الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Minstère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

CENTRE UNIVERSITAIRE DE MILA

INSTITUT DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

Réf. /12

Mémoire de fin d'étude

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Licence Académique

Domaine : **Mathématiques et Informatique**

Filière : **Mathématiques**

Spécialité : **Mathématiques Fondamentales**

Thème

Théorème de complétion et leur application dans l'espace de Lebesgue

Présenté par :

- ***Dembri Asma***
- ***Bousbaa Warda***

Dirigé par:

- ***Leulmi Assma***

Année universitaire 2011-2012

REMERCIEMENT

Grâce à dieu miséricordieux tout puissant qui nous à éclairé le chemin de réussite, et de nous avoir guide durant tout notre étude.

Nous remercions notre promoteur : M .Leulmi Asma.
D'avoir accepter de nos encadrer, et de nous diriger au cours de rédaction de ce mémoire.

Nos remerciements à nos très chers parents, sœurs, et tout les enseignants, collègues et amis respectifs qui nous ont encouragés soutenu durant tout notre parcours.

Enfin nous remercions toutes les personnes qui ont contribué de prés ou de loin à l'achèvement de ce travail.

Merci

Table des matières

Introduction générale **2**

1 Généralités **4**

1.1 **Relation dans un ensemble :** . . . 4

1.1.1 **Prepriétés d'une relation :** . . . 4

1.1.2 **Relation d'équivalence :** . . . 5

1.1.3 **Ensemble quotient :** . . . 5

1.2 **Les espaces vectoriels normés :** . . . 6

1.2.1 **Norme sur un espace vectoriel :** . . . 6

1.2.2 **Suite dans un espace vectoriel normé :** . . . 7

1.2.3 **Les applications linéaires continues :** . . . 7

1.2.4 **Homéomorphisme :** . . . 8

1.2.5 **Isomorphisme :** . . . 8

1.2.6 **Isométrie :** . . . 8

2 Espace de Banach et théorème de complétion d'un Espace Normé **10**

2.1 **Espace de Banach :** . . . 10

2.2 **Théorème de complétion :** . . . 10

2.3 **Immersion d'espaces normés et d'espaces de Banach :** . . . 19

3 Les espaces de Lebesgue **21**

3.1 **L'espace $C\ [a,b]$:** . . . 21

3.1.1 **Norme dans $C\ [a,b]$:** . . . 21

3.1.2 **Convergence dans $C\ [a,b]$:** . . . 23

3.2 **Espace de Lebesgue $L_1([a,b])$:** . . . 30

3.2.1 Intégrale **de Lebesgue :** . . . 31

3.3 **Les espaces $C^p(\Omega)$** : . . . 38

3.4 **Les espaces $\tilde{L}_p(\bar{\Omega})$** : . . . 38

3.5 **Espace de Lebesgue $L_p(\Omega)$, $p \geq 1$:** . . . 38

Conclusion **39**

Bibliographie **40**

Introduction Générale

Les espaces de Lebesgue est un chapitre très un portant dans l'analyse fonctionnelle et la théorie de la mesure.

L'académicien Lebesgue est introduit les espaces L_p $(1 < p < \infty)$ et s'attuyant sur les travaux de Riemann et Borel sur les concepts de mesure, proposa au début de siècle une nouvelle notion d'intégral plus robuste que s'elle de Riemann, dessinée sur un ensemble plus étendu de fonction. La théorie de la mesure et de l'intégration de Lebesgue est au jour duit a la base de l'édifice de l'analyse fonctionnel et de la théorie des probabilité grâce aux travaux de probabiliste soviétique Kolmogorov au cours des année 30.

Dans un premier temps, nous faisons une généralité sur quelque notions nécessaire tel que :

Relation d'équivalence et espace vectoriel normé « norme, semi norme, suit convergente, »

Après dans deuxième le chapitre 02, nous donne une définition de l'espace de Banach et le théorème de complétion.

Enfin, on construit les espace de Lebesgue, après on donne quelque propriété de l'Espace $L_1(a, b)$, puis on termine avec conclusion.

Chapitre 1

Généralités

1.1 Relation dans un ensemble :

Définition 1.1.1 *On définit une relation binaire sur un ensemble E si l'on se donne une partie $\Re$ de $E\times\ E$*

Lorsqu'un couple $(x,\ y)$ ou $x \in E,\ y \in E$, appartient a $\Re$, on dira que x et y sont liés par la relation $\Re$, on conviendra de note $x\ \Re\ y$ la relation $x \in E,\ y \in E$ et $(x,\ y) \in \Re$.

1.1.1 Prepriétés d'une relation :

Définition 1.1.2 *Soit R une relation binaire sur E.*

Réflexivité :

On dit que $\Re$ est réflexive si pour tout x appartient à E. on a :

$$x\Re y$$

Symétrie :

On dit que $\Re$ est symétrique si pour tout x et y appartient à E. On a :

$$(x\Re y) \Rightarrow (y\Re x)$$

Transitive :

On dit que $\Re$ est transitive si pour tout x, y et z appartient à E. On a :

$$(x\Re y\ \ et\ y\Re z) \Rightarrow (x\Re z)$$

Anti-symétrique :

On dit que $\Re$ est Anti -symétrique que si pour tout x et y appartient à E, on a :

$$(x\Re y \text{ et } y\Re x) \Rightarrow (x = y)$$

1.1.2 Relation d'équivalence :

Définition 1.1.3 *Une relation binaire $\Re$ sur E est une relation d'équivalence si elle est à la fois réflexive, symétrique et transitive.*

Classe d'équivalence :

Définition 1.1.4 *Soit $\Re$ une relation d'équivalence sur E on appelle classe d'équivalence d'un élément x de E l'ensemble des éléments de E en relation avec x par R.*

Notée par $\dot{x}$, $\bar{x}$ ou $c(x)$.

On a :

$$\dot{\mathbf{x}} = \{y \in E \ : \ y\Re x\}$$

Remarque 1.1.5 *1. La classe d'équivalences est non vide car $\Re$ est réflexive.*

2. Si x et y sont équivalents modulo $\Re$, il est clair que $\dot{x} = \dot{y}$.

3. Si x et y ne sont pas équivalents, modulo R on a $\dot{x} \cap \dot{y} = \phi$.

4. L'ensemble des classes d'équivalences forme une partition de l'ensemble E.

1.1.3 Ensemble quotient :

Définition 1.1.6 *L'ensemble des classes d'équivalences distinctes, modulo $\Re$. Se note $E/\Re$ et s'appelle ensemble quotient de E par $\Re$, on a donc :*

$$x \in E, \ \dot{x} \subset E \ \text{ et } \dot{x} \in E/\Re$$

C'est à dire :

$$E/\Re = \{\dot{x}, \ x \in E\}$$

1.2 Les espaces vectoriels normés :

1.2.1 Norme sur un espace vectoriel :

Définition 1.2.1 *On appelle norme sur E une application $N : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant, pour tout vecteur x, y de E et tout scalaire λ de $\mathbb{k}$*

$$\begin{array}{rcll} (N(x) = 0) & \Leftrightarrow & (x = 0) & (\textit{séparation}) \\ N(\lambda x) & = & \mid \lambda \mid N(x) & (\textit{homogénéité}) \\ N(x+y) & \leq & N(x) + N(y) & (\textit{sous-additivité}) \end{array}$$

On note N par $\|.\|$.

Définition 1.2.2 *On appelle espace vectoriel normé (note espace vectoriel normé par abréviation) le couple $(E, \| \, . \, \|)$ formé par un espace vectoriel et une norme $\|.\|$ définie sur E.*

Propriété :

1- La formule :

$$d(x,\ y) = \|x - y\|\ ,\ \forall x,\ y \in E$$

définit sur E une distance.

2- La fonction $x \to \|x\|$ est continue.

3- Si $(E, \|.\|)$ est un espace normé, alors :

a- Pour tout x, y appartient à E, on a :

$$\begin{array}{rcl} \|x - y\| & = & \|y - x\| \\ |\|x\| - \|y\|| & \leq & \|x - y\| \end{array}$$

b- Les applications :

$$\begin{array}{ccc} E \times E \to E & \text{et} & k \times E \to E \\ (x,\ y) \longmapsto x - y & & (\lambda \cdot x) \longmapsto \lambda \cdot x \end{array}$$

sont des applications continues.

