الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Minstère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

CENTRE UNIVERSITAIRE DE MILA
INSTITUT DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

Réf. /12

Mémoire de fin d'étude
Présenté pour l'obtention du diplôme de

Licence Académique

Domaine : **Mathématiques et Informatique**
Filière : **Mathématiques**
Spécialité : **Mathématiques Fondamentales**

Thème

Quelques résultats fondamentaux sur les séries de Fourier

Présenté par :
1- Beloucif Amina
2- Boubata Ibtissam

Dirigé par :
Smail Kaouache

Année universitaire 2011-2012

REMERCIEMENTS

Avant tout nous remercions le bon Dieu qui nous a donné la force pour terminer ce travail.

Nous adressons nos remerciements à notre Encadreur SMAIL KAOUACHE pour sa disponibilité, son encouragement et ses précieux conseils tout au long de ce travail.

Nous adressons aussi nos remerciements à tous les enseignants de l'institut des Sciences et de la Technologie

En fin, merci à tous ceux qui ont contribués de près ou de loin à l'élaboration de ce modeste travail.

AMINA

IBTISSAM

Table des matières

Introduction Générale **2**

1 Introduction à la théorie des séries de Fourier **4**

1.1 Notions générales 4
1.1.1 Régularité par morceaux 4
1.1.2 Intégration 5
1.1.3 Périodicité 5
1.1.4 Convolution 7
1.2 Séries de Fourier 9
1.2.1 Polynômes trigonométriques 9
1.2.2 Coefficients de Fourier 10
1.2.3 Séries de Fourier 11
1.3 L'approche (pré) hilbertienne 13
1.3.1 Un espace préhilbertien 13
1.3.2 Interprétation des sommes de Fourier 15
1.4 Inégalité de Bessel et égalité de Parseval 16
1.5 Séries trigonométriques 19

2 Convergence **21**

2.1 Une représentation des sommes de Fourier 21
2.2 Le théorème de convergence ponctuelle de Dirichlet 23
2.2.1 Un résultat de convergence uniforme 26
2.3 Convergence en moyenne 28
2.3.1 Convergence en moyenne d'une suite numérique 28
2.4 Sommes de Cesàro et noyau de Fejér 29
2.4.1 Le théorème de convergence en moyenne de Fejér 30

Bibliographie **35**

Introduction Générale

La théorie des séries de Fourier permet d'interpréter certaines fonctions définies sur un intervalle réel). L'idée d'une telle décomposition apparaît en 1807 dans une première communication de Joseph Fourier à l'Académie des Sciences de Paris, concernant la résolution de l'équation aux dérivées partielles qui régit la propagation de la chaleur dans les solides. En 1822, Fourier publie sur ce sujet un ouvrage intitulé : Théorie analytique de la chaleur. Cependant, c'est sous l'impulsion de Gustav Lejeune Dirichlet que la théorie de Fourier, jusqu'alors controversée, prend vraiment son essor : en particulier, Dirichlet publie en 1829 la première démonstration rigoureuse d'un résultat de convergence pour les séries de Fourier. Dès lors, le développement de l'analyse au XIXème siècle devient indissociable des problèmes liés à ces séries, qui seront à l'origine de contributions monumentales de Riemann (sur l'intégration), d'Abel (sur la convergence des séries de fonctions), de Weierstrass (qui introduit la convergence uniforme et met les bases de l'analyse sous leur forme actuelle) et de Cantor (qui fonde la topologie générale). Nous sommes alors entre 1870 et 1880 ; plus d'un demi-siècle s'est écoulé depuis la publication de la Théorie analytique de la chaleur.

Au XXème siècle, le développement de la théorie de l'intégration et celui de l'analyse fonctionnelle ouvrent de nouveaux horizons à l'analyse de Fourier. Ces nouveaux points de vue ne peuvent être qu'effleurés dans le cours qui va suivre : ils le seront à travers l'approche hilbertienne des séries de Fourier, et à travers le théorème de convergence en moyenne démontré en 1900 par Lipot Fejér. Cette époque voit la naissance de l'analyse harmonique.

Ce mémoire est composé de deux chapitres. Il est structuré de la manière suivante :
Dans le premier chapitre, on va donner une introduction préalable de quelques notions techniques un peu fastidieuses pour étudier la convergence des séries de Fourier en tant que séries de fonctions.
Dans le deusième chapitre, on va présenter quelques résultats fondamentaux sur les séries

de Fourier. Ces résultats sont essentiellement ceux de [1] et [7] (tome 2, chapitre XII), mis sous un habillage “moderne”. Les résultats principaux (comme le théorème de Dirichlet, ou celui de Fejér) ne sont donc pas présentés sous leur forme la plus générale.

