الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Minstère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

---

CENTRE UNIVERSITAIRE DE MILA
INSTITUT DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

Réf. /11

Mémoire de fin d'étude
Présenté pour l'obtention du diplôme de

Licence Académique

Domaine : **Mathématiques et Informatique**

Filière : **Mathématiques**

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Thème

HomomorpHismes de groupes ; théorèmes d'isomorphismes

Présenté par :
Deffous Rania
Boukazzoula Saliha

Dirigé par :Mlle
Daoui Amina

Année universitaire 2010-2011

Remerciement

Dans un premier temps merci de dieux, nous voudrons exprimer notre remerciement à madame Daoui Amina, notre encadreur, pour l'attention et l'écoute dont il a su faire preuve. Nous le remercions très sincèrement pour ses conseils et ses commentaires, pertinents et constructifs, qui nous permis de progresser dans notre travail et pour les documentations, relectures et corrections de ce mémoire.

Nous exprimons aussi nos remerciements à tous les enseignants de l'institut des Sciences et de la Technologie.

Enfin, nous remercions tous les amis pour leur encouragement durant la réalisation de notre projet.

Dédicace

Je dédie ce travail,

A mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi, et qui m'ont donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance.

A mes chers frères et sœurs chacun de son nom.

A mes cher amis chacun de son nom.

A tous qui m'ont encouragé et aidé dans la réalisation de mon projet…

A tous les collègues de la promotion 2010/2011.

Enfin à tous qui j'ai connu dans le Centre universitaire de MILA.

RANIA ET SALIHA

Table des matières :

Introduction :

La théorie des groupes est extrêmement fructueuse pour l'ensemble des mathématiques, elle a des liens avec des concepts très divers comme par exemple,

en topologie algébrique, dans les groupes topologiques, et en géométrie différentielle dans les groupes de lie, et en courbes elliptiques dans le groupes de Mordell-Weil .

Dans cette mémoire on va traiter un sujet très essentielle dans le domaine de la

théorie des groupes, les homomorphismes des groupes et les trois théorèmes de

l'isomorphisme.

Dans le premier chapitre on va étudier les notions de base :

les groupes ;[définition , propriétés ,exemples . . . .] , les sous groupes ;[les sous groupe normaux , les groupes quotients …].

Dans le deuxième chapitre on va étudier les homomorphismes de groupes ; [monomorphismes, épi morphismes, isomorphismes automorphismes, endomorphismes….]

Dans le troisième chapitre on va énoncer les trois théorèmes d'isomorphismes.

Chapitre i : groupes

1 .Groupes :

1.1Définition: Soit G un ensemble non vide, muni d'une loi de composition interne définie par:

$$(x,y) \to x.y$$

On dit que la loi «. » Définit sur G une structure de groupe, ou que G un groupe relativement à

Cette loi, si les trois axiomes sont vérifiés :

1. La loi «. » est associative,
2. Il existe dans $(G,.)$ un élément neutre e ;

3. Toute élément de $(G,.)$ a un élément symétrique .

1.2 *Remarques :*

1. Un groupe a un unique élément neutre.

2. Dans un groupe, tout élément a un unique symétrique.

1.3 *Exemples :*

G est un groupe de nombre : $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$ où $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ désignant respectivement l'ensemble des nombres rationnelles, réels et complexes

2. Sous groupes : soit G un groupe multiplicatif d'élément neutre e.

2.1 *Définition :* une partie non vide H de G est un sous groupe de G si :

(x,y) de H*H alors x .y de H …………….(a)

x de H alors $(x)^{-1}$ de H …………………...(b)

2.2 *Remarques :*

1. Les conditions (a) et (b) impliquent que e appartenant a H .

2. Toute sous groupe H d'un groupe G est un groupe relativement à la loi de composition induite dans H par celle de G.

3. Un groupe a au moins deux sous groupes, G et le sous groupe réduit à l'élément neutre que l'on notera (e).

2.3 *Définition :* On appelle sous groupe propres d'un groupe G tout sous groupes de G distinct de G.