1.2.2 Suite dans un espace vectoriel normé :

Définition 1.2.3 *On appelle suite dans un espace normé E toute application de $\mathbb{N}$ dans E. Cette suite est notée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Définition 1.2.4 *On dit que la suite $(x_n)_n$ converge vers $x \in E$ (au admet x comme limite)si : pour tout $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$. tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ on a :*

$$\|x_n - x\| \leq \varepsilon$$

Définition 1.2.5 *On dit que la suite $(x_n)_n$est une suite de Cauchy de E si : pour tout $\varepsilon\rangle 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ et $p \geq q \geq n_0$ on ait :*

$$\|x_p - x_q\| \leq \varepsilon$$

Propriété :

Soit E un espace vectoriel normé :

1- Si une suite $(x_n)_n$ converge dans un espace normé E sa limite est unique.

2- Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

3- Toute suite converge dans E est une suite de Cauchy.

4- Toute suite extraire d'une suite de Cauchy dans E est une suite de Cauchy.

5- Toute suite de Cauchy dans E est bornée.

6- Toute suite de Cauchy possède une sous suite convergente.

Proposition 1.2.6 *Soit (x_n) et (y_n) deux suites de Cauchy, alors :*

1-$(x_n + y_n)_n$ est une suite de Cauchy dans E.

2- $(\lambda x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans E.

3-$(\|x_n\|)_n$ de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

1.2.3 Les applications linéaires continues :

Définition 1.2.7 *Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|)$ deux espace normés et $x_0 \in E$ et $f : E \to F$ une application.*

On dit que f continue en x_0 si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ \alpha > 0,\ \forall x \in E\ :\|\ x - x_0\| < \alpha \Rightarrow \|f\ (x) - f\ (x_0)\| < \varepsilon$$

Définition 1.2.8 *On dit que f est continue sur E si f est continue en tout $x_0 \in E$.*

Définition 1.2.9 *Soit* $(E, \| \,.\, \|_E)$ *et* $(F, \| \,.\, \|_F)$ *deux espaces vectoriels sur le corps* $\mathbb{k}$ *et* $f\ : E \rightarrow F$ *une application. On dit que* f *linéaire si :*

$$\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{k}\ ;\ \forall x,\ y \in E\ :\ f\ (\alpha x + \beta y) = \ \alpha f\ (x) + \beta f\ (y)$$

Définition 1.2.10 *Soit* f *une application de* E *dans* F*. On dit que* f *est bijective ou que* f *est une bijection si* f *est injective (si chaque élément de* F *est l'image d 'au plus un élément de* E*. Ainsi pour tous les éléments* x *et* x'*de* E*, l'égalité* $f\ (x) = \ f\ (x')$ *entraine* $x = \ x'$*) et surjective* $(f\ (E)\ =\ F)$*.*

1.2.4 Homéomorphisme :

Définition 1.2.11 *Soit* $(E, \|.\|_E)$ *et* $(F, \|.\|_F)$ *deux espaces vectoriels normés. On dit que l'application* $f : E \rightarrow F$ *est un homéomorphisme si* f *est bijective, continue, donc* $f^{\ -1}$ *est continue.*

1.2.5 Isomorphisme :

Définition 1.2.12 *Soit* $(E, \|.\|_E)$ *et* $(F, \|.\|_F)$ *deux espaces normés et* f *une application de* E *dans* F*.*

On dit que f *est une isomorphisme si :*

1- f *est linéaire et bijective.*

2- f *est son inverse* $f^{\ -1}$ *sont continues.*

1.2.6 Isométrie :

Définition 1.2.13 *Soient* $(E, \|.\|_E)$ *et* $(F, \|.\|_F)$ *des espaces normés.*

1. Une application $f\ : E \rightarrow F$ *est dite isométrique si pour tout* $(x, y) \in E \times E$*, on a :*

$$\|f(x) - f\,(y)\|_E \ = \|\ x - y\|_E$$

2. On dit que f *est une isométrie de* E *sur* F *si c'est une application isométrique surjective.*

3. Les espaces normés $(E, \| \,.\, \|_E)$ *et* $(F, \| \,.\, \|_F)$ *sont dits isométriques s'il existe une isométrie de* E *sur* F*.*

Propriétés :

1- Toute application isométrique est injective et continue.

2- La composée de deux applications isométriques est isométrique.

3- L'identité de tout espace normé est une isométrie.

4- Toute isométrie est bijective.

5- L'application réciproque d'une isométrie est une isométrie.

6- Une isométrie est un homéomorphisme.

Chapitre 2

Espace de Banach et théorème de complétion d'un Espace Normé

2.1 Espace de Banach :

Définition 2.1.1 *Soit* $(E, \ \| .\|)$ *Un espace vectoriel normé réel. Soit* F *une partie de* E.

Définition 2.1.2 *- Si toute suite de Cauchy dans* F *converge dans* F, *on dit que* F *est complet.*

- Si toute suite de Cauchy d'éléments de E *converge, on dit que* E *est une espace de Banach.*

Remarque 2.1.3 *Un espace vectoriel normé réel n'est jamais complet s'il admet une base infinie.*

Proposition 2.1.4 *Soit* $(E, \ \| .\|)$ *Un espace vectoriel normé réel.*

1. Toute partie complète F *de* E *est une partie fermée.*

2. Soit F *est partie complète de* E. *Si* W *est une partie fermée de* E *incluse dans* F, *alors* W *est une partie complète.*

3. Toute partie compact de E *est une partie complète.*

2.2 Théorème de complétion :

Théorème 2.2.1 *Tout espace normé* E *peut être considéré comme une variété linéaire dense dans un espace de Banach* $\hat{E}$.

Définition 2.2.2 *L'espace de Banach en question* $\hat{E}$ *s'appelle alors le complété de* E.

Preuve. Soit E est un espace vectoriel normé non complet.

Preuve. On cherche un vectoriel normé $\hat{E}$ vérifié les conditions suivantes :

a) $E \subset \hat{E}$ (E un sous espace vectoriel de $\hat{E}$).

b) $\hat{E} = \bar{E}$. (E dense dans $\hat{E}$).

c) $\hat{E}$ est un espace vectoriel normé complet.

Comme E est non complet, il existe une suite de Cauchy dans E n'est pas convergente dans E.

Posons :

$$A = \{(x_n)_n \subset \; E \;\; \text{tq} \;:\; (x_n)_n \text{ est une suite de Cauchy}\}$$

On va définir sur A une relation binaire comme suit :

Pour tout x, y de A tel que : $x = (x_n)_n$, $y = (y_n)_n$. On a :

$$(x\Re y) \Leftrightarrow (\underset{n\to\infty}{lim} \|x_n - y_n\| = 0)$$

■

1. On va montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence sur A. En effet ;

1.1 La réflexivité :

Soit $x \in A$ tel que $x = (x_n)$ est une suite de Cauchy.

On a :

$$\underset{n\to\infty}{lim} \|x_n - x_n\| = \underset{n\to\infty}{lim} \|0\| = 0$$

Alors :

$$x\Re x$$

Donc $\Re$ est réflexive.

1.2 La symétrie :

Soient $x, y \in A$ telle que $x = (x_n)_n$, $y = (y_n)_n$ deux suites de Cauchy dans E.

Supposons que $x\Re y$ c'est à dire :

$$\underset{n\to\infty}{lim} \|x_n - y_n\|_E = 0$$

Mais :

$$\|x_n - y_n\|_E = \|y_n - x_n\|_E$$

Donc :

$$\underset{n\to\infty}{lim} \|y_n - x_n\|_E = 0$$

Ce qui donne que :

$$y\Re x$$

Donc $\Re$ est symétrique.

1.3 La transitive :

Soient x, y, $z \in A$ telle que : $x = (x_n)$, $y = (y_n)$, $z = (z_n)$ trois suites de Cauchy dans E.

Supposons que :

$$x\Re y \text{ et } y\Re z$$

C'est à dire :

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\|_E = O \;\text{ et }\; \lim_{n\to\infty} \|y_n - z_n\|_E = 0$$

D'après l'inégalité triangulaire. On a :

$$\|x_n - z_n\|_E \leq \|x_n - y_n\|_E + \|y_n - z_n\|_E$$

En passant par la limite :

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \|x_n - z_n\|_E \leq \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| + \lim_{n\to\infty} \|y_n - z_n\|$$

On a :

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - z_n\|_E = O$$

Donc :

$$x\Re z$$

Donc $\Re$ est transitive.

Alors $\Re$ est une relation d'équivalence. On peut définir l'ensemble quotient :

$$\Re\diagup A = \{\dot{x},\ x \in A\}$$

Tel que :

$$\dot{x} = \{y \in A : x\Re y\}$$

Posons : $\hat{E} = \Re\diagup A$.

