الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Minstère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

CENTRE UNIVERSITAIRE DE MILA
INSTITUT DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

Réf. /11

Mémoire de fin d'étude
Présenté pour l'obtention du diplôme de

Licence Académique

Domaine : **Mathématiques et Informatique**
Filière : **Mathématiques**
Spécialité : **Mathématiques Fondamentales**

Thème

Réduction des endomorphismes
Formes réduites de Jordan

Présenté par :
- *Benkouider Lemya*
- *Mokhnache Fatima Zohra*

Dirigé par :
Pr. Boukaroura Ali

Année universitaire 2010-2011

République Algérienne Démocratique et Populaire

Minstère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

CENTRE UNIVERSITAIRE DE MILA
INSTITUT DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

Réf.   /11

Mémoire de fin d'étude
Présenté pour l'obtention du diplôme de

Licence Académique

Domaine : **Mathématiques et Informatique**
Filière : **Mathématiques**
Spécialité : **Mathématiques Fondamentales**

<u>Thème</u>

Réduction des endomorphismes
Formes réduites de Jordan

Présenté par :
- *Benkouider Lemya*
- *Mokhnache Fatima Zohra*

Dirigé par :
Pr. Boukaroura Ali

Année universitaire 2010-2011

Remerciements

...الحمد لله الذي تتم بنعمته الصالحات...

Nous tenons à remercier notre encadreur

le Professeur A. Boukaroura

pour l'aide, les conseils ont contribué à la réalisation de ce travail.

Nos très vifs remerciements et notre gratitude s'adressent évidement à tous nos enseignants qui ont contribué à notre formation

Nous exprimons notre très vive reconnaissance à nos familles et nos amies pour leurs soutien et encouragements.

Enfin, nous tenons à remercier toute personne qui nous a aidé de prés ou de loin afin de réaliser ce travail.

Lemya & Fatima Zohra

Table des matières

Introduction générale **2**

1 Valeurs propres et vecteurs propres **3**
1.1 Valeurs propres 3
1.2 Vecteurs propres 4
1.3 Polynômes caractéristiques 4
1.4 Diagonalisation 6
1.5 Polynôme minimal 7
1.6 Trigonalisation 10

2 Réduction de Jordan **12**
2.1 Construction de la base de Jordan 12
2.2 Blocs de Jordan 12
2.3 La forme réduite de Jordan 14
2.4 Décomposition de Jordan 19

Bibliographie **21**

Introduction générale

La réduction d'endomorphisme est une technique mathématique qui a pour objectif d'exprimer ces endomorphismes sous une forme simple, notamment pour faciliter les calculs. Cela consiste essentiellement à trouver une base de l'espace vectoriel qui permet d'exprimer plus simplement un endomorphisme dans cette nouvelle base et à décomposer l'espace en sous-espaces vectoriels stables par l'endomorphisme.

La théorie de la réduction des endomorphismes en dimension finie consiste à chercher une base dans laquelle la matrice d'un tel endomorphisme est la plus simple possible, dans le meilleur des cas, une matrice diagonale (c'set une matrice dont seuls les éléments diagonaux peuvent ne pas être nuls, il s'agit alors d'une diagonalisation), sinon une matrice triangulaire supérieure (dont seuls les éléments diagonaux et sur diagonaux peuvent ne pas être nuls, il s'agit alors d'une trigonalisation).

Dans ce travail on expose les outils nécessaires permettant la réduction des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie.

Soient $\mathbb{K}$ un corps; en général $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathbb{V}$ un espace vectoriel de dimention finie et f un endomorphisme de $\mathbb{V}$.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice associée à f par rapport à une base de $\mathbb{V}$, on cherche, donc, une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que la matrice $P^{-1}AP$ ait la forme la plus simple possible, en intérpretant P comme matrice de passage d'une base à une autre.

Le problème revient donc à étudier l'action de f sur les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{V}$. Par exemple s'il existe des droites $\mathbb{V}_1, ..., \mathbb{V}_n$ stables sous l'action de f et dont la somme directe est $\mathbb{V}$. Pour cela, on associe à f deux polynômes, le polynôme minimal $m_f(X)$ et le polynôme caractéristique $P_f(X)$, et on s'intéresse aux sous espaces de $\mathbb{V}$ où l'endomorphisme f opère comme une homothétie.

