الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Minstère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

CENTRE UNIVERSITAIRE DE MILA
INSTITUT DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

Réf. ***/12***

Mémoire de fin d'étude
Présenté pour l'obtention du diplôme de

Licence Académique

Domaine : **Mathématiques et Informatique**
Filière : **Mathématiques**
Spécialité : **Mathématiques Fondamentales**

<u>Thème</u>

La théorie de la stabilité de système différentiel

Présenté par :
1-Nouicer Zineb
2-Belkebieche Zohra

Dirigé par :
Laouira Widad

Année universitaire 2011-2012

Remerciements

Mes remerciements vont tout premièrement à Dieu tout puissant pour la santé, la volonté, et la patience qu'il nous a donnée toute ces année d'études, et pour terminer ce travaille.

Nous remercions vivement Madame « Laowira Widad» d'avoir voulu proposer et assurer la direction de ce mémoire, sa disponibilité, son patience, sa soutien, ses encouragements et ces précieux conseils tout l'âge de ce travail.

Nous adressons, également, mes remerciements chaleureux aux membres de l'institut des sciences et de la technologie et à tous ceux qui ont pris part de près ou loin, à la réalisation de ce travail.

Finalement nous spécifiant tout mes remerciements à tout les professeure de IST.

Zohra et Zineb

Table des matières

Introduction Générale

La stabilité des systèmes des équations différentielles sont apparues pours poser des problèmes, alors et de savoir si les points sont temporellement stables, et permet de définir l'état instantané du système, l'étude des systèmes sont basées sur l'utilisation de la linéarisation statique ou dynamique. Elles peuvent conduire à des résultats plus ou moins satisfaisant du point de vue pratique.

Cependant, ceux-ci ne s'adressent qu'à une classe relativement restreinte des systèmes physique ceux régis par des équations différentielles ordinaires possèdent certaines propriétés.

Les premières travaux sur la stabilité restreint des équations différentielles ordinaires **(E D O)** que leur approximation linéaire du première ordre quelque années pour **H.poincaré** et **A.M Lyapunov** justifient et étendent les propriétés locales induites du modèle linéaires, l'un des résultats principaux est la première méthode de**" Lyapunov"**.

L'histoire des systèmes dynamiques modernes est relativement ressente. Elle commence avec" **Henri Poincaré " (1854-1912)** qui fut le premier a entreprendre l'étude formelle d'un système dynamique. Il avait la conviction que le comportement global de toute solution d'un système dynamique était plus important que le comportement local.

Les premières résultats sont apparus avec **Lyapunov** à la fin du **19**^{ème} siècle et au début de **20**^{ème} siècle. Il donne alors une condition nécessaire et suffisante de stabilité. **Hahn** et **Lefschetz** achèveront alors dans les années **1960** cette théorie.

L'objectif de ce travaille est dans un première temps de présenter le système dynamique, ainsi que la théorie de stabilité des équations différentiels, le problème qui nous intéresse ici est celui d'étude la stabilité des systèmes dynamiques.

Ce mémoire constitué de trois chapitres, on représente quelques notions fondamentales sur le système dynamique dans le premier chapitre, puis on représente la théorie de la stabilité des systèmes soient linéaires ou non linéaires.

La fin c'est le troisième chapitre est consacré à spécifier les travaux de mathématicien "Lyapunov" au sens des certaines théories de la stabilité.

Chapitre 1

Système Dynamique

Dans ce chapitre, nous définissons les systèmes dynamiques qui seront étudiés dans cet ouvrage.

1.1 Système dynamique

Définition 1.1 *Soit un système d'équation différentielles de la forme* ***(cas continue)*** *:*

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x, t, v), \qquad x \in U \subset R^n, v \in V \subset R^p \tag{1.1}$$

Ou des applications (cas discret) :

$$x_{k+1} = f(x_k, v) \ , x_k \ \in U \subset R^n, v \in V \subset R^p, k = 1, 2, ... \tag{1.2}$$

Les systèmes (1.1),(1.2) s'appellent des systèmes dynamiques. R^n *est l'espace des phases,* R^p *est l'espace des paramètres.*

Exemple 1.2 *l'oscillateur de Duffing :*

$$\frac{dx}{dt} = y, \tag{1.3}$$

$$\frac{dy}{dt} = x - x^3 - \sigma y + \gamma \cos \omega t \tag{1.4}$$

où σ, γ *et* ω *sont des paramètres physiques réels. L'espace des phases est* R^2 *et l'espace des paramètres est* $\mathbb{R}^3$*.*

1.2 Champ de vecteurs

Définition 1.3 *En mathématiques, un champ de vecteurs ou champ vectoriel est une fonction qui associe un vecteur à chaque point d'un espace euclidien ou plus généralement d'une variété différentielle. Pour la résolution des équations différentielles autonomes du première ordre, on utilise le champ des directions (appelé en physique champ des vitesses) qui représente les dérivée tangentes à la trajectoire de ces équations, ce qui de la tracer.*

Remarque 1.4 *Dans le système (1.1), le champ de vecteurs est la fonction* $f(x, t, v)$, $x \in U \subset \mathbb{R}^n, v \in V \subset \mathbb{R}^p$. *tel que* $\mathbb{R}^n$ *est l'espace des phases et* $\mathbb{R}^p$ *est l'espace des paramètres..*

1.3 Système autonome- Système non autonome

Définition 1.5 *Un système différentielle est dit autonome si* f *ne dépend pas explicitement de* t. *Dans ce cas on l'écrira :*

$$\dot{x} = f(x, u). \tag{1.5}$$

Dans le cas contraire on dira qu'il est non autonome. Tous les systèmes sont non autonomes. On peut également noter qu'un système autonome peut devenir non autonome si la commande dépend explicitement du temps, c'est à dire si par exemple : $u = g(x, t)$.

