soit $A : D(A) \subset X \to R(A) \subset Y$.

Définition 11 *L'opérateur A est dit inversible, si pour tout $y \in R(A)$, l'équation $Ax = y$ a une solution et une seule.*

Si A est inversible, à chaque $y \in R(A)$ on peut faire correspondre un élément et un seule $x \in D(A)$ à savoir la solution de l'équation $Ax = y$. L'opérateur qui réalise cette correspondance s'appelle inverse de A et se note A^{-1}.

Théorème 12 *L'opérateur A^{-1}, inverse d'un opérateur linéaire A, est aussi linéaire.*

Preuve. *Remarquons tout d'abord que le demaine des valeurs $R(A)$ de l'opérateur A, est une variété linéaire Soient $y_1,\ y_2 \in R(A)$. Ilsuffit de vérifier qu'on a l'égalité :*

$$A^{-1}\left(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\right) = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2 \qquad (1)$$

Soit $Ax_1 = y_1$ et $Ax_2 = y_2$. En vertu de la linéairité de A, on a :

$$A\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\right) = \alpha_1 y_1 + \alpha_1 y_2 \qquad (2)$$

D'aprés la définition de l'opérateur inverse, on peut écrire :

$$A^{-1} y_1 = x_1,\ A^{-1} y_2 = x_2.$$

En multipliant ces deux égalités respectivement par α_1 et α_2 et en l'additionnant membre à membre, on obtient :

$$\alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2.$$

D'autre part, l'égalité (2) et de la définition de l'opérateur inverse, il résulte que :

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = A^{-1}\left(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\right);$$

En comparant cette égalité avec la précédente, on obtient :

$$A^{-1}\left(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\right) = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2. \quad \blacksquare$$

2.4.1 ***Opérateur inverse dans les espaces vectoriels normés.***

Théorème 13 (*de Banach*) *Soit un opérateur $A : D(A) \subset X \to R(A) \subset Y$, où X et Y sont deux espaces vectoriels. Introduisons l'ensemble $N(A) = \{x \in D(A) :\ Ax = 0\}$ appelé l'ensemble des zéros de l'opérateur A est non vide, car $0 \in N(A)$.*

Théorème 14 *l'opérateur A met en bijection $D(A)$ et $R(A)$ si et seulement si $N\{A\} = \{0\}$ (i. e. si l'ensemble des zéros de A se réduit à un élément unique 0)*

Théorème 15 *l'opérateur A^{-1} existe et en même temps est borné sur $R(A)$ si et seulement si pour tout $x \in D(A)$,et pour une constante $m > 0$ on a*

$$\|Ax\| \geq m\,\|x\| \dots (1)$$

Preuve. *la condition est nécéssaire. Supposons que A^{-1} existe et soit borné sur $D(A^{-1})$=$R(A)$. Autrement dit, il existe $c > 0$ tel que pour tout $y \in R(A)$ on a $\|A^{-1}y\| \leq c\,\|y\|$. Posant $Ax = y$,on retrouve (1). La condition est suffisante. Si l'égalité (1) est vérifie, on a $x = 0$ toutes les fois que $Ax = 0$, i. e. que $x \in D(A)$. On a donc $N\{A\} = \{0\}$. En vertu du théorème 15, il existe un opérateur A^{-1} qui réalise une application bijective de $R(A)$ sur $D(A)$. Posant $x = A^{-1}y$ dans (1), on obtient $\|A^{-1}y\| \leq m^{-1}\,\|y\|$ pour tout $y \in R(A)$, i. e. A^{-1} est borné sur $R(A)$.* ■

Définition 16 *On dit qu'un opérateur linéaire $A : X \to Y$ est continûement inversible si $R(A) = Y$, l'opérateur A est inversible et $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ (i. e. est borné)*

Théorème 17 *l'opérateur A est continûement inversible si et seulement si $R(A) = Y$ et l'inégalité (1) est vérifiée pour tout $x \in D(A)$ et une constante $m > 0$.*

Si $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ est un opérateur défini partout et borné, il vérifie le théoreme de l'opérateur inverse de Banach.

Théorème 18 *Si A est un opérateur linéaire borné qui réalise une application bijective d'un espace de Banach X sur un autre espace de Banach Y, son inverse A^{-1} est borné.*

Autrement dit, A est continûement inversible toutes les fois que $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ (où X, Y sont deux espaces de Banach), $R(A) = Y$ et A est inversible.

Voyons maintenant comment l'inversibilité continue de l'opérateur affecte la résolubilité de l'équation linéaire

$$Ax = y \qquad (2).$$

si A est continûement inversible, (2) admet une solution unique $x = A^{-1}y$, quelque soit son second membre y.

2.4.2 ***Opérateurs inverses à gauche et à droite.***

Définition 19 *Un élément $A \in \mathcal{L}(X)$ est dit inversible à gauche,s'il existe un élément $S \in \mathcal{L}(X)$ tel que $SA = I$, inversible à droite s'il existe $S \in \mathcal{L}(X)$ tel que $AS = I$, inversible s'il est inversible à gauche et à droite et les deux inverses coîncident.*

- Si $A \in \mathcal{L}(X)$ admet un inverse à droite noté A_d^{-1} alors l'équation : $Ax = y$ admet une solution $\forall y$ (i. e. A surjectif).
- Si $A \in \mathcal{L}(X)$ admet un inverse à gauche noté A_g^{-1} alors l'équation : $Ax = y$ admet au plus une solution unique (A injectif).

Preuve. $x = A_d^{-1}y$ est une solution de $Ax = y$.

$\forall y$ car $A\left(A_d^{-1}y\right) = \left(AA_d^{-1}\right)y = Iy = y$, $\forall y$.