Chapitre 1

Valeurs propres et vecteurs propres

Soient $\mathbb{V}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie n, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{V}$, f est un endomorphisme de $\mathbb{V}$ et A la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$.

1.1 Valeurs propres

Définition 1.1.1 *Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est appelé valeur propre de f s'il vérifie l'une des trois propriétés équivalentes suivantes :*

1- $(f - \lambda Id_{\mathbb{V}})$ n'est pas injectif.

2- $Ker(f - \lambda Id_{\mathbb{V}}) \neq \{0\}$.

3- Il existe un vecteur $v \in \mathbb{V}$ non nul tel que $f(v) = \lambda v$.

L'ensemble des valeurs propres éventuelles de f est appelé le spectre de f et noté $Sp(f)$.

Définition 1.1.2
Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est appelé valeur propre dans $\mathbb{K}$ de la matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, s'il est une valeur propre de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$, canoniquement associé à A[1], ce qui se traduit par l'une des trois propriétés équivalentes suivantes :

1- $(A - \lambda I_n)$ n'est pas inversible.

2- $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

3- Il existe une matrice uni colonne non nulle $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $AX = \lambda X$.

L'ensemble des valeurs propres éventuelles de A dans $\mathbb{K}$ est appelé le spectre de A dans $\mathbb{K}$ et noté $Sp_{\mathbb{K}}(A)$.

---

[1] $$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \rightarrow & \mathbb{K}^n \\ (x_1, ..., x_n) & \rightarrow & A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple 1.1.3
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *dont la matrice associée dans la base canonique est* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de f *sont les* $\lambda_1 = -2$ *et* $\lambda_2 = 5$ *solutions de l'équation*

$$\det(M - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$$

1.2 Vecteurs propres

Définition 1.2.1
On dit qu'un vecteur NON NUL $v \in \mathbb{V}$ *est un vecteur propre de l'endomorphisme* f, *s'il vérifie l'une des trois propriétés équivalentes suivantes :*

1- La droite $< v >= \{\lambda v / \lambda \in \mathbb{K}\}$ *est stable par* f.

2- Il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ *tel que* $f(v) = \lambda v$, *le scalaire* λ *est unique, c'est une valeur propre de* f *appelée la valeur propre de* f *associée à* v.

3- Il existe une valeur propre λ *de* f *telle que* $v \in \mathbb{V}_\lambda = Ker(f - \lambda Id_{\mathbb{V}})$. *Il en découle que tout vecteur non nul d'un sous-espace propre de* f *est un vecteur propre.*

Définition 1.2.2
Un vecteur propre d'une matrice carrée A *est un vecteur propre de l'endomorphisme canoniquement associé à* A. *Autrement dit,* $0 \neq X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *est un vecteur propre de* A *associé à la valeur propre* λ *de* A *si* $AX = \lambda X$.

Exemple 1.2.3
Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, *on sait que* $\lambda = -2$ *est une valeurs propre de* A *et le vecteur* $v = (x, y)$ *est déterminé par* $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, *c'est-à-dire :*

$$\begin{cases} 2x + 3y = -2x \\ 4x + y = -2y \end{cases} \quad \textit{autrement dit} \quad \begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ 4x + 3y = 0 \end{cases} \quad \textit{donc } v = (x, -\frac{4}{3}x)$$

1.3 Polynômes caractéristiques

Définition 1.3.1
Soit A *une matrice de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *le polynôme caractéristique de* A, *noté* $P_A(\lambda)$ *est défini*

par

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

Exemple 1.3.2
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

donc le polynôme caractéristique de la matrice A *est*

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

Lemme 1.3.3 .
Deux matrices carrées semblables ont le même polynôme caractéristique.

Définition 1.3.4
Soit f *un endomorphisme d'un espace vectoriel* $\mathbb{V}$ *de dimension finie, on appelle polynôme caractéristique de* f *celui de la matrice* A *de* f *dans une base* $\mathcal{B}$ *quelconque de* $\mathbb{V}$, *on le note* $P_f(\lambda)$.

Remarque 1.3.5 .
$P_f(\lambda)$ *est une fonction polynômiale, à coefficients dans* $\mathbb{K}$, *de dégré* n *et si* f *est représentée dans une base* $\mathcal{B}$ *de* $\mathbb{V}$ *par une matrice* A, *alors*

$$P_f(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}Tr(A)\lambda^{n-1} + ? + \ldots + ? + \det A$$

en particulier, si $n = 2$ *on a*

$$P_f(\lambda) = \lambda^2 - Tr(A)\lambda + \det A$$

De même, si

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$$

est une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{K}$, *le polynôme*

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

(ou simplement $P(\lambda)$ *s'il n y a pas risque de confusion) se nomme polynôme caractéristique de* A.

