



Cours d'analyse fonctionnelle et complexe : pour les étudiants des filières mathématiques de l'université et les élèves d'écoles d'ingénieurs

Yves Caumel

Caumel, Yves

Cépaduès, Toulouse

ISBN: 978-2-85428-914-5

Table des Matières

Cours d'analyse fonctionnelle et complexe

Yves Caumel

Cépaduès

Introduction	7
1 Théorie de la mesure et de l'intégration	9
1.1 Mesures et tribus	9
1.1.1 Les tribus	9
1.1.2 Mesure des ensembles	10
1.1.3 Fonctions mesurables	13
1.2 L'intégrale de Lebesgue et ses propriétés	16
1.2.1 Intégrale de Lebesgue des fonctions positives	16
1.2.2 Intégrale de Lebesgue des fonctions quelconques et ses propriétés	18
1.2.3 Propriétés de continuité et de dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre	25
1.2.4 Espaces L^p	29
1.3 La convolution des fonctions	32
1.4 La transformation de Laplace des fonctions	38
1.5 Thème d'étude: applications de la transformation de Laplace	41
1.6 Corrigés des exercices	44
2 Espaces vectoriels normés	51
2.1 Espaces métriques	51
2.1.1 Notions basiques	52
2.1.2 Espaces complets	56
2.1.3 Espaces compacts	57
2.1.4 Espaces connexes	58
2.2 Espaces vectoriels normés	60
2.3 Espaces de Hilbert	64
2.3.1 Propriétés d'orthogonalité	65
2.3.2 Familles et bases orthonormales	72
2.4 Approximation des fonctions	75
2.4.1 Approximation dans les espaces préhilbertiens et hilbertiens	75
2.4.2 Méthode des moindres carrés	76
2.4.3 Méthode d'approximation uniforme	78
2.5 Thème d'étude: les polynômes de Legendre	80
2.6 Corrigés des exercices	82

3Séries et transformation de Fourier des fonctions	89
3.1Séries trigonométriques	89
3.2Séries de Fourier des fonctions périodiques localement intégrables	92
3.3Séries de Fourier des fonctions périodiques de classe (...) (0, T)	98
3.4Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$	100
3.5Transformation de Fourier dans $S(\mathbb{R})$	107
3.6Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$	107
3.7Introduction à la transformée de Fourier discrète	112
3.8Un mot sur les ondelettes	113
3.8.1Limitations de l'analyse de Fourier	113
3.8.2La transformation de Gabor	114
3.8.3Transformation en ondelettes	114
3.9Thème d'étude: résolution de l'équation de la chaleur	116
3.10Corrigés des exercices	118
4Distributions	127
4.1Une approche physicienne	127
4.2L'espace des distributions (...)	128
4.3Dérivation des distributions	131
4.4Produit d'une distribution par une fonction C^∞	136
4.5Convolution des distributions	137
4.6Transformation de Fourier des distributions tempérées	141
4.7Séries de Fourier des distributions périodiques	145
4.8Transformation de Laplace des distributions	149
4.9Les filtres	150
4.10Corrigés des exercices	153
5Fonctions holomorphes, transformations conformes	159
5.1Fonctions d'une variable complexe	159
5.2Fonctions holomorphes	162
5.3Transformations conformes	167
5.4Intégrale d'une fonction complexe	173
5.5Le théorème de Cauchy et ses corollaires	176
5.6Résolution du problème de Dirichlet	182
5.7Thème d'étude: application à la mécanique des fluides	185
5.8Corrigés des exercices	188
6Séries entières et de Laurent; calcul des résidus	197
6.1Rappels sur les séries de fonctions d'une variable complexe	197
6.2Séries entières et fonctions analytiques	200
6.3Les séries de Laurent	205
6.4Applications des séries de Laurent	208
6.4.1Calcul des séries de Fourier	208
6.4.2La transformation en \mathbb{Z}	208
6.5Classification des singularités	210

6.6Théorème des résidus: applications au calcul d'intégrales	211
6.7Corrigés des exercices	217
ALe corps des complexes	221
BRappels divers	223
CTransformées de Fourier et de Laplace	225
DReprésentation des signaux et leurs propriétés	231
Bibliographie commentée	233