Il suffit de montre que $N(A) = 0$, $x \in N(A) \Rightarrow Ax = 0$

$\Rightarrow A_g^{-1}(Ax) = A_g^{-1}(0) = 0$

$\Rightarrow \left(A_g^{-1}A\right)x = 0 \Rightarrow Ix = 0 \Rightarrow x = 0.$ ■

2.5 ***L'espace normé $\mathcal{L}(X)$***

Proposition 20 *$\mathcal{L}(X)$ est un espace vectoriel normé par : $\|A\| = \sup_{x \in X/\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.*

Preuve. Demontrons que A est une norme :

$\|A\| = 0 \Rightarrow A = 0?$

$\|A\| = 0 \Leftrightarrow \sup_{x \in X/\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0 \Rightarrow \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0, \forall x \in X/\{0\}.$

$\Leftrightarrow \|Ax\| = 0 \Leftrightarrow Ax = 0, \forall x \in X/\{0\}$

$\Leftrightarrow A = 0, \forall x \in X/\{0\}.$

$\|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\|.$

On a :$\|\lambda A\| = \sup_{x\in X/\{0\}} \frac{\|\lambda Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x\in X/\{0\}} \frac{|\lambda|\|Ax\|}{\|x\|}$

$= \lambda \sup_{x\in X/\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

$= |\lambda| \|A\|.$

Soit A, B deux opérateurs linéaires bornés : $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$?

$$\|A+B\| = \sup_{x\in X/\{0\}} \frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} = \sup_{x\in X/\{0\}} \frac{\|Ax+Bx\|}{\|x\|}$$
$$\leq \sup_{x\in X/\{0\}} \left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \frac{\|Bx\|}{\|x\|}\right).$$
$$= \sup_{x\in X/\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \sup_{x\in X/\{0\}} \frac{\|Bx\|}{\|x\|}$$
$$= \|A\| + \|B\|.$$

de 1, 2, 3 on déduit que A est une norme. ■

Proposition 21 *Pour tout opérateur borné de X dans X on a :*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|.$$

Preuve. On a : A borné$\Leftrightarrow$ A borné sur $S(0,1)$

$\Leftrightarrow$ A borné sur $\overline{B}(0,1)$

$$S(0,1) \subset X \Rightarrow \sup_{x\in S(0,1)} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup_{\|x\|=1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$
$$\Rightarrow \sup_{x\in S(0,1)} \|Ax\| \leq \|A\| \qquad (1)$$

Soit $x \in X/\{0\} \Rightarrow \frac{x}{\|x\|} \in S(0,1)$

$$\Rightarrow \left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \sup_{x\in S(0,1)} \|Ax\|$$

$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup_{x\in S(0,1)} \|Ax\|$

$\Rightarrow \sup_{x\in X/\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup_{x\in S(0,1)} \|Ax\|.$

$\Rightarrow \|A\| \leq \sup_{x\in S(0,1)} \|Ax\|$

$\Rightarrow \|A\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$

D'autre part $S(0,1) \subset \overline{B}(0,1) \Rightarrow \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| \qquad (3)$

Soit $x \in \overline{B}(0,1) \Rightarrow \frac{x}{\|x\|} \in \quad S(0,1)$

$$\Rightarrow \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \sup_{\|x\|=1}\|Ax\|$$

$$\Rightarrow \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup_{\|x\|=1}\|Ax\|$$

$$\Rightarrow \|Ax\| \leq \left[\sup_{\|x\|=1}\|Ax\|\right]\|x\|$$

$$\Rightarrow \sup_{\|x\|\leq 1}\|Ax\| \leq \sup_{\|x\|=1}\|Ax\| \qquad (4)$$

de (1), (2), (3), (4) on déduit que : $\|A\| = \sup_{\|x\|=1}\|Ax\| = \sup_{\|x\|\leq 1}\|Ax\|$. ■

Proposition 22 *Soit $A \in \mathcal{L}(X)$ alors on a :*

$\forall x \in X : \|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|$.

Preuve. $\|A\| = \sup_{x\in X/\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \Rightarrow \forall x \in X/\{0\} : \|A\| \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

$$\Rightarrow (\forall x \in X/\{0\} : \ \|A\|\,\|x\| \geq \|Ax\|)$$

$$\Rightarrow \|A\|\,\|x\| \geq \|Ax\|$$

Donc : $\forall x \in X : \|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|$. ■

2.6 Convergence d'opérateurs linéaires

2.6.1 Convergence uniforme d'opérateurs linéaires.

Définition 23 *Soit une suite d'opérateurs*

$$\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$$

On dit que $A_n \to A \in \mathcal{L}(X,Y)$ uniformément pour $n \to \infty$ si $\|A_n - A\| \to 0$ pour $n \to \infty$.

Ainsi donc, la convergence uniforme d'une suite d'opérateurs linéaires n'est autre que sa convergence au sens de la norme de $\mathcal{L}(X,Y)$.

2.6.2 ***Convergence forte dans $\mathcal{L}(X,Y)$.*** En plus de la convergence uniforme d'opérateurs linéaires bornés dans $\mathcal{L}(X,Y)$, il existe un autre type de convergence qu'on rencontre tout aussi fréquemment dans les applications.

Définition 24 *Soit une suite* $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$. *On dit que cette suite converge fortement vers un opérateur* $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ *si pour tout* $x \in X$

$$\|A_n x - Ax\| \to 0,\ n \to \infty.$$

Remarquons que si pour $n \to \infty$ la suite $\{A_n\}$ converge vers A uniformément, i. e. au sens de la norme de $\mathcal{L}(X,Y)$, on a $A_n \to A$ fortement pour $n \to \infty$. En effet, cela ressort immédiatement de la majoration

$$\|A_n x - Ax\| \leq \|A_n - A\| \|x\|.$$

On peut se demander si, dans ces conditions, les deux types de la convergence dans $\mathcal{L}(X,Y)$ ne sont pas équivalents.