Donc $P_A(\lambda)$ est un polynôme, à coefficients dans $\mathbb{K}$, de dégré n et

$$P_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}Tr(A)\lambda^{n-1} + \ldots + \det A$$

Exemple 1.3.6

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-4)^2(\lambda-2)^2 \end{aligned}$$

1.4 Diagonalisation

Définition 1.4.1

Un endomorphisme f est dit diagonalisable s'il existe une base formée de vecteurs propres de f.

Dans cette base la matrice de f est diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Autrement dit, f est diagonalisable si et seulement si $\mathbb{V}$ et la somme directe de ses espaces propres, c'est-à-dire

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}_{\lambda_1} \oplus ... \oplus \mathbb{V}_{\lambda_p}$$

Définition 1.4.2

Soit A un élément de $M_n(\mathbb{K})$.On dit que A est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale D, c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible P telle que

$$D = P^{-1}AP$$

On dit que D est une matrice réduite diagonale de A.

Exemple 1.4.3

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, *alors*

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)(1-\lambda)$$

donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on a

$$\begin{aligned} D &= P^{-1}AP \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.5 Polynôme minimal

Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On sait que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie et que $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = n^2$, alors $I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2}$ sont liées dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, d'où il existe des scalaires $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n^2}$ qui ne sont pas tous nuls tels que

$$a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_{n^2} A^{n^2} = 0$$

Autrement dit, il existe un polynôme non nul

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_{n^2}X^{n^2}$$

vérifiant $P(A) = 0$.

Supposons que $\deg P(X) = r$, alors

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_rX^r \text{ avec } a_r \neq 0$$

Donc il existe un polynôme unitaire (dont le coefficient directeur est 1)

$$Q(\lambda) = a_r^{-1}P(\lambda) \text{ vérifiant } Q(A) = 0$$

De même, si $\mathbb{V}$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ de dimension fini n, et f un endomorphisme de $\mathbb{V}$, $\mathcal{L}(\mathbb{V})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie et $\dim(\mathcal{L}(\mathbb{V})) = n^2$, alors $Id_{\mathbb{V}}, f, f^2, \ldots, f^{n^2}$ sont liées dans $\mathcal{L}(\mathbb{V})$, d'où il existe des scalaires $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n^2}$ qui ne sont pas tous nuls tels que

$$a_0Id_{\mathbb{V}} + a_1f + a_2f^2 + \cdots + a_{n^2}f^{n^2} = 0$$

Autrement dit il existe un polynôme

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_{n^2}X^{n^2} \text{ vérifiant } P(f) = 0$$

Donc il existe un polynôme unitaire $Q(\lambda)$ vérifiant $Q(f) = 0$

Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. f est un endomorphisme d'un espace vectoriel $\mathbb{V}$ de imension finie).

Le polynôme qui a le plus petit degré parmi les polynômes unitaires qui annulent A (resp. f) est dit le *polynôme minimal* de A, noté $\min_A(X)$ (resp. polynôme minimal de f, noté $\min_f(X)$)

Théorème 1.5.1 .

Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ est le polynôme minimal de A si et seulement si,

i) $P(X)$ est un polynôme unitaire vérifiant $P(A) = 0$.

ii) Si $Q(X)$ est un polynôme qui vérifi $Q(A) = 0$, alors $P(X)$ divise $Q(X)$.

Lemme 1.5.2 .

Deux matrices carrées semblables ont le même polynôme minimal.

Lemme 1.5.3 [*Hilbert-Dirac*]

Soient $\mathbb{V}$ un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ et f un endomorphisme de $\mathbb{V}$. Alors pour tout polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$

i) Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f ; $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(f)$.

ii) Si $P(X)$ annule f ; les valeurs propres de f sont parmi les racines de $P(X)$.

Corollaire 1.5.4 .

Soient $\mathbb{V}$ un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ de dimension finie n et f un endomorphisme de $\mathbb{V}$. Alors :

i) Les valeurs propres de f sont parmi les racines de $\min_f(X)$.

ii) Si f possède n valeurs propres distinctes alors $\min_f(X) = P_f X)$.