- Dans tous groupes (e) est un sous groupe propre.

Notations : on écrira :

- $H \leq G$ pour exprimer que H est un sous groupe de G.
- $H < G$ si H est un sous groupe propre de G

2.4 *Proposition :* soit G un groupe et $\{H_i\}_{i\in I}$une famille de sous groupes de G ; alors quel que soit l'ensemble non vide I , $\bigcap_{i\in I} H_i$ est un sous groupe de G.

Démonstration :

1. *On a :* $\forall i \in I,\ H_i$ est un sous groupe de G

Donc :$\forall\ i \in I$; On a : $O_G \in H_i$

Alors: $O_G \in \bigcap_{i\in I} H_i$

D'ou $\bigcap_{i\in I} H_i \neq \Phi$………. (1)

2. Soient $x, y \in \bigcap_{i\in I} H_i$ donc :

$$\forall\ i \in I\ x, y \in H_i$$

Alors : $\forall\ i \in I : xy^{-1} \in H_i$ $\quad$ $(car\ \forall\ i \in I :\ H_i$ sous-groupe de $G)$

D'où : $xy^{-1} \in \bigcap_{i\in I} H_i$………. (2)

De(1) et (2) ile on résulte :$\bigcap_{i\in I} H_i$ un sous groupe de G

Remarque : En générale, $\bigcup_{i\in I} H_i$ n'est pas un sous groupe de G

En effet par exemple, que le groupe $(\mathbb{Z}, +)$, $3\mathbb{Z} = \{3x, x \in \mathbb{Z}\}$

Et $8\mathbb{Z} = \{8x, x \in \mathbb{Z}\}$ sont des sous- groupes de $(\mathbb{Z}, +)$, or $3+8 = 11 \notin 3\mathbb{Z} \cup 8\mathbb{Z}$,

Donc $3\mathbb{Z} \cup 8\mathbb{Z}$ n'est pas un sous groupe de$\mathbb{Z}$.

2.5 *Exemples de sous -groupes :*

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n\mathbb{Z} = \{n\,x , x \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

2. les groupes additifs $\mathbb{Z}$,$\mathbb{Q}$,$\mathbb{R}$,$\mathbb{C}$ sont tels que :

$$\mathbb{Q} < \mathbb{Z} < \mathbb{R} < \mathbb{C}$$

3. les groupes multiplicatifs $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$ vérifient :

$\mathbb{Q}^* < \mathbb{R}^* < \mathbb{C}^*$

3. *Sous-groupes normaux :*

3.1 *Définition :*

Soit G un groupe et H un sous-groupe de G

H est dit normal ou distingué, ou invariant et on not $H \trianglelefteq G$ Si l'on a :

$Hx = x\,H$ Pour tout x appartenant à G

.si $H \trianglelefteq G$ et $H \neq G$, on utilise la notation $H \triangleleft G$.

Remarque :

1. il et clair que la condition H $x = x$ H est équivalente à la condition

$$x^{-1}H\,x = H$$

2. on dit qu'un élément a est le conjugué d'un élément b par l'élément x si l'on a :

$$a = x^{-1}b\,x$$

3. dans tout groupe G, $\{e\}$ et G sont des sous-groupes normaux.

4. dans un groupe abélien, tout sous-groupe est normal.

3.2 *Exemple :*

1) Si G est un groupe, alors G et $\{e\}$ sont des sous-groupes distingués de G.

2) Si G est un groupe commutatif, alors tout sous-groupe de G est un sous-groupe distingué de G.

3) L'ensemble $\{z \in G \ / \ \forall\, x \in G : zx = xz\}$, noté $Z(G)$, est un sous-groupe distingué de G appelé **centre de G**.