2.6.3 ***Principe de la borne uniforme.***

Lemme 25 *Soit* $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$; *supposons qu'il existe une constante* $c > 0$ *et une boule fermée* $B(x_0, r)$ *telles que* $\|A_n x\| \leq c$ *pour tout* $x \in \overline{B}(x_0, r)$ *(i. e. que la suite* $\{A_n(x)\}$ *est uniformément bornée sur* $\overline{B}(x_0, r)$*). Alors la suite* $\{\|A_n\|\}$ *est bornée.*

Théorème 26 *(principe de la borne uniforme) Soit* X *un espace de Banach. Si la suite* $\{A_n x\}$ *est bornée pour tout* x *donné,* $x \in X$, *alors la suite* $\{\|A_n\|\}$ *est bornée.*

Preuve. Supposons que le théorème soit faux. Alors la suite $\{\|A_n x\|\}$ n'est bornée dans aucune boule fermée, sans quoi la suite $\{\|A_n\|\}$ serait bornée en vertu du lemme précédent. Prenons une boule $\overline{S_0}$. La suite $\{\|A_n x\|\}$ est non bornée dans cette boule. Il existe alors un point x_1 appartenant à S_0, i. e. une boule ouverte, et un n_1 tels que $\|A_{n_1} x_1\| > 1$. En vertu de la continuité de A_{n_1}il existe une boule $S_1 = B(x_1, r_1)$ telle que $\|A_{n_1} x\| > 1$ dans $\overline{S_1}$. La suite $\{\|A_n x\|\}$ reste non bornée dans S_1 aussi, si bien qu'il existe $x_2 \in S_1$ et $n_2 > n_1$ tels que $\|A_{n_2} x_2\| > 2$, et ainsi de suite. Nous finissons par obtenir $\{x_k\}$ et $\{\overline{S_k}\}$ tels que $x_k \in S_k$, que $\overline{S_0} \supset \overline{S_1} \supset ... \supset \overline{S_n} \supset$ ...et que $\|A_{n_k} x\| \geq k$ sur $\overline{S_k}$. En vertu du théorème des boules emboîtées, elles admettent un point commun $\overline{x} \in \overline{S_k}$, $k = 1, 2, \ldots$Alors $\|A_{n_k}\overline{x}\| \geq k$, i. e. $\{A_n\overline{x}\}$ est non bornée, ce qui est faux. Le théorème est démontré. ■

Théorème 27 *(Banach-Steinhaus) Soit $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$, où X est un espace de Banach. Pour que $A_n \to A \in \mathcal{L}(X, Y)$ fortement pour $n \to \infty$, il faut et il suffit que*

1. $\{\|A_n\|\}$ soit bornée ;
2. $A_n \to A$ fortement pour $n \to \infty$ sur une variété linéaire X' dense dans X.

Preuve. La condition est nécessaire. De la condition $A_n x \to Ax$ pour $n \to \infty$, $x \in X$, il ressort que $\|A_n x\| \to \|Ax\|$ pour $n \to \infty$, si bien que la suite $\{\|A_n x\|\}$ est bornée. En vertu du principe de la borne uniforme, la suite $\{\|A_n\|\}$ est bornée. Comme X', on peut prendre X. La condition est bien nécessaire.

La condition est suffisante. Soit $x \in X$ mais $x \notin X'$. Donnons-nous un $\varepsilon > 0$ et cherchons un $x' \in X'$ tel que $\|x - x'\| < \varepsilon$ (condition pour que X' soit dense dans X). Soit ensuite $c = \sup_{n=0,1,2,\ldots} \|A_n\|$, où $A_0 = A$. Montrons que $A_n \to A$ fortement pour $n \to \infty$:

$$\begin{aligned}\|A_n x - Ax\| &= \left\|A_n\left(x - x'\right) + \left(A_n x' - Ax'\right) + A\left(x' - x\right)\right\| \\ &\leq \|A_n\|\left\|x - x'\right\| + \left\|A_n x' - Ax'\right\| + \|A\|\left\|x' - x\right\| \\ &\leq 2c\varepsilon + \left\|A_n x' - Ax'\right\|.\end{aligned}$$

Utilisons le fait que $\left\{A_n x'\right\}$ converge vers Ax'. Cherchons un N tel que pour tout $n > N$ il y ait $\left\|A_n x' - Ax'\right\| < \varepsilon$. On a alors pour tout $n > N$

$$\|A_n x - Ax\| < (2c + 1)\varepsilon.$$

La condition est donc bien suffisante. ■

III. ***Les opérateurs linéaires adjoints et auto-adjoints***

En mathématique, l'opérateur adjoint, quand il existe, est un nouvel opérateur défini sur un espace vectoriel sur $\Bbbk$-espace vectoriel, muni d'un produit scalaire, un tel espace est qualifié de préhilbertien.

Définition 28 *(d'espace dual) : Soient X un espace de Banach et X^1 la droite réelle si X est réel ou le plan complexe si X est complexe.*

Considérons l'espace de Banach $\mathcal{L}(X, X^1)$ formé de fonctionnelles linéaires bornées définies sur X. Cet espace est appelé le dual de X et noté X^*. La valeur prise par une fonctionnelle $f \in X^*$ sur un élément $x \in X$ sera notée comme précédemment $\langle x,\ f \rangle$ (ou $f(x)$).