Théorème 1.5.5 [*Cayley-Hamilton*]

Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

i) Si $P_A(X)$ est le polynôme caractéristique de A, alors $P_A(A) = 0$.

ii) Le polynôme minimal $\min_A(X)$ divise le polynôme caractéristique $P_A(X)$.

Corollaire 1.5.6 .

Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si

$$P_A(\lambda) = (-1)^n P_1(\lambda)^{k_1} \cdots P_r(\lambda)^{k_r}$$

où $k_1, k_2, \cdots, k_r$ sont des entiers positifs, et $P_1(\lambda), \cdots, P_r(\lambda)$ sont irréductibles dans $\mathbb{K}[\lambda]$, alors le polynôme minimal $\min_A(X)$ s'ecrit sous la forme

$$\min_A(X) = P_1(\lambda)^{l_1} \cdots P_r(\lambda)^{l_r}$$

avec $1 \leq l_i \leq k_i$.

En particulier si

$$P_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{k_r}$$

où $k_1, k_2, \cdots, k_r$ sont des entiers positifs, alors le polynôme minimal $\min_A(X)$ s'ecrit sous la forme

$$\min_A(X) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{l_r}$$

avec $1 \leq l_i \leq k_i$.

Remarque 1.5.7 .

Soient $\mathbb{V}$ un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ de dimension finie n et f un endomorphisme de $\mathbb{V}$. Alors :

i) Si $P_f(X)$ est le polynôme caractéristique de f, alors $P_f(f) = 0$.

ii) Le polynôme minimal $\min_f(X)$ divise $P_f(X)$.

Et on a les mêmes résultats du corrolaire précédent pour l'endomorphisme f.

Théorème 1.5.8 *Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie)*

Alors A (resp. f) est diagonalisable si et seulement si, $\min_A(X)$ (resp. $\min_f(X)$) est un polynôme scindé.

1.6 Trigonalisation

Définition 1.6.1

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{V}$ de dimension finie $n \geq 1$, on dit que f est trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{V}$ dans laquelle la matrice T de f est triangulaire supérieure, i.e.

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Définition 1.6.2

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire superieure T, c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible P telle que $T = P^{-1}AP$.

Autrement dit, A est trigonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique de A est le produit de polynôme de degré 1.

Exemple 1.6.3

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors,

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda - 1)^2$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 1$ et des vecteurs propres

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

on cherche un vecteur v_3, $A = PTP^{-1}$ *avec*

$$T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad et \; P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & -1 & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$$

telle que $v_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $Av_3 = av_2 + v_3$, *donc on a :*

$$\left\{ \begin{array}{c} a + x = 2x + y + z \\ -a + y = 2x + 3y \\ z = z \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a = x + y + z \\ -a = 2x + 2y \\ z = z \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} z = a - x - y \\ x = -a/2 - y \\ z = z \end{array} \right.$$

on pose $a = 2$, *on trouve* $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ *donc*

$$T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une matrice triangulaire superieure.

Chapitre 2

Réduction de Jordan

La réduction de Jordan est la traduction matricielle de la réduction des endomorphismes introduits par Jordan, cette réduction est employée, en particulier en analyse pour la résolution des équations différentielles.

2.1 Construction de la base de Jordan

Soit f un endomorphisme sur un espace vectoriel $\mathbb{V}$ tel que son polynôme minimal soit scindé. Il possède alors les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{V}$ est la somme directe des espaces caractéristiques de f. Il sont notés ici $\mathbb{V}_i$ et les valeurs propres λ_i.
2. La restriction de f à $\mathbb{V}_i$ est la somme d'une homothétie de rapport λ_i et d'un endomorphisme nilpotent noté f_i.
3. Il existe une base e_{ij} de $\mathbb{V}_i$, $\{e_{i1}, e_{i2}, ..., e_{ip_i}\}$ telle que $f_i(e_{ij}) = k_{ij}e_{ij+1}$ où k_{ij} est égal soit à 0 soit 1 et $f_i(e_{ip_i}) = 0$.

2.2 Blocs de Jordan

Définition 2.2.1
L'endomorphisme f de $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{V}$ est dit nilpotent s'il existe un entier p positif tel que $f^p = 0$.

La matrice de f dans une base quelconque est dite nilpotente.

Remarque 2.2.2
Un endomorphisme f nilpotent n'est jamais diagonalisable.