4. *Groupe quotients :*

Soit G un groupe et H un sous-groupe distingué de G .Alors $\mathcal{R}_g = \mathcal{R}_d$, pour tout x élément de G , $\overline{x_g} = xH$ = Hx = $\overline{x_d}$ et on note $\overline{x} = \overline{x_g} = \overline{x_d}$ et

$$G/H = (G/H)_g = (G/H)_d \,.$$

La relation $\mathcal{R}$ ($\mathcal{R} = \mathcal{R}_g = \mathcal{R}_d$) est compatible avec la loi du groupe. i.e , $\forall\, a , b, a', b' \in G : si$

$$\begin{cases} a\,\mathcal{R}a' \\ b\mathcal{R}b' \end{cases}$$

Alors $ab\,\mathcal{R}\,a'b'$ .En effet, on a $a^{-1}\,a' \in H$ et $b^{-1}\,b' \in H$, ainsi $(ab)^{-1}\ (a'\,b') =$

$b^{-1}\,a^{-1}a'\,b'$ = $(b^{-1}\ (a^{-1}a')$ b) $b^{-1}b' \in H$ car $a^{-1}a' \in H$ et$H \triangleleft G$.

Dans ce cas, la correspondance $(G/H) \times (G/H) \longrightarrow (G/H)$

$$(\overline{x}, \overline{y}) \longmapsto \overline{x}.\overline{y} = \overline{xy}$$

est une application bien définie et constitue ainsi une loi de composition interne sur G/H.

4.1 *Définition :* soient G un groupe et H un sous-groupe distingué de G. La relation binaire sur G définie par $x\,\mathcal{R}y$ si et seulement si :

$x^{-1}y \in H$ est une relation d'équivalence sur G compatible avec la loi du groupe et appelée **relation de congruence modulo$\boldsymbol{H}$**.

L'ensemble quotient, noté G/H, muni de la loi $\overline{x},\overline{y} \in G/\ H,\ \overline{x}.\overline{y} = \overline{x\ y}$, est un groupe appelé **groupe quotient de $\boldsymbol{G}$ par $\boldsymbol{H}$ $\boldsymbol{et}$ la surjection canonique**

$$S\colon G \ \rightarrow \mathrm{G/H}$$

$$x \rightarrow \ \overline{x}$$

Est un homomorphisme de groupes (on écrit dans ce cas $x \equiv y \ \ (mod\ H)$ pour désigner que $x\,\mathcal{R}y$)

4.2 *Exemple :* on considère $G = \mathbb{Z}$ et H = $n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}$, puisque $\mathbb{Z}$ est commutatif ;

le sous –groupe $n\ \mathbb{Z}$ est distingué dans $\mathbb{Z}$ .Duex entiers xet y sont en relation modulo $n\mathbb{Z}$ si et seulement si $x - y \in n\mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ si et suelement si $n\ /\ x - \ y$ (ou $\exists\ k \epsilon Z : x - \ y = \ nk$) c'est a dire

$x \equiv\ y$ (mod n) et ainsi la notation $\mathbb{Z}n \ = \ G/H \ = \ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \ est\ justifiée$.

Chapitre ii : HomomorpHismes de groupes

1. *Homomorphismes de groupes :*

1.1 *Définition :* étant donné deux groupes $(G,.)$ et $(G^{'},*)$, un homomorphisme de groupe de G dans G' est une application $f : G \to G'$ telle que :

$$\forall x, y \in G : f(x.y) = f(x) * f(y)$$

.un homomorphisme de groupes est aussi appelé morphisme de groupes.

.l'ensemble des homomorphismes d'un groupe G dans un groupe G' sera noté $Hom\,(G, G')$.

.Un homomorphisme d'un groupe G dans lui-même est appelé endomorphisme de groupes.

.Un endomorphisme bijective est appelé automorphisme.

.Un homomorphisme injective est appelé monomorphisme.

.un homomorphisme surjective est appelé épimorphisme.

. Un homomorphisme bijective est appelé isomorphisme.