3.1 ***Les opératurs adjoints***

Définition 29 *Soient X, Y deux espaces de Banach et Soit $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ écrivons l'expression*

$$\langle Ax,\ f \rangle \text{, où } x \in X,\ f \in Y^*.(Y^* \text{ est le dual de } Y)$$

Définissons maintenant une fonctionnelle φ telle que

$$\varphi(x) = \langle x,\ \varphi \rangle = \langle Ax,\ f \rangle . \qquad (1)$$

Notons quelques propriétés de φ :

1° $D(\varphi) = X$;

2° φ est linéaire car

$$\varphi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \langle A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2),\ f \rangle$$
$$= \alpha_1 \langle Ax_1,\ f \rangle + \alpha_2 \langle Ax_2,\ f \rangle$$

$$= \alpha_1 \varphi(x_1) + \alpha_2 \varphi(x_2);$$

3° φ est bornée, car

$$|\varphi(x)| = |\langle Ax,\ f\rangle| \leq \|Ax\| \|f\| \leq \|A\| \|f\| \|x\|.$$

On a donc $\varphi \in X^*$. De cette façon, à toute $f \in Y^*$ correspond, d'aprés (1), un élément $\varphi \in X^*$. Autrement dit, on a un opérateur linéaire continu $\varphi = A^* f$. C'est précisément l'opérateur $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ qu'on appelle opérateur adjoint de A.

Définition 30 *On définit pour tout x, y l'opérateur adjoint A^* par rapport au produit scalaire $\langle .,\ .\rangle$ tel que :*

$$\langle Ax,\ y\rangle = \langle x,\ A^* y\rangle.$$

Propriétés.

1. $(A^*)^* = A$.
2. $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$, $\forall \lambda$.
3. $(A + B)^* = A^* + B^*$.
4. $(AB)^* = B^* A^*$.

Lemme 31 *Si $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, alors $\|A^*\| = \|A\|$.*

Corollaire 1 du théorème de Hahn Banach : Soit X un espace normé, et soit $x \in X$, $x \neq 0$. Il existe alors une fonctionnelle linéaire f bornée définie partout dans X et telle que

$$\|f\| = 1,\ \langle x,\ f\rangle = \|x\|.$$

Preuve. En vertu de la propriété 3° on a d'après la définition de la norme d'une fonctionnelle linéaire

$$\|\varphi\| \leq \|A\| \|f\|, \text{ i. e. } \|A^*\| \leq \|A\|.$$

Ensuite, conformément au corollaire 1 du théorème de Hahn Banach, pour tout x_0 tel que $Ax_0 \neq 0$ il existe une fonctionnelle $f_0 \in Y^*$ telle que $\|f_0\| = 1$ et que $\langle Ax_0,\ f_0 \rangle = \|Ax_0\|$. Il en ressort que

$$\begin{aligned} \|Ax_0\| &= |\langle Ax_0,\ f_0\rangle| = |\langle x_0,\ A^* f_0\rangle| \\ &\leq \|A^*\| \|f_0\| \|x_0\| = \|A^*\| \|x_0\| , \end{aligned}$$

d'où $\|A\| \leq \|A^*\|$. On a donc $\|A^*\| = \|A\|$. ■

3.1.1 ***Exemple d'opérateur adjoint.*** Soient $X = Y = \mathcal{L}_2 [a, b]$. Considérons l'opérateur intégral $y = Kx$:

$$y(t) = \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds$$

de noyau $K(t,\ s)$ continu dans le carré $[a, b] \times [a, b]$. Bornons-nous à considérer le cas réel. On a l'égalité

$$\begin{aligned} \langle Kx,\ z\rangle &= \textstyle\int_a^b \left\{ \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds \right\} z(t)\, dt \\ &= \textstyle\int_a^b \left\{ \int_a^b K(t, s)\, z(t) \right\} x(s)\, ds \\ &= \langle x,\ K^* z\rangle . \end{aligned}$$

Par conséquent, l'opérateur adjoint $\omega = K^* z$ est lui aussi un opérateur intégral :

$$\omega(t) = \int_a^b K(s, t)\, z(s)\, ds,$$

et son noyau est le transposé du noyau de l'opérateur $K(t, s)$.

Application

Soient a, b deux vecteurs d'un espace de Hilbert H, A l'opérateur défini sur H par : $A : x \to \langle x,\ a \rangle b$.

1. Montrer que $A \in \mathcal{L}(H)$.
2. Trouver A^*.

Montrons que $A \in \mathcal{L}(H)$

– La linéairité : $\forall x,\ y \in H$, $\forall \alpha,\ \beta \in \Bbbk$

$$\begin{aligned}\langle \alpha x + \beta y,\ a \rangle b &= \langle \alpha x,\ a \rangle b + \langle \beta y,\ a \rangle b \\ &= \alpha \langle x,\ a \rangle b + \beta \langle y,\ a \rangle b \\ &= \alpha A + \beta A\end{aligned}$$

$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$.

– Borné : $\|Ax\| = \|\langle x,\ a \rangle b\| \leq \|b\| \|a\| \|x\|$

$$\leq c \|x\|.$$

Alors A est borné.

Calculons A^*

$$\begin{aligned}(\langle Ax,\ y \rangle = \langle x,\ A^* y \rangle,\ \forall x,\ y) &\Leftrightarrow \langle \langle x,\ a \rangle b,\ y \rangle = \langle x,\ A^* y \rangle \\ &\Leftrightarrow \langle x,\ a \rangle \langle y,\ b \rangle = \langle x,\ A^* y \rangle \\ &\Leftrightarrow \langle x,\ \langle y,\ b \rangle a \rangle = \langle x,\ A^* y \rangle \\ &\Leftrightarrow \langle x,\ \langle y,\ b \rangle a - A^* y \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle y,\ b \rangle a - A^* y \in H^{\perp} = \{0\}. \\ &\Rightarrow A^* y = \langle y,\ b \rangle a.\end{aligned}$$

3.2 Les opérateurs auto-adjoints

Soit H un espace de Hilbert complexe. (Le cas réel s'y réduit par la complexification.)