Si on suppose $f \neq 0$, alors f est nilpotent si, et seulement si son polynôme caractéristique $P_f(X) = (-X)^n$ et le polynôme minimal $m_u(X) = X^l$ où l est un entier tel que $1 \leq l \leq n$.

Théorème 2.2.3

Soit f un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{V}$ de dimension n, dont le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique .

Alors il existe une base $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ de $\mathbb{V}$ pour laquelle $\quad f(e_1) = 0,\ f(e_k) = e_{k-1}$ pour $k > 1$.

La matrice de f dans cette base s'écrit alors sous la forme

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice J_n est dite bloc de Jordan nilpotent d'ordre n.

Théorème 2.2.4

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel $\mathbb{V}$ de dimension n.

Il existe des entiers $\beta_1 \geq \beta_2 \geq ... \geq \beta_s \geq 0$ de somme n et une base de $\mathbb{V}$ où la matrice A de f s'écrit sous la forme

$$A_f = \begin{pmatrix} [J_1] & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & [J_2] & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & [J_s] \end{pmatrix}$$

Chaque bloc J_i est un bloc de Jordan d'ordre β_i.

On obtient alors le résultat suivant :

Corollaire 2.2.5 .

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel $\mathbb{V}$ de dimension finie n sur $\mathbb{C}$ dont les valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_s$ sont de multiplicité $\mu_1, ..., \mu_s$.

Le polynôme caractéristique de f s'écrit alors sous la forme

$$P(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\mu_1} ... (X - \lambda_s)^{\mu_s}$$

Il existe une base de $\mathbb{V}$ où la matrice A de f à la forme, diagonale par blocs, suivante

$$A = \begin{pmatrix} [T_1] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [T_2] & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & [T_s] \end{pmatrix},$$

chaque bloc T_k est de la forme

$$T_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}, \ k = 1, ..., s.$$

Dans cette écriture, le nombre de blocs est égal au nombre de valeurs propres distinctes.

Chaque blocs T_k est une matrice carrée d'ordre la multiplicité μ_k de la valeur propre λ_k.

La forme obtenue dans ce corollaire s'appelle réduite de Jordan de l'endomorphisme f.

2.3 La forme réduite de Jordan

Pour trouver la réduction de Jordan d'une matrice sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

(la forme réduite de Jordan)

on procède de la façon suivante :

- On cherche les valeurs propres de A.
- Pour chaque valeur propre λ de A, on effectue les manipulations suivantes :

On construit la suite emboitée suivante et on calcule la dimension de chaque noyau :

$$\ker(A-\lambda I) \subsetneq \ker(A-\lambda I)^2 \subsetneq ... \subsetneq \ker(A-\lambda I)^r.$$

Cette suite s'arrête pour $r \geq 1$ tel que $\dim\ker(A-\lambda I)^r$ est égale à la multiplicité de la valeur propre λ dans le polynôme caractéristique.

On dispose alors de deux renseignements importants :

$\star$ r est la taille du bloc de Jordan associé à la valeur propre λ la plus grande

$\star$ $p = \dim\ker(A-\lambda I)$ est le nombre de blocs de Jordan associés à la valeur propre λ figurant dans la décomposition finale.

On construit une base associée à la décomposition de Jordan de la façon suivante :

i) On examine la différence

$$n_1 = \dim\ker(A-\lambda I)^r - \dim\ker(A-\lambda I)^{r-1}.$$

ii)-On choisit n_1 vecteurs dans l'ensemble

$$\ker(A-\lambda I)^r \setminus \ker(A-\lambda I)^{r-1}.$$

On note ces vecteurs $\{w, w', w'', ...\}$.

iii)-Pour chacun de ces vecteurs, on construit la suite des itérés :

$$\begin{cases} v_r = w, v_r^{'} = w', v_r^{''} = w^{''}, ... \\ v_{r-1} = (A-\lambda I)w, v_{r-1}^{'} = (A-\lambda I)w, v_{r-1}^{''} = (A-\lambda I)w^{''}, , ... \\ v_{r-2} = (A-\lambda I)^2 w, v_{r-2}^{'} = (A-\lambda I)^2 w, v_{r-2}^{''} = (A-\lambda I)^2 w, ... \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ v_1 = (A-\lambda I)^{r-1} w, v_1^{'} = (A-\lambda I)^{r-1} w, v_1^{''} = (A-\lambda I)^{r-1} w^{''} .... \end{cases}$$

Chacune des familles libres

$$\{v_1, ..., v_r\}, \left\{v_1^{'}, ..., v_r^{'}\right\}, \left\{v_1^{''}, ..., v_r^{''}\right\} ...$$

fournit un bloc de Jordan associé à la valeur propre λ, de taille r.