Exemple 1.6 *Soit le système :*

$\dot{x} = -\frac{x}{1+t}$

système précédent est non autonome.

1.4 Système linéaires

Définition 1.7 *Dans le cas continu, un système linéaire est un système décret par l'équation d'état*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), t > t_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.6}$$

Où $A(t)$ *est une matrice* $n \times n$ *à valeurs dans* R^n *et* $u(t) \in R^m$.

Théorème 1.8 *Si* $A(t)$ *est continue pour tout* t, *alors l'équation homogène* $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ *admet une solution unique donnée par*

$$x(t) = \phi(t, t_0)x(t_0) \tag{1.7}$$

Théorème 1.9 *On considère le système linéaire (1.6). Si $A(t)$ est continue, et $B(t)$ et $u(t)$ sont presque partout continues pour tout t alors la solution de (1.6) est :*

$$x(t) = \phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \phi(t, s)B(s)ds \ , \quad \textit{pour tout } t \tag{1.8}$$

1.5 Systèmes non linéaires

Définition 1.10 *(Dans le cas continue). Un système dynamique peut être représente par l'équation*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.9}$$

Dans le cas discret un système dynamique s'écrit :

$$\begin{cases} x(k+1) = f(k, x(k)) \\ x(k_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.10}$$

Définition 1.11 *La fonction $x(t)$ est une solution de (1.9)*
si pour tout $t \in I, (t, x(t)) \in D$ et $x(t)$vérifie(1.9). Si f est continue sur D,
alors il est claire que x est de classe C^1 sur I et vérifie :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)ds \tag{1.11}$$

*Il existe différents résultats concernant l'existence et l'unicité de solution de l'équation (1.11) Ci-dessous, on décrit le théorème de "**Picard-Lindoff** " par son importance historique et aussi parce que sa démonstration donne un moyen de construire la solution.*

Théorème 1.12 *Soit f une fonction continue sur D et satisfaisant la condition de Lipschitz :*
$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq K \quad \|x - y\|, t \in I, x, y \in B Si \|f(t, x)\| \leq m,$
pour tout $(t, x) \in D$.
Alors (1.9) admet une solution unique dans $[t_0, t_0 + c]$ où $c = \min(h, \frac{b}{m})$.
Preuve. *Soit $x_1(t)$ tel que $\|x_1(t) - x_0\| \leq b$. A partie de (1.11),*
considérons la suite $x(k)$ définie par :

$$x_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s))ds, k \geq 1$$

Par récurrence, on a $\|x_k(t) - x_0\| \leq b$.
la suite (x_k) converge uniformément. En effet :
$\|x_3(t) - x_2(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, x_2(s)) - f(s, x_1(q)\| ds$
Comme f est lipchitzienne par rapport à x,on a :

$\|x_k(s) - x_{k-1}(s)\| \leq 2bK^{k-2}\frac{(s-t_0)^{k-2}}{(k-2)!}; s \in [t_0, t_0 + h]$
Soit $s_1 > s$;
$\left\|x_{k+1}(s) - x_{k(s)}\right\| \leq 2bK^{k-1}\frac{(s_1-t_0)^{k-1}}{(k-1)!}$
Terme général d'une série numérique convergente.
D'où la suite (x_k) *converge uniformément.*
Soit $x(s) = \lim_{k\to\infty} x_k(s)$. *Alors on a*
$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$.
Soit $y_1(s)$ *et* $(y_k(s))$ *la suite associée.*
$\|x_k(t) - y_k(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s)) - f(s, y_{k-1}(s))\| \, ds$.
Par le même raisonnement que précédemment,
on a : $\lim_{k\to\infty}(x_k(t) - y_k(t)) = 0$.
or,$y_k - x = (y_k - x_k) + (x_k - x)$. *Donc pour tout* $x_1, \lim_{k\to\infty} x_k(s) = x(s)$.
Pour l'unicité, on suppose qu'il existe deux solutions du problème, notées x *et* y.
Soit $x_k(s)$ *tel que* $x(s) = \lim_{k\to\infty} x_k(s)$ *et* (y_k) *tel que* $y_k(s) = y(s)$ *pour tout* k.
On a : $\|y_k(t) - x(t)\| \leq \|y_k(t) - x_k(t)\| + \|x_k(t) - x(t)\|$
Donc cet convergent vers la même limite. ■

1.6 Flot et point fixes

Considérons le système autonome

$$\frac{dx}{dt} = f(x), x \in \mathbb{R}^n, f \in C^r(u), u \subseteq \mathbb{R}^n \; . \tag{1.12}$$

Définition 1.13 *Soit* $x(x_0, t), x_0 \in D$, *une solution de(1.12) avec conditions initiales* $x(0) = x_0$. *On appelle flot de (1.12), ou du champ de vecteurs* f, *l'application* $\phi_t : D \to \mathbb{R}^n$ *définie par :* $\phi_t(x) = x(x_0, t)$ *telle que :* $\phi_t(x_0)$ *possède les propriétés suivantes :*
(i) $\phi_t(x_0)$ *est de classe* C^r.
(ii) $\phi_0(x_0) = x_0$.
(iii) $\phi_{t+s}(x_0) = \phi_t(\phi_s(x_0))$.

Définition 1.14 *On appelle point fixe (ou point stationnaire ou point d'équilibre ou point critique) de (1.12),*
le point $\overline{x}$ *de l'espace des phases obtenu en annulant le second membre de (1.12) :*

$$f(\overline{x}) = 0. \tag{1.13}$$

Par le changement de variables $\zeta = x - \overline{x}$, *on peut ramener le point* $\overline{x}$ *à l'origine.*

1.7 Représentation paramétrique de la trajectoire

La trajectoire $\overrightarrow{X}(t)$ intégrale du système dynamique défini par :
$\frac{d\overrightarrow{X}}{dt} = \overrightarrow{\Im}(\overrightarrow{X})$ tel que :
$\overrightarrow{X} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}^t \in E \subset \mathbb{R}^n$ et $\overrightarrow{\Im}(\overrightarrow{X}) = \left[f_1(\overrightarrow{X}), f_2(\overrightarrow{X}), ..., f_n(\overrightarrow{X})\right]^t \in E \subset \mathbb{R}^n$,
est décrite par le mouvement d'un point courant M dont la position dépend d'un paramètre variable : le temps.