Définition 32 *L'opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ s'appelle auto-adjoint (où hermitien) si $A^* = A$, i. e. Si A se confond avec son adjoint.*

Conformément à cette définition, A est un opérateur auto-adjoint si pour deux éléments quelconques $x,\ y \in H$ on a

$$\langle Ax,\ y\rangle = \langle x,\ Ay\rangle\,. \qquad (1)$$

La possibilité d'≪envoyer≫ A d'un facteur à l'autre permet d'étudier en détail la classe des opérateurs auto-adjoints. Cette possibilité est d'autant plus précieuse que les opérateurs auto-adjoints se trouvent des emplois trés nombreux, notamment en mécanique quantique.

Exemple 33 *(dans l'exemple précédent). L'opérateur intégral K est auto-adjoint dans $\mathcal{L}_2[a,b]$ si et seulement si son noyau est symétrique, i. e. si $K(t,s) = K(s,t)$.*

Démontrons maintenant quelques théorèmes sur les propriétés des opérateurs auto-adjoints.

Théorème 34 *Soient A et B deux opérateurs auto-adjoints dans H, et soient α, β deux nombres réels ; alors $\alpha A + \beta B$ est un opérateur auto-adjoint dans H.*

Preuve. Puisque le produit scalaire est linéaire et que A, B sont auto-adjoints, on obtient conformément à la définition de l'opérateur $\alpha A + \beta B$

$$\begin{aligned}\langle (\alpha A + \beta B)\,x,\ y\rangle &= \langle \alpha Ax + \beta Bx,\ y\rangle = \alpha\,\langle Ax,\ y\rangle + \beta\,\langle Bx,\ y\rangle \\ &= \alpha\,\langle x,\ Ay\rangle + \beta\,\langle x,\ By\rangle = \langle x,\ \alpha Ax + \beta By\rangle \\ &= \langle x,\ (\alpha A + \beta B)\,y\rangle\,. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Théorème 35 *Soient A, B deux opérateurs auto-adjoints, l'opérateur AB est auto-adjoint si et seulement si A et B sont permutables.*

Preuve. Elle découle de l'égalité

$$\langle ABx,\ y\rangle = \langle Bx,\ Ay\rangle = \langle x,\ BAy\rangle .$$

■

Théorème 36 *Si A est auto-adjoint,le nombre $\langle Ax,\ x\rangle$ reste réel pour tout $x \in H$.*

Preuve. $\langle Ax,\ x\rangle = \langle x,\ Ax\rangle = \overline{\langle Ax,\ x\rangle}$ le nombre complexe $\langle Ax,\ x\rangle$ se confond avec son conjugué complexe, ce qui veut dire qu'il est réel. ■

Théorème 37 *Si A est un opérateur auto-adjoint ,on a :*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle Ax,\ x\rangle| .$$

Preuve. Soit $c_A = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle Ax,\ x\rangle|$ .En vertu de l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski et en accord avec la propriété de la norme d'un opérateur linéaire, on a $c_A = |\langle Ax,\ x\rangle| \leq \|Ax\| \|x\| \leq \|A\|$ .Donc

$$c_A \leq \|A\| . \qquad (2)$$

■

Démontrons maintenant l'inégalité inverse $\|A\| \leq c_A$ qui prouvera que le théorème est vraie.

Remarquons d'abord qu'on a pour tout $x \in H$, $x \neq 0$

$$|\langle Ax,\ x\rangle| \leq c_A \|x\|^2 . \qquad (3)$$

En effet, si $\|x\| \leq 1$ on a $|\langle Ax,\ x\rangle| \leq c_A$.

Si $x \neq 0$, alors $\left\langle A\frac{x}{\|x\|},\ \frac{x}{\|x\|}\right\rangle \leq c_A$.Puisque A est linéaire, on retrouve (3) d'aprés la propriété 3° du produit scalaire.

Considérons à présent les identités

$$\langle A(x+y),\ x+y\rangle = \langle Ax,\ x\rangle + \langle Ax,\ y\rangle + \langle Ay,\ x\rangle + \langle Ay,\ y\rangle$$
$$= \langle Ax,\ x\rangle + 2\,\mathrm{Re}\,\langle Ax,\ y\rangle + \langle Ay,\ y\rangle .$$
$$\langle A(x-y),\ x-y\rangle = \langle Ax,\ x\rangle - 2\,\mathrm{Re}\,\langle Ax,\ y\rangle + \langle Ay,\ y\rangle .$$

Nous avons utilisé le fait que

$$\langle Ax,\ y\rangle + \langle Ay,\ x\rangle = \langle Ax,\ y\rangle + \langle y,\ Ax\rangle$$
$$= \langle Ax,\ y\rangle + \overline{\langle Ax,\ y\rangle} = 2\,\mathrm{Re}\,\langle Ax,\ y\rangle .$$

Où $\mathrm{Re}\,\lambda$ est la partie réelle du nombre complexe λ est $\overline{\lambda}$ est le conjugué complexe de λ.Retranchant la seconde identité de la première, on obtient

$$4\,\mathrm{Re}\,\langle Ax,\ y\rangle = \langle A(x+y),\ x+y\rangle - \langle A(x-y),\ x-y\rangle .$$

Faisant la majoration en module et utilisant l'inégalité (3) et l'égalité du parallélogramme, on en déduit

$$4\left|\mathrm{Re}\,\langle Ax,\ y\rangle\right| \le \left|\langle A(x+y),\ x+y\rangle\right| + \left|\langle A(x-y),\ x-y\rangle\right|$$
$$\le c_A\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) = 2c_A\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) .$$

Soient maintenant $\|x\| = \|y\| = 1$. Alors

$$\left|\mathrm{Re}\,\langle Ax,\ y\rangle\right| \le c_A. \qquad (4)$$

Soit x, $\|x\| \le 1$, tel que $Ax \neq 0$. Posons dans (4) $y = \frac{Ax}{\|Ax\|}$. Il vient

$$\frac{|\langle Ax,\ Ax\rangle|}{\|Ax\|} \le c_A, \text{ i. e. } \|Ax\| \le c_A.$$

Il en est de même à fortiori si $Ax = 0$. Passant dans d'inégalité $\|Ax\| \le c_A$ à $\sup_{\|x\|\le 1}$ et appliquant la définition de la norme d'un opérateur linéaire, on obtient $\|A\| \le c_A$. Compte tenu de (2), on obtient $\|A\| \le c_A$, ce qu'il fallait démontrer.