On définit sur $\hat{E}$ deux opérations comme suit :

$$+ \;:\; \hat{E} \times \hat{E} \to \hat{E} \qquad \text{et} \qquad \cdot : R \times \hat{E} \to \hat{E}$$

$$(\dot{x},\ \dot{y}) \to \dot{x} + \dot{y} = \dot{\widehat{x+y}} \qquad (\lambda,\ \dot{x}) \to \lambda\dot{x} = \dot{\widehat{\lambda x}}$$

Il est facile de prouver que $\left(\hat{E},\ +,\ \cdot\right)$ est un espace vectoriel.

Soit :

$$\begin{aligned}\|.\|_{\hat{E}} : \hat{E} &\to \mathbb{R}^+\\ \dot{x} &\to \|\dot{x}\|_{\hat{E}} = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_E\end{aligned}$$

Tel que : $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E.

On va montrer que $\|.\|_{\hat{E}}$ est un norme sur $\hat{E}$.

Premièrement on prouve que $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|_E$ existe. C'est à dire on montre que la suite $(\|x_n\|_E)_{n\in\mathbb{N}}$converge dans $\mathbb{R}$, qui est complet pour cela il suffit de montrer que $(\|x_n\|_E)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

soit $\varepsilon > 0$ existe il un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout p, $q \in \mathbb{N}$ on a :

$$p \geq q \geq n_0 \Longrightarrow \left|\|x_p\|_E - \|x_q\|_E\right| < \varepsilon$$

Comme $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans E il existe un $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout p, $q \in \mathbb{N}$, on a :

$$p \geq q \geq n_1 \Longrightarrow \|x_p - x_q\|_E \ < \ \varepsilon$$

Mais on a :

$$\left|\|x_p\|_E - \|x_q\|_E\right| \leq \|x_p - x_q\|_E$$

On choisit $n_0 = n_1$, alors :

$$\forall p \geq q \geq n_1 \Longrightarrow |\|x_p\| - \|x_q\|| < \varepsilon$$

Donc$(\|x_n\|_E)_{n\in\mathbb{N}}$est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Alors $(\|x_n\|_E)_n$converge dans $\mathbb{R}$.

Ce qui donne que : $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|_E$ existe.

D'après ça on va montrer les axiomes de la norme.

1- Montrons que pour tout $\dot{x} \in \hat{E}$ on a :

$$(\|\dot{x}\|_{\hat{E}} = 0) \Longleftrightarrow (\dot{x} = 0)$$

Soient $\dot{x} \in \hat{E}$ et $(x_n) \in \dot{x}$, supposons que :

$$\|\dot{x}\|_{\hat{E}} = 0$$

Alors :

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_E = 0$$

Mais :

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_E = \lim_{n\to\infty} \|x_n - 0\|_E = 0$$

Donc :

$$(x_n)\Re(y_n)$$

Tel que :

$$y_n = 0, \ \forall n \in N$$

Alors :

$$\dot{x} = \dot{0}.$$

Donc :

$$\forall \dot{x} \in \hat{E} \ : \ \|\dot{x}\|_{\hat{E}} = 0 \Longrightarrow \dot{x} = \dot{0} \tag{(2.1)}$$

Inversement, supposons que :

$$\dot{x} = \dot{0}$$

On a :

$$\|\dot{x}\|_{\hat{E}} = \left\|\dot{0}\right\|_{\hat{E}} = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_E = 0$$

Donc :

$$\forall \dot{x} \in \hat{E} \ : \ (\dot{x} = \dot{0}) \Longrightarrow (\|\dot{x}\|_{\hat{E}} = 0) \tag{(2.2)}$$

De (2. 1) et (2. 2) on trouve l'équivalence.

2- Montrons que :

$$\forall \dot{x} \in \hat{E}, \ \forall \lambda \in \mathbb{k} \ : \ \|\lambda \dot{x}\|_{\hat{E}} = |\lambda| \, \|\dot{x}\|_{\hat{E}}$$

Soients $\dot{x} \in \hat{E}$, $\lambda \in \mathbb{k}$ et $(x_n)_n \in \dot{x}$ tel que $(x_n)_n$ est un suite de Cauchy dans E.

On a :

$$\begin{aligned} \|\lambda \ \dot{x}\|_{\hat{E}} &= \lim_{n\to\infty} \|\lambda x_n\|_E = \lim_{n\to\infty} |\lambda| \, \|x_n\|_E \\ &= |\lambda| \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_E \\ &= |\lambda| \, \|\dot{x}\|_{\hat{E}} \end{aligned}$$

Puisque si (x_n) est de Cauchy alors (λx_n) est de Cauchy dans E.

3- Montrons que

$$\forall \dot{x}, \ \dot{y} \in \hat{E} \ : \ \|\dot{x} + \dot{y}\|_{\hat{E}} \leq \|\dot{x}\|_{\hat{E}} + \|\dot{y}\|_{\hat{E}}$$

Soients $\dot{x}$, $\dot{y} \in \hat{E}$ et $(x_n) \in \dot{x}$, $(y_n) \in \dot{y}$ deux suite de Cauchy dans E :

On a :

$$\|x_n + y_n\|_E \leq \|x_n\|_E + \|y_n\|_E$$

En passant par limite on a :

$$\underset{n\to\infty}{lim} \|x_n + y_n\|_E \leq \underset{n\to\infty}{lim} \|x_n\|_E + \underset{n\to\infty}{lim} \|y_n\|_E$$

Donc :

$$\|\dot{x} + \dot{y}\|_{\hat{E}} \leq \|\dot{x}\|_{\hat{E}} + \|\dot{y}\|_{\hat{E}}$$

Donc $\hat{E}$ est un espace vectoriel normé.

Maintenant, on définit l'application suivante :

$$\begin{array}{c} \varphi \ : \ E \to \hat{E} \\ x \longmapsto \varphi(x) = \dot{x} \end{array}$$

Tel que $(x,\ x,\ x,\ ...,\ x,\ ...) \in \dot{x}$.

On va montrer que φ est linéaire et isométrique :

1- La linéarité :

Soient x, $y \in E$; α, $\beta \in K$.

On a :

$$\begin{array}{rcl} \varphi(\alpha x + \beta y) & = & \dot{\widehat{\alpha x + \beta}} y \\ & = & \alpha \dot{x} + \beta \dot{y} \\ & = & \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y) \end{array}$$

Donc φ est linéaire.

2-L'isométrie :

Soit $x \in E$:

$$\begin{array}{rcl} \|\varphi(x)\|_{\hat{E}} & = & \|\dot{x}\|_{\hat{E}} \\ & = & \underset{n\to\infty}{lim} \|x_n\|_E, \forall (x_n) \in \dot{x} \end{array}$$

En prenant $(x_n) = (x,\ x,\ x,\ ...,\ x,\ ...)$, donc :

$$\begin{array}{rcl} \|\varphi(x)\|_{\hat{E}} & = & \underset{n\to\infty}{lim} \|x\|_E \\ & = & \|x\|_E \end{array}$$

Donc φ est isométrique.

Alors φ est injective de E dans $\hat{E}$.

Ce qui donne que φ est bijective de E dans $\varphi(E)$.

On va montrer maintenant $(a), (b)$ et (c).

a) Montrons que $E \subset \hat{E}$.

On a : φ est un isomorphisme isométrie de E dans $\varphi(E) \subset \hat{E}$ alors on peut identifier E et $\varphi(E)$ topologiquement et algébriquement.

Donc : $E \subset \hat{E}$

b) Montrons que E est dense dans $\hat{E}$ C'est à dire On va montre que : $\hat{E} = \bar{E}$.

b.1) Montrons que : $\bar{E} \subset \hat{E}$

On a :

$$E \subset \hat{E}$$

Alors :

$$\bar{E} \subset \hat{E} \tag{(2.3)}$$

b.2) Montrons que : $\hat{E} \subset \bar{E}$

Soit $\dot{x} \in \hat{E}$, pour montrer que $\dot{x} \in \bar{E}$ il suffit de prouver :

Qu'il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E telle que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dot{x}$ dans E.

Comme

$$\dot{x} \in \hat{E}$$

Alors, il existe une suite de Cauchy $(x_n)_n$ dans E qui représente $\dot{x}$.

