الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Minstère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

---

CENTRE UNIVERSITAIRE DE MILA

INSTITUT DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

Réf. /12

Mémoire de fin d'étude

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Licence Académique

Domaine : **Mathématiques et Informatique**

Filière : **Mathématiques**

Spécialité : **Mathématiques Fondamentales**

<u>Thème</u>

Quelques propriétés des fonctions Gamma et Bêta

Présenté par :

1- Benaoussa soumia

2- dib massika

Dirigé par :

- kaouache smail

Année universitaire 2011-2012

Remerciements

Avant et après tout nous remercions le bon dieu tout puissant, de nous avoir donné le courage et la volonté pour pouvoir terminer notre formation.

Nous tenons à remercier énormément notre encadreur Mr : KAOUACHE- SMAIL Pour son aide continue, sa disponibilité et ses conseils qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire.

Nos remerciements vont également à tous nos enseignants, durant ces trois années d'étude.

En fin, merci à tous ceux qui nous ont encouragé et aider de prés ou de loin pour terminer ce travail.

Soumia * massika

Table des matières

Introduction Générale

Deux fonctions importantes, la fonction gamma et la fonction bêta, seront définies au moyen d'intégrales impropres. Par exemple la fonction gamma apparait dans différents contextes en mathématiques, par exemple en théorie des nombres, en probabilité, etc.

Dans ce mémoire, nous revenons aux intégrales simples, mais cette fois soit l'intervalle d'intégration, soit la fonction à intégrer, soit les deux ne sont pas bornés. Toutes ces situations seront illustrées.

Ce mémoire est composé de deux chapitres. Il est structuré de la manière suivante :
Dans le premier chapitre, nous rappelons deux types d'intégrales impropres dépendant d'un paramètre.
Le deuxième chapitre vise à étudier les fonctions spéciales et quelques-unes de leurs propriétés.

Chapitre 1

Intégrales dépendant d'un paramètre

1.1 Théorème de convergence bornée

Dans cette partie, nous allons utiliser le théorème de convergence bornée, dont nous admettrons la démonstration :

Théorème 1.1.1 *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions intégrables sur un intervalle $[a, b]$, telle que :*
1) La suite $(f_n)_n$converge simplement sur $[a, b]$ vers une fonction intégrable f.
2) Il existe $M \in \mathbb{R}$tel que :$\forall n \in N, \forall t \in [a, b], |f_n(t)| \leq M$.
Alors :

$$\int\limits_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt$$

Définition 1.1.2 *Lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que la suite de fonctions $(f_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$, définies sur $[a, b]$, vérifie :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a, b], |f_n(t)| \leq M$$

on dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée.

Théorème 1.1.3 *(Théorème de convergence dominée) Soit $(f_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrable sur un intervalle semi auvert $[a, b[$ telle que :*
1) La suite $(f_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[a, b[$ vers une fonction localement intégrable f.
2) Il existe une fonction ψ, intégrable sur l'intervalle semi auvert $[a, b[$ telle que

$$\forall n\epsilon\mathbb{N}, \forall t\epsilon\, [a, b[\, , \mid f_n(t) \mid\leq \psi(t).$$

Alors f est intégrable sur l'intervalle semi auvert $[a,b[$, de plus

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt.$$

Preuve. Remarque d'abord que l'hypothèse 2) implique en particulier que :

$$\forall t \in [a,b], |f(t)| \leq y(t).$$

Pour montrer l'intégrabilité de la fonction f sur l'intervalle semi ouvert $[a,b[$, on écrit,pour tout $A \in [a,b[$, :

$$\int_a^A f(t)dt \leq \int_a^A \psi(t)(t)dt.$$

Puisque par hypothèse, la fonction$y$ est intégrable sur l'intervalle semi ouvert $[a,b[$.
Cette dernière inégalité implique que la fonction $f$est absolument intégrable, donc intégrable sur$[a,b[$.
Pour calculer l'intégrale de f sur $[a,b[$, on se donne $A \in [a,b[$ et on utilise le théorème de convergence bornée (1.1.1) sur$[a,A]$.
Donc, on a bien, pour tout $A \in [a,b[$:

$$\int_a^A f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^A f_n(t)dt.$$

De plus, Si $\varepsilon > 0$ etant fixé,on peut choisir $A \in [a,b[$ tel que

$$\int_a^A \psi(t)(t)dt \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

On en déduit :

$$\forall n \epsilon \mathbb{N}, \int_A^b \mid f_n(t) \mid dt \leq \frac{\varepsilon}{4} \text{ et } \int_A^b \mid f(t) \mid dt \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Alors, il existe $N \epsilon \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$:

$$\mid \int_a^A f(t)dt - \int_a^A f_n(t)dt \mid \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc, pour $n \leq N$, on a :

$$\begin{aligned}
& \mid \int_a^b f(t)dt - \int_a^b f_n(t)dt \mid \\
\leq & \mid \int_a^A f(t)dt - \int_a^A f_n(t)dt \mid + \int_A^b \mid f(t) \mid dt + \int_A^b \mid f_n(t) \mid dt \\
\leq & \mid \int_a^A f(t)dt - \int_a^A f_n(t)dt \mid + \frac{2\varepsilon}{4} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Ceci prouve bien que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est égale à la limite des intégrales des f_n sur cet intervalle. ■

1.2 Intégrales propres dépendant d'un paramètre

Soit maintenant a, b deux réels quelconques. On considère une fonction de deux variables $f(x, y)$ où $x \in [a, b]$ et $y \in [c, d]$, à valeurs dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que pour tout $y \in [a, b]$, la fonction $x \longmapsto f(x, y)$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et on s'intéresse à la continuité, la dérivabilité et l'intégration de la fonction définie pour $y \in [c, d]$ par

$$J(y) = \int_a^b f(x, y)dx \tag{1.1}$$

Théorème 1.2.1 *(Contnuité) Soit* $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow K$*, une fonction continue par rapport à chacune des deux variables et bornée sur* $[a, b] \times [c, d]$*. Alors la fonction* J*, définie pour* $y \in [c, d]$ *par la relation (1.1) est continue sur* $[c, d]$

Preuve. De la contnuité de la fonction f sur un compact, on déduit la continuité uniforme. C'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) = \delta$, indépendant des points (x', y') et$(x", y")$ dans P, tel que des intégralités $\mid x' - x" \mid < \delta(\varepsilon)$ et$\mid y' - y" \mid < \delta(\varepsilon)$, on déduit l'intégralité

$$\mid f(x', y') - f(x", y") \mid < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

En particulier, $\forall x \epsilon \, [a, b]$,$\forall \ y',\ y"\ [c, d]$, $\mid y' - y" \mid < \delta(\varepsilon)$, on a

$$\mid f(x, y') - f(x, y") \mid < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Ainsi on obtient pour tout $y"$, y' dans $[c,d]$,$\mid y'-y" \mid < \delta(\varepsilon)$, on a

$$\begin{aligned}
\mid \quad J(y') - J(y") \mid &= \mid \int_a^b f(x,y')dx - \int_a^b f(x,y")dx \mid \\
\leq \quad & \int_a^b \mid f(x,y')dx - f(x,y") \mid dx \\
\leq \quad & \varepsilon \frac{b-a}{b-a} = \varepsilon
\end{aligned}$$

D'où J est uniformément continue sur $[c,d]$, donc elle est continue sur $[c,d]$.