3.2.1 ***Opérateurs positifs.***

Définition 38 *On dit que l'opérateur auto-adjoint* A *est positif,* $A \geq 0$, *si* $\langle Ax,\ x\rangle \geq 0$ *pour tout* $x \in H$.

Définition 39 *Soient* $A, B \in \mathcal{L}(H)$ *deux opérateurs auto-adjoints. On écrit* $A \geq B$ *où* $B \leq A$ *si* $A - B \geq 0$ *(i. e.* $\langle Ax,\ x\rangle \geq \langle Bx,\ x\rangle$ *pour tout* $x \in H$*).*

IV. Les ***opérateurs linéaires compacts***

Dans tout ce qui suit, l'ensemble de tous les opérateurs de $\mathcal{L}(X,Y)$ qui sont compacts sera désigne par $\sigma(X,Y)$.

Définition 40 *On dit qu'un opérateur $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ est compact si à la boule unité fermée de l'espace X il fait correspondre un ensemble compact dans l'espace Y.*

Définition 41 *Un opérateur linéaire A défini sur un espace de Hilbert X, est dit compact, si l'adhérence de l'image de toute partie borné de X est compact.*

(1)L'opérateur identité I bien que borné, n'est pas compact.

(2)La boule unité fermée, qui est sa propre image par I, n'est pas compact.

Remarque 42 *Si A et B sont deux opérateurs compacts, l'image de toute partie bornée Ω par B est bornée (car B est borné) et puisque A est compact, l'adhérence de $AB\Omega$ est compact, le produit de deux opérateurs compacts est compact.*

- Ce résultat montre que l'inverse A^{-1} d'un opérateur compact A n'est pas compact sinon $AA^{-1} = I$. Le serait, en contradiction avec qui précède.
- Notons que la compacité du produit AB ne nécessite pas que A et B soient tous deux compacts. En effet, si A est compact et B borné AB est compact et par conséquent, l'inverse d'un opérateur compact n'est pas borné.

Théorème 43 *Tout opérateur compact $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ fait correspondre à un ensemble borné dans X un ensemble compact dans Y.*

Preuve. Soit $M \subset X$ un ensemble borné ; autrement dit, il existe un $R > 0$ telque $\|x\| \leq R$ pour tout $x \in M$. Prenons une suite quelconque $\{y_n\} \in AM$; alors $y_n = Ax_n$, où $x_n \in M$. Considérons $\{x_n/R\} \subset S$, où S est la boule unité dans X.

Puisque A est compact, $\{Ax_n/R\}$ contient une sous-suite de Cauchy$\{Ax_{n'}/R\}$. Donc, $\{Ax_{n'}\}$ est elle aussi une sous-suite de Cauchy de $\{y_n\}$, i. e. AM est compact.

■

Théorème 44 *$\sigma(X,Y)$ est un sous-espace dans $\mathcal{L}(X,Y)$.*

Rappelons d'abord :

$\varepsilon -$ réseau : Soient un espace normé X et un ensemble $M \subset X$. Prenons $\varepsilon > 0$. L'ensemble M_ε s'appelle $\varepsilon -$ *réseau* de M si pour tout $x \in M$ il existe un $\hat{y} \in M_\varepsilon$ tel que $\|x - \hat{y}\| < \varepsilon$.

Corollaire 1 du théorème de Hausdorff : Si l'ensemble M admet dans X un $\varepsilon -$ *réseau* compact pour tout $\varepsilon > 0$, alors M est compact.

Preuve. Il suffit de montrer que

(1) $\sigma(X,Y)$ est une variété linéaire dans $\mathcal{L}(X,Y)$.

(2) $\sigma(X,Y)$ est fermé.

Commençons par (1). Soient A_1, A_2 deux opérateurs de $\sigma(X,Y)$ et λ_1, λ_2 deux scalaires. Montrons que $A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \in \sigma(X,Y)$.

Soient S la boule unité dans X et AS son image par l'application A ; soit en outre $\{y_n\} \subset AS$, de telle sorte que

$$y_n = \frac{\lambda_1 A_1 x_n}{\lambda_2 A_2 x_n}$$

où $x_n \in S$ (i. e. $\|x\| \leq 1$).

Puisque A_1 est un opérateur compact, on peut extraire de $\{A_1 x_n\}$une sous-suite de Cauchy $\{A_1 x_{n'}\}$, où n' parcourt une partie N' de l'ensemble des entiers naturels N. Ensuite, A_2 étant compact, on peut extraire de$\{A_2 x_{n'}\}$ une sous-suite de Cauchy $\{A_2 x_{n"}\}$, où $n" \in N" \subset N'$. Alors $\{A x_{n"}\}$ est de Cauchy : par conséquent AS est compact, i. e. A est compact.

Passons à (2). Suppossons que $\{A_n\} \subset \sigma(X,Y)$ et que A_n tend uniformément, i. e. en norme de $\mathcal{L}(X,Y)$, vers A pour $n \to \infty$. Il s'agit de montrer que $A \in \sigma(X,Y)$. Soit S la boule unité dans X. Alors $A_n S$ est compact, quelque soit n.