En effet :

$$Av_1 \;\; Av_2 \;\; \cdots \;\; Av_{r-1} \;\; Av_r \qquad\qquad\qquad Av_1^{'} \;\; Av_2^{'} \;\; \cdots \;\; Av_{r-1}^{'} \;\; Av_r^{'}$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{r-1} \\ v_r \end{array} ; \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{array}{c} v_1^{'} \\ v_2^{'} \\ \vdots \\ v_{r-1}^{'} \\ v_r^{'} \end{array} ;...$$

• On recommence les étapes *i, ii, iii* avec chaque différence :

$$\begin{cases} n_2 = \dim\ker(A-\lambda I)^{r-1} - \dim\ker(A-\lambda I)^{r-2}, \\ n_3 = \dim\ker(A-\lambda I)^{r-2} - \dim\ker(A-\lambda I)^{r-3}, \\ \vdots \\ n_{r-1} = \dim\ker(A-\lambda I)^{2} - \dim\ker(A-\lambda I), \\ n_r = \dim\ker(A-\lambda I) - 0, \end{cases}$$

en remarquant que *iii)*, a déjà donné des vecteurs dans chacun des espaces considérés ci-dessus.

En effet,

$$\left\{v_{r-1}, v_{r-1}^{'}, v_{r-1}^{''}, ...\right\} \in \ker(A-\lambda I)^{r-1} \setminus \ker(A-\lambda I)^{r-2}$$

$$\left\{v_{r-2}, v_{r-2}^{'}, v_{r-2}^{''}, ...\right\} \in \ker(A-\lambda I)^{r-2} \setminus \ker(A-\lambda I)^{r-3}, ...$$

on sera donc obligé de compléter les familles libres suivantes :

$$\left\{v_{r-1}, v_{r-1}^{'}, v_{r-1}^{''}, ...\right\}, \left\{v_{r-2}, v_{r-2}^{'}, v_{r-2}^{''}, ...\right\}, ...$$

par des vecteurs appartenant respectivement à :

$$\ker(A-\lambda I)^{r-1} \setminus \ker(A-\lambda I)^{r-2}, \ker(A-\lambda I)^{r-2} \setminus \ker(A-\lambda I)^{r-3}, ...$$

de façon à avoir à nouveau des familles libres de :

$$\ker(A-\lambda I)^{r-1} \setminus \ker(A-\lambda I)^{r-2}, \ker(A-\lambda I)^{r-2} \setminus \ker(A-\lambda I)^{r-3}, ...$$

Si on note $w_1, w_1^{'}, w_1^{''}, ...$ ces vecteurs, alors leurs itérés :

$$B_1 = \left\{w_1, (A-\lambda I)w_1, (A-\lambda I)^2 w_1, ...\right\}$$

$$B_2 = \left\{w_1^{'}, (A-\lambda I)w_1^{'}, (A-\lambda I)^2 w_1^{'}, ...\right\}$$

$$B_3 = \left\{ w_1^{''}, (A-\lambda I)w_1^{''}, (A-\lambda I)^2 w_1^{''}, ... \right\}$$

fournissent chacun un bloc de Jordan associé à la valeur propre λ.

• On en déduit la réduite de Jordan de A : c'est la matrice de A dans la base :

$$B^{'} = \{v_1, ..., v_r\} \cup \left\{ v_1^{'}, ..., v_r^{'} \right\} \cup \left\{ v_1^{''}, ..., v_r^{''} \right\} \cup ... \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3.$$

Exemple 2.3.1

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

calculons d'abord le polynôme caractéristique de A.