C'est à dire : quelque soit $\varepsilon \geq 0$, il existe $n_0 \in N$ tel que :

$$(\forall m \geq n \geq n_0) \Longrightarrow (\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon)$$

On remarque que n est constant tel que $n \geq n_0$. On définit la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme

Suit :

$$y_n = x_n, \text{ quelque soit } n$$

On a :

$$(x_m) \in \dot{x} \quad \text{et} \quad (y_n) \in \ \dot{x}_n$$

Alors :

$$y_n - x_m \in \dot{x}_n - \dot{x} = \dot{\widehat{x_n - x}}$$

Ce qui donne :

$$\|y_n - x_m\|_{\hat{E}} = \lim_{n,\, m\to\infty} \|y_n - x_m\|_E = \lim_{n,\, m\to\infty} \|x_n - x_m\|_E$$

Donc : quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in N$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a :

$$\|\dot{x}_n - \dot{x}\|_{\hat{E}} < \varepsilon$$

C'est à dire :

$$\lim_{n\to+\infty} \dot{x}_n = \dot{x}$$

Donc :

$$\dot{x} \in \bar{E}$$

Donc :

$$\hat{E} \subset \bar{E} \tag{(2.4)}$$

De (2. 3) et (2. 4) on a :

$$\hat{E} = \bar{E}$$

C'est à dire : E est dense dans $\hat{E}$.

c) Montrons que $\hat{E}$ est complet.

Pour cela on va montrer que toute suite de Cauchy dans $\hat{E}$ converge dans $\hat{E}$

Soit $(\dot{x}_n)_n$une suite de Cauchy dans $\hat{E}$.

Mais :

$$\hat{E} = \bar{E}$$

Donc :

$$(\dot{x}_n)_n \subset \bar{E}$$

C'est à dire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ \dot{x}_n \in \bar{E}$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall r > 0 \ : \ B(\dot{x}_n,\ r) \cap E \neq \Phi$$

Posons :

$$r = \frac{1}{n}$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ B\left(\dot{x}_n,\ \frac{1}{n}\right) \cap E \neq \Phi$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists \alpha_n \in E \ \text{ tel que } : \ \alpha_n \in B\left(\dot{x}_n,\ \frac{1}{n}\right)$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ \alpha_n \in E \ : \ \|\alpha_n - \dot{x}\| < \frac{1}{n}$$

Mais on a :

$$E \subset \varphi(E) \subset \hat{E}$$

Alors :

$$\forall n \in N \ : \ \alpha_n \in \hat{E} \ : \ \|\alpha_n - \dot{x}_n\| < \frac{1}{n}$$

On va montrer maintenant que $(\alpha_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\hat{E}$. On a :

$$\begin{aligned}
\|\alpha_n - \alpha_m\| &= \|\alpha_n - \dot{x}_n + \dot{x}_n - \dot{x}_m + \dot{x}_m - \alpha_m\| \\
&\leq \|\alpha_n - \dot{x}_n\|_{\hat{E}} + \|\dot{x}_n - \dot{x}_m\|_{\hat{E}} + \|\dot{x}_m - \alpha_m\|_{\hat{E}} \\
&\leq \frac{1}{n} + \|\dot{x}_n - \dot{x}_m\|_{\hat{E}} + \frac{1}{m}
\end{aligned}$$

Passant par limite :

$$0 \leq \underset{n,\ m \to \infty}{lim} \|\alpha_n - \alpha_m\|_{\hat{E}} \leq \underset{n,\ m \to \infty}{lim} \left(\frac{1}{n} + \|\dot{x}_n - \dot{x}_m\|_{\hat{E}} + \frac{1}{m}\right)$$

Donc :

$$\underset{n,\ m \to \infty}{lim} \|\dot{x}_n - \dot{x}_m\|_{\hat{E}} = 0$$

Donc $(\alpha_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\hat{E}$.

Ce qui donne que (α_n) est une suite de Cauchy dans E. Car $\alpha_n - \alpha_m \in E$ et $E \subset \hat{E}$, alors :

$$\|\alpha_n - \alpha_m\|_E = \|\alpha_n - \alpha_m\|_{\hat{E}}$$

Donc il existe un $\dot{x} \in \hat{E}$, tel que : $(\alpha_n)_n \in \dot{x}$.

On va montrer que $(\dot{x}_n)$ converge vers $\dot{x}$.

On a :

$$\begin{aligned}
\|\dot{x}_n - \dot{x}\|_{\hat{E}} &= \|\dot{x}_n - \alpha_n + \alpha_n - \dot{x}\|_{\hat{E}} \\
&\leq \|\dot{x}_n - \alpha_n\|_{\hat{E}} + \|\alpha_n - \dot{x}\|_{\hat{E}} \\
&< \frac{1}{n} + \|\alpha_n - \dot{x}\|_{\hat{E}}
\end{aligned}$$

En passant par limite on trouve :

$$\lim_{n\to\infty} \|\dot{x}_n - \dot{x}\|_{\hat{E}} \leq \lim_{n\to\infty} \|\alpha_n - \dot{x}\|_{\hat{E}} \qquad ((1.5))$$

D'autre part on a :

$$\|\alpha_n - \dot{x}\|_{\hat{E}} = \lim_{m\to\infty} \|\alpha_n - \alpha_m\|_{\hat{E}}$$

Donc :

$$\lim_{n\to\infty} \|\alpha_n - \dot{x}\| = \lim_{n,\, m\to\infty} \|\alpha_n - \alpha_m\|_E = 0 \qquad ((2.6))$$

Car (α_n) est une suite de Cauchy dans E.
De (2.5) et (2.6) on a :

$$\lim_{n\to\infty} \|\dot{x}_n - \dot{x}\|_{\hat{E}} = 0$$

Donc $(\dot{x}_n)$ converge vers $\dot{x}$ dans $\hat{E}$.
Alors $\hat{E}$ est complet. ■

2.3 Immersion d'espaces normés et d'espaces de Banach :

Définition 2.3.1 *On dit qu'un espace normé E est immergé (ou plongé) dans un espace normé $\hat{E}$ s'il existe une application linéaire J définie sur E et une constante $\beta > 0$ telles que :*

$$\|J\ (x)\| \leq \beta \|x\|,\ \text{pour tout}\ x \in\ E.$$

Dans le cas particulier où $\hat{E}$, E ont été obtenus en introduisant des normés différentes dans un espace vectoriel E et dans sa variété linéaire D respectivement, alors, en choisissant comme J la correspondance identifiant les éléments de $\hat{E}$ et de E comme éléments de E, on dit que E est immergé (plongé) naturellement (ou canoniquement) dans $\hat{E}$. si

$$\|J\ (x)\| = \|x\|$$

on dit que l'immersion de E dans $\hat{E}$ est isométrique.

Remarque 2.3.2 *Conformément au théorème de la complétion, tout espace normé (incomplet) E admet un plongement isométrique et dense dans un certain espace de Banach, qui n'est autre que le complété de E.*

Exemple 2.3.3 $C\ ([a,\, b])$ *est immergé dans* $\tilde{L}_p([a,\, b])$ *pour tout* $p \geq 1$.

Chapitre 3

Les espaces de Lebesgue

3.1 L'espace $C\ [a,b]$:

Définition 3.1.1 *$C\ [a,b]$ est l'ensemble des fonction numérique continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$. On définit sur cette ensemble une structure d'espaces vectoriel comme suit :*

Addition :

pour tout $f,\ g$ appartient à $C\ [a,b]$ et pour tout x dans $[a,b]$:

$$\begin{aligned} + :\quad C\ [a,\ b] \times\ C\ [a,\ b] &\to C\ [a,\ b] \\ (f,\ g) &\longmapsto (f+g) \end{aligned}$$

tel que :

$$\forall x \in [a,b] \quad : \quad (f+g)(x) \ = \ f\ (x) + g(x)$$

Produit par un scalaire :

Pour tout f appartient à $C\ [a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on definit :

$$\lambda f \quad : \quad x \longmapsto (\lambda f\ )(x) \ = \ \lambda f\ (x)$$

Il est facile de prouver que $(C\ [a,\ b]\,, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

3.1.1 Norme dans $C\ [a,b]$:

Définition 3.1.2 *On définit sur $C\ [a,b]$ l'application :*

$$\begin{aligned} \|\ .\ \|_\infty : C\ [a,\ b] &\to \mathbb{R}^+ \\ f &\longmapsto \|f\|_\infty = max_{x\in[a,\ b]} |f\ (x)| \end{aligned}$$

Proposition 3.1.3 $\| \,.\, \|_\infty$ *est une norme sur* $C\ [a,\ b]$.