Corollaire 1.2.2 *Sous les conditions du théorème(1.2.1) la fonction F définie par*

$$F(u,v,y) = \int_u^v f(x,y)dx$$

est continue sur $P = [a,b] \times [c,d]$.

■

Preuve. En vertu de la continuité de f sur P, il éxiste une constante $0 < c < +\infty$, telle que $f(x,y) < c$ sur P.
Donc, pour tous points (u',v',y') et $(u",v",y")$ dans P, l'inégalité suivante

$$\mid F(u',v',y') - F(u",v",y") \mid = \mid \int_{u'}^{v'} f(x,y')dx - \int_{u"}^{v"} f(x,y")dx \mid$$

$$\begin{aligned}
= \quad & \mid \int_{u'}^{v'} f(x,y')dx - \int_{u"}^{v'} f(x,y")dx - \int_{u'}^{v'} f(x,y")dx - \int_{v'}^{v"} f(x,y")dx \mid \\
\leq \quad & \mid \int_{u'}^{v'} f(x,y')dx - f(x,y")dx \mid + \mid \int_{u'}^{u"} f(x,y")dx \mid + \int_{v''}^{v"} f(x,y")dx \mid \\
\leq \quad & \mid \int_{u'}^{v'} f(x,y')dx - f(x,y")dx \mid + c \mid u" - u' \mid + c \mid v" - v' \mid
\end{aligned}$$

est vérifie.
Soit le point (u',v',y') , fixe et le point $(u",v",y")$, tendant vers (u',v',y').
D'après le théorème (1.2.1), le premier terme de la partie droite de l'inégalité précédente, tent vers 0, , et les deux derniers termes tendent vers 0 . ■

Théorème 1.2.3 *(Dérivabilité) Soit f, et f'_y deux fonctions continues sur $[a,b] \times [c,d]$. Alors l'intégrale (1.1) est une fonction dérivable par rapport au paramètre y sur le segment$[c,d]$.*

De plus, sur ce segment, on a

$$\begin{aligned}\frac{dJ}{dy} &= \frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx \\ &= \int_a^b f'_y(x,y)dx\end{aligned}$$

Preuve. Il suffit de montrer que

$$\lim_{\triangle y\to 0}\frac{J(y+\triangle y)-J(y)}{\triangle y}=\int_a^b f'_y(x,y)dx$$

En vertu du théorème des accroissement finis, on a

$$\begin{aligned}\frac{J(y+\triangle y)-J(y)}{\triangle y} &= \int_a^b \frac{f(x,y+\triangle y)-f(x,y)}{\triangle y}dx \\ &= \int_a^b f'_y(x,y+\theta\triangle y)dx,\end{aligned}$$

où $0<\theta<1$.
Donc

$$\frac{J(y+\triangle y)-J(y)}{\triangle y}-\int_a^b f'_y(x,y)dx=\int_a^b\left[f'_y(x,y+\theta\triangle y)-f'_y(x,y)\right]dx$$

Puisque f'_y est uniformément continue sur$[a,b]\times[c,d]$, on peut écrire
$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta\left(\varepsilon\right)$ tel que si$\mid\triangle y\mid<\delta\left(\varepsilon\right)$, on a

$$\mid f'_y(x,y+\triangle y)-f'_y(x,y)\mid<\frac{\varepsilon}{b-a},\ \forall x\in\left[a,b\right],\text{ et }\forall y,\ y+\triangle y\in\left[a,b\right]$$

Et comme $0<\theta<1$, alors à fortiori on a

$$\mid f'_y(x,y+\theta\triangle y)-f'_y(x,y)\mid<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\mid & \frac{J(y+\triangle y)-J(y)}{\triangle y}-\int_a^b f'_y(x,y)dx\mid=\mid\int_a^b\left[f'_y(x,y+\theta\triangle y)-f'_y(x,y\right])dx\mid \\ \leq & \int_a^b\mid f'_y(x,y+\theta\triangle y)-f'_y(x,y)\mid dx \\ \leq & \frac{\varepsilon}{b-a}\left(b-a\right) \\ = & \ \varepsilon\end{aligned}$$

■

Le théorème(1.2.3) peut se généraliser si on suppose, que les bornes d'intégration varient en fonction du paramètre y. Dans ce cas on peut montrer le résultat suivant

Théorème 1.2.4 *Soient f et $f\prime$ deux fonctions continues sur $[a, b] \times [c, d]$, et $x = x_1(y)$ et $x_2(y)$ deux fonction dérivables, vérifiant $a < x_i(y) < b(i = 1,\ 2)$, $\forall y \epsilon\, [c, d]$. Alors la dérivée de l'intigrale $J(y) = \int_{x_{1(y)}}^{x_{2(y)}} f(x, y)dx$ par rapport au paramètre y existe et est égale à*

$$J'(y) = \int_{x_{1(y)}}^{x_{2(y)}} f'_y(x, y)dx + f(x_2(y), y)\frac{dx_2}{dy} - f(x_1(y), y)\frac{dx_1}{dy}$$

Preuve. On pose

$$F(u, v, y) = \int_u^v f(x, y)dx,\ \ a \le u \le b; a \le v \le b; c \le y \le d$$

Alors

$$J(y) = F\text{"}(x_1(y), x_2(y), y)$$

la fonction F admet des dérivées partielles continues :

$F'_u = -f(u, y)$
$F'_v = f(v, y)$
$F'_y = \int_u^v f'_y(x, y)dx$

La contnuité de la fonction f'_y déroule de la conséquence du théorème (1.2.1).
Comme $x_1(y)$ et $x_2(y)$ sont des fonctions dérivables, donc on peut utiliser la règle de dérivation des fonctions composées qui donne la formule énoncée. ■

Théorème 1.2.5 *(L'intégration) Soit f une fonction continue sur $[a, b] \times [c, d]$, alors on a*

$$\begin{aligned} \int_c^d J(y)dy &= \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx \\ &= \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy \end{aligned} \tag{1.2}$$