Cette courbe peut également être définie par sa représentation paramétrique relativement à un repère :

$$x_1 = F_1(t), x_2 = F_2(t), ..., x_n = F_n(t).$$

Définition 1.15 *une trajectoire associe donc à chaque instante de point dans l'espace d'états ; l'ensemble de ces point constitue une courbe appelée orbite de x.. Le terme (trajectoire) évoque le déplacement d'un espace tridimensionnel. Bien entendu, les variables d'état peuvent représenter bien autre chose que des coordonnées spatiales, mais l'évolution de notre système peut toujours être décrite par une courbe au sein de son espace d'état (également appelé espace des phases). Cette courbe faires t une représentation abstraite de l'évolution du système.*

1.8 Théoréme de "Poincaré_Bendixson"

Dans un espace des phases à deux dimensions, il est souvent possible de démontrer que les orbites d'un système non-linéaire spirales vers une courbe fermée ou cycle limite même si l'on ne sait pas résoudre ce système, ceci grâce au théorème suivant.

Théorème 1.16 ***(Poincaré-Bendixson)***
Supposons qu'une orbite $x(x_0, t)$ du système de deux variables :

$$\frac{dx}{dt} = f(x), x = (x_1, x_2)^T \tag{1.14}$$

Reste dans un domaine compact $D \subset \mathbb{R}^2$ pour tout $t \geq 0$, alors :
(i) ou bien $x(x_0, t)$ est une solution périodique de(1.14).
(ii) ou bien $x(x_0, t)$ tend vers une solution périodique de(1.14).
(iii) ou bien $x(x_0, t)$ tend vers un point fixe de (1.14).

Chapitre 2

Quel que théorème de la stabilité

2.1 Définition de la stabilité

Définition 2.1 *Un "système stable" qui à une propriété de revenir à son état d'équilibre après une perturbation, est dit stable. Une solution est dit stable si les solutions associées à des valeurs proches de la condition initiale restent proches de la solution et des équations fondamentales des théories qualitative et elle à étudiée en détail par le mathématicien* ***"Lyapunov"(1857-1918).***

2.2 Notion de stabilité

Principaux outils :
- Boule : $B(\rho) = \{x\,;\ \|x\| \leq \rho\}$, où $\|x\|$ est la norme de x.
- Sphère : $S(\rho) = \{x\,;\ \|x\| = \rho\}$.

Définition 2.2 *Le point d'équilibre $x_e = 0$ est stable si : $\forall \rho > 0$, il existe $r > 0$ tel que :*
Si $\|x(0)\| < r$ alors $\|x(t)\| < \rho$, $\forall t \geq 0$.
Si non le point d'équilibre est instable.

2.3 La stabilité des systèmes

2.3.1 Stabilités des solutions

On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \acute{y} = f(t, y). \\ y(t_0) = z_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

On suppose que la solution de ce problème existe et unique dans l'intervalle $[t_0, +\infty[$.

Définition 2.3 *soit $y(t,z)$,la solution* maxi*male de (2.1), tel que $y(t_0, z) = z$.*
on dira que la solution $y(t, z_0)$est stable s'il existe une boule $\overline{B}(z_0, r)$et une constante $c \geq 0$, tel que :
1) pour toute $z \in \overline{B}(z_0, r) : t \rightarrow y(t, z)$,est définie sur$[t_{0,+} \infty[$.
2) pour tout $z \in \overline{B}(z_0, r)$est $t \geq t_0$,on à :$\|y(t, z) - y(t, z_0)\| \leq c. \|z - z_0\|$.
la solution $y(t, z_0)$est dite asymptotiquement stable si elle est stable et vérifie la condition 3).
3)$\exists\overline{B}(z_0, r)$tel que pour tous $z \in \overline{B}(z_0, r)$on dit : $\lim_{t\rightarrow+\infty} \|y(t, z) - y(t, z_0)\| = 0$.

2.3.2 Stabilité asymptotique

Définition 2.4 *le point d'équilibre $x_e = 0$ est asymptotiquement stable si :*
1-il est stable
2- il existe $r > 0$ tel que si $\|x(0)\| < r$ alors $\lim_{t\rightarrow\infty} \|x(t)\| \rightarrow 0$
- $B(r)$ est un domaine de stabilité.
- Le domaine d'attraction est l'ensemble maximal des conditions initiales pour les quelles la stabilité asymptotique est obtenue. $B(r)$ est inclus dans le domaine d'attraction (certaine fois il ya égalité).
On peut construire des exemples tels que les trajectoires sont les suivantes.

2.3.3 Stabilité exponentielle

Définition 2.5 *Le point d'équilibre $x_e = 0$ est exponentiellement stable s'il existe deux scalaire strictement positifs k et α tels que :*

$$\forall t \geq 0, \|x(t)\| < k \|x(0)\| e^{-\alpha t} \tag{2.2}$$

Dans une boule $B(r)$ autour de l'origine.

Exemple 2.6 *Soit le système décrit par :*

$$\dot{x} = -(\sin(x)^2)x \tag{2.2}$$

La solution est $x(t) = x(0)e^{\int_0^t -(1+\sin(x(\tau)^2)dt}$. On a $|x(t)| \leq |x(0)| e^{-t}$et donc le taux de décroissance est $\frac{1}{2}$.