1.2 *Proposition :* Tout $f \in Hom\,(G, G')$ vérifie les propriétés suivantes :

1) $f(e) = e^{'}$
2) $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}, \; \forall \; x \in G$
3) $f(x^{n}) = (f(x))^{n}, \forall \; x \in G \; et\; n \; dans\; \mathbb{Z}$
4) $H \leq G \Rightarrow f(H) \leq G'$
5) $H' \leq G^{'} \Rightarrow f^{-1}(H') \leq G$

Preuve :

1) On a: $\forall\, x \in G : f(x) = f(x.e) = f(x)f(e) \ldots\ldots\ldots$ (1)

Or, $f(x) \in G^{'} \Rightarrow f(x) = f(x).e^{'} \ldots\ldots\ldots.$ (2)

(1) et *(2)* impliquent : $f(e) = e^{'}$

2) On a : $\forall\, x \in G : f(x\,x^{-1}) = f(x)f(x^{-1}) = f(e) \ldots\ldots\ldots$ (1)

$Or \;\; f(e) = e^{'} = f(x)(f(x))^{-1} \ldots\ldots\ldots.$ *(2)*

(1) et *(2)* impliquent $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$

3) Pour $n = 0$, $x^{0} = e$ et $(f(x))^{0} = e^{'}$, c'est *(1)*

$Si \;\; n > 0$, $x^{n} = x\,x \ldots..x$ (n fois), d'où $f(x^{n}) = f(x)f(x) \ldots\ldots..f(x)$ (n Fois)
Donc $f(x^{n}) = (f(x))^{n}$

Si $n < 0$, on pose $n = -n'$, $n' > 0$

$$x^n = (x^{-1})^{n'} \Rightarrow f(x^n) = f\left((x^{-1})\right)^{n'} = f((x)^{-1})^{n'} = (f(x))^{-n'}$$

D'où $f(x^n) = (f(x))^n$

4) $f(H) = \{f(x) ; x \epsilon H\}$ *. soient* y_1, y_2 *dans* $f(H)$; *il existe dans H tels que*

$$y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$$

$$y_1 . y_2^{-1} = f(x_1).(f(x_2))^{-1} = f(x_1).f(x_2^{-1}) = f(x_1.x_2^{-1})$$

Ou $[(x_1 \epsilon H, x_2 \epsilon H, \text{ et } H \leq G) \Longrightarrow x_1.x_2^{-1} \in H]$

$$\Longrightarrow y_1 y_2^{-1} \in f(H)$$

Donc $f(H) \leq G'$

5) Soient x_1 et x_2 dans $f^{-1}(H')$; alors $f(x_1) \in H'$ et $f(x_2) \in H'$;

On a : $H' \leq G' \Longrightarrow f(x_1)\ (f(x_2))^{-1} = f(x_1) f(x_2^{-1}) = f(x_1 x_2^{-1})$

D' où $x_1 x_2^{-1} \in f^{-1}(H')$ et par suite $f^{-1}(H') \leq G'$

Résultat : si $f \in Hom(G, G')$, alors :

1) $f(G) \leq G'$ $f^{-1}(e') = \{x \in G, f(x) = e'\}$ est un sous groupe de G.

1.3 *Définition :* soit $f \in Hom(G, G')$.

1) $f(G)$ est appelé image de f et noté $\operatorname{Im} f$.

2) $f^{-1}(e')$ est appelé noyau de f et noté $\ker f$.

1.4 *Exemples :*

1) G, G' deux groupes et e' l'élément neutre de G'.L'application

$$f : G \to G'$$
$$x \to e'$$

Est un homomorphisme de groupes en effet :

$$\forall x, y \in G : f(x).f(y) = e'.e' = e'$$

$$f(x.y) = e' \text{ car } x.y \in G$$

2) soit G un groupe, $a \in G$ alors l'application

$$Ta : G \to G$$

$$x \to axa^{-1}$$

Est un endomorphisme de G.

3) Soit G un groupe noté multiplicativement. L'application

$$\Phi : \mathbb{Z} \to G$$
$$n \to a^n$$

Est un homomorphisme de groupes

2 .Twiste d'homomorphismes :

Soient $f: G_0 \to G_1$ *et* $g: G_0 \to G_2$ deux homomorphismes de groupes :

2.1 *Définition :*

On appelle produit de f et g l'application notée :

$$f \times g : G_0 \longrightarrow G_1 \times G_2$$

Ou $(f \times g)(x) = (f(x), g(x))\ , \forall x \in G_0$

2.2 *Proposition :*

Le produit de deux homomorphismes est un homomorphisme.