Preuve. A la place de la formule(1.2), on va montrer une formule plus générale.

$$\begin{aligned} \int_c^d J(y)dy &= \int_c^d dy \int_a^t f(x, y)dx \\ &= \int_a^t dx \int_c^d f(x, y)dy \end{aligned}$$

Posons

$$\varphi(t)=\int_c^d dy\int_a^t f(x,y)dx \text{ et } \psi(t)=\int_a^t dx\int_c^d f(x,y)dy$$

Il suffit de montrer que

$$\varphi'(t)=\psi'(t)\forall t\in[a,b].$$

Posons

$$F(t,y)=\int_a^t f(x,y)dx.$$

En vertu de la conéquence du théorème (1.2.1), la fonction F est continu sur $[a,b]\times[c,d]$.
De plus $F_t'(t,y)=f(t,y)$ est continue sur $[a,b]\times[c,d]$.
D'aprés le théorème (1.2.3),

$$\varphi'(t)=\int_c^d F_t'(t,y)dy=\int_c^d f(t,y)dy$$

Si on pose

$$\varepsilon(x)=\int_c^d f(x,y)dy,$$

alors

$$\psi(t)=\int_a^t \varepsilon(x)dx$$

D'aprés le théorème (1.2.1), $\varepsilon(x)$ est une fonction continue.
En utilisant le théorème sur la dérivabilité des intégrales définies, on peut écrire

$$\begin{aligned}\psi'(t) &= \frac{d}{dt}\int_a^t \varepsilon(x)dx\\ &= \varepsilon(x)\\ &= \int_c^d f(t,y)dy\end{aligned}$$

Donc

$$\psi'(t)=\varphi'(t),\forall t\epsilon\,[a,b]$$

D'où

$$\varphi(t)=\psi'(t),a\leq t\leq b$$

■

1.3 Intégrales impropres dépendant d'un paramètre

On considère un intervalle semi-ouvert $[a, b[$ et une fonction de deux variables $f(x, y)$ où $x \in [a, b[$ et $y \in [c, d]$, à valeurs dans $\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose ou bien que $b = +\infty$ ou bien que $b < +\infty$ et que pour certains $y \in [c, d]$, la fonction $x \longmapsto f(x, y)$ n'est pas définie en b. On suppose aussi que la fonction $x \longmapsto f(x, y)$ est intégrable sur l'intervalle semi-ouvert $[a, b[$ au sens des intégrales généralisées et on s'intéresse aux propriétés de la fonction définie sur $[c, d]$ par l'intégrale généralisée

$$J(y) = \int_a^b f(x, y)dx \lim_{l \to +\infty} \int_a^l f(x, y)dx \tag{1.3}$$

1.3.1 Notion de convergence uniforme

Définition 1.3.1 *L'intégrale (1.3) est dite uniformément convergente par rapport au paramètre y sur l'intervalle $[c, d]$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $L = L(\varepsilon)$, tel que l'inégalité*

$$\mid J(y) - \int_a^l f(x, y)dx \mid = \mid \int_a^b f(x, y)dx \mid < \varepsilon$$

Soit vérifier pour tout $l > l(\varepsilon)$ et pour tout $y \epsilon [c, d]$

L'étude d'une intégrale impropre dépendant d'un paramètre peut se transformer en étude d'une suite de fonction.Cette transformation est formulée par le théorème suivant

Théorème 1.3.2 *Pour que l'intégrale (1.3) soit uniformément convergente sur $[c, d]$, il faut et il suffit que pour toute suite(l_k) qui converge vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$ la suite de la fonction définie par*

$$F_k(x) = \int_a^{l_k} f(x, y)dx, (k \epsilon \mathbb{N})$$

converge uniformément sur $[c, d]$.

Preuve. Supposons que

$$J(y) = \int_\alpha^{+\infty} f(x, y)dx$$

converge uniformément sur $[c, d]$ et soit $\varepsilon > 0$, alors
$\exists\ L(\varepsilon)$ tel que $\forall l > L(\varepsilon)$ et $\forall y \epsilon [c, d]$, on a

$$\mid J(y) - \int_a^l f(x, y)dx \mid < \varepsilon$$

Si la suite(l_k) tend vers $+\infty$, alors $\forall l_k > L(\varepsilon)$, on a

$$| J(y) - F_k(y) |=| J(y) - \int_a^{l_k} f(x,y)dx |< \varepsilon, \forall y \epsilon [c,d]$$

D'où la suite($F_k(y)$) converge uniformément sur $[c,d]$.
Soit maintenant la suite $(F_k(y))$ converge uniformément sur $[c,d]$ vers $J(y)$, pour toute suite (l_k)((l_k) tend vers $+\infty$).
Supsons que l'intégrale $\int_\alpha^{+\infty} f(x,y)dx$ ne converge pas uniformément vers $J(y)$ sur $[c,d]$.
Alors $\exists \varepsilon_0$ tel que $\forall$ L, on peut trouver $l > L$:

$$| J(y) - \int_a^{l} f(x,y)dx |\geqslant \varepsilon_0, y \epsilon [c,d]$$

Par suite, peut trouver deux suites (l_k)((l_k) tend vers $+\infty$) et (y_k) $\subset [c,d]$ pour lesquels on a

$$| J(y_k) - \int_a^{l_k} f(x,y_k)dx |=| J(y_k) - F_k(y_k) |\geqslant \varepsilon_0$$

Donc, la suite($F_k(y)$) ainsi construite ne converge pas uniformément vers $J(y)$ sur $[c,d]$; ce qui contredit l'hypothèse.
D'où l'intégrale $\int_\alpha^{+\infty} f(x,,y)dx$ converge uniformément vers $J(y)$ sur $[c,d]$. ■

1.3.2 Critère de convergence

Théorème 1.3.3 *(Critère de Cauchy) Pour que l'intégrale* $\int_\alpha^{+\infty} f(x,y)dx$ *soit uniformément convergente sur* $[c,d]$, *il faut et il suffit, que pour tout* $\varepsilon > 0$, *on puisse associer* $L = L(\varepsilon)$, *tel que l'inégalité* $| \int_{l'}^{l"} f(x,y)dx |< \varepsilon$ *soit vérifiée* $\forall l'$, $l" > L(\varepsilon)$ *et* $\forall y \epsilon [c,d]$.