Exemple 2.7 *Soit le système :*

$$\dot{x} = -x^2, x(0) = 1 \tag{2.3}$$

La solution s'écrit

$$x(t) = \frac{1}{1+t} \tag{2.4}$$

La solution décroît plus lentement que $e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$. On peut également remarquer que la définition de la stabilité exponentielle permet d'obtenir une borne explicité sur la norme du vecteur d'état à tout instant. En effet, en posant $k = e^{\alpha t}$, On peut écrire :

$$\frac{\|x(t)\|}{\|x(0)\|} \leq e^{\alpha(\tau - t)} \tag{2.5}$$

Pour $t \geq \tau + \frac{1}{\alpha}$, $\frac{\|x(t)\|}{\|x(0)\|} \leq 35\%$, et pour $t \geq \tau + \frac{3}{\alpha}$, $\frac{\|x(t)\|}{\|x(0)\|} \leq 5\%$.
Ceci permet de retrouver la notion de constante de temps utilisée en linéaire.

2.3.4 Stabilité local-Stabilité globale (stabilité des systèmes non linaières)

Remarque 2.8 *Dans chacune des définitions précédentes, la stabilité est définie de manière locale puisque reliée a la notion de voisinage. En utilisant les définitions précédentes, il n'est pas possible a priori de prédire le comportement du système pour une condition initiale prise loin du point d'équilibre.*

Définition 2.9 *Si un système est stable* ***asymptotiquement (exponentiellement)*** *pour n'importe quelle condition initiale dans $\mathbb{R}^n$. On dira que le point d'équilibre $x_e = 0$ est* ***asymptotiquement (exponentiellement)*** *stable au sens large. On dira aussi qu'il est globalement asymptotiquement (exponentiellement) stable.*

Remarque 2.10 *Les concepts de stabilité locale ou globale n'ont pas d'intérêt en linéaire.*

Théorème 2.11 ***(Hartman-Grobman)***
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est dėfféomorphisme avec un point d'équilibre x_e "hyperbolique".
Alors il existe un homéomorphisme H d'un voisinage de $x_e \in U \subset \mathbb{R}^n$.
Tel que $H : U \to \mathbb{R}^n$. Mettant en correspondance les trajectoires du système
non linéaires $y' = Df(x_e)H(x), \forall x \in U$.

Exemple 2.12
Soit le système

$x_e = f(x)$ *tel que* $f(x) = \binom{x_1^2 - x_2^2 - 1}{2x_2}$.
On a $f(x) = 0 \implies x = (1,0)^T$ *sont les point d'équilibre de* f, *on a :*
$Df(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
Est le jacobienne de f, *donc*
$Df(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
Alors $(1,0)$ *est un source* (*car* $\lambda_1 = \lambda_2 = 2 > 0$).
$Df(-1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
Donc $(-1,0)$ *est un point selle (car* $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$).

2.3.5 Théorème de la variété centrale

Théorème 2.13 *Soit* x *un point fixe de*

$$\frac{dx}{dt} = f(x), x \in \mathbb{R}^n, f \in C^r(D), D \subseteq \mathbb{R}^n. \tag{2.6}$$

La linéarisation de(2.6) autour de x *s'écrit :*

$$\frac{d\zeta}{dt} = J\zeta \tag{2.7}$$

Où $\zeta = x - \overline{x}$ *et* J *la matrice jacobienne.*

$$J \equiv Df(\overline{x}) = \left\| \frac{df_i}{dx_i} \right\|_{x=\overline{x}}. \tag{2.8}$$

on substitue $\zeta = ue^{\lambda t}, u \in \mathbb{R}^n$, *dans(2.7)et on obtient les équation aux vecteurs propres et aux valeurs propres :*

$$(J - \lambda I)u = 0, \tag{2.9}$$

$$|J - \lambda I| = 0. \tag{2.10}$$

Définition 2.14 *Soient* $u_1, ..., u_s$ *les vecteurs propres de* J *correspondant aux valeurs propres* λ *dont la partie réelle est négative,* $v_1, ..., v_u$ *les vecteurs propres de* J *correspondant aux valeurs propres* λ *dont la partie réelle est positive,* $w_1, ..., w_c$ *les vecteurs propres de* J *correspondant aux valeurs propres* λ *dont la partie réelle est nulle, avec* $s + u + c = n$

et soient E^s le sous-espace vectoriel engendré par $\{u_1, ..., u_s\}$, E^u le sous-espace vectoriel engendré par $\{v_1, ..., v_u\}$, E^c le sous-espace vectoriel engendré par $\{w_1, ..., w_c\}$, avec $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$.

Théorème 2.15 *Il existe des variétés de classe C^r, stable W^s, instable W^u et centrale W^c, tangentes respectivement à E^s, E^u et E^c en $\overline{x}$. Ces variétés sont invariantes par rapport au flot ϕ_t de (2.6). W^s et W^u sont uniques mais W^c ne l'est pas nécessairement. On a $\phi_t(W^s) \subset W^s, \phi_t(W^u) \subset W^u, \phi_t(W^c) \subset W^c$ et.*

$$\lim_{t\to+\infty} \phi_t(x) = x \text{ pour tout } x \in W^s, \tag{2.11}$$

$$\lim_{t\to-\infty} \phi_t(x) = \overline{x} \text{ pour tout } x \in W^u. \tag{2.12}$$

Noter que x est la limite w (resp. la limite α) de trajectoire $\phi_t(x)$ appartenant à W^s (résp. appartenant à W^u).

Exemple 2.16 *Soit le système non-linéaire suivant :*

$$\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= -x, \\ \tfrac{dy}{dt} &= -y + x^2, \\ \tfrac{dz}{dt} &= z + x^2. \end{aligned}$$

Le seul point fixe du système est l'origine et la matrice :

$$J = Df(0) = \left\| \tfrac{\partial f_i(0)}{\partial x_i} \right\| = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Est déjà diagonale ; par conséquent les sous-espaces E^s et E^u sont respectivement le plan x, y et l'axe z.