On trouve

$$P_A(\lambda) = (2-\lambda)(3-\lambda)^2$$

les valeurs propres de A *sont* $\lambda_1 = 2$ *et* $\lambda_2 = 3$ *de multiplicité* 1 *et* 2 *respectivement.*

Étude de la valeur propre 2

Soit $(x, y, z) \in \ker(A - 2I)$ *tel que*

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors :

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x = z \\ y = z \quad , z \in \mathbb{R} \\ z = z \end{cases}$$

une base de $\ker(A - 2I)$ *est donc :* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Étude de la valeur propre 3

Posons

$$M = A - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit (x,y,z)$\in \ker(M)$ *alors :*

$$\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x = -y \\ y = y \\ z = 0 \end{cases}$$

donc $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

On remarque que $\dim \ker(M) = 1 \neq 2$ *(* 2 *est la multiplicité de la valeur propre* 3 *),*
Calculons :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $(x, y, z) \in \ker(M^2)$ *alors :*

$$\begin{cases} z = 0 \\ x = x \\ y = y \end{cases}$$

donc

$$\ker(M^2) = vect \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

prenons

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(M^2) \setminus \ker(M)$$

donc

$$v_2 = Mv_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

posons P la matrice de passage définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 2.3.2 *Inversons cette matrice, on trouve*

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

on a :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = J$$

J est la forme réduite de Jordan.

2.4 Décomposition de Jordan

Supposons qu'on a une décomposition de $\mathbb{V}$ en somme directe de sous-espaces vectoriels $N_{\lambda_1}, ..., N_{\lambda_s}$. Tout vecteur $v \in \mathbb{V}$ s'écrit de manière unique sous la forme $v = v_1 + ... + v_s$ avec $v_j \in N_{\lambda_j}$, $1 \leq j \leq s$.

Les applications $\pi_j : v \to v_j$ sont des projecteurs de $\mathbb{V}$ tels que

$$N_{\lambda_j} = \operatorname{Im} \pi_j.$$

De plus

$$(p) \qquad Id_E = \sum_{k=1}^{s} \pi_k \text{ et } \pi_j \circ \pi_i = 0 \text{ si } j \neq i.$$

Proposition 2.4.1
Soient $(\pi_j)_{j=1}^{s}$ des endomorphismes de $\mathbb{V}$ vérifiant l'identité (p).

Alors, les $(\pi_j)_{j=1}^s$ sont des projecteurs et

$$\mathbb{V} = \sum_{j=1}^{s} \pi_j(\mathbb{V}).$$

Proposition 2.4.2

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{V}$ et supposons que le polynôme

$$P(X) = (X - \lambda_1)^{\beta_1} ... (X - \lambda_s)^{\beta_s}, \lambda_i \neq \lambda_j sii \neq j.$$

est un polynôme annulateur de f.
Alors

$$\mathbb{V} = \overset{s}{\underset{i=1}{\oplus}} \ker(f - \lambda_i Id_{\mathbb{V}})^{\beta_j}$$

Les projecteurs

$$\pi_j : \mathbb{V} \to N_{\lambda_j} = \ker(f - \lambda_i Id_{\mathbb{V}})^{\beta_j}$$

de la décomposition de $\mathbb{V}$ en somme directe s'obtiennent de la façon suivante :
- *On décompose en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{1}{P(X)}$ sous la forme*

$$(*) \qquad \frac{1}{P(X)} = \sum_{i=1}^{s} \frac{R_i(X)}{(X - \lambda_i)^{\beta_i}}.$$

Le polynôme $R_i(X)$ est de degré inférieur ou égal à $\beta_i - 1$.
- *On multiplie ensuite $(*)$ par $P(X)$ et l'on obtient*

$$(**) \qquad 1 = \sum_{i=1}^{s} R_i(X) \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)^{\beta_j} = \sum_{i=1}^{s} Q_i(X)$$

On a

$$\pi_i = Q_i(f).$$

Les endomorphismes (π_i) sont appelés projecteurs spectraux.

Bibliographie

[1] **Amara Hitta**, *Cours d'algèbre linéaire et exercices corrigés,* OPU, alger (2009).

[2] **Damien Etienne**, *Exercices corrigés d'algèbre linéaire*, De Beock et Lacier S. A, Paris (2006).

[3] **Rémi Goblot**, *Algèbre linéaire : cours et exercices corrigés*, Ellipses, Paris (2005).

[4] **Maurice Gaultier**, *Algèbre : exercices et problèmes,* Dunod, Paris (2008).

[5] **Jean-Pierre Barani**, *Réduction des endomorphismes*, Paris (2007).

[6] **Jean-Michel Ferrard**, *Réduction des endomorphismes,* www.mathprepa.com.

[7] Le site web : http ://fr.wikipedia.org/wiki/réduction des endomorphismes.

[8] Le site web : http ://fr.wikipedia.org/wiki/réduction de Jordan.