Preuve. ($\Rightarrow$) Soit $\int_\alpha^{+\infty} f(x,y)dx$, une intégrale uniformément convergente sur $[c,d]$. Alors,$\forall \varepsilon > 0$, $\exists L = L(\varepsilon)$ tel que $\forall l' > L$ et $\forall l" > L$, on a

$$| \int_{l'}^{+\infty} f(x,y)dx |< \frac{\varepsilon}{2} et | \int_{l"}^{+\infty} f(x,y)dx |< \frac{\varepsilon}{2}, \forall y \epsilon [c,d]$$

Donc $\forall l'$, $l" > L(\varepsilon)$ et $\forall y \epsilon [c,d]$, on a :

$$\begin{aligned} | \quad \int_{l'}^{l"} f(x,y)dx |&=| \int_{l'}^{+\infty} f(x,y)dx - \int_{l"}^{+\infty} f(x,y)dx | \\ \leq \quad &| \int_{l'}^{+\infty} f(x,y)dx | + | \int_{l"}^{+\infty} f(x,y)dx | \\ < \quad &\varepsilon \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Soit pour tous l', $l"$ $> L(\varepsilon)$,

$$| \int_{l'}^{l"} f(x,y)dx |< \varepsilon, \forall y \epsilon [c,d]$$

Alors pour tout $y\epsilon [c,d]$, l'intégrale $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x,y)dx$ est convergente.
En faisant tendre $l"$ vers $+\infty$, on obtient

$$\forall l' > L(\varepsilon), | \int_{l'}^{+\infty} f(x,y)dx |< \varepsilon,$$

pour tout $y\epsilon [c,d]$.
C'est-à-dire $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x,,y)dx$ converge uniformément sur $[c,d]$.
■

Corollaire 1.3.4 *Soit f une fonction continue sur $[a,+\infty[\times [c,d]$ et soit*

$$J(y) = \int_{\alpha}^{+\infty} f(x,y)dx$$

une intégrale convergente sur $]c,d[$.
Alors, si J diverge pour $y = c$ ou $y = d$, elle ne peut pas être uniformèment convergente sur $]c,d[$.

Preuve. Supposons que $J(c)$ déverge.
En vertu du critère de Cauchy,

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \alpha \epsilon \mathbb{N}, \exists b_1, b_2 > \alpha \text{ tels que } | \int_{b_1}^{b_2} f(x,c)dx |> \varepsilon_0$$

Puisque l'intégrale définie $\int_{b_1}^{b_2} f(x,c)dx$ est une fonction continue sur $[c,d]$, alors pour y assez proche de c, on a

$$| \int_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx |> \varepsilon_0$$

Ce qui contredit le critère de Cauchy.
Donc, pas de convergence uniforme. ■

Théorème 1.3.5 *Soient f et g deux fonctions intégrables par rapport à x sur tout segment $[a,b] \subset [a,+\infty[$, pour tout $y\epsilon [c,d]$.*
Si $| f(x,y) |< g(x,y)$, et l'intégrale $\int_{\alpha}^{+\infty} g(x,y)dx$ converge uniformément sur $[c,d]$, alors l'intégrale $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x,y)dx$ converge, absolument et uniforméent sur $[c,d]$.

Preuve. La démenstration déroule de l'inégalité

$$\begin{aligned} \mid \int_{l'}^{l"} f(x,y)dx \mid &\leq \int_{l'}^{l"} \mid f(x,y) \mid dx \\ &\leq \int_{l'}^{l"} g(x,y)dx \end{aligned}$$

et du critère de Cauchy. ■

Théorème 1.3.6 *(Critère d'Abel-Dirichlet) Soient f et g, deux fonctions intégrables sur tout segment $[a,b] \subset [a,+\infty[$, pour tout $y \epsilon [c,d]$.*
Pour que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx$ soit uniformément convergente sur $[c,d]$, il suffit qu'une des deux paires de conditions suivantes soit vérifiée
α_1) Il existe $M > 0$, tel que, $\forall b \epsilon [a,+\infty[$ et $\forall y \epsilon [c,d]$, $\mid \int_a^b f(x,y)dx \mid < M$.
β_1) $\forall y \epsilon [c,d]$, la fonction g et monotone, par rapport à x, sur $[a,+\infty[$ et elle tend uniformément sur $[c,d]$ vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
α_2) L'intégrale $\int_a^b f(x,y)dx$ convertge uniformément sur $[c,d]$.
β_2) $\forall y \epsilon [c,d]$, la fonction g est monotone, par rapport à x, sur $[a,+\infty[$et g est bornée.

Preuve. En utilisant le $2^{ème}$ théorème de la moyenne des intégrales, on peut écrire

$$\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)g(x,y)dx = g(b_1,y)\int_{b_1}^{\varepsilon} f(x,y)dx + g(b_2,y)dx\int_{\varepsilon}^{b_2} f(x,y)dx \qquad (1.4)$$

avec $\varepsilon \epsilon [b_1,b_2]$.
$1-$Soit la première paire de conditions vérifiée, alors

$$\begin{aligned} \mid \int_{b_1}^{\varepsilon} f(x,y)dx \mid &= \mid -\int_a^{b_1} f(x,y)dx + \int_a^{\varepsilon} f(x,y)dx \mid < 2M \\ \mid \int_{\varepsilon}^{b_2} f(x,y)dx \mid &= \mid \int_a^{b_1} f(x,y)dx - \int_a^{\varepsilon} f(x,y)dx \mid < 2M \end{aligned}$$

g converge uniformément vers 0 sur $[c,d]$, (quand $x \to +\infty$), donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A, \text{ tel que } \forall x > A \Rightarrow \mid g(x,y) \mid < \frac{\varepsilon}{4M}, \forall y \epsilon [c,d]$$

Il suffit donc de choisir $b_1$etb_2 plus grands que A pour avoir :

$$\mid g(b_1,y)\int_{b_1}^{\varepsilon} f(x,y)dx + g(b_2,y)\int_{\varepsilon}^{b_2} f(x,y)dx \mid < \frac{\varepsilon}{4M}(2M+2M) = \varepsilon, \forall y \epsilon [c,d].$$

2−Soit maintenant la deuxième paire de conditions vérifiée.
L'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ converge uniformément sur $[c,d]$, alors

$$\forall\varepsilon > 0, \exists B \text{ tel que } \forall b_1, b_2 > B \Rightarrow \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx \right| < \varepsilon, \forall y \epsilon\, [c,d]$$

Il suffit donc de prendre $b_1$etb_2 supérieures à B pour avoir

$$\left| g(b_1,y) \int_{b_1}^{\varepsilon} f(x,y)dx + g(b_2,y) \int_{\varepsilon}^{b_2} f(x,y)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2M}(M+M) = \varepsilon, \forall y \epsilon\, [c,d]$$

Dans les deux cas, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx$ vérifie le critère de Cauchy. ■

1.3.3 Propriétés des intégrales uniformément convergentes

Théorème 1.3.7 *Si f est une fonction continue sur $[0,+\infty[\times [c,d]$ et l'intégrale*

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

est uniformément convergente sur $[c,d]$, alors J est une fonction continue sur $[c,d]$.