Après avoir résolu la première équation $\frac{\partial x}{\partial t} = -x$, le système non linéaire se réduit à deux équations différentielles linéaires qui peuvent être résolues facilement et on obtient :

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{-t}, \\ y(t) &= y_0 e^{-t} + x_0^2(e^{-t} - e^{-2t}), \\ z(t) &= z_0 e^t + \tfrac{x_0^2}{3}(e^t - e^{-2t}). \end{aligned}$$

Où $(x_0, y_0, z_0) = (x(0), y(0), z(0))$. Par conséquent. $\lim_{t\to+\infty} \Phi_t(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ *si et seulement si $x_0 + \frac{x_0^2}{3} = 0$*

D'ou : $W^s = \left\{(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 / z_0 = -\frac{x_0^2}{3}\right\}$.

De même, $\lim_{t\to-\infty} \Phi_t(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ *si et seulement si $x_0 = y_0 = 0$,*

D'où :$W^u = \{(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 / x_0 = y_0\}$,

W^s est tangente à E^s et $W^u = E^u =$ l'axe des z.

2.3.6 La stabilité des systèmes linéaires

On considère dans ce paragraphe un système différentiel linéaire $\dot{x} = Ax$,
x est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et A est une matrice carrée $n \times n$.
Soit $w_j = u_j + iv_j$ un vecteur propre correspondant à une valeur propre $\lambda_{j=a_{j+}ib_j}$ de $A, (j = 1, ..., n)$.on suppose que les K premières valeurs propres de A sont réelles et que $2(m - K)$ valeurs propres sont complexes conjuguées.
On suppose que de plus que les valeurs :
$u_1, ..., u_{k;}u_{k+1,}v_{k+1;}..., u_{m,}v_m$.forment une base de $\mathbb{R}^n, n = 2m - K$.
On désigne par E^s, E^i, E^n les sous espaces stables, instables et neutres définie respectivement par :
E^s espace engendré par les vecteurs u_j, v_j tels que : $a_j < 0$.
E^i espace engendré par les vecteurs u_j, v_j tels que : $a_j > 0$.
E^n espace engendré par les vecteurs u_j, v_j tels que : $a_j = 0$.
On a alors le théorème :

Théorème 2.17 *L'espace $\mathbb{R}^n$se décompose en somme directe. $\mathbb{R}^n = E^S \oplus E^i \oplus E^n$, de sous espaces invariants par le flot $t \to \exp(tA)$ du système linéaire.*
Ce théorème se complète avec le résultat suivant qui caractérise les espaces stables et instables.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :
(a) les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative;
(b) il existe des constantes M, C positives telles que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$et pour tout $t \in \mathbb{R}$: $|\exp(tA).x_0| \leq M\,|x_0| \exp(-ct)$;
(c) pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n, \lim_{t\to\infty} \exp tA.x_0 = 0$.

Preuve.

Le fait que (a) $\Longrightarrow$ (b) qui (c) évident. Pour voir que (c) $\Longrightarrow$ (a), il suffit de procéder par l'absurde et de montrer que si une des valeurs propres $\lambda = a + ib$ à une partie réelle $a \geq 0$,il existe un vecteur x_0 tel que $\lim_{t\to\infty} \exp(tA).x_0 \neq 0$.en effet tout vecteur réelle x_0 non nul appartenant au sous espace engendré par les parties réelle et imaginaire du vecteur propre associé à λ satisfait cette propriété. ■

2.3.7 La stabilité asymptotique d'une solution générale, la stabilité orbitale

On considère un système différentiel non autonome. On peut traduire la stabilité asymptotique de la solution $x(t)$ de la façon suivante :

Proposition 2.18 *La solution $x(t)$ est asymptotiquement stable du système :*

$$\dot{u} = D_x(f)(t, x(t))u + R(t, x(t), u). \tag{2.13}$$

Si on considère le cas particulier des systèmes autonomes (champ de vecteurs), la définition générale de la stabilité pour une solution s'applique à une solution périodique. En fait une solution périodique n'est

Proposition 2.19 *jamais stable au sens rappelé ci-dessus. En effet si $\overline{x}(t)$ est une solution périodique, $\frac{d\overline{x}}{dt}$ est solution de*

$$\dot{u} = Df_x(\overline{x}))u. \tag{2.14}$$

Et donc il existe une valeur propre de la linéarité du flot qui est égale à 1. C'est pourquoi la notion importante de stabilité qui est la notion de stabilité orbitale.

Définition 2.20 *Soit $x(t)$ une solution avec donnée initiale $x(0)$ (en particulier $x(t)$ peut être une solution périodique) et soit C l'orbite correspondante :*

$$C = (x(t), t \in \mathbb{R}). \tag{2.15}$$

On dit que $x(t)$ est orbitalement stable si pour tout ε, il existe δ tel que la solution $x'(t)$ avec donnée initiale $x'(0)$, telle que $|x(0) - x'(0)| < \varepsilon$, existe pour toute valeur de t satisfait :

$$d(x'(t), C) < \varepsilon. \tag{2.16}$$

On dit que la solution est asymptotiquement orbitalement stable si de plus :

$$\lim_{t \to +\infty} d(x'(t), C) = 0. \tag{2.17}$$

En particulier une orbite périodique asymptotiquement orbitalement stable est souvent appelée un cycle limite.

Chapitre 3

Les travaux de "Lyapunov" dans les théories de la stabilité

3.1 La fonction de Lyapunov (Fonction semi définie positive)

Définition 3.1 *Une fonction $v : u \to \mathbb{R}$ est dite semi définie positive (respectivement semi définie négative) s'il existe un voisinage V de 0 tel que :*
1. $v(0) = 0$.
2. pour tout $y \in V$,$v(y) = 0$ (respectivement $v(y) \leq 0$).
Elle est dite définie positive (respectivement définie négative) s'il existe un voisinage V de 0 tel que :
1. $v(0) = 0$.
2. pour tout $y \in V \setminus \{0\}$, $v(y) > 0$ (respectivement $v(y) < 0$).