Chapitre 1

Introduction à la théorie des séries de Fourier

L'étude des séries de Fourier requiert l'introduction préalable de quelques notions techniques un peu fastidieuses. Afin de ne pas noyer les points réellement importants dans des considérations auxiliaires, il a semblé préférable de ne pas disperser ces notions au fil du texte. C'est pourquoi elles ont été regroupées dans ce chapitre.

1.1 Notions générales

Dans la suite, on notera systématiquement $f(c^-)$ (resp. $f(c^+)$) la limite à gauche (resp. à droite) d'une fonction f en un point c donné de $\mathbb{R}$. Autrement dit, on pose

$$f(c^-) = \lim_{x \overset{<}{\to} c} f(x) \quad \text{et} \quad f(c^+) = \lim_{x \overset{>}{\to} c} f(x),$$

lorsque cela a un sens.

1.1.1 Régularité par morceaux

Définition 1.1.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle fermé borné $[a, b]$, à valeurs réelles ou complexes.*
On dit que f est continue par morceaux, s'il existe une famille finie $(x_j)_{0<j\preceq 1}$ de points de $[a, b]$,avec $a = x_0 < x_1 <\cdots< x_n = b$, telle que, pour tout $j = 0, .., N - 1$, on ait les deux propriétés suivantes :
(i) la fonction f est continue sur chaque intervalle ouvert $]x_j, x_{j+1}[$.
(ii) la fonction f possède une limite à droite en x_j et à gauche en x_{j+1}.

Remarque 1.1.2 *Il résulte de cette définition qu'aux points* x_j *avec* $1 \leq j \leq N-1$,*la fonction* f *a une limite à gauche et à droite. Ces limites à gauche et à droite coïncident, et valent* $f(x_j)$,*si et seulement si la fonction* f *est en fait continue en* x_j.

Remarque 1.1.3 *On obtient la même notion en remplaçant les points* (i) *et* (ii) *de la définition (1.1.1) par l'existence d'une fonction* f_j *continue sur* $[x_j, x_{j+1}]$ *dont la restriction à* $]x_j, x_{j+1}[$ *coïncide avec* f.

Définition 1.1.4 *Soit* f *une fonction définie sur un intervalle fermé borné* $[a, b]$,*à valeurs réelles ou complexes.*
On dit que f *est de classe* C^1 *par morceaux s'il existe une famille finie* $(x_j)_{0 \preceq j \preceq\ n}$ *de points de* $[a, b]$,*avec* $a = x_0 < x_1 <\cdots< x_n = b$, *telle que, pour tout* $j = 0, ..., N-1$,*on ait les deux propriétés suivantes :*

(i) *la fonction* f *est dérivable, à dérivée continue, sur chaque intervalle ouvert* $]x_j, x_{j+1}[$.

(ii) *la fonction* f *est sa dérivée possèdent une limite à droite en* x_j *et à gauche en* $x_{j+1.}$

1.1.2 Intégration

Définition 1.1.5 *Soit* f *une fonction continue par morceaux sur* $[a, b]$. *On considère une subdivision* $a = x_0 < x_1 <\cdots< x_n = b$ *associée à* f *par la définition (1.1.1). Alors* f_j *est continue sur l'intervalle fermé borné* $[x_j, x_{j+1}]$ *et, à ce titre, Riemann−intégrable sur cet intervalle.*
On définit alors l'intégrale de f *sur* $[a, b]$ *par*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f_j(x)dx \tag{1.1}$$

1.1.3 Périodicité

Définition 1.1.6 *Soit* T *un réel strictement positif. Une fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$, *à valeurs réelles ou complexes, est dite* $T-$*périodique si on a* $f(x+T) = f(x)$ *pour tout réelle* x.*On appellera alors intervalle admissible pour* f *tout intervalle de la forme* $[a, a+T[$ *avec* $a \in \mathbb{R}$.
Une fonction $T-$*périodique est entièrement déterminée par sa donnée sur un intervalle admissible. En effet, pour tout réel* x,*il existe un unique entier relatif* k *tel que l'on ait* x

$\in [a+kT, a+(k+1)T[$. *La périodicité assure que*

$$f(x) = f(x-kT); \text{ or } x - kT$$

appartient à l'intervalle admissible $[a, a+T[$.