Preuve. Soit (l_k) une suite numérique quelconque, qui tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$ $(l_k \geq a)$.
Etudions la suite de fonctions $(F_k(y))$, définie par :

$$\begin{aligned} F_k(y) &= \int_a^{l_k} f(x,y)dx; \\ k &= 1,\ 2,\ 3..., c \leq y \leq d. \end{aligned}$$

En vertu du théorème (1.2.1), F_k est une fonction continue sur $[c,d]$, $\forall k = 1,\ 2, ...$
D'aprés le théorème 1.3.2), la suite$(F_k(y))$ converge uniformément sur $[c,d]$, vers l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$.
Donc J, en tant que limite d'une suite de fonctions, uniformément convergente sur $[c,d]$, est une fonction continue sur $[c,d]$. ■

Exemple 1.3.8 *Montrer que*

$$\int_a^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t}dt = \frac{\pi}{\sin p\pi} \tag{1.5}$$

On sait que
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx = \frac{\pi}{2n}\left[\sin x(\frac{2m+1}{2n}\pi)\right]^{-1} \tag{1.6}$$
pour $m < n$.*avec* m *et* n *entiers (Voir Cf ch.. I-7-ex.4).*
Si on pose $t = x^{2n}$ *dans 1.6), on obtient*
$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{2m+1}{2n}-1}}{1+t}dt = \pi\left[\sin\frac{2m+1}{2n}\pi\right]^{-1} \tag{1.7}$$
Posons $f(t,p) = \frac{t^{p-1}}{1+t}$.*Alors on a*

i) $f(t,p)$ *est une fonction continue sur* $]0,+\infty[\times]0,1[$.

ii) L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t,p)dt$ *est uniformément convergente sur* $[p_1,p_2]\,0 \subset]0,1[$.

(Il suffit de décomposer l'intégrale $\int_0^{+\infty}$*en deux :*$\int_0^1$ *et* $\int_1^{+\infty}$*, et puis utiliser le critère de Weierstrass en majorant respectivement par* $\frac{t^{p_1-1}}{1+t}$ *et* $\frac{t^{p_2-1}}{1+t}$*).*
Danc en vertu du théorème (1.3.6), on déduit que l'intégrale dans la partie gauche de la formule (1.5) est une fonction continue sur $]0,1[$.
Tout point de $]0,1[$ *peut être considéré comme limite d'une suite numérique dont les éléments sont de le forme* $\frac{2m+1}{2n}$ *avec* $m < n$.
Alors en passant dans (1.7) à la limite, on obtient (1.5)(6.5).

Théorème 1.3.9 *Soit* f *et* f'_y *deux fonctions continues sur* $[a,+\infty[\times[c,d]$. *Alors si l'intégrale*
$$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx \tag{1.8}$$
converge sur $[c,d]$*, et si l'intégrale*
$$\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx \tag{1.9}$$
converge uniformément sur le même segment; la fonction J *est dérivable sur* $[c,d]$.
De plus
$$\begin{aligned}\frac{dJ}{dy} &= \frac{d}{dJ}\int_a^{+\infty} f(x,y)dx\\ &= \int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx\end{aligned}$$

Preuve. Soit (l_k) une suite numérique qui tend vers $+\infty$quand $+\infty$ quand k tend vers $+\infty(l_k \geq a)$.
Alors la suite de fonctions définie par

$$F_k(y) = \int_a^{l_k} f(x,y)dx, k = 1,2,.., \text{ et } c \leq y \leq d$$

converge uniformément sur $[c,d]$, vers l'intégrale (1.8).
D'aprés le théorème (1.2.3), on a

$$F_k^{'}(y) = \frac{d}{dy}\int_a^{l_k} f(x,y)dx = \int_a^{l_k} f_y^{\prime}(x,y)dx, k = 1,2,..., \text{ et } c \leq y \leq d$$

De plus $F_k^{'}(y)$ est continue sur $[c,d]$, $\forall k = 1,\ 2, ...$
En vertu de la convergence uniforme de l'intégrale (1.9), la suite($F_k^{'}(y)$) converge uniformément sur $[c,d]$, vers l'intégrale (1.9).
Ainsi,on a $(F_k(y))$converge vers $J(y)$ et ($F_k^{'}(y)$) converge uniformément vers $\int_a^{\infty+} f_y^{\prime}(x,y)dx$,sur $[c,d]$.
De plus $F_k^{'}(y)$ sont continues sur$[c,d]$, $\forall k = 1,\ 2, ...$
En vertu d'une théorème sur la dérivabilité des suites de fonctions, J est une fonction dérivable sur $[c,d]$, et de plus$J'(y) = \int_a^{\infty+} f_y^{\prime}(x,y)dx$

Théorème 1.3.10 *Si f est une onction continue sur $[a,+\infty[\times[c,d]$, et l'intégrale $J(y) = \int_a^{\infty+} f(x,y)dx$ converge uniformément sur $[c,d]$, alors*

$$\int_c^d J(y)dy = \int_c^d dy \int_a^{\infty+} f(x,y)dx = \int_a^{\infty+} dx \int_a^{\infty+} f(x,y)dy \tag{1.10}$$

■

Preuve. Pour tout suite numérique (l_k) $(l_k \geq a)$ qui tend vers $+\infty$, la suite de fonctions correspondante,définie par

$$F_k(x) = \int_a^{l_k} f(x,y)dx, k = 1,2,3,..., \text{ et } c \leq y \leq d$$

converge uniformément sur $[c,d]$ vers $J(y)$
D'aprés (1.3.9), toutes les fonctions F_k sont continues sur $[c,d]$.
En vertu du théorème (1.1.3)

$$\lim_{k\to+\infty}\int_c^d F_k(y)dy = \int_c^d J(y)dy$$

D'autre part, d'aprés le théorème (1.2.5)

$$\begin{aligned}\int_c^d F_k(y)dy &= \int_c^d dy \int_a^{l_k} f(x,y)dx \\ &= \int_c^{l_k} dx \int_a^d f(x,y)dx\end{aligned}$$