Posons $\varepsilon_n = \|A - A_n\|$; pour tout $x \in S$ il vient

$$\|A_n x - Ax\| \leq \|A_n - A\| \, \|x\| \leq \|A_n - A\| = \varepsilon_n.$$

Autrement dit, $A_n S$ est un ε_n-réseau compact de AS . Puisque $\varepsilon_n \to 0$ pour $n \to \infty$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un $\varepsilon_n < \varepsilon$, d'où il ressort que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\varepsilon-$réseau compact.

En vertu du corollaire 1 du théorème de Hausdorff l'ensemble AS est compact. L'opérateur A est alors compact, i. e. $A \in \sigma(X, Y)$. Ainsi donc, $\sigma(X, Y)$ est effectivement un sous-espace de$\mathcal{L}(X, Y)$. Le théorème est démontré. ■

Théorème 45 *Si X ou Y sont de dimension finie, on a $\sigma(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y)$.*

Preuve. Soient X de dimension finie et S la boule unité dans X. En vertu du théorème de Bolzano-Weierstrass, S est un ensemble compact. Alors AS est compact pour tout $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, car A est continu. Supposonsque Y soit de dimension finie : AS est alors borné, donc compact d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass. Le théorème est démontré. ■

Corollaire 46 *Toute fonctionnelle linéaire $f \in X^*$est compacte. (Ilsuffit de se rappeller que f fait correspondre à X un espace de dimension 1.)*

Considérons à présent les opérateurs linéaires de dimension finie. Soient $\varphi_1, \varphi_2, ...\varphi_n \in Y$ et $f_1, f_2, ...f_n \in X^*$. Un opérateur linéaire de la forme $P_n x = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x, f_k \rangle \varphi_k$ est de dimension finie.

Tout opérateur de dimension finie est évidement borné, car

$$\|P_n x\| = \sum_{k=1}^{n} |\langle x, f_k \rangle| \, \|\varphi_k\| \leq c \, \|x\| \, .$$

où

$$c = \sum_{k=1}^{n} \|f_k\| \, \|\varphi_k\| \, .$$

Ensuite, tout opérateur de dimension finie est compact. En effet, l'ensemble des valeurs $R_n = R(P_n)$ de P_n est de dimension finie. Examinant $P_n \in \mathcal{L}(X, R_n)$, on s'assure, en accord avec le théorème précédent, que $P_n \in \sigma(X, R_n) \subset \sigma(X, Y)$. De ce raisonnement et du théorème ($\sigma(X, Y)$ est un sous-espace dans $\mathcal{L}(X, Y)$) on déduit un

Corollaire 47 *Si $A = \lim_{n\to\infty} A_n$ (au sens de la norme de $\mathcal{L}(X, Y)$), où les A_n sont des opérateurs compacts ou de dimension finie, A est un opérateur compact.*

Citons encore une proposition qui s'avère souvent utile pour les applications :

Théorème 48 *Soient $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Si l'un quelconque (au moins) de ces deux opérateurs est compact, leur produit BA est un opérateur compact.*

Preuve. Soit S la boule unité dans X. Si A est un opérateur compact, AS est compact. L'ensemble BAS est alors compact lui aussi, d'où il ressort que BA est un opérateur compact. Si c'est B qui est compact, alors AS est borné, BAS compact et BA compact comme précédemment. Le théorème est démontré. ■

4.1 Opérateurs compacts et convergence faible

Tout opérateur de $\mathcal{L}(X, Y)$ fait correspondre à une suite convergente de X une suite convergente dans Y. Il se trouve que les opérateurs de $\sigma(X, Y)$ font correspondre à toute suite faiblement convergente de X une suite convergente de Y. Pour démonter ce résultat, nous aurons besoin d'un lemme :

Lemme 49 *Toute suite faiblement convergente et compact est convergente.*

4.2 Théorème de Schauder

Il se trouve qu'un opérateur $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ et son adjoint $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ sont tous deux compacts ou non. Plus exactement, on a un théorème que voici :

Théorème 50 *(Schauder) Soit $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, où Y est complet. L'opérateur A est compact si et seulement si son adjoint A^*est compact.*

On rappelons d'abord :

équicontinuité : Soit M un ensemble de fonctions dans $C\left(\overline{G}\right)$ on dit que les fonctions de M sont équicontinues si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour deux éléments quelconques $t^{'}$, $t^{"} \in \overline{G}$ vérifiant l'inégalité $\left\|t^{'} - t^{"}\right\| < \delta$ (la norme étant définie dans E^n) l'inégalité $\left|x\left(t^{'}\right) - x\left(t^{"}\right)\right| < \varepsilon$ est vérifiée à la fois pour tous les x de M.

Théorème Ascoli-Arzelà : Soit $\overline{G}$ un ensemble bicompact dans un espace normé E, et soit $C\left(\overline{G}\right)$ un espace de Banach formé de fonctions continues $x(t)$, où $t \in \overline{G}$, i. e. de fonctionnelles complexes ou réeles. Pour qu'un ensemble $M \subset C\left(\overline{G}\right)$ soit compact, il faut et il suffit que les fonctions de M soient uniformément bornées et équicontinues.

Un ensemble M de l'espace de Banach X est dit **bicompact** si de toute suite $\{x_n\} \subset M$ on peut extraire une sous-suite convergente dont la limite est dans M.