Définition 1.1.7 *Une fonction* $T-$*périodique est dite continue (resp. de classe* C^1*) par morceaux sur* $\mathbb{R}$ *si elle est continue (resp. de classe* C^1*) par morceaux sur un intervalle* $[a, b]$ *avec* $a \in \mathbb{R}$ *et* $b = a + T$.

Remarque 1.1.8 *Il est facile de se convaincre que la définition précédente ne dépend pas*

du choix de a. *On pourrait aussi y remplacer la condition* $b = a + T$ *par* $b - a \geq T$. *Par périodicité, il suffit que la fonction soit continue (resp. de classe* C^1*) par morceaux sur un tel intervalle pour qu'elle le soit sur tout intervalle* $[c, d]$.

Lemme 1.1.9 *Soit* f *une fonction* T*-périodique continue par morceaux. Alors l'intégrale*

$$\int_a^{a+t} f(x)dx$$

ne dépend pas du choix du réel a.

Preuve. La relation de Chasles permet d'écrire

$$\int_a^{a+t} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^t f(x)dx + \int_t^{a+t} f(x)dx \tag{1.2}$$

Le changement de variable $x = y + T$, conduit à l'égalité

$$\int_t^{a+t} f(x)dx = \int_0^a f(y+T)dy = \int_0^a f(y)dy,$$

compte tenu de la relation de périodicité $f(y+T) = f(y)$.
Il en résulte que la première et la troisième intégrale au second membre de(1.2) s'éliminent. Il reste la seconde intégrale, qui est indépendante de a. ■

Dans la suite, les fonctions périodiques considérées seront $2\pi-$périodiques.Bien sûr, ce choix est motivé par le fait que les fonctions trigonométriques usuelles $(\cos, \sin, \exp \ldots)$ sont $2\pi-$périodiques. Il ne restreint pas la généralité, puisque tous les résultats que l'on établit pour les fonctions $2\pi-$périodiques se transposent très facilement aux fonctions$T-$périodiques avec T quelconque : il suffit en effet de remarquer que si f est une fonction $T-$périodique, alors $x \to f(\frac{2\pi}{t}x)$ est une fonction 2 π -périodique. C'est un simple changement d'échelle.

Remarque 1.1.10 *Pour toute fonction g supposée $2\pi-$périodique continue par morceaux, le lemme (1.1.9)donne en particulier la relation*

$$\int_0^{2\pi} g(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx.$$

Dans la suite, nous utiliserons souvent cette propriété sans la rappeler explicitement

1.1.4 Convolution

Définition 1.1.11 *Soient f et g deux fonctions 2π -périodiques continues par morceaux. On appelle produit de convolution de f et g la fonction $f \ast g$ définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$(f \ast g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)dt$$

Avant d'établir quelques propriétés du produit de convolution, il convient de remarquer que l'intégrale figurant dans la définition précédente a bien un sens puisque la fonction $t \to f(t)g(x-t)$ est elle-même continue par morceau sur$[-\pi, \pi]$

Proposition 1.1.12 *Étant données deux fonctions $2\pi-$périodiques continues par morceaux f et g, leur produit de convolution $f \ast g$ est une fonction $2\pi-$périodique et on a*

$$f \ast g = g \ast f.$$

De plus, si l'une des fonctions f ou g est continue sur $\mathbb{R}$, alors $f \ast g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Preuve. On vérifie immédiatement, en utilisant la périodicité de g,que l'on a

$$(f \ast g)(x + 2\pi) = (f \ast g)(x)$$

En faisant le changement de variable

$$t = x - s, dt = -ds,$$

on a par ailleurs

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)dt \\ &= \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-s)g(s)ds\end{aligned}$$

En utilisant le lemme (1.1.9) et la périodicité de la fonction

$$s \to f(x-s)g(s),$$

on en tire

$$\begin{aligned}f * g(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} g(s)f(x-s)ds \\ &= g * f(x).\end{aligned}$$

Il reste à établir la continuité de $f * g$ lorsque f ou g est continue.
Compte tenu de l'égalité

$$f * g = g * f,$$

les rôles de f et g sont symétriques et il suffit donc d'établir la propriété lorsque la fonction supposée continue est g.
La définition des fonctions continues par morceaux associe à f une subdivision $-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \pi$ et, pour chaque $j = 0, .., N-1$, une fonction f_j continue sur $[x_j, x_{j+1}]$ qui coïncide avec f sur$]x_j, x_{j+1}[$.
Compte tenu de la définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux, on aura, pour tout réel x,

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)dt \tag{1.3}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{n-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}} hj(t,x)dt \tag{1.4}$$

avec $h_j(t,x) = f_j(t)g(x-t)$.
Puisque g est supposée continue sur $\mathbb{R}$,la fonctionh_j est continue sur $[x_j, x_{j+1}] \times \mathbb{R}$.