Donc pour toute suite l_1, $l_2, .., l_k, ...,$ qui tend vers $+\infty$, quand k tend vers $+\infty$

$$\lim_{k\to+\infty} \int_c^{l_k} dx \int_c^d f(x,y)dx = \int_c^d J(y)dy$$

Ce qui veut dire, l'intégrale

$$\int_a^{\infty+} dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d J(y)dy$$

est convergente, et l'égalité suivante est vérifiée

$$\int_c^d dy \int_a^{\infty+} f(x,y)dx = \int_a^{\infty+} dx \int_c^d f(x,y)dy$$

■

Corollaire 1.3.11 *Si f est une fonction à signe constant, continue, sur $[a, +\infty[\times [c, d]$, alors de la continuité de l'intégrale $J(y) = \int_a^{\infty+} f(x,y)dx$,sur $[c, d]$, on déduit l'égalité (**??**.*

Preuve. Supposons par exemple que f est définie positive, alors pour toute suite numérique l_1, $l_2, ..., l_k, ... \to +\infty(l_k \geq a)$, la suite de fonction correspondante définie par

$$F_k(y) = \int_a^{l_k} f(x,y)dx,\ \forall k = 1,\ 2, ...,\ \text{et } \forall c \leq y \leq d$$

est croissante,et convergente sur $[c, d]$ vers la fonction J.
Par suite $(F_k(y))$ converge uniformément sur $[c, d]$ vers J.
D'où l'intégrale $J(y)$ est uniformément convergente sur $[c, d]$.
Daprés le théorème (1.3.9), l'égalité(1.10) est vérifiée.

Pour les fonctions f de signe constant on peut aussi démontrer le théorème suivant

■

Théorème 1.3.12 *Soit f une fonction continue de signe constant, sur $[a, +\infty[\times [c, +\infty[$*

et les deux intégrales

$$I(y) = \int_a^{\infty+} f(x,y)dx \qquad ,J(x) = \int_c^{\infty+} f(x,y)dy$$

sont deux fonctions continues respectivement sur$c \leq y < +\infty$ *et* $a \leq x < +\infty$.
Alors si une des deux intégrales suivantes

$$\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx \qquad , \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x,y)dy$$

est convergente, il en est de même pour l'autre, et on

$$\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx \ = \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x,y)dy$$

Preuve. On va faire la démonstration pour le cas où f est non négative sur $[a,+\infty[\times [c,+\infty[$.
Suppossons que l'intégrale

$$k = \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

est convergente .
Alors, il suffit de montrer que

$$\lim_{l\to+\infty} \int_a^l dx \int_c^{+\infty} f(x,y)dy = k = \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

Soit $\varepsilon > 0$. En vertu de la conséquence du théorème (1.3.9), on a

$$\int_a^l dx \int_c^{+\infty} f(x,y)dy = \int_c^{+\infty} dy \int_a^l f(x,y)dx$$

et la fonction f étant non négative sur $[a,+\infty[\times[c,+\infty[$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int_a^l dy \int_c^{+\infty} f(x,y)dy \\
&= \int_c^{+\infty} dy \int_l^{+\infty} f(x,y)dx \\
&= \int_c^{c_1} dy \int_l^{+\infty} f(x,y)dx + \int_{c_1}^{+\infty} dy \int_l^{+\infty} f(x,y)dx \\
&\leq \int_c^{c_1} dy \int_l^{+\infty} f(x,y)dx + \int_{c_1}^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx \qquad (1.11)
\end{aligned}$$

L'intégrale (1.10) est convergente, alors il existe c_1 tel que l'intégralité suivante soit vérifiée

$$\int_{c_1}^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.12}$$

Fixons un nombre c_1 tel que l'inégalité (1.12) soit vérifiée.
Par hypothèse, J est une fonction continue, et f une fonction non négative, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ converge uniformément sur $[c, c_1]$vers $J(y)$.
Donc on peut trouver $L(\varepsilon)$ tel que pour tout $l > L(\varepsilon)$,l'inégalité

$$\int_l^{+\infty} f(x,y)dx < \frac{\varepsilon}{2\,(c-c_1)},$$

soit vérifiée quel que soit $y\epsilon\ [c, c_1]$.
D'où quand $l > L(\varepsilon)$ on a

$$\int_c^{c_1} dy \int_l^{+\infty} f(x,y)dx < \frac{\varepsilon\,(c_1-c)}{2\,(c_1-c)} = \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.13}$$

En utilisant les inégalités (1.11), (1.12)et(1.13), on peut conclure que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_c^{+\infty} dx \int_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int_a^{l} dx \int_c^{+\infty} f(x,y)dy \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

pour tout $l > L(\varepsilon)$. ■

Dans le cas où le signe de $f(x,y)$ est quelconque, on peut démontrer le théorème suivant

Théorème 1.3.13 *Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[\times [c, +\infty[$, et soient les deux intégrales*

$$\int_c^{+\infty} f(x,y)dy \ \ et \ \int_a^{+\infty} f(x,y)dx \tag{1.14}$$

uniformément convergentes respectivement sur tout segment fini $[a, A]$ et $[c, C]$.
Alors si ou moins une des deux intégrales suivantes

$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} \mid f(x,y) \mid dy \ \ et \ \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} \mid f(x,y) \mid dx \tag{1.15}$$

est convergente, les deux intégrales

$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x,y)dy \ \ et \ \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx \tag{1.16}$$

sont toutes les deux convergentes, et sont égales entre elles.

Preuve. Supposons que la $2^{ème}$des intégrales (1.15)est convergente.
En utilisant le critère de comparaison,on déduit que la $2^{ème}$ des intégrales (1.16) est aussi convergente.
Donc, il suffit de montrer uniquement que

$$\lim_{l\to+\infty}\int_a^l dx\int_c^{+\infty} f(x,y)dy=\int_c^{+\infty}dy\int_a^{+\infty} f(x,y)dx \tag{1.17}$$

En vertu de la convergence uniforme des intégrales (1.14), pour tout $l>0$, on a

$$\int_a^l dx\int_c^{+\infty} f(x,y)dy=\int_c^{+\infty}dy\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

Pour montrer l'égalité des intégrales (1.16), il suffit de montrer que l'expression

$$\int_a^l dx\int_c^{+\infty} f(x,y)dy-\int_c^{+\infty}dy\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

tend vers 0 quand l tend vers $+\infty$.
Soit $c_1>c$, alors

$$\begin{aligned}
&\mid \int_c^{+\infty}dy\int_a^{+\infty} f(x,y)dx-\int_a^l dx\int_c^{+\infty} f(x,y)dy\mid\\
=&\mid\int_c^{+\infty}dy\int_a^{+\infty} f(x,y)dx-\int_c^{+\infty}dy\int_a^{l} f(x,y)dx\mid\\
=&\mid\int_c^{+\infty}dy\int_l^{+\infty} f(x,y)dx\mid\\
=&\mid\int_c^{c_1}dy\int_l^{+\infty} f(x,y)dx+\int_{c_1}^{+\infty}dy\int_l^{+\infty} f(x,y)dx\mid\\
\le&\mid\int_c^{c_1}dy\int_l^{+\infty} f(x,y)dx\mid+\int_{c_1}^{+\infty}dy\int_l^{+\infty}\mid f(x,y)\mid dx
\end{aligned}\tag{1.18}$$