3.1.1 Quelque remarque à la fonction de Lyapunov

- On note souvent $\dot{v}$ pour $\frac{d}{dt}v(y(t))$.
- On peut utiliser une fonction de Lyapunov sans résoudre le système.
- Il n'ya aucun méthode pour trouver une fonction de Lyapunov, mais en mécanique et pour les systèmes électriques, on peut souvent utiliser l'énergie totale comme fonction de Lyapunov.

3.1.2 Critère de Lyapunov

Soit $L : v \to R$ une fonction continue, définie sur un voisinage V de a et admettant a pour minimum local strict. on suppose que pour tout $x \neq a, t \mapsto L \circ \phi(x,t)$ est strictement décroissante (sur l'intervalle contenant 0 ou elle est définie). Alors a est un point d'équilibre **asymptotiquement stable**.

3.2 Méthode de Lyapunov

3.2.1 Méthode directe de Lyapunov

Pour s'affranchir de la connaissance des trajectoires, on utilise la méthode directe de Lyapunov. L'idée est d'étudier les variations d'une fonction scalaire pour conclure quand à la stabilité du système, cette méthode dit aussi **"Fonction de Lyapunov".**

3.2.2 Méthode indirecte de Lyapunov

-La méthode indirecte de Lyapunov utilise la **linéarisation** du système et peut dans certains cas, apporter une réponse au problème de **stabilité locale.**
-le système : $\dot{x} = f(x)$ est linéarité autour de x_e (en général $x_e = 0$) utilisant un développement en série.

$$\dot{x} = \tfrac{df}{dx}\,|_{x=0}\; x + R(x)$$

Où $R(x)$ contient les termes en x d'ordre supérieur à 2.
-Le système **linéarité** que l'on utilise est alors :

$$\dot{x} = \tfrac{df}{dx}\,|_{x=0}\; x = Ax.$$

Exemple 3.2 *Soit le système décrit par :*

$$\dot{x_1} = x_2^2 + x_1 \cos x_2$$
$$\dot{x_2} = x_2^2 + (x_1+1)x_1 + x_1 \sin x_2$$

En linéarisation autour de zéro, on obtient :

$$\dot{x_1} \simeq 0 + x_1 - 1$$
$$\dot{x_2} = x_2 + 0 + x_1 + x_1 x_2 \simeq x_1 + x_2$$

Et le système linéarité est donné par :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x.$$

3.3 Stabilité au sens de Lyapunov

3.3.1 Stabilité asymptotique

Définition 3.3 *On considère le système :*

$$\dot{x} = f(x,t). \tag{3.1}$$

Soit k un compact non vide de U, on dit que k est ***attractif*** *pour le système (3.1), si pour tout $t_0 \in I$, il existe $\delta(t_0) > 0$, tel que :*

$$(x_0 \in B_{\delta(t_0)}(k)) \implies \begin{cases} x(t,t_0,x_0) \text{ est définie pour tout } t \geq t_0 \\ \lim\limits_{t\to\infty} d(x(t,t_0,x_0),k) = 0 \end{cases}$$

Définition 3.4 *Soit k un compact non vide de U, on considère le système (3.1), on dit que k est* ***asymptotiquement stable*** *pour le système (3.1) si :*

1. *k est stable pour le système (3.1).*
2. *k est attractif pour le système (3.1).*

Définition 3.5 *Soit k un compact non vide de U, on considère le système (3.1).*

On dit que k est ***globalement asymptotiquement stable*** *pour le système (3.1) si :*
1. k est stable pour le système (3.1).
2. pour tout $t_0 \in I$,et $x_0 \in U, x(t,t_0,x_0)$ est définie pour tout $t \geq t_0$
et $\lim\limits_{t\to\infty} d(x(t,t_0,x_0),k) = 0$
On considère le système :
$\dot{x} = \frac{x}{1+t}, t \geq 0.$
Il admet des solutions de la forme :
$x(t,t_0,x_0) = x_0 \exp(\int_0^t \frac{-1}{1+s} ds) = x_0 \frac{1+t_0}{1+t}$
On voit ainsi que 0 est ***globalement asymptotiquement stable.***

3.3.2 Stabilité uniforme

Proposition 3.6 *Si 0 est un équilibre du système (3.1), alors 0 est* ***uniformément stable*** *si est seulement s'il existe une constante $C > 0$, et une fonction ρ de classe k telle que :*

$\forall t_0 \in I$, $\forall x_0 \in B(0,c)$, $\forall t \geq t_0, \|x(t,t_0,x_0)\| \leq \rho(\|x_0\|)$

Preuve. .
$(\Longleftarrow)$ Soit $t_0 \in I$, $\forall t \geq t_0$
$\|x(t,t_0,x_0)\| \leq \rho(\|x_0\|)$
Soit $\epsilon > 0$, et $\delta = \min\{c, \rho^{-1}(\epsilon)\}$, alors pour $x_0 \in B(0,\delta)$, on a :

$\|x\,(t,t_0,x_0)\| \le \rho\,(\|x_0\|) < \rho(\delta) \le \rho(\rho^{-1}(\epsilon)) = \epsilon,\ \forall t \ge t_0.$

Ce qui montre la stabilité uniforme.

