



Cours de **mathématiques pures et appliquées**

Volume 1, Algèbre et géométrie

sous la direction de Jean-Pierre Ramis, André Warusfel, François Moulin

De Boeck, Bruxelles

Cours de **mathématiques pures et appliquées, n° 1**

ISBN: 978-2-8041-1642-2

Table des Matières

Cours de **mathématiques pures et appliquées**

Algèbre et géométrie

J.-P.Ramis, A.Warusfel et F.Moulin

De boeck

Préface du premier volume	XV
Première partie Algèbre	1
Chapitre 1 Groupes	3
1 Exemples de groupes	3
1.1 Quelques rappels	3
1.2 Produits directs, produits semi-directs	5
1.3 Groupes diédraux	9
1.4 Groupes abéliens finis	12
1.5 Le groupe (...)	14
1.6 Exemples de groupes simples	17
2 Théorèmes de Sylow et applications	21
2.1 Théorèmes de Sylow	21
2.2 Quelques applications	24
2.3 Groupes d'ordre au plus égal à 15	26
3 Groupes résolubles	28
3.1 Définition et premières propriétés	28
3.2 Théorème de Jordan-Hölder	31
4 Groupes libres. Générateurs et relations	33
4.1 Introduction	33
4.2 Groupes libres	34
4.3 Groupes définis par générateurs et relations	38
4.4 Algorithme de Todd-Coxeter	42
5 Représentations linéaires, caractères	45
5.1 Représentations linéaires	45
5.2 Caractères	48
5.3 Relations d'orthogonalité	49
5.4 Tables de caractères	53
5.5 Cas des groupes compacts	57
6 Sous-groupes finis de $O(\mathbb{R}^2)$ et $SO(\mathbb{R}^3)$	61
Chapitre 2 Corps	73

1Extensions de corps	73
1.1Notion d'extension. Degré	73
1.2Éléments et extensions algébriques	76
2Corps de décomposition. Clôture algébrique	81
2.1Corps de rupture, corps de décomposition	82
2.2Clôture algébrique	86
2.3Corps parfaits, théorème de l'élément primitif	88
2.4Normes et traces	92
3Quelques exemples	94
3.1Extensions quadratiques	95
3.2Corps cyclotomiques	97
4Corps finis	101
4.1Existence et unicité	101
4.2Compléments	104
4.3Codes linéaires	108
5Quelques problèmes classiques	112
5.1Exemples de groupes de Galois	112
5.2Constructibilité à la règle et au compas	116
5.3Résolubilité par radicaux	120
Chapitre3Algèbre multilinéaire	135
1Produit tensoriel. Algèbre tensorielle	136
1.1Définition et propriétés du produit tensoriel	136
1.2Algèbre tensorielle. Tenseurs mixtes	147
2Algèbre symétrique	152
2.1Définition et propriétés	152
2.2Tenseurs symétriques ou antisymétriques	155
3Algèbre extérieure	157
3.1Définition et propriétés	157
3.2Dualité dans l'algèbre extérieure	163
3.3Interprétation géométrique	166
4Formes bilinéaires alternées. Groupe symplectique	168
4.1Classification des formes bilinéaires alternées	168
4.2Groupe symplectique	173
Chapitre4Algèbre commutative	187
1Modules sur un anneau commutatif	188
1.1Le langage des modules	188
1.2Applications linéaires	193
1.3Rudiments de fonctorialité	200
2Conditions de finitude	205
2.1Modules de présentation finie	205
2.2Modules sur les anneaux noetheriens	210
2.3Bases de Gröbner	213

3Modules sur les anneaux principaux	221
3.1Modules libres de rang fini sur un anneau principal	221
3.2Modules de type fini sur un anneau principal	227
3.3Applications à la réduction des endomorphismes	233
Chapitre5Théorie des nombres	251
1Approximation diophantienne	251
1.1Principes généraux	252
1.2Approximation à l'aide des fractions continues	265
2Théorie analytique des nombres	274
2.1La distribution des nombres premiers	274
2.2Fonctions arithmétiques	281
2.3Séries de Dirichlet	292
Chapitre6Combinatoire avancée	303
1Séries génératrices et asymptotique des coefficients	304
1.1Exemples divers	304
1.2Séries génératrices rationnelles	314
1.3Permutations	323
1.4Objets composés	328
2Partitio numerorum	334
2.1La série génératrice du nombre de partitions	335
2.2Calcul quantique élémentaire	342
2.3La formule du triple produit de Jacobi	346
3Arbres	348
3.1Arbres binaires	348
3.2Arbres binaires de recherche	354
3.3Termes et expressions	360
3.4Algorithmes d'évaluation	365
4Calcul booléen et circuits logiques	367
4.1Fonctions booléennes et formules logiques	367
4.2Formes normales	372
5Raisonnements combinatoires en mathématiques	377
5.1Graphes, polyèdres, triangulations	378
5.2Arbres et $SL_2(\mathbb{Z})$	379
Chapitre7Analyse numérique matricielle	395
1Méthode de Newton pour les systèmes non linéaires	396
1.1Rappels	396
1.2Méthode de Newton	396
1.3Analyse d'erreur et de convergence	398
1.4Mise en oeuvre de la méthode de Newton	400
1.5Méthode de point fixe	402
2Méthodes d'optimisation sans contrainte	403
2.1Problème étudié - rappels	403