Preuve. On va vérifier les trois condition de la norme pour $\|.\|_\infty$sur $C\ [a,\ b]$.
Preuve. 1- Montrons que pour tout $f\ \in C\ [a,\ b]$ on a :

$$(\|f\ \|_\infty =\ 0) \Leftrightarrow (f \quad = 0)$$

Soit $f \in C\ [a,\ b]$, tel que $\|f\ \|_\infty =\ 0$, alors :

$$\max_{t\ \in[a,\ b]} |f\ (t)| = 0$$

Preuve. C'est à-dire $\forall\ t \in [a,\ b]$:

$$f(t) = 0$$

Donc :

$$f = 0$$

■

Inversement, Soit $f \in C\ [a,\ b]$, tel que $f = 0$, on a :

$$\|f\ \|_\infty = \max_{t\ \in[a,\ b]} |f\ (t)| =\ 0$$

■

2- Montrons que pour tout $f\ \in C\ [a,\ b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\|\ \lambda f\ (t)\ \|_\infty = |\ \lambda\ | \|\ f\ \|_\infty$$

Soient $f\ \in C\ [a,\ b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} \|\ \lambda f\ (t)\ \|_\infty &= \max_{t\ \in f\ (t)} |\lambda f\ (t)| \\ &= |\lambda| \max_{t\ \in[a,\ b]} |f\ (t)| \\ &= |\lambda| \,.\, \|f\ \|_\infty \end{aligned}$$

Donc :

$$\|\ \lambda f\ (t)\ \|_\infty = |\ \lambda\ | \|\ f\ \|_\infty$$

3- Montrons que pour tout $f,\ g \in C\ [a,b]$

$$\| f+g \|_\infty \leq \| f \|_\infty + \| g \|_\infty$$

Soient $f,\ g \in C\ [a,b]$ et $t \in [a,b]$, on a :

$$| f\ (t) + g(t) | \leq | f\ (t) | + | g(t) |$$

Donc :

$$\max_{t\ \in [a,\ b]} | f\ (t) + g(t) | \leq \max_{t\ \in [a,\ b]} (| f\ (t) | + | g(t) |)$$

Donc :

$$\max_{t\ \in [a,\ b]} | f\ (t) + g(t) | \leq \max_{t\ \in [a,\ b]} | f\ (t) | + \max_{t\ \in [a,\ b]} | g(t) |$$

Alors :

$$\| f+g \|_\infty \leq \| f \|_\infty + \| g \|_\infty$$

d'où le résultat. ■

3.1.2 Convergence dans $C\ [a,b]$:

Définition 3.1.4 *Soit (f_n) une suite sur $C\ [a,b]$. On dit que (f_n) converge sur f si et seulement si : $\| f_n - f \|_\infty$ tend vers zéro, si n tent vers l'infinie. C'est à dire : quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe n_0 telle que :*

$$\forall n \geq n_0\ :\ \| f_n - f \| < \varepsilon$$

C'est à dire : quel que soit $\varepsilon > o$, il existe n_0 telle que :

$$\forall n \geq n_0 :\ \max_{t\ \in [a,\ b]} | f_n(t) - f\ (t) | < \varepsilon$$

Ce qui donne : quel que soit $\varepsilon > o$, il existe n_0 tell que : $\forall n > n_0$, alors : quel que soit $t \in [a,b]$:

$$| f_n(t) - f\ (t) | < \varepsilon$$

Remarque 3.1.5 $\| \ . \ \|_\infty$ *est la norme de la convergence uniforme.*

Proposition 3.1.6 $(C\ [a,b],\ \| \ . \ \|_\infty)$ *est un espace de Banach.*

Preuve. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $C\ [a,b]$. C'est à dire : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $n_0 \in N$, tel que :

$$\forall n \geq m \geq n_0,\ \| f_n - f_m \|_\infty \leq \varepsilon$$

Mais :

$$\| f_n - f_m \|_\infty = \underset{n \in C\ [a,\ b]}{max} \mid f_n(t) - f_m(t) \mid$$

Donc :

$$\forall n \geq m \geq n_0 : max \mid f_n(t) - f\ (t) \mid \leq \varepsilon$$

Donc :

$$\mid f_n(t) - f_m(t) \mid < \varepsilon \quad \text{presque partout "p.p". } \forall n \geq m \geq n_0 \qquad ((3.1))$$

Ce qui donne que la suite $(f_n(t))$ est une suite de Cauchy presque partout dans $\mathbb{R}$.
Donc elle est convergente presque partout vers une fonction f.
Si on passe à la limité dans (3.1), On a :

$$\mid\ f\ (t) - f_m(t) \mid < \varepsilon \quad \text{presque partout}$$

Alors :

$$\mid f\ (t) \mid \leq \mid f_m(t) \mid + \varepsilon \quad \text{presque partout}$$

Donc :

$$\| f \|_\infty \leq \| f_m(t) \|_\infty + \varepsilon$$

Donc :

$$f \in C\ [a,b] \text{ et } \|\ f - f_m \| \leq \varepsilon$$

Preuve. Donc $C\ [a,b]$ est un espace complet. ■
Donc $(C\ [a,b], \| \ . \ \|_\infty)$ est un espace de Banach. ■

Définition 3.1.7 *On définit sur $C\ [a,b]$ l'application :*

$$\begin{aligned} \| \ . \ \|_1 \quad : \ C\ [a,b] &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ f \qquad &\longmapsto \qquad \| f \ \|_1 = \int_a^b \mid f\ (t) \mid dt \end{aligned}$$

Remarque 3.1.8 $\| \ . \ \|_1$ *n'est pas une norme sur $C\ [a,b]$ car elle ne vérifie pas la première condition du norme.*

Proposition 3.1.9 $\| \ . \ \|_1$ *est un norme sur $C\ [a,b]$.*

Preuve. 1. La première condition de la norme est facilement vérifie.

2. Montrons que pour tout $f \in C\ [a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{k}$

$$\| \lambda f \|_1 = |\lambda| \ \| f \|_1$$

Soient $f \in C\ [a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{k}$
On a :

$$\begin{aligned} \| \lambda f \|_1 &= \int_a^b |(\lambda f\ )(t)|\, dt \\ &= \int_a^b |\lambda \cdot f\ (t)|\, dt \\ &= |\lambda| \int_a^b |f\ (t)|\, dt \end{aligned}$$

Alors :

$$\| \lambda f \|_1 = |\lambda| \ \| f \|_1$$

3. Montrons que pour tout $f,\, g \in C\ [a,b]$ on a

$$\| f + g \|_1 \leq \ \| f \|_1 + \| g \|_1$$

Soient $f,\, g \in C\ ([a,b]\ )$ et $t \in [a,b]$ on a :

$$|\ f\ (t) + g(t)\ | \leq |\ f\ (t)\ | + |\ g(t)\ |$$

Alors :

$$\int_a^b |\ (f+g)(t)\ |\ dt \leq \int_a^b |\ f\ (t)\ |\ dt + \int_a^b |\ g(t)\ |\ dt$$

Donc :

$$\| f + g \|_1 \leq \ \| f \|_1 + \| g \|_1$$

Donc $\| \, . \, \|_1$ est une semi norme sur $C\ ([a,b]\ )$. ∎

Définition 3.1.10 $\tilde{L}_1([a,b]\ )$ *est l'espaces des fonctions* f *continues sur* $[a,b]$ *de norme :*

$$\| f \|_1 = \int_a^b |\ f\ (t)\ |\ dt$$

La convergence dans $\tilde{L}_1[a,b]$ *s'appelle convergence en moyenne* $(e\ ,m)$.