Prouve : soient $x, x' \in G_0$, alors :

$$\begin{aligned}(f \times g)(x.x') &= (f(x.x'), g(x.x')) \\ &= (f(x).f(x'), g(x).g(x')) \\ &= (f(x), g(x)).(f(x'), g(x')) \\ &= (f \times g)(x).(f \times g)(x')\end{aligned}$$

1.3 Evaluation du noyau et image du produit :

2.3.1 *Proposition :*

Si $f: G_0 \to G_1$ *et* $g: G_0 \to G_2$ deux homomorphismes de groupes alors :

$$ker\,(f \times g) = ker\ f \cap ker\ g$$

Prouve :

$\begin{cases} f: G_0 \to G_1 \\ g: G_0 \to G_2 \end{cases}$ $donc\ f \times g : G_0 \to G_1 \times G_2$

Soit $x \in ker(f \times g) \Leftrightarrow (f \times g)(x) = 1_{G_1 \times G_2}$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow (f(x), g(x)) = (1_{G_1}, 1_{G_2}) \\ &\Leftrightarrow f(x) = 1_{G_1}\ et\ g(x) = 1_{G_2} \\ &\Leftrightarrow x \in \ker f\ et\ x \in \ker g\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x \in ker f \cap ker\ g$$

2. 3.2 *Conséquences :*

1) si $f \times g$ est un monomorphisme alors f ou g sont des monomorphismes.

2) si f ou g sont des monomorphismes $\Rightarrow f \times g$ est un monomorphisme.

Preuve :

1) Si $f \times g$ monomorphisme $\Rightarrow ker\,(f \times g) = \{1_{G_0}\}$

$$\Rightarrow \quad ker\ f \cap\ ker\ g = \{1_{G_0}\}$$

$$\Rightarrow \quad f \text{ Ou g monomorphisme.}$$

2) Si f ou g monomorphisme $\Rightarrow$ $ker f = \{1_{G_0}\} OU ker g = \{1_{G_0}\}$

$$\Rightarrow \ ker f \cap ker g = \{1_{G_0}\}$$

$$\Rightarrow ker\,(f \times g) = \{1_{G_0}\}$$

$$\Rightarrow f \times g \text{ Monomorphisme}$$

2.3.3 *Proposition:* si $f : G_0 \to G_1$ et $g : G_0 \to G_2$ deux homomorphismes de groupes alors :

$$Im\,(f \times g) \subseteq Im\,f \times Im\,g$$

Preuve : soit $(y, y') \in Im\,(f \times g)$

$$\Leftrightarrow \exists\, x \in G_0 \,/\, (f \times g)(x) = (y, y')$$

$$\Rightarrow \exists\, x \in G_0 \,/\, (f(x), g(x)) = (y, y')$$

$$\Rightarrow \exists\, x \in G_0 \,/\ f(x) = y \ et\ g(x) = y'$$

$$\Rightarrow Im\,(f \times g) \sqsubseteq Imf \times Im\,g$$

2.3.4 *Conséquence :* si $f \times g$ epimorphisme $\Rightarrow f$ et g epimorphisme

1) Soient $f: G_1 \to G_0$ et $g: G_2 \to G_0$ et soit l'application notée

$$f.g : G_1 \times G_2 \to G_0$$

$$(x_1, x_2) \to (f.g)\,(x_1, x_2)$$

Tel que : $(f.g)\,(x_1, x_2) = f(x_1).g(x_2)$, $\forall\, (x_1, x_2) \in G_1 \times G_2$

2.3.5 Proposition : si G_0 est un groupe abélien alors de produit

D'homomorphismes est un homomorphisme.