La fonction $x \to \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} h_j(t,x)dt$ est donc continue sur $\mathbb{R}$ en vertu des résultats classiques sur les intégrales dépendant d'un paramètre .
Compte tenu de(1.4), il en résulte bien que $f * g$ est continue sur $\mathbb{R}$. $\blacksquare$

1.2 Séries de Fourier

1.2.1 Polynômes trigonométriques

Définition 1.2.1 *On appelle polynôme trigonométrique toute fonction P définie sur*$\mathbb{R}$ *par une expression de la forme*

$$P(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \exp(inx) \tag{1.5}$$

où N est un entier naturel et $c_{-n}, ..., c_{-1}, c_0, c_1, ..., c_n$sont des coefficients complexes. Lorsque l'un au moins des coefficients c_{-n} ou c_n est non nul, on dit que N est le degré de P.

Étant donné un polynôme (au sens habituel)

$$Q = \sum_{n=0}^{N} a_n X_n$$

à coefficients réels ou complexes, on sait que la connaissance de la fonction $x \to Q(x)$ détermine les coefficients an via la relation

$$a_n = \frac{1}{n\,!} Q^{(n)}(0).$$

On va voir qu'une propriété analogue existe pour les polynômes trigonométriques. Elle est basée sur le lemme suivant, dont la démonstration est immédiate.

Lemme 1.2.2 *Soient n et p deux entiers relatifs. On a*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \exp(i(n-p)t)dt = \begin{cases} 2\,\pi & si \quad n = p \\ 0 \quad si & n \neq p \end{cases}$$

Soit alors P le polynôme trigonométrique donné par la relation (1.5), et soit un entier p vérifiant $-N \leq p \leq N$. On a

$$p(t)\exp(-ipt) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \exp(i(n-p)t)$$

Compte tenu du lemme (1.2.2), on en déduit

$$\int_{-\pi}^{\pi} p(t)\exp(-ipt)dt = 2\pi c_p$$

En changeant le nom des indices, on a donc établile résultat suivant.

Proposition 1.2.3 *Soit P le polynôme trigonométrique donné par l'expression (1.5). Pour tout entier n avec $-N \leq n \leq N$,on a*

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(t)\exp(-int)dt.$$

Remarque 1.2.4 *On montre de même que l'on a*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(t)\exp(-int)dt = 0, \text{ pour } |n| > N$$

1.2.2 Coefficients de Fourier

Par analogie avec les coefficients d'un polynôme trigonométrique, on est amené à la définition suivante.

Définition 1.2.5 *Soit f une fonction $2\pi-$périodique continue par morceaux. On définit les coefficients de Fourier de f par*

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\exp(-int)dt, \text{ pour tout } n \text{ dans } \mathbb{Z}$$

On a immédiatement quelques propriétés élémentaires des coefficients de Fourier.

Lemme 1.2.6 *Soit f une fonction 2π-périodique continue par morceaux et soit*

$$g(t) = f(t+a).$$

Pour tout n de $\mathbb{Z}$,on a

$$\hat{g}(n) = \exp(ina)\hat{f}(n)$$

Preuve. En utilisant le changement de variable $t = s - a$, on obtient

$$\begin{aligned} \hat{g}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+a)\exp(-ina)dt \\ &= \frac{\exp(ina)}{2\pi}\int_{a-\pi}^{a+\pi} f(s)\exp(-ins)ds \end{aligned}$$

Il suffit alors d'appliquer le lemme 1.1.9) pour conclure. ∎

Lemme 1.2.7 *Soit f une fonction 2π-périodique de classe C^1sur $\mathbb{R}$. Pour tout n de Z,on a*

$$\hat{f'}(n) = in\hat{f}(n)$$

Preuve. En intégrant par parties, on a facilement

$$\hat{f'}(n) = \frac{1}{2\pi}\left[\exp(-int)f(t)\right]_{-\pi}^{\pi} + in\hat{f}(n)$$