Proposition 3.1.11 $\tilde{L}_1[a,b]$ *n'est pas complet.*

Preuve. Pour montrer que $\tilde{L}_1[a,b]$ n'est pas complet il suffit de définir une suite de Cauchy en moyenne dans $\tilde{L}_1[a,b]$ qui n'est pas convergente en moyenne. Pour cela on définit la suite (f_n) telle que :

$$f_n(t) = \begin{cases} (\mathbf{b-a}) & \text{si } a \leq t \leq \frac{a+b}{2} \\ -nt + n\frac{a+b}{2} + (b-a) & \text{si } \frac{a+b}{2} \leq t \leq \frac{a+b}{n} + \frac{b-a}{2} \\ 0 & \text{si} \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \leq t \leq b \end{cases}$$

1. On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$.
   On a deux points de discontinuité $t_1 = \frac{a+b}{2}$ et $t_2 = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{n}$.
   On va étudier la continuité de f_n en t_1 et t_2.
   Au point $\mathbf{t}_1$:
   On a :

$$f_n(t_1) = f_n(\frac{a+b}{2}) = b - a$$

Et :

$$\underset{t \overset{<}{\to} t_1}{lim} f_n(t) = \underset{t \overset{<}{\to} \frac{a+b}{2}}{lim}\ b - a = b - a$$

Et :

$$\underset{t \overset{>}{\to} t_1}{lim} f_n(t) = \underset{t \overset{>}{\to} \frac{a+b}{2}}{lim} \left[-nt + n\frac{a+b}{2} + (b-a)\right] = b - a$$

Donc :

$$\underset{t \overset{<}{\to} t_1}{lim} f_n(t) = \underset{t \overset{>}{\to} t_1}{lim} f_n(t) = f_n(t_1)$$

Alors f_n est continue eu $t_1 = \frac{a+b}{2}$.

Au point $\mathbf{t}_2$:

On a :

$$f_n(t_2) = f_n(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{n}) = 0$$

Et :

$$\underset{t \overset{<}{\to} t_2}{lim} f_n(t) = \underset{t \overset{<}{\to} \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{n}}{lim} \left[-nt + n\frac{a+b}{2} + (b-a)\right] = 0$$

Et :

$$\lim_{t \overset{>}{\to} t_2} f_n(t) = \lim_{t \overset{>}{\to} \frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{n}} 0 = 0$$

Donc :

$$\lim_{t \overset{<}{\to} t_2} f_n(t) = \lim_{t \overset{>}{\to} t_2} f_n(t) = f_n(t_2)$$

Alors f_n est continue en $t_2 = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{n}$

A droite du point a :

On a :

$$f_n(a) = b - a$$

Et :

$$\lim_{t \overset{>}{\to} a} f_n(t) = b - a$$

Alors, f_n est continue à droite du point a.

A gauche du point b :

On a :

$$f_n(b) = 0$$

Et :

$$\lim_{t \overset{<}{\to} b} f_n(t) = 0$$

Alors, f_n est continue à gauche du point b.

On résulte que f_n est continue à l'intervalle $[a, b]$.

2. On montre que(f_n) est une suite de Cauchy sur $[a, b]$

On a (f_n) suite de Cauchy si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ quelque soit p, $q \in \mathbb{N} : p \geq n_0$, $q \geq n_0$

Alors :

$$\| f_p - f_q \|_1 < \varepsilon$$

Soient p, $q \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq q$. On a :

$$\| f_p - f_q \| = \int_a^b | f_p(t) - f_q(t) | \, dt$$

Et on a :

$$\frac{a+b}{2} \leq t \leq \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{n}$$

C'est à-dire :

$$b-a \geq -nt+n\frac{a+b}{2}+b-a \geq 0$$

Mais :

$$\int_{a}^{b} \mid f_p(t)-f_q(t) \mid dt = \int_{a}^{\frac{a+b}{2}} \mid f_p(t)-f_q(t) \mid dt +$$

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{p}} \mid f_p(t)-f_q(t) \mid dt + \int_{\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{p}}^{\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{q}} \mid f_p(t)-f_q(t) \mid dt$$

D'après la définition de la suite et quelque calcule simple on trouve que :

$$\int_{a}^{b} \mid f_p(t)-f_q(t) \mid dt = \frac{(b-a)^2}{2p(p-q)}q$$

On a :

$$\frac{(b-a)^2}{2p(p-q)}q \leq \frac{(b-a)}{2p}$$

Mais $\frac{(b-a)^2}{2p}$ tend vers zéro, si p tend vers l'infinie. Alors :

$$\| f_p - f_q \| \to 0$$

Donc (f_n) est une suite de Cauchy sur $[a,\, b]$.

3. On montre que $(f_n)_n$ n'est pas convergente sur $\tilde{L}_1$ $([a,b])$.

On suppose le contraire. C'est à dire : il existe g une fonction continue sur $[a,b]$ telle que : $g_n \to g$.

Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \| g_n - g \|_1 = 0$$

Mais :

$$\| g_n - g \|_1 = \int_{a}^{b} \mid g_n(t) - g(t) \mid dt$$

Alors :

$$\| g_n - g \| \geq \int_{a}^{\frac{a+b}{2}} \mid g_n(t) - g(t) \mid dt$$

Donc :

$$\| g_n - g \|_1 \geq \int_a^{\frac{a+b}{2}} | (b-a) - g(t) | \, dt$$

On a :

$$0 \leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} | (b-a) - g(t) | \, dt$$

Alors :

$$\text{pour tout } t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right], \, g(t) = b - a$$

On cherche la formule de $g(t)$ sur l'intervalle$\left]\frac{a+b}{2}\right.$ $\left.,b\right]$. Soit $t \in \left]\frac{a+b}{2}, \; b\right]$, on cherche $g(t_0)$

Soit $n \in N$ tell que :

$$n > \frac{b-a}{t_0 - \frac{a+b}{2}}$$

Alors :

$$nt_0 - n(\frac{a+b}{2}) > b - a$$

Donc :

$$t_0 > \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{n}$$

On a :

$$\| f_n - g \|_1 \geq 0$$

Alors :

$$g(t_0) = 0$$

Donc :

$$g = 0 \text{ sur } [t_0, \; b]$$

Donc g n'est pas continue (contradiction).

Ce qui donne : $\tilde{L}_1([a,b])$ est un espace n'est pas complet. ■

Définition 3.1.12 *Soient $\{f_n(t)\}$, $\{f_n{}^*(t)\}$ deux suites de fonctions continues sur $[a,b]$. Si la suite $\{f_n(t) \, - f_n{}^*(t)\}$ est infiniment petite dans $\tilde{L}_1[a,b]$, identification. Si* *l'on a :*

$$\| f_n - {f_n}^* \|_{\tilde{L}_1[a,\ b]} = \int_a^b | f_n(t) - {f_n}^*(t) | \, dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

quand $n \to \infty$, *on dit que* $\{f_n\}$, $\{{f_n}^*\}$ *sont des suites équivalentes dans* $\tilde{L}_1[a,b]$ *ou équivalentes en moyenne.*

Définition 3.1.13 *Soit* $\{f_n(t)\}$ *une suite de fonctions continues sur* $[a,b]$. *On dit que* $\{f_n(t\}$ *est de Cauchy dans* $\tilde{L}_1[a,b]$ *ou est de Cauchy en moyenne si pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un* n_0 *tel que : pour tout* $n > n_0$ *et tout* p *entier naturel en a l'inégalité*

$$\| f_{n+p} - f_n \|_1 = \int_a^b | f_{n+p}(t) - f_n(t) | \, dt < \varepsilon$$

3.2 Espace de Lebesgue $L_1([a,b])$:

Définition 3.2.1 *L'espace de Lebesgue* $L_1([a,b])$ *est par définition le complété de l'espace* $\tilde{L}_1([a,b])$.

Remarque 3.2.2 *En vertu du théorème de la complétion l'espace de Lebesgue* $L_1([a,b])$ *a comme éléments des classes d'équivalence en moyenne* $\hat{f}(t)$*de suites de Cauchy en moyenne de fonctions continues.*

Remarque 3.2.3 *Deux suites de Cauchy en moyenne* $\{f_n(t)\}$ *et* $\{{f_n}^*\}$*sont représentants d'une même classe* $\hat{f}(t)$ *si et seulement si elles sont équivalentes en moyenne.*

Remarque 3.2.4 *Si* $\{f_n(t)\} \in \hat{f}(t)$ *on a par définition :*

$$\| \hat{f} \| = \lim_{n\to\infty} \int_a^b | f_n(t) | \, dt = \lim_{n\to\infty} \| f_n \|_{\tilde{L}_1([a,b])} \tag{(3.2)}$$

On peut faire mieux et prendre l'expression (3.2) comme intégrale de Lebesgue d'une fonction $| \hat{f}(t) |$, *où* $\hat{f}(t) \in L_1\ [a,b]$, *ce qui revient à poser que*

$$\int_a^b | \hat{f}(t) | \, dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b | f_n(t) | \, dt$$

(On a à gauche une intégrale de Lebesgue et à droite des intégrales de Riemann)

il se trouve que certains éléments idéaux (classes) de l'espace $L[a,b]$ *peuvent être identifiés avec des fonctions concrètes, en générale discontinues.*

Théorème 3.2.5 *Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ et présentant dans cet intervalle un*

nombre fini de points de discontinuité ; supposons que l'intégrale

$$\int \mid f\ (t) \mid dt$$

Soit convergente. Il existe alors sur $[a,b]$ une suite de Cauchy en moyenne (f_n) de fonctions continues telle que

$$\int \mid f_n(t) - f\ (t) \mid dt \to 0 \quad pour \quad n \to \infty$$

(intégrales impropres) et que par conséquent $f \in L\,[a,b]$.