$(\implies)$ Soit $t_0 \in I$, on suppose que pour tout $\epsilon > 0$, $\exists\delta(\epsilon) < 0$ tel que :

$(x_0 \in B(0,\delta(\epsilon))) \implies (x(t,t_0,x_0) \in B(0,\epsilon)), \forall t \ge t_0.$

On considère la borne supérieure $\widetilde{\delta}(\epsilon)$ de tous les $\delta(\epsilon)$ données ci-dessus,

alors pour tout $t \ge t_0$: $(x_0 \in B(0,\widetilde{\delta}(\epsilon))) \implies (x(t,t_0,x_0) \in B(0,\epsilon))$

Donc, si $\delta_1 > \widetilde{\delta}(\epsilon)$, il existe au moins un point initial $\widetilde{x_0}$ vérifiant $\widetilde{x_0} \in B(0,\delta_1)$,

$\sup\limits_{t \ge t_\circ} \|x(t,t_0,\widetilde{x_0})\| \ge \epsilon$

La fonction $\widetilde{\delta}(\epsilon)$ est définie positive. Elle n'est pas décroissante par définition, et elle tend ver 0 quand $\epsilon \to 0$,

mais $\widetilde{\delta}(\epsilon)$ n'est pas nécessairement continue.

On choisit alors une fonction $\zeta(r)$ de classe k telle que :

$\zeta(r) \le k\widetilde{\delta}(r).$

Avec $0 < k < 1$. Cette fonction admet un inverse ρ qui est de classe k.

posons : $c = \lim\limits_{r\to\infty} \zeta(r).$

Soit $x_0 \in B(0,c)$,posons : $\epsilon = \rho(\|x_0\|)$

Alors $x_0 \in B(0,\widetilde{\delta}(\epsilon))$ et :

$\|x(t,t_0,x_0)\| \le \epsilon = \rho(\|x_0\|),\ \forall t \ge t_0.$ ■

3.3.3 Stabilité asymptotique uniforme

Définition 3.7 *Soit k un compact non vide de U, on dit que k est* ***uniformément asymptotiquement stable*** *pour le système (3.1) si :*

1. k est uniformément stable pour le système (3.1).

2. $\exists\delta > 0; \forall\epsilon < 0, \exists T(\epsilon) < 0;$

$$(x_0 \in B_\delta(k)) \implies (x(t,t_0,x_0) \in B_\epsilon(k)) \quad , \quad \forall t \ge t_0 + T(\epsilon) \tag{3.2}$$

Théorème 3.8 *Si 0 est un équilibre de système (3.1) alors 0 est* ***uniformément asymptotiquement*** *stable si est seulement s'il existe une constante $c > 0$, est une fonction B :$[0,a] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ de classe kl telle que : $\forall x_0 \in B(0,c), \forall t_\circ \in I, \|x(t,t_0,x_0)\| \le B(\|x_0\|, t-t_0), \forall t \ge t_0.$*

Preuve. .$(\impliedby)$ Soit $t_0 \in I$, supposons qu'il existe une fonction B de classe kl telle que : $\forall x_0 \in B(0,c), \|x(t,t_0,x_0)\| \le \beta(\|x_0\|, t-t_0),\ \forall t \ge t_0.$

Alors, $\|x(t,t_0,x_0)\| \le B(\|x_0\|, 0)).$

Et ceci implique que 0 est uniformément stable. De plus, pour $x_0 \in B(0,c)$, on a :

$\|x(t,t_0,x_0)\| \le \beta(c, t-t_0), \forall t \ge t_0$

Ce qui montre que $x(t) \underset{t\to\infty}{\to} 0$ uniformément stable en t.
$\Longrightarrow$) Supposons que 0 soit uniformément asymptotiquement stable.
En raison de la stabilité uniforme : $\exists c > 0$, et une fonction ρ de classe k, telle que si $t_0 \in I$.

$$\forall v \in [0, c], \forall x_0 \in B(0, r), \|x(t, t_0, x_0)\| \leq \rho(\|x_0\|) < \rho(r), \forall t \geq t_0. \tag{3.3}$$

De plus, si $\eta > 0$,est donné, alors il existe $T = T(\eta, r)$tel que :
$\|x(t, t_0, x_0)\| < \eta, \forall t \geq t_0 + T(\eta, r)$
On considère la borne supérieure $\widetilde{T}(\eta, r)$ de tous les $T(\eta, r)$donné ci-dessus alors :
$\|x(t, t_0, x_0)\| < \eta, \forall t \geq t_0 + \widetilde{T}(\eta, r)$
Ainsi on a :
$\sup\limits_{t_0 \leq t \leq t_0 + \widetilde{T}(\eta, r)} \|x(t, t_0, x_0)\| \geq \eta$
La fonction $\widetilde{T}(\eta, r)$ et non négative, non croissante en η, non décroissante en r,
et : $\widetilde{T}(\eta, r) = 0, \forall \eta \geq \rho(r)$
Posons : $W(\eta) = \frac{2}{\eta} \int_{\frac{\eta}{2}}^{\eta} \widetilde{T}(s, r) ds + \frac{r}{\eta} \geq \widetilde{T}(\eta, r) + \frac{r}{\eta}$.
La fonction $W_r(\eta)$ est positive, et à les propriétés suivantes :
-Pour tout r fixé, $\eta \longmapsto W(\eta)$ est continue, strictement décroissante
et $\lim\limits_{t\to\infty} W_r(\eta) = 0$.
-Pour tout η fixé, $r \longmapsto W_r(\eta)$ est strictement croissante.
Notons $U_r = W_r^{-1}$. Alors U_r hérite des deux propriétés précédentes de W_r, et :
$\widetilde{T}(U_r(s), r) < W_r(U_r(s)) = s$.
Par conséquent,

$$\forall x_0 \in B(0, r), \|x(t, t_0, x_0)\| \leq U_r(t - t_0), \forall t \geq t_0. \tag{3.4}$$

En regroupant (3.3)et(3.4), on en déduit que :
$\forall x_\circ \in B(0, c), \|x(t, t_0, x_0)\| \leq \sqrt{\rho(\|x_0\|) U_c(t - t_0)}, \forall t \geq t_0$.
On pose : $B(r, s) = \sqrt{\rho(r) U_c(s)}$. ■

3.3.4 Stabilité en temps fini

Définition 3.9 *On s'intéresse ici, aux systèmes de la forme :*

$$\dot{x} = f(x). \tag{3.5}$$

Ou U est un ouvert de $\mathbb{R}$, $f : U \to \mathbb{R}$ et f continue sur U

.