Le terme entre crochets est nul par périodicité, d'où le résultat. ∎

1.2.3 Séries de Fourier

Définition 1.2.8 *Soit f une fonction $2\pi-$périodique continue par morceaux. Pour tout entier naturel N,on appelle $N-$ème somme de Fourier de f, le polynôme trigonométrique $P_N f$ défini par*

$$P_N f(x) = \sum_{n=-N}^{n} \hat{f}(n)\exp(inx)$$

Définition 1.2.9 *On dit que la série de Fourier de f converge simplement (resp. uniformément) sur une partie X de $\mathbb{R}$, si la suite de fonctions $(P_N\ f\ )_{N\geq 0}$ converge simplement (resp. uniformément) sur X.*
La limite de cette suite est alors appelée somme de la série de Fourier de f; sa valeur en tout point x de X est notée $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)\exp(inx)$.

Écriture réelle de la série de Fourier

Soit f une fonction 2π-périodique continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier $n \geq 1$ on a

$$\begin{aligned}\hat{f}(-n)\exp(-inx)+\hat{f}((n)\exp(inx) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\exp(in(t-x))dt+\exp(-in(t-x))\right]dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(n(t-x))dt\end{aligned}$$

En remarquant que

$$\cos(n(t-x)) = \cos(nt)\cos(nx)+\sin(nt)\sin(nx)$$

On obtient ainsi

$$\hat{f}(-n)\exp(-inx)+\hat{f}((n)\exp(inx) = a_n\cos nx + b_n \sin nx$$

avec

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\ dt \quad \text{et } b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin\ nt\ dt.$$

On convient de pose

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt,$$

Ce qui est cohérent avec l'expression de a_n que l'on vient d'obtenir pour $n \geq 1$.
On a alors

$$P_N f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx + b_n\sin nx).$$

Posons

$$f_0(x) = \frac{a_0}{2} \text{ et } f_n(x) = a_n\cos nx + b_n\sin nx, \text{ pour } n \geq 1$$

On voit donc que la suite $(P_N f)_{N\geq 0}$ s'identifie à la suite des sommes partielles de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$, puisque l'on a

$$P_N f = f_0 + ... + f_N$$

Lemme 1.2.10 *Si la fonction f est à valeurs réelles, on a*

$$a_n = 2 R\acute{e}el\ \hat{f}(n) \ \ et\ b_n = -2\operatorname{Im}\hat{f}(n)\ \ .$$

Preuve. Puisque f est réelle ; on a

$$\begin{aligned} R\acute{e}el\left(f(t)\exp(-int)\right) &= f(t)\cos nt \ \text{ et } \operatorname{Im}\left(f(t)\exp(-int)\right) \\ &= -f(t)\sin nt \end{aligned}$$

le lemme s'en déduit aisément . ■

1.3 L'approche (pré) hilbertienne

Cette section va placer la théorie des séries de Fourier dans une démarche d'analyse fonctionnelle : plutôt que de considérer les fonctions individuellement, celles-ci seront vues commes les points d'un certain espace vectoriel, unespace fonctionnel, dans lequel des considérations de géométrie ou d'algèbre linéaire peuvent jeter un éclairage nouveau et efficace sur les questions abordées.

1.3.1 Un espace préhilbertien

Soit E l'espace vectoriel des fonctions 2π-périodiques continues par morceaux.
Pour tout couple $(f;g)$ déléments de E, on pose

$$\langle f \backslash g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\overline{g(t)}dt$$

On définit ainsi une application sur $E \times E$, à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Étant donnés trois éléments f, g, h de E et λ, μ deux nombres complexes, on vérifie trivialement la propriété dite de sesquilinéarité

$$\langle f \backslash \lambda g + \mu h\rangle = \overline{\lambda}\langle f\backslash g\rangle + \overline{\mu}\langle f \backslash h\rangle$$

et

$$\langle \lambda f + \mu g \backslash h \rangle = \lambda \langle f \backslash h \rangle + \mu \langle g \backslash h \rangle$$

et celle de symétrie hermitienne

$$\langle g \backslash f \rangle = \overline{\langle f \backslash g \rangle}$$

On a aussi la positivité

$$\langle f \backslash f \rangle \geq 0$$

Nous avons donc défini une forme sesquilinéaire hermitienne positive.