3.2.1 Intégrale de Lebesgue :

Ensembles de mesure nulle. Fonctions équivalentes :

Définition 3.2.6 *Un ensemble $M \subset [a,b]$ s'appelle ensemble de mesure nulle si pour tout*

$\varepsilon > 0$ il existe une famille finie ou dénombrable d'intervalles fermés $\{[\alpha_n, \beta_n]\ \}$, telle que :

1- M soit couvert par les intervalles fermés de la famille, i. e.

$$M \subset \cup_n \mid \alpha_n,\ \beta_n \mid$$

2- La somme des longueurs des intervalles fermés $[\alpha_n,\ \beta_n]$ suit plus petite que ε, identification :

$$\sum_n (\beta_n - \alpha_n) < \varepsilon$$

Exemple 3.2.7 *Tout ensemble fini de points t_1, ... $t_k \in [a,b]$ est de mesure nulle.*

Exemple 3.2.8 *un autre exemple d'ensemble de mesure nulle est l'ensemble des nombres rationnelles. en effet les nombres rationnels d'un segment $[a,b]$ forment un ensemble dénombrable, identification.*

Définition 3.2.9 *qu'on peut numéroter r_1 ,r_2 , ... $r_n = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$. Alors pour un $\varepsilon > 0$, et pour tout nombre rationnel r_n on construit un intervalle fermé :*

$$\left[r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}},\ r_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right] = [\alpha_n,\ \beta_n]$$

1- Il est évident que $r_n \in [\alpha_n,\ \beta_n]$ *et que pour conséquent :*

$$\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \cup_{n=1}^{\infty} [\alpha_n\ ,\beta_n]$$

2-

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n, \alpha_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{n+2}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

identification : $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ *est par définition un ensemble de mesure nulle.*

Remarque 3.2.10

1- Tout ensemble dénombrable est de mesure nulle.

2- Tout réunion finie ou dénombrable d'ensemble de mesure nulle et tout intersection d'une famille quelconque d'ensembles de mesure nulle sont des ensembles de mesure nulle.

Définition 3.2.11 *Deux fonctions* $x_1(t)$, $x_2(t)$ *égales presque partout sont dites équivalentes et notées*

$$x_1(t) \sim x_2(t).$$

Proposition 3.2.12 *Soit* $x_1(t)$, $x_2(t)$, $y_1(t)$ *et* $y_2(t)$ *des fonctions. Si* $x_1(t) \sim x_2(t)$ *et* $y_1(t) \sim y_2(t)$ *alors :*

$$x_1(t) + y_1(t) \sim x_2(t) + y_2(t) \text{ et } x_1(t) \cdot y_1(t) \sim x_2(t) \cdot y_2(t).$$

Convergence presque partout, Convergence en moyenne :

Définition 3.2.13 *une suite* $\{x_n(t)\}$ *admet presque partout limite égale à* $x\ (t)$ *et notée :*

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) \overset{p.p}{=} x\ (t)$$

Proposition 3.2.14 *Une suite* $\{x_n(t)\}$ *qui converge en moyenne est une suite de Cauchy en moyenne.*

Remarque 3.2.15 *La réciproque est fausse, identification :*

Tout suite de Cauchy en moyenne $\{x_n(t)\}$ *de fonction continues n'admet pas une fonction intégrable* $x_n(t)$ *vers laquelle* $\{x_n(t)\}$ *convergerait en moyenne.*

Le théoréme suivant établit la relation entre la convergence presque partout et la convergence en moyenne.

$$m_0 = [|\ log_2\,(b-a)\ |] + 2$$

(ici $[\alpha]$ la partie entier).

Ensuite, si A une famille finie ou dénombrable déintervalles fermés $\mid A \mid$désignera la somme des longueurs de ces intervalles ;

Si B est couvert par la famille d'intervalles fermés A, identification ;

Si $B \subset A$ avec $\mid A \mid < \alpha$, nous écrirons $\mid B \mid < \alpha$

Théorème 3.2.16 *Si $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset \tilde{L}_1\,[a,b]$ et :*

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) \overset{e.m}{=} 0$$

il existe une sous-suite $\{x_{nk}(t)\}_{k=1}^{\infty}$telle que :

1. lim $x_{n_k}(t) \overset{p.p}{=} 0$.

2. La série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_k}(t)|$ est convergente presque partout sur $[a,b]$.

3. Pour tout entier naturel $m > m_0$, il existe un $B_m \subset [a,b]$ sur lequel $\mid x_{n_k}(t) \mid < \frac{1}{2^k}$ pour tout $k \geq m$ et :

$$\mid [a,b] \setminus B_m \mid < \frac{1}{2^m}, B_m \subset B_{m+1}.$$

Intégrale de Lebesgue et fonctions intégrables au sens de Lebesgue :

Théorème 3.2.17 *Si $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset \tilde{L}_1[a,b]$ et$\{x_n(t)\} \in \hat{x}\ (t) \in L[a,b]$, il existe une sous-suite $\{x_{nk}(t)\}_{k=1}^{\infty}$ telle que :*

1- $\{x_{nk}(t)\}$ converge presque partout vers une fonction $f\ (t)$ définie sur $[a,b]$.

2- Pour tout entier naturelle $m \geq m_0$ il existe un $B_m \subset [a,b]$ sur lequel :

$$\mid f\ (t) - x_{n_k}(t) \mid < \frac{1}{2^{k-1}} \quad \textit{pour tout } k \geq m,$$

Avec :

$$\mid [a,b] \setminus B_m \mid < \frac{1}{2^m} \ \textit{ et } B_m \subset B_{m+1}$$

Théorème 3.2.18 *Si $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset \tilde{L}_1[a,b]$, $\{y_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset \tilde{L}_1[a,b]$, et si de plus :*

$$\{x_n(t)\} \sim \{y_n(t)\}$$

Et :

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) \overset{p.p}{=} f\ (t) \ \textit{ et} \lim_{n\to\infty} y_n(t) \overset{p.p}{=} \varphi(t),$$

On a :

$$f\ (t) \sim \varphi(t).$$

Théorème 3.2.19 *Soit* $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset \tilde{L}_1[a,b]$ *et* $\{y_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset \tilde{L}_1[a,b]$, *si chacune de ces suites est de Cauchy en moyenne et si :*

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) \overset{p.p}{=} \lim_{n\to\infty} y_n(t) \overset{p.p}{=} f(t),$$

On a :

$$\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \sim \quad \{y_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$$

Définition 3.2.20 *Une fonction* $f\ (t)$ *est intégrable au sens de Lebesgue sur le segment* $[a,b]$ *s'il éxiste une suite de Cauchy en moyenne de fonctions continues*$\{x_n(t)\}$ *telle que :*

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) \overset{p.p}{=} f\ (t)$$

l'intégrale de Lebesgue de$f\ (t)$ *sur* $[a,b]$ *est alors* $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b x_n(t)dt$ *Cette intégrale se notera* $(L)\int\limits_a^b f\ (t)dt.$

On a donc par définition

$$(L)\int\limits_a^b f\ (t)dt = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b x_n(t)dt$$

Remarque 3.2.21 *1. Cette définition de l'intégrale ne dépend aucunement de la suite* $\{x_n(t)\}$ *mais seulement de classe* $\hat{x}(t)$ *à laquelle cette suite appartient.*

2. Il ressort immédiatement de la définition que si $f\ (t)$*est intégrable au sens de Lebesgue alors* $\varphi(t) \sim f\ (t)$ *l'est aussi. et qu'on a le plus :*

$$(L)\int\limits_a^b f(t)dt = \quad (L)\int\limits_a^b \varphi(t)dt$$

3. Il ressort du théorème que la correspondance entre les éléments $\hat{x}(t) \in L[a,b]$ *et les classes* $f\ \hat{(t)}$*de fonctions d'équivalentes (intégrables au sens de Lebesgue) établi précédemment est biunivoque.*

4. Si $f_1\hat{(t)}$ *correspond à* $\hat{x}_1(t)$ *et* $f_2\hat{(t)}$ *à* $\hat{x}_2(t)$, *Alors* $f_1\hat{(t)} + f_2\hat{(t)}$ *correspond à* $\hat{x}_1(t) + \hat{x}_2(t)$ *et* $\lambda f_1\hat{(t)}$ *correspond à* $\lambda\hat{x}_1(t)$ *où* λ *est un nombre quelconque.*

5. Les classes $\hat{f(t)}$de fonctions équivalences intégrables au sens de Lebesgue peuvent être assimilées aux éléments de l'espace de Banach $L[a,b]$ et à chaque classe $\hat{f(t)}$ en peut faire correspond un nombre :

$$\int_a^b \hat{f(t)}dt \quad = (L)\int_a^b f\ (t)dt$$

ou $f(t)$ $(\hat{f(t)})$ est une fonction intégrable au sens de Lebesgue.