Théorème 3.10 *On considère le système :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists T_\epsilon < +\infty . \forall t \geq T_\epsilon, |x(t, t_0, x_0)| \leq \epsilon. \tag{3.6}$$

0 est un équilibre stable en temps fini si est seulement s'il existe $v \subset U$ tel que :
(i) $f(0) = 0$
(ii) Pour tout $y \in v \setminus \{0\}, yf(y) < 0$.
(iii) Pour tout $\alpha \in v \setminus \{0\}; \int_0^\alpha \frac{dy}{f(y)} < +\infty$.
Preuve. ($\Longleftarrow$) *D'après (i), 0 est un point d'équilibre du système. Soit :*
$v(y) = \frac{y^2}{2}$.
Définie pour $y \in v$. D'après (ii), v est une fonction stricte de Lyapunov associée à 0.
On considère alors une solution : $x(t, t_0, x_0)$, du système qui converge vers 0.
On sait que : $\forall \epsilon > 0, \exists T_\epsilon < +\infty . \forall t \geq T_\epsilon, |x(t, t_0, x_0)| \leq \epsilon$.
On note :
$T_0(x_0) = \inf \{T(x_0) \in \mathbb{R}; x(t, t_0, x_0)\} = 0, \forall t \geq T$. *Et on a : $T_0 \leq +\infty$.*
De plus, on pose $t_\alpha < +\infty$, le temps vérifiant $x(t_\alpha, t_0, x_0) = \alpha$ qui existe pour $\alpha \in v \setminus \{0\}$ suffisamment petit d'après (3.6), on a :
$T_0(x_0) = \int_0^{T_0(x_0)} dt = \int_0^{t_\alpha} dt + \int_{t_\alpha}^{T_0(x_0)} dt = t_\alpha + \int_{t_\alpha}^{T_0(x_0)} dt.$
D'après (ii), $\frac{1}{f}$ est bien définie sur $v \setminus \{0\}$.
En effectuent le changement de variables :$t \rightarrow x(t, t_0, x_0)$ dans $\int_\alpha^0 \frac{dy}{f(y)}$, il vient :
$\int_\alpha^0 \frac{dy}{f(y)} = \int_{t_\alpha}^{T_0(x_0)} \frac{\dot{x}(t,t_0,x_0)}{f(x(t,t_0,x_0))} dt = \int_{t_\alpha}^{T_0(x_0)} dt < +\infty.$
Comme $t_\alpha < +\infty$, on en déduire que $T_0(x_0) < +\infty$.
$\Rightarrow$) *On suppose que 0 est un point d'équilibre stable en temps fini.*
On considère une solution $x(t, t_0, x_0)$ qui converge vers 0 en temps fini, et son $\delta > 0$ donnée par la stabilité en temps fini.
On a : $f(0) = 0$.
Supposons qu'il existe $y_0 \in]-\delta, \delta[/ \{0\}$ tel que $y_0 f(y_0) \geq 0$.
Soit $y_0 f(y_0) = 0$, alors $f(y_0) = 0$, et $x(t) = y_0$ est une solution du système (3.5) qui ne converge pas vers 0.
Soit $y_0 f(y_0) > 0$, alors, on peut supposer sans perte de généralité que $y_0 > 0$ et que $f(y_0) > 0$. On sait alors que $f(y) > 0$ pour y dans un voisinage de y_0.
Ainsi, si l'on considère la solution(t, t_0, y_0), elle est croissante dans un voisinage de t_0. Du fait de continuité, cette solution ne pourra j'aimais "redescendre" sons la droite $t = y_0$.
Donc en particulier, elle ne pourra pas tendre vers 0. Soit $\alpha \in]-\delta, \delta[/ \{0\}$, on considère la solution $x(t, t_0, \alpha)$. Par hypothèse, on sait que

$\exists T(\alpha) < +\infty$; $\forall t \geq T(\alpha)$, $x(t, t_0, y_0) = 0$.

D'après ce qui précède, $\frac{1}{f}$ *est définie sur* $]-\delta, \delta[\, / \,\{0\}$ *avec le changement de variables* $t \to x(t, t_0, \alpha)$ *il vient :*

$\int_\alpha^0 \frac{dy}{f(y)} = \int_{t_0}^{T(\alpha)} dt = T(\alpha) - t_0 < +\infty$. ■

Conclusion Générale

Nous rappelons que cette étude n'est pas suffisante par rapport à l'immensité de notre thème, la théorie de la stabilité et illustrer son application à diverses classes des systèmes dynamiques. Pour cela, nous essayons d'étudier certaines théories de la stabilité des systèmes des équations différentielles, et en particulière les travaux de **"Lyapunov"** introduite qui permet de déterminer les propriétés de stabilité d'un système.

Bibliographie

[1] Birufications et chaos- Une introduction à la Dynamique en Pascal,Fortran et Mathématica. Huyén DANG-VU(Université Paris-Sud XI -Claudine DELCARTE (Université Pierre et Marie Curie -2000).

[2] Mathématiques & Applacations 46 Jeau-Pierre Froncoise Oscillations en Biologie "Analyse Qualitative et modèles" Mathématics Subject Classification (2000) :Direction de la Colléction G.Allaine et M.Benaim,Pris,Octobre 2004.

[3] A-Eljai,E.Zerrik et K.Ztot, Système dynamique "Analyse et Controle des systèmes localisés" (Colléction Etudes),Presses Universitaires de Perpignan 2008.

[4] Dauce Emmanuel Molay"Stabilité des equations differentielles ordinaires" : Cours de Master (2003).

[5] "Applied Non Linear Control".J.J. Stotine,W.LI.Prentice Hall. 1991.

[6] "Theory and Application of Lyapunov's Direct Method" . Prentice Hall. 1963.