Comme l'intégrale $\int_c^{+\infty}dy\int_a^{+\infty}\mid f(x,y)\mid dx$ est convergente par hypothèse, alors pour tout $\varepsilon>0$, il existe $c_1>c$, tel que

$$\int_{c_1}^{+\infty}dy\int_a^{+\infty}\mid f(x,y)\mid dx<\frac{\varepsilon}{2} \tag{1.19}$$

Choisissons $c_1>c$, tel que l'inégalité (1.19) soit vérifiée.
De la convergence uniforme de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$,on déduit l'existence d'un nombre

$l(\varepsilon)$, tel que,pour tout $l > L(\varepsilon)$ l'inégalité

$$\mid \int_{l}^{+\infty} f(x,y)dx \mid < \frac{\varepsilon}{2(c_1 - c)},$$

soit vérifiée pour tout $y \epsilon \left[c, c_1\right]$.
Dans ce cas on peut écrire

$$\mid \int_{c}^{c_1} dy \int_{l}^{+\infty} f(x,y)dx \mid < \frac{\varepsilon(c_1 - c)}{2(c_1 - c)} = \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1.20}$$

pour tout $l > L(\varepsilon)$.
Et d'aprés(1.18),(1.19) et (1.20), on obtient, pour tout $l > L(\varepsilon)$, l'inégalité

$$\mid \int_{c}^{+\infty} dy \int_{a}^{+\infty} f(x,y)dx - \int_{a}^{l} dx \int_{c}^{+\infty} f(x,y)dy \mid < \varepsilon$$

■

Chapitre 2

Fonction euleriennes

Définition 2.0.14 *On appelle euleriennes de premier et de second espèse, respectivement les deux fonctions spéciales suivantes*

$$\left\{ \begin{array}{l} B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \\ \gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx \end{array} \right\} \tag{2.1}$$

La première s'appelle fonction Béta et la seconde, qui est souvent utilisée, s'appelle fonction Gama.

2.1 Fonction Bêta

2.1.1 Domaine de définition

Pour que l'intégrale $B(\alpha,\beta)$ soit convergente au point 0, il est nécessaire et suffisant, que α soit supérieur à 0, et pour qu'elle soit convergente au point 1, il faut et il suffit, que β soit supérieur à 0.
Donc le domaine de définition de la fonction $B(\alpha,\beta)$ est

$$D =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$$

Symétrie

Proposition 2.1.1 *Pour tous* $\alpha > 0$, $\beta > 0$, *on a*

$$B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha)$$

Preuve. Posons $x = 1-t$, alors

$$
\begin{aligned}
B(\alpha,\beta) &= \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \\
&= \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}dt \\
&= B(\beta,\alpha)
\end{aligned}
$$

■

2.1.2 Formule de récurrence

Proposition 2.1.2 *Si $\alpha = 1$, alors l'égalité suivante est vériiée*

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1}B(\alpha-1,\beta)$$

Preuve. Par hypothèse, on a $\alpha > 1$ et $\beta > 0$.
Intégrons par parties l'intégrale $B(\alpha,\beta)$ devient

$$
\begin{aligned}
B(\alpha,\beta) &= -\frac{1}{\beta}x^{\alpha-1}(1-x)\mid_0^1 + \frac{\alpha-1}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta}dx \\
&= \frac{\alpha-1}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-2}\left[(1-x)^{\beta-1} - (1-x)^{^{\beta-1}}x\right]dx \\
&= \frac{\alpha-1}{\beta}B(\alpha-1,\beta) - \frac{\alpha-1}{\beta}B(\alpha,\beta)
\end{aligned}
$$

La fonction $B(\alpha,\beta)$, étant symétrique, pour $\beta > 1$, on peut écrire

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1}B(\alpha-1,\beta)$$

Il est facile de prouver que pour tout $\alpha > 0$,

$$B(\alpha,1) = \frac{1}{\alpha}$$

D'où pour tout $n\epsilon\mathbb{N}$,on obtient.

$$
\begin{aligned}
B(\alpha,n) &= \frac{n-1}{\alpha+n-1}.\frac{n-2}{\alpha+n-2}...\frac{n(n-1)}{\alpha+n-(n-1)}B(\alpha,1) \\
&= \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)}
\end{aligned}
$$

En particulie, pour tous n, $m\epsilon\mathbb{N}$, on a

$$
B(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}
$$

■

2.1.3 Autre représentation de la fonction Bêta

Proposition 2.1.3 *La fonction Béta peut se formuler de la manière suivante*

$$
B(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}dy \tag{2.2}
$$

Preuve. Posons dans la définition de l'intégrale $B(\alpha,\beta)$

$$
x = \frac{y}{y+1} \; ouy = \frac{x}{1-x}, dx = \frac{dy}{(1+y)^2},
$$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$, $x \rightarrow 1 \Rightarrow y \rightarrow +\infty$.
Alors

$$
\begin{aligned}
B(\alpha,\beta) &= \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \\
&= \int_0^{+\infty} \left[\frac{y}{1+y}\right]^{\alpha-1} \left[\frac{1}{1+y}\right]^{\beta-1} \frac{dy}{(1+y)^2} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^2}dy
\end{aligned}
$$

■

2.2 Fonction Gama

2.2.1 Domaine de définition

Au voisinage de 0, la fonction e^{-x} est équivalente à 1.
Donc l'intégrale $\gamma(\alpha)$ est convergente en 0, si et seulement si $\alpha > 0$.
Qand x tend vers $+\infty$, la fonction e^{-x}décroît plus vite que n'importe quelle puissance de x, donc à l'infini, l'intégrale $\gamma(\alpha)$ est convergente pour tout $\alpha\epsilon\mathbb{R}$.
D'où la fonction $\gamma(\alpha)$ est définie sur $]0, +\infty[$.