Preuve : soit (x_1, x_2) et (x_1', x_2') deux éléments de $G_1 \times G_2$

Alors : $(f.g)[(x_1, x_2).(x_1', x_2')] = (f.g)[(x_1x_1', x_2x_2')]$

$$= f(x_1x_1').g(x_2x_2')$$

$$= f(x_1)\,.f(x_1').g(x_2).g(x_2')$$

$$= f(x_1)\,.g(x_2).f(x_1').g(x_2') \qquad \text{(Car } G_0 \text{ abélien)}$$

$$= (f.g)(x_1,x_2).(f.g)(x_1',x_2')\,.$$

Remarque : il existe des cas ou G_0 non abélien et $(f.g)$ est un homomorphisme.

1.3Evaluation de $\ker f.g$:

2.4.1 ***Proposition :*** soient $f\colon G_1 \to G_0$et $f\colon G_2 \to G_0$ deux homomorphismes de groupes alors :

$$\ker f.g = \{(x_1,x_2) \in G_1 \times G_2 / f(x_1) = g(x_2^{-1})\}$$

Preuve : soit $(x_1,x_2) \in \ker f.g$ alors $(f.g)(x_1,x_2) = 1_{G_0}$

$\Leftrightarrow f(x_1)\,.g(x_2) = 1_{G_0}$

$\Leftrightarrow f(x_1) = g(x_2^{-1})$ (Ou $g\,(x_2) = f(x_1^{-1})$)

2.4.2 ***Conséquence :*** si $f\colon G_1 \to G_0$ et $g\colon G_2 \to G_0$ sont deux homomorphismes tel que :

$$f(x) \neq g(y), \forall\,(x,y) \in \left(G_1 \setminus \{1_{G_1}\}\right) \times \left(G_2 \setminus \{1_{G_2}\}\right)$$

Alors $f.g$ est un monomorphisme.

Preuve : le seul élément de $\ker f.g$ est $1_{G_1 \times G_2}$ avec

$1_{G_1 \times G_2} = (1_{G_1}, 1_{G_2})$

1.5 Evaluation de l'image :

2.5.1 ***Proposition :*** soient $f\colon G_1 \to G_0$ et $g\colon G_2 \to G_0$ deux homomorphismes de groupes alors :

$$Im\,(f.g) = Im\,(f).Im\,(g)$$

Preuve : soit $y \in Im\,(f.g) \Rightarrow \exists (x_1,x_2) \in G_1 \times G_2$ tel que :

$(f.g)(x_1,x_2) = y$

$\Rightarrow \exists (x_1,x_2) \in G_1 \times G_2$ tel que :

$f(x_1)\,.g(x_2) = y$

Or $\begin{cases} f(x_1) \in Im\,f \\ g(x_2) \in Im\,g \end{cases}$ donc $y = f(x_1)\,.g(x_2) \in Im\ f.Im\ g$

Alors : $Im\,(f.g) \subseteq Im\ f.Im\ g$

2.5.2 ***Inversement :***

Soit $y_0 \in Im\ f.Im\ g \subset G_0$ donc $\exists\ B \epsilon Im\ f$ et $B' \in Im\ g$

avec $y_0 = B.B'$ainsi $\exists \alpha_1 \epsilon\ G_1$ tel que $f(\alpha_1) = B$

$$\exists \alpha_2 \epsilon \; G_2 \text{ tel que } f(\alpha_2) = B'$$

Soit $(\alpha_1, \alpha_2) \epsilon \; G_1 \times G_2$alors :

$(f.g)(\alpha_1, \alpha_2) = f(\alpha_1).f(\alpha_2) = B.B' = y_0$

$$\Rightarrow Im\,(f.g) = Im\; f.Im\; g$$

2) soient $f: G_1 \to H_1$et $g: G_2 \to H_2$ deux homomorphismes de groupes :