On considère à présent l'ensemble F des fonctions f appartenant à E et continues à droite ; autrement dit, celles qui vérifient en outre l'égalité $f\left(a^{+}\right) = f\left(a\right)$ en tout point a de $\mathbb{R}$. Cet ensemble F est est évidemment un sous-espace vectoriel de E. De plus, en restriction à F, l'application $(f\ , g) \rightarrow \langle f \backslash g \rangle$ devient un produit scalaire : pour le voir, il suffit de vérifier que pour $f \in F$, la condition $\langle f \backslash f \rangle = 0$ implique que f est nulle.
On sait déjà que l'on a $f\left(a\right) = 0$ en tout point a où f est continue. Si a est un point de discontinuité, la définition des fonctions continues par morceaux montre qu'il existe un intervalle $I = [a - \delta, a + \delta]$ tel que f soit continue en tout point de $I \setminus \{a\}$, donc nulle sur $I \setminus \{a\}$. il s ensuit que lon a $f\left(a^{+}\right) = 0$, et donc $f\left(a\right) = 0$ par l'hypothese de continuite a droite.

Muni du produit scalaire $\langle . \backslash\ . \rangle$, l'espace F constitue ce que l'on appelle un espace préhilbertien. C'est en particulier un espace vectoriel normé pour la norme associée au produit scalaire

$$\|f\| = \langle f \mid f \rangle^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \mid f\left(t\right) \mid^{2} dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Définition 1.3.1 *On appelle espace de Hilbert un espace préhilbertien qui est complet pour la norme associée au produit scalaire.*

Dans la suite, pour tout n de $\mathbb{Z}$, on note e_n l'élément de F donné par

$$e_n\left(x\right) = \exp(inx)$$

On a alors deux lemmes élémentaires.

Lemme 1.3.2 *La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthonormale dans F,Ce qui signifie que*

$$\begin{aligned} \langle e_m, e_n \rangle &= 0, \ \textit{pour}\ m \neq n \\ \langle e_m, e_n \rangle &= 1, \ \textit{pour}\ m = n \end{aligned}$$

Preuve. Pour $m \neq n$, on a

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} e_m(t)\,\overline{e_n(t)}dt &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)t}dt \\ &= \left[\frac{e^{i(m-n)t}}{i(m-n)}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0\end{aligned}$$

Pour $m = n$, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} e_m(t)\,\overline{e_n(t)}dt = \int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi$$

■

Lemme 1.3.3 *Pour tout élément f de F et pour tout entier relatif n, on a*

$$\hat{f}(n) = \langle f \mid e_n \rangle .$$

Preuve. C'est immédiat à partir des définitions. ■

1.3.2 Interprétation des sommes de Fourier

Pour tout entier nature N, on note F_N le sous-espace vectoriel de F engendré par $e_{-N}, .., e_{-1}, e_1, ...e_N$, autrement dit le sous-espace des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à N. On a alors le résultat suivant.

Proposition 1.3.4 *Pour toute fonction f de F et tout entier nature N, la somme de Fourier $P_N f$ est la projection orthogonale de f sur F_N.*

Preuve. D'après le lemme(1.3.3),on a

$$P_N\, f = \sum_{n=-N}^{N} \langle f \mid e_n \rangle\, e_n$$

Clairement, $P_N f$ appartient à F.
En utilisant les lemmes (1.3.2) et (1.3.3), on a aussi

$$f - P_N \perp F_N .$$

La proposition en résulte. ■

Corollaire 1.3.5 *Soient f une fonction de F, et N un entier naturel..Pour tout polynôme trigonométrique Q de degré inférieur ou égal à N, on a*

$$\| f - Q \| \geq \| f - P_N \|$$

Et l'égalité a lieu si et seulement si

$$Q = P_N f$$

Preuve. On a

$$f - Q = g + h \text{ avec } g = f - P_N f \text{ et } h = P_N\, f - Q$$

On remarque que h appartient à F_N.
Par conséquent, les fonctions g et h sont orthogonales et le théorème de Pythagore donne la relation

$$\| f - Q \|^2 \geq \| g \|^2 + \| h \|^2$$

Il en resulte que l'on a

$$\| f - Q \|^2 \geq \| g \|^2$$

et que l'égalité a lieu si et seulement si $h = 0$, d'où le corollaire. ■

Remarque 1.3.6 *Le carré de la norme d'une fonction de F représente la valeur moyenne du carré de cette fonction sur une période. Pour cette raison, on énonce souvent le corollaire (1.3.5) en disant que parmi les polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à N, la somme de Fourier $P_N f$ est celui qui réalise la meilleure approximation de f au sens de l'écart quadratique moyenne.*

1.4 Inégalité de Bessel et égalité de Parseval

On commence par une considération simple sur les familles indexées par $\mathbb{Z}$.
Étant donnée une famille $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de réels positifs, soit la suite $(A_N)_{N\geq 0}$ donnée par

$$A_N = \sum_{n=-N}^{N} a_n.$$

On se trouve donc dans l'un des deux cas suivants :
i) la suite $(A_N)_{N\in\mathbb{Z}}$ est majorée : dans ce cas, elle converge vers une certaine limite A dans $\mathbb{R}$ (car $(A_N)_{N\geq 0}$ est croissante).