2.2	Méthode de Newton	404
2.3	Méthodes de descente	406
2.4	Retour sur la résolution de $F(x) = 0$	410
3	Méthodes de gradient pour la résolution itérative des systèmes linéaires	411
3.1	Introduction	411
3.2	Méthode du gradient	412
3.3	Méthode du gradient conjugué	416
3.4	Premières propriétés de l'algorithme du gradient conjugué	418
3.5	Analyse de convergence de l'algorithme du gradient conjugué	420
4	Problèmes de moindres carrés	425
4.1	Introduction	425
4.2	Étude mathématique	428
4.3	Calcul numérique	429
4.4	Décomposition en valeurs singulières	436
5	Approximations de valeurs propres	441
5.1	Rappels et compléments	441
5.2	Méthode de la puissance itérée	443
5.3	Méthode de la puissance inverse	445
5.4	Calcul simultané de toutes les valeurs propres: la méthode QR	447
5.5	Détails pratiques sur la méthode QR	451
	Deuxième partie Géométrie	467
	Chapitre 1 Géométrie affine et euclidienne	469
1	Compléments de géométrie affine	469
1.1	Quelques rappels	470
1.2	Coordonnées barycentriques	475
1.3	Quelques théorèmes classiques	477
2	Espace affines euclidiens. Isométries. Similitudes	481
2.1	Généralités	481
2.2	Isométries: définition et premières propriétés	485
2.3	Angles	489
2.4	Classification des isométries en dimension 2 et 3	501
2.5	Similitudes	509
2.6	Utilisation des nombres complexes dans le plan	512
2.7	Exemples de pavages du plan	515
	Chapitre 2 Polyèdres réguliers, cercles et sphères	527
1	Polyèdres réguliers	527
1.1	Définition générale. Polygones réguliers	527
1.2	Polyèdres réguliers de l'espace: construction	531
1.3	Polyèdres réguliers de l'espace: classification	538
1.4	Un exemple de polyèdre semi-régulier	542
2	Cercles et sphères	544
2.1	Généralités	544

2.2	Inversion	548
2.3	Groupe circulaire	555
2.4	Pôles et polaires	557
2.5	Rudiments de trigonométrie sphérique	559
Chapitre3	Introduction à la géométrie projective	569
1	Droites projectives, homographies	569
1.1	Rappels sur les homographies	569
1.2	Droite projective complexe	572
1.3	Compléments sur le demi-plan de Poincaré	577
2	Introduction à la géométrie projective	581
2.1	Généralités	581
2.2	Liaison affine-projectif	586
2.3	Dualité dans les espaces projectifs	591
2.4	Coniques et quadriques projectives	595
2.5	Faisceaux de cercles	610
Chapitre4	Initiation à la géométrie algébrique	623
1	Courbes algébriques planes	627
1.1	Géométrie affine	627
1.2	Étude locale des courbes planes	642
1.3	Géométrie projective	653
2	Un peu de classification des courbes planes	661
2.1	Fonctions, morphismes, paramétrisations	661
2.2	Cubiques non singulières	670
3	Rudiments de géométrie algébrique affine	681
3.1	Ensembles algébriques affines	681
3.2	Le Nullstellensatz	684
3.3	Élimination	686
Chapitre5	Convexes et polyèdres	699
1	Ensembles convexes	700
1.1	Rappels et compléments	700
1.2	Théorèmes de Carathéodory et de Helly	712
1.3	Ensembles convexes et hyperplans	718
1.4	Cônes convexes	736
2	Polyèdres convexes	758
2.1	Généralités et théorème de structure	758
2.2	Le théorème fondamental	765
2.3	Une autre preuve du théorème de Helly	774
Chapitre6	Fonctions convexes et applications	785
1	Fonctions convexes	785
1.1	Propriétés des fonctions convexes	785
1.2	Fonctions duales. Transformation de Legendre-Fenchel	812
2	Introduction à la programmation convexe	834

2.1Généralités	834
2.2Recherche des points extrémaux pour un problème sous forme canonique	838
2.3Problèmes duaux	840
Troisième partie Introduction à la géométrie différentielle	853
Chapitre1 Calcul différentiel	855
1 Calcul différentiel dans les espaces de Banach	856
1.1 Applications différentiables	856
1.2 Théorème d'inversion locale - Théorème des fonctions implicites	866
1.3 Dérivées d'ordre supérieur	873
1.4 Problèmes d'extrema	886
2 Formes différentielles	892
2.1 Champs de vecteurs	892
2.2 Champs de formes	897
2.3 Intégration d'une forme différentielle	903
2.4 La dérivée extérieure	920
2.5 Théorème de Stokes	930
Chapitre2 Courbes et surfaces	943
1 Enveloppes de droites	944
1.1 Enveloppe d'une famille de droites du plan	945
1.2 Enveloppe d'une famille de droites définies paramétriquement	949
1.3 Développées, développantes d'un arc plan	950
2 Le repère mobile	952
2.1 Repères	953
2.2 Le cas euclidien	958
3 Propriétés métriques locales des surfaces	968
3.1 Surfaces: rappels et notations	968
3.2 Première forme fondamentale	991
3.3 Deuxième forme fondamentale d'une surface	1010
3.4 Courbes tracées sur une surface	1034
3.5 Surfaces à courbure constante	1052
4 Repère mobile et formes différentielles	1054
4.1 Les formes différentielles (...) et (...)	1054
4.2 Application à l'étude des courbes et des surfaces	1056
5 Le point de vue des variétés différentiables	1076
5.1 Métrique Riemannienne sur un ouvert, isométries et applications conformes	1077
5.2 Surfaces abstraites	1080
Indications	1097
Index	1109