2.5.3 *Définition :* on appelle produit directe de f et g l'application notée

$$f \otimes g : \; G_1 \times G_2 \to H_1 \times H_2$$

Ou $$(f \otimes g)(x_1, x_2) = \big(f(x_1)\,, g(x_2)\big)$$

2.5.4 Proposition : $f \otimes g$ est un homomorphisme.

Preuve : soient(x_1, x_2), $(x_1', x_2') \in \; G_1 \times G_2$ alors :

$$\begin{aligned}(f \otimes g)\big[(x_1, x_2).(x_1', x_2')\big] &= \; f \otimes g\big(x_1.x_1', x_2.x_2'\big)\\ &= \big(f(x_1, x_2), g(x_1', x_2')\big)\\ &= \big(f(x_1).f(x_1'), g(x_2).g(x_2')\big)\\ &= \big(f(x_1), g(x_2)\big).\big(f(x_1'), g(x_2')\big)\\ &= (f \otimes g)(x_1, x_2).(f \otimes g)(x_1', x_2')\end{aligned}$$

Chapitre iii : théorèmes d'isomorphismes

1.Premier théorème d'isomorphisme :

Soients G et G' deux groupes et $f : G \rightarrow G'$ un homomorphisme de groupe.

1.1 Proposition : $Ker\ f$ est un sous-groupe normal de G.

Démonstration : on a $Ker\ f$ est un sous-groupe de G.

Soient x appartenant$à$ $Ker\ f$.

Comme f est un homomorphisme, on a pour tout g appartenant à G,

$$f(g \times g^{-1}) = f(g)f(x)\, f(g^{-1})$$

$$= f(g)1\, f(g^{-1})$$

$$= f(g)f(g^{-1}$$

$$= f(g)f(g)^{-1}$$

$$=1.$$

D'où $Ker\ f$ est normal dans G.

Le théorème suivant est l'un des plus importants et des plus utilisés de la théorie des groupes.

1.2 *Théorème (Premier théorème d'isomorphisme) :*

$G/\ Kerf$ est isomorphe à Imf.

Démonstration : d'après la propriété universelle du groupe quotient, il existe un

Homomorphisme $\overline{f}$ de $G/\ Ker\ f$ dansG'.

De plus, $Ker\ \overline{f} = Ker\ f\ /\ Ker\ f = \{1\}\ et\ Im\overline{f} = Imf$.

On en déduit que $\overline{f}$ est injective et surjective de $G/\ Ker\ f$ vers Imf.

D'où, $\overline{f}$ est un isomorphisme entre $G/\ Ker\ f$ et Imf.

3.Deuxième théorème d'isomorphisme :

Soients G un groupe, H un sous-groupe de G et N un sous-groupe normal de G.

2.1 *Proposition :*

1) $H \cap N$ est un sous-groupe normal de H.
2) NH est un sous-groupe de G.
3) N est un sous-groupe normal de NH.

Démonstration :

1) puisque H et N sont des sous-groupes de G, $H \cap N$ est un sous-groupe de G, Comme $H \cap N$ est inclus dans H ,c'est un sous-groupe .

Soient n appartenant à $H \cap N$ et h appartenant à H.

Alors , hnh^{-1}appartient à H car H est un sous-groupe et hnh^{-1}appartient à N car N est un sous-groupe normale de G

D'où $H \cap N$ est un sous- groupe normale de H.

2) NH est non vide puisque 1.1 appartient à NH.

Comme N est normale dans$G$, pour tout g appartenant à N, g$n$$g^{-1}$ appartient à N.

D'où, par restriction à H, pour tout h dans H et n dans$N$, hnh^{-1} appartient àN. On a ainsi $hnh'h$ ' = $n(hn'h-1)hh' \in Nh$ pour tous n, n' de N et h, h' de H.

Soient n appartenant à N et à H.

$(n\,h)^{-1} = h^{-1}\,n^{-1} = h^{-1}\,n^{-1}hh^{-1} = n'h$ ou $n' = h^{-1}\,n^{-1}\,h$ appartient a N. $(nh)^{-1} \in NH$.

D'où NH est un sous- groupe de G.

3) $N = N\,\{1\}$ est clairement un sous – groupe de NH puisque N et un sous groupe d e G.

Soient n appartenant à N et $h\,n'$ à HN ($h \in H$, et $n' \in N$).

$hn'n(hn')^{-1} = hn'nn'^{-1}h$ appartient à N car N etst normale dans$G$.