On dit alors que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n$ converge et que le nombre A est sa somme ;on note

$$A = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n.$$

ii) la suite $(A_N)_{N\geq 0}$ n'est pas majorée : dans ce cas, on a

$$\lim_{N\to\infty} A_N = +\infty$$

Théorème 1.4.1 *(égalité de Parseval) Soit f une fonction $2\pi-$périodique continue par morceaux. Alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \mid \hat{f}(n) \mid^2$converge et on a*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mid \hat{f}(n) \mid^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mid f(t) \mid^2 dt$$

Preuve. Nous pouvons seulement démontrer une partie du résultat, à savoir la convergence de la série et la majoration

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mid \hat{f}(n) \mid^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mid f(t) \mid^2 dt$$

Cette majoration est connue sous le nom d'inégalité de Bessel. L'égalité de Parseval nécessite beaucoup plus de travail et sera démontréeultérieurement. Pour établir l'inégalité de Bessel, on commence par le cas où f appartient à F.
Dans ce cas, on applique le théorème de Pythagore comme dans la preuve du corollaire (1.3.5), en prenant $Q = 0$, on obtient ainsi

$$\|f\|^2 = \|f - P_N f\|^2 + \|P_N f\|^2 \geq \|P_N f\|^2$$

Or, compte tenu des lemmes (1.3.2) et (1.3.3), on a facilement

$$\|P_N\, f\|^2 \geq \sum_{n=-N}^{N} \mid \hat{f}(n) \mid^2$$

Il vient donc, pour tout entier naturel N,

$$\sum_{n=-N}^{N} \mid \hat{f}(n) \mid^2 \leq \| f \|^2$$

En posant

$$a_n = \mid \hat{f}(n) \mid^2,$$

on voit que l'on se trouve ainsi dans le cas (i) décrit au début du paragraphe : on a en effet

$$A_N \leq \parallel f \parallel^2$$

Par suite, la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n$ converge , et sa somme $\lim_{N \to \infty} A_N$ et majoree par $\parallel f \parallel$.
C'est-à-dire par

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mid f(t) \mid^2 dt$$

L'inégalité de Bessel est ainsi établie pour les fonctions f de F.
Maintenant, supposons que f soit un élément quelconque de E.
On définit un élément f_0 de F en posant

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } f \text{ est continue en} x, \\ f(x^+) \text{ sinon.} \end{cases}$$

Sur $[-\pi, \pi]$, les fonctions f et f_0 diffèrent en un nombre fini de points : les points de discontinuité de f.
Par suite, on a

$$\hat{f}(n) = \hat{f}_0(n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{Z},$$

Et

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mid f(t) \mid^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} \mid f_0(t) \mid^2 dt$$

L'inégalité de Bessel pour l'élément f de E se ramène ainsi à l'inégalité de Bessel pour l'élément $f_0$de F. ■

Corollaire 1.4.2 *Soit f une fonction 2π-périodique continue par morceaux. On a*

$$\lim_{|n| \to \infty} \hat{f}(n) = 0.$$

Preuve. Avec les notations de la preuve précédente, si on pose

$$A = \lim_{N \to \infty} A_N,$$

on a

$$\lim_{N \to \infty} A_N - A_{N-1} = A - A = 0.$$

En remarquant que

$$A_N - A_{N-1} = \mid \hat{f}(-N) \mid^2 + \mid \hat{f}(N) \mid^2$$

Et que la somme de deux suites positives converge vers 0 si et seulement si chacune des deux suites converge vers 0, on obtient le résultat annoncé. ■

Corollaire 1.4.3 *(lemme de Riemann-Lebesgue) Soit g une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a,b]$. On pose*

$$\begin{aligned} I_n &= \int_a^b g(t)\exp(int)dt,\ J_n = \int_a^b g(t)\cos(nt)dt \\ K_n &= \int_a^b g(t)\sin(nt)dt. \end{aligned}$$

On a alors

$$\lim_{|n|\to\infty} I_n = \lim_{|n|\to\infty} J_n = \lim_{|n|\to\infty} K_n = 0$$