Preuve. La condition est nécessaire. Soient S, S^* les boules unités fermées dans les espaces X, Y^* respectivement. Considérons $A \in \sigma(X, Y)$. Prenons une suite quelconque $\{f_n\} \subset S^*$ et examinons les fonctions $\varphi_n(y) = \langle y,\ f_n\rangle, n = 1, 2, ...$Ces fonctions sont uniformément bornées (en n) sur tout ensemble borné dans Y, car

$$|\varphi_n(y)| = |\langle y,\ f_n\rangle| \leq \|y\| \|f_n\| \leq \|y\|,$$

et son équicontinues :

$$\left|\varphi_n\left(y^{'}\right) - \varphi_n\left(y^{"}\right)\right| = \left|\left\langle y^{'} - y^{"},\ f_n\right\rangle\right| \leq \left\|y^{'} - y^{"}\right\|.$$

Considérons $\{\varphi_n(y)\}$ sur l'ensemble AS. C'est un ensemble compact (car A est un opérateur compact) et fermé, donc bicompact. En vertu du théorème d'Ascoli-

Arzelà, il existe une sous-suite $\{\varphi_{n'}(Ax)\} = \{\langle x,\ A^* f_{n'}\rangle\}$ qui converge uniformément sur S. Autrement dit, $\{A^* f_{n'}\}$ converge en norme de X^*. Par conséquent, A^* est compact.

Le condition est suffisante. Soit A^* un opérateur compact. Alors $A^{**} = (A^*)^*$ est compact lui aussi, en vertu de ce qui précède.

Soit S^{**} la boule unité fermée dans X^{**}. L'ensemble $A^{**}S^{**} \subset Y^{**}$ est compact. Puisque l'espace Y est inclus dans Y^{**}, on a $AS \subset A^{**}S^{**}$; donc, AS est compact dans Y. Par conséquent, l'opérateur A est compact. Le théorème est démontré. ■

4.2.1 ***Exemple d'opérateur compact.*** Soit $X = Y = C[a,b]$. Considérons un opérateur linéaire intégral $y = Kx$ qui à toute fonction x fait correspondre une fonction y telle que

$$y(t) = \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds. \qquad (1)$$

Supposons que la fonction $K(t,s)$ (noyau de l'opérateur intégral K) soit continue comme fonction de deux variables dans le carré $Q = [a,b]\times[a,b]$. Soit $M = \max_Q |K(t,s)|$. Prenons dans $C[a,b]$ la boule unité $S = \{x \in C[a,b] :\ \|x\| \le 1\}$. Il vient

$$\|Kx\| = \max_{t\in[a,b]} \left| \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds \right| \le \max_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)|\,|x(s)|\,ds$$
$$\le (b-a)\,M \max_{t\in[a,b]} |x(t)| = (b-a)\,M\,\|x\| \le (b-a)\,M.$$

Ainsi donc, les fonctions de l'ensemble KS sont uniformément bornées.

Montrons maintenant que les fonctions de KS sont équicontinues : s'il en est ainsi, l'ensemble KS est compact en vertu du théorème d'Arzelà (pour que l'ensemble

$M \subset C\left(\overline{G}\right)$ soit compact, il faut et il suffit que les fonctions de M soient uniformément bornées et équicontinues), ce qui suffit à prouver que K est un opérateur compact. M $y(t) \in KS$ on a

$$\begin{aligned} |y(t_1) - y(t_2)| &= \left| \int_a^b K(t_1, s)\, x(s)\, ds - \int_a^b K(t_2, s)\, x(s)\, ds \right| \\ &\leq \int_a^b |K(t_1, s) - K(t_2, s)|\, |x(s)|\, ds. \end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Bouniakovski nous donne alors

$$\begin{aligned} |y(t_1) - y(t_2)|^2 &\leq \int_a^b |K(t_1, s) - K(t_2, s)|^2\, ds \int_a^b |x(t)|^2\, ds \\ &\leq (b-a) \int_a^b |K(t_1, s) - K(t_2, s)|^2\, ds. \end{aligned}$$

Etant donné que $K(t, s)$ est uniformément continue sur Q, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta = \delta(\varepsilon)$ tel que pour tout $t_1, t_2 \in [a, b]$ et pour tout $s \in [a, b]$ l'inégalité $|t_1 - t_2| < \delta$ entraîne aussitôt $|K(t_1, s) - K(t_2, s)| < \varepsilon$. Par conséquent, si $|t_1 - t_2| < \delta$, on a $|y(t_1) - y(t_2)|^2 < (b-a)^2\, \varepsilon^2$, d'où il ressort que les fonctions de KS sont équicontinues.

Remarque 51 *On a vu que, dans le cas d'un opérateur borné, on pouvait toujours supposer que son domaine était l'espace de Hilbert tout entier. Dans le cas d'un opérateur non borné il n'en est pas de même ; le domaine de l'opérateur devra toujours être précisé et, lorsqu'on effectuera des opérations algèbriques sur des opérateurs non bornés, les questions de domaine devront être examinées avec soin*

V. Conclusion

Nous remarquons que les opérateurs linéairres ont des utilisations qui ont dépassé le demaine des mathématiques

Ce qui précéde dans notre travail est une petite partie, ce n'est pas le contenu total pour cette discipline scientifique, et les scientifiques sont à la recherche pour dévelloper ce demaine et l'utiliser dans d' autres disciplines au futur.

Bibliographie

1.

[1] V. Trenoguine, "Analyse fonctionnelle", édition Mir Moscou (traduction française 1985).

[2] A. Colmogoron-S. Fomine,"Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle", édition Mir 1977.

[3] El Kacimi-Aloui. A, "Eléments d'intégration et d'analyse fonctionnelle", Ellipses 2000.

[4] Eric cancés-Claude le bis-Yuon Maday, "Méthodes mathématiques en chimie quantique une introduction springer-verlag, Berlin Heidleberg 2006.

[5] Nino Boccara, "Analyse fonctionnelle une introduction pour physiciens", Ellipses 1994.

[6] Mostafai. A, "cours de topologie", O.P.U.

[7] Hazi. M, "introduction aux espaces normés", O.P.U 1994.