2.2.2 Dérivabilité de la fonction $\gamma(\alpha)$

Proposition 2.2.1 *La fonction Gama est indéfiniment dérivable sur* $]0, +\infty[$, *et de plus on a*

$$(\gamma(\alpha))^{(n)} = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}(\log x)^n e^{-x} dx \tag{2.3}$$

Preuve. Montrons d'abord que l'intégrale (2.3est uniformément convergente sur tout segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$.
Soit $0 < a \leq \alpha$, alors

$$((x^{\frac{a}{2}}(\log x)^n) \to 0, \text{ quand } x \to 0)$$

Donc, on peut trouverun nombre c_n tel que

$$\mid x^{\alpha-1}(\log x)^n e^{-x} \mid < x^{(\frac{a}{2}-1)}, \forall x\epsilon\, [0, c_n]$$

D'aprés le critère de Weierstrass, l'intégrale

$$\int_0^{c_n} x^{\alpha-1}(\log x)^n e^{-x} dx$$

converge uniformément sur $[a, +\infty[$.
Soit maintenant $\alpha \leq b < +\infty$, alors pour tout $x \geq c_n$, on a

$$\mid x^{\alpha-1}(\log x)^n e^{-x} \mid < x^{b-1} \mid (\log x)^n \mid e^{-x}$$

D'une manière analogue, on déduit que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}(\log x)^n e^{-x} dx$$

converge uniformément sur, $]0, b]$.
En comparant ces deux résultats, on déduit que l'intégrale (2.3) converge uniformément

sur $[a,b]$.
Par conséquent, la dérivation de la fonction $\gamma(\alpha)$ à l'ordre n, est justifiée $\forall n \epsilon \mathbb{N}$.
La fonction $\gamma(\alpha)$,étant indéfiniment dérivable sur tout segment $[a,b] \subset]0,+\infty[$, est indéfiniment dérivable sur $]0,+\infty[$, et de plus la formule (2.3) est vérifiée. ■

2.2.3 formule de récurrence

Proposition 2.2.2 *Pour tout* $\alpha \epsilon]0,+\infty[$, *on a*

$$\gamma(\alpha+1) = \alpha\gamma(\alpha)$$

Preuve. Soit $\alpha > 0$.
En intégrant par partie, on obtient

$$\begin{aligned}\gamma(\alpha+1) &= \int_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}dx = -x^{\alpha}e^{-x} \mid_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx \\ &= \alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \alpha T(\alpha)\end{aligned}$$

■

2.3 Relation entre les fonction Bêta et Gama

Proposition 2.3.1 *Soit* $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$, *alors*

$$B(\alpha,\beta) = \frac{T(\alpha)T(\beta)}{T(\alpha+\beta)} \tag{2.4}$$

Si on pose dans l'intégrale $B(\alpha,\beta)$, $x = tz$, on obtient

$$\frac{\gamma(\alpha)}{t^{\alpha}} = \int_0^{+\infty} z^{\alpha-1}e^{-tz}dz \tag{2.5}$$

En remplaçant ,t par $(1+\alpha)$,et α par $(\alpha+\beta)$,dans (2.5), on obtient

$$\frac{\gamma(\alpha+\beta)}{(1+t)^{\alpha+\beta}} = \int_0^{+\infty} z^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+t)z}dz \tag{2.6}$$

Multiplions les deux membres de l'égalité (2.6) par $t^{^{\alpha-1}}$ et puis intégrans par rapport à t, de 0 à $+\infty$, on ttouve

$$\gamma(\alpha+\beta)\int_0^{+\infty} \frac{t^{^{\alpha-1}}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}dt = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} t^{^{\alpha-1}} z^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+t)z}dz$$

En vertu de la proposition (1.3), cette égalité peut s'écrire sous la forme

$$\gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} z^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+t)z} dz \tag{2.7}$$

Dans la formule (2.7), pour $\alpha > 1$ et $\beta > 1$,on peut intervertir les signes intégrales. Cette opération se justifie de la manière suivante

i) $f(z,t) = t^{\alpha-1} z^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+t)z} \geq 0$, et f est continue sur, $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$.

ii) Si $\alpha > 1$ et $\beta > 1$, l'intégrale (2.7) est convergente

iii) L'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} z^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+t)z} dz = T(\alpha+\beta)\frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}$$

est une fonction continue sur $[0,+\infty[$, et l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} z^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+t)z} dz = T(\alpha) z^{\beta-1} e^{-z}$$

est une fonction continue sur $[0,+\infty[$.

D'où d'après le théorème(1.3.10), l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} dz \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} z^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+t)z} dt$$

est aussi convergente et elle admet la mème valeur que l'intégrale (2.7).

Ainsi donc, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta) &= \int_0^{+\infty} dz \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} z^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+t)z} dt \\
&= \int_0^{+\infty} z^{\alpha+\beta-1} e^{-z} dz \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-tz} dt \\
&= \int_0^{+\infty} z^{\alpha+\beta-1} e^{-z} \frac{T(\alpha)}{z^\alpha} dz \\
&= \gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} z^{\beta-1} e^{-z} dz \\
&= \gamma(\alpha)\gamma(\beta)
\end{aligned}$$

Donc la proposition (2.2.1) est démontrée pour $\alpha > 1$ et $\beta > 1$.

Dans le cas où $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, il suffit d'appliquer les propositions(2.1.2)et (2.1.3) à la partie gauche de cette égalité et la proposition (2.2.2) à sa partie gauche .

Proposition 2.3.2 *Pour tout* $\alpha\epsilon\,]0,1[$, *on a*

$$B(\alpha, 1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \tag{2.8}$$

Preuve. Si on remplace dans la formule (2.2) β par $(1-\alpha)$, et en utilisant l'exemple (1.3.8),on obtient

$$\begin{aligned} B(\alpha, 1-\alpha) &= \int_0^{+\infty} \frac{z^{\alpha-1}}{1-z} dz && (2.9) \\ &= \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \quad 0 < \alpha < 1 && (2.10) \end{aligned}$$

■

Bibliographie

[1] A. Kessi et A. Mahmoudi. Les Mathématiques à l'université-Elémenst d'Analyse Mathématiques Séries et intégrales ISSN : 1112-3427.

[2] S. G. Delabrière. Suites, Séries, Intégrales.-Cours et exercices. Université Pierre et Marie Curie.

[3] DIEUDONNE J. Eléments d'Analyse 1, fondements de l'analyse moderne. Gauthier-Villars, Cahiers Scientifiques, Fascicule XXVIII, Paris (1972).

[4] RAMIS, E. Exercices d'analyse, avec solutions développées. Masson et Cie, Paris (1968).

[5] LELONG-FERRAND, J., ARNAUDI■S, J.-M. Cours de Mathématiques, Tome 2, Analyse. Dunod, Paris (1977).

[6] CAGNAC G., RAMIS E., COMMEAU J. Nouveau cours de mathématiques spéciales, Tome 2, Analyse. Masson and Cie, Paris (1965).