Propriétés fondamentales de L'intégrale de Lebesgue et des fonctions intégrables au sens de Lebesgue :

Proposition 3.2.22 *1. Une fonction $f\ (t)$ est continue sur $[a,b]$, on a $f\ (t) \in L([a,b])$ et :*

$$f\ (t) \in L([a,b])\ et \int_a^b f\ (t)dt \quad = (L)\int_a^b f\ (t)dt$$

2. Si $f_1(t)$ et $f_2(t) \in L[a,b]$, on a :

$$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t) \in L[a,b]\ et\ (L)\int_a^b (\alpha f_1(t) + \beta f_2(t) = \alpha(L)\int_a^b f_1(t)dt + \beta(L)\int_a^b f_2(t)dt$$

Où α, β sont deux nombres arbitraires.

Proposition 3.2.23 *Si $f\ (t) \in L[a,b]$, on a :*

$$\mid f\ (t) \mid \in L[a,b]\ et \mid (L)\int_a^b f\ (t)dt \mid \leq (L)\int_a^b \mid f\ (t) \mid dt$$

Preuve. Puisque $f\ (t) \in L[a,b]$, il existe une suite de Cauchy en moyenne de fonctions continues $\{x_n(t)\}$ telle que :

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) \overset{p.p}{=} f\ (t)$$

La suite $\{\mid x_n(t) \mid\}$ est alors de Cauchy en moyenne elle aussi, car :

$$\int_a^b \mid\mid x_n(t) \mid - \mid x_m(t) \mid\mid dt \leq \int_a^b \mid x_n(t) \mid - \mid x_m(t) \mid dt \text{ et } \lim_{n\to\infty} \mid x_n(t) \mid \overset{p.p}{=} \mid f\ (t) \mid$$

i. e.$\mid f\ (t) \mid \in L[a,b]$

Preuve. On a aussi :

$$\mid \int_a^b x_n(t)dt \mid \leq \int_a^b \mid x_n(t) \mid dt$$

■

Mais :

$$\mid (L)\int_a^b f\ (t)dt \mid = \lim_{n\to\infty} \mid \int_a^b x_n(t)dt \mid \text{ et } \lim_{n\to\infty} \int_a^b \mid x_n(t) \mid dt = (L)\int_a^b \mid f\ (t) \mid dt$$

Alors :

$$\mid (L)\int_a^b f\ (t)dt \mid \leq (L)\int_a^b \mid f\ (t) \mid dt$$

■

Proposition 3.2.24 *Si $f\ (t) \in L[a,b]$ et $f\ (t) \geq 0$, on a :*

$$(L)\int_a^b f\ (t)dt \geq 0$$

Preuve. puisque $f\ (t) \geq 0$, on a :

$$f\ (t) = \mid f\ (t) \mid$$

Et d'après la proposition précédente, on a :

$$\mid (L)\int_a^b f\ (t)dt \mid \leq (L)\int_a^b \mid f\ (t) \mid dt$$

Mais :

$$0 \leq \mid (L)\int_a^b f\ (t)dt \mid \text{ et } (L)\int_a^b \mid f\ (t) \mid dt = (L)\int_a^b f\ (t)dt$$

Donc :

$$(L)\int_a^b f\ (t)dt \geq 0$$

■

Remarque 3.2.25 *Si deux fonctions équivalentes sont intégrables au sens de Lebesgue leurs intégrales sont égales, si les fonctions sont égales à fortiori.*

Proposition 3.2.26 ***Proposition 3.2.27*** *Si* $f_1\ (t) \in L[a, b]$*,* $f_2(t) \in L[a, b]$*, et* $f_1(t) \geq f_2\ (t)$ *presque partout, on a :*

$$(L)\int_a^b f_1(t)dt \geq (L)\int_a^b f_2(t)dt$$

Proposition 3.2.28 *Si* $f\ (t) \in L[a, b]$ *et* $m \leq f\ (t) \leq M$ *presque partout, où* m *et* M *sont des nombres, alors :*

$$m(b-a) \leq (L)\int_a^b f_2(t)dt \leq M(b-a)$$

Remarque 3.2.29 ***Proposition 3.12 Preuve.***

Proposition 3.2.30 *Si* $f\ (t) \in L[a, b]$*,* $f\ (t) \geq 0$ *et* $(L)\int_a^b f_2(t)dt = 0$*, on a* $f\ (t) \sim 0$*.*

Intégrale de Riemann et Intégrale de Lebesgue :

Proposition 3.2.31 *Nous avons déjà signalé que si une fonction est continue* f *sur* $[a, b]$*, alors :*

$f \in L[a, b]$ *et :*

$$\int_a^b x\ (t)dt = (L)\int_a^b x\ (t)dt$$

Théorème 3.2.32 *Toute fonction* f *intégrable au sens de Riemann sur*$[a, b]$ *est aussi intégrable au sens de Lebesgue sur* $[a, b]$ *et de plus*

$$\int_a^b f\ (t)dt = (L)\int_a^b f\ (t)dt$$

3.3 Les espaces $C^p(\Omega)$:

Définition 3.3.1 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et soit* $\bar{\Omega}$ *sa fermeture. Une fonction* $U : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ *est dite de classe* $C^{\,p}$ *sur* $\bar{\Omega}$ *si toute ses dérivées partielles jusqu'a l'ordre* p *existent et sont continue. On pose :*

$$D^m U = \frac{\delta^m U}{\delta x_1^{m_1} .... \delta x_n^{m_n}}$$

Avec :

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = p$$

Définition 3.3.2 *Donc :*

$$C^{\,p}(\bar{\Omega}) = \{U \ : \ \bar{\Omega} \to \mathbb{R} \ telle \ que U \ est \ de \ classe \ C^{\,p} \ sur \ \bar{\Omega}\}$$

Et tantes ses des dérivées partielle jusqu'a l'ordre p *se prolonge continument à* $\bar{\Omega}$*.*

3.4 Les espaces $\tilde{L}_p(\overline{\Omega})$:

Définition 3.4.1 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et soit* $\bar{\Omega}$ *sa fermeture. L'espace* $\tilde{L}_p(\bar{\Omega})$ *est par définition l'espace des fonctions des classe* $C^{\,p}$ *sur* $\bar{\Omega}$ *mais introduisons dans cette espace une autre norme :*

$$\| f \|_p = \Big(\int_a^b | f(t) |^p \, dt \Big)^{\frac{1}{p}}$$

(L'intégration étant entendue au sens de Riemann)

3.5 Espace de Lebesgue $L_p(\Omega)$, $p \geq 1$:

Définition 3.5.1 *Soit* Ω *un domaine borné de* $\mathbb{R}^n$ *et soit* $\bar{\Omega}$ *sa fermeture. L'espace de Lebesgue* $L_p(\Omega)$ *est par définition le complété de l'espace* $\tilde{L}_p(\bar{\Omega})$*.*

Conclusion

Dans cette mémoire on a défini un grand théorème dans l'analyse fonctionnelle qui est le théorème de complétion et on a construit au delà de ça les espaces de Lebesgue et sur tout $L[a, b]$.

Bibliographie

[1] V. Trinoguine, Analyse fonctionnelle, traduction française , édition mir 1985.
[2] Mostfai Abdelhafid, Cours de topologie, OPU , Alger.
[3] Yves Caumel, cours d'analyse fonctionnel et complexe, édition Cépaduéf 2009.
[4] Analyse fonctionnel et théorie spectrale, MT 404 , 2001 / 2002.
[5] Cours magistère de Dr. Merhoune., Université de Constantine, Algérie.
[6] Mohamed Hazeme, Topologie des espaces métrique, OPU 2009.