N est un sous-groupe normal deHN.

2.2 *Théorème (deuxième théorème d'isomorphisme)*

NH/N est isomorphe à H $/H \cap N$.

Démonstration :

D' après la proposition précédente, les groupes NH/N et $H/H \cap N$ existent.

Soient π la surjection canonique de G dans G/N (N normal dans$G$) et φ la restriction de π à H. on a π est un homomorphisme donc φ est un homomorphisme.

L'image de φ est $\pi(H) = NH/N$. Cherchons le noyau de φ :

$$\begin{aligned} Ker\,\varphi &= \{h \in H\,/\varphi(h) = N\} \\ &= \{h \in H\,/\,hN = N\} \\ &= \{h \in H\,/\,h \in N\} \\ &= H \cap N. \end{aligned}$$

D'où d'après le premier théorème d'isomorphisme, $H/H \cap N$ est isomorphe a NH/H

3. Troisième théorème d'isomorphisme :

Soient G, H un sous-groupe normal de G et K un sous-groupe normal de G

Inclus dans H.

3.1 *Proposition :* H/K est un sous-groupe normal de G / K.

Théorème :(Troisième théorème d'isomorphisme)

$(G\ /\ K)/\ (H/K)$ est isomorphe à G / H.

Démonstration : d'près la Proposition précédente, le groupe $(G\ /\ K)/\ (H/K)$

Existe.

Soit φ la correspondance de G / K dans G / H définie par $\varphi(gK) = gH$ pour tout g de G.

Montrons que φ est une application : soient $g\ et\ g'$ appartenant à G tels que$gK = gK'$.

On a alors $g^{-1}\ g'$ appartenant àK. Mais K est inclus dans H donc $g^{-1}\ g'$ appartenant à H.

D'où $gH = g'H$ et donc $\varphi(gK) = \varphi(g'K)$

φ Est une application.

Montrons que φ un homomorphisme : soient $g\ et\ g'$ appartenant àG.

$$\begin{aligned} \varphi(gKg'K) &= \varphi(gg'K) \\ &= gg'H \\ &= gHg'H \\ &= \varphi(gK)\varphi(g'K) \end{aligned}$$

Donc φ est un homomorphisme de groupes.

φ Est clairement surjectif.

Cherchons le noyau de φ :

$$\begin{aligned} ker\varphi &= \{gKg\ \epsilon G/\ \varphi(gK) = H\} \\ &= \{gKg\ \epsilon G/\ gH = H\} \\ &= \{gKg\ \epsilon G/\ g\ \epsilon\ H\} \\ &= \{hKh\epsilon H\} = H/K. \end{aligned}$$

D'où, d'après le premier théorème d'isomorphisme, $(G\ /\ K)/\ (H/K)$ est isomorphe à

$G\ /\ H$.

Conclusion :

Nous constatons que les homomorphismes de groupes ont des applications qui ont dépassés le domaine des mathématiques.

Les notions que nous avons décrites utilisent un important bagage mathématique : groupes, sous groupes, les sous groupe normaux, les groupes quotients, homomorphismes…

Après avoir soutenu notre licence, nous comptons poursuivre nos études en vue d'un master. La direction de la théorie des groupes nous intéressent.

Référence :

[1] Claude Deschamps et André Warusfel ; Mathématiques 2ème année

[2] Derek J.S. Robinson, A Course in the Theory of groups

[3] Jausette Calais Elément de la théorie des groupes

[4] Jean-Marie ARNA UDIÈS Henri FRAYSSE Cours de mathématiques-I Algèbre ;

[5] Guy Auliac *et* Jean Delcourt *et* Rémy Goblot Mathématiques Algèbre et géométrie

Résumé :

On prend dans cette mémoire trois unités principale sur l'isomorphisme, d'abord dans La première unité on sache la notion de base et on définit trois points fondamentale : les groupes, les sous-groupes, les groupes normaux.

Ensuite dans la 2ème unité on explique les homomorphismes de groupe et on prend des divers homomorphismes, ensuite dans 3ème unité on présente trois théories principales.