Preuve. On a

$$J_n = \frac{1}{2}(\ I_n + I_{-n})$$

et

$$K_n = \frac{1}{2i}(I_n - I_{-n})$$

On voit donc qu'il suffit de savoir traiter l'intégrale I_n pour obtenir les deux autres. On distingue alors deux cas.
(i) Premier cas : On a $b-a<2\pi$.Soit alors f la fonction $2\pi-$périodique continue par morceaux définie par $f(t)=g(t)$ pour $t\in[a,b]$ et $f(t)=0$ pour $t\in\,]b,a+2\pi[$ .On remarque que l'on a $I_n=\hat{f}(n)$ et on conclut en appliquant le corollaire (1.4.2).
(ii) Deuxième cas : On a $b-a\geq 2\pi$. On découpe alors $[a,b]$ en plusieurs intervalles de longueur strictement inférieure à 2π et on applique le premier cas sur chacun de ces intervalles. ■

1.5 Séries trigonométriques

A une famille de coefficients complexes $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on peut associer une suite de polynômes trigonométriques $(S_N)_{N\geq 0}$ donnée par

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \exp(inx).$$

En calquant la définition de la convergence des séries de Fourier, on dit que la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \exp(inx)$ converge simplement (resp. uniformément) sur une partie X de $\mathbb{R}$ si la suite $(S_N)_{N\geq 0}$converge simplement (resp. uniformément) sur $\mathbb{R}$, la limite étant alors appelée somme de la série et notée $\sum_{n=-N}^{N} c_n \exp(inx)$.

Bien sûr, la série de Fourier d'une fonction $2\pi-$périodique continue par morceaux est une série trigonométrique.

Réciproquement, il est naturel de se demander sous quelles conditions une série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \exp(inx)$ donnée est une série de Fourier. Plus précisément, tant donnée une série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \exp(inx)$, sous quelles conditions existe-t-il une fonction $2\pi-$périodique continue par morceaux f telle que l'on ait $c_n = \hat{f}(n)$ pour tout n ?.

La proposition (1.5.1)ci-après fournit une condition suffisante.

Proposition 1.5.1 *Si une série trigonométrique converge uniformément sur* $\mathbb{R}$*, alors elle est la série de Fourier de sa somme.*

Preuve. Soient $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \exp(inx)$ la série trigonométrique considérée, f sa somme et n un entier relatif.

Pour $N \geq |n|$, on a

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_N(x) \exp(-inx)dx = \widehat{S_N}$$

avec

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \exp(inx)$$

En remrquant que

$$| S_N(x) \exp(-inx) - f(x) \exp(-inx) | = | S_N(x) - f(x) |$$

En utilisant l'hypothèse, on voit que la suite de fonctins $x \to S_N(x) \exp(-inx)$ converge uniformément vers $x \to f(x) \exp(-inx)$ sur $\mathbb{R}$, donc sur $[-\pi, \pi]$.

On en déduit que

$$\lim_{N\to\infty} \widehat{S_N} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \exp(-inx)dx = \hat{f}(n)$$

D'où le résultat. ■

Chapitre 2

Convergence

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la convergence des séries de Fourier en tant que séries de fonctions. On va donc donner quelques conditions suffisantes de convergence simple ou uniforme. Le point de départ est une représentation des sommes de Fourier sous forme de produit de convolution.

2.1 Une représentation des sommes de Fourier

Définition 2.1.1 *Soit N un entier naturel. On appelle noyau de Dirichlet (pour le rang N) la fonction D_N définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} \exp(int).$$

Nous aurons besoin de deux lemmes élémentaires sur le noyau de Dirichlet.

Lemme 2.1.2

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) = 1.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le lemme (1.3.2) en remarquant que l'on a

$$D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$$

et que la quantité à calculer n'est autre que $\langle D_N \mid e_0 \rangle$. ■

Lemme 2.1.3 *On a*

$$D_N(t) = \begin{cases} \frac{\sin\left((2N+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}, \text{ si } t \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 2N+1, \text{ si } t \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

Preuve. Le calcul pour $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ est immédiat vu la définition de D_N.
Pour $t \notin 2\pi Z$, on a

$$\begin{aligned} D_N(t) &= \exp(-iNt)(1+\exp(it)+...+\exp(2iNt)) \\ &= \exp(-iNt)(1+\exp(it)+...+(\exp(it))^{2N}) \\ &= \exp(-iNt)\left(\frac{1-\exp(i(2N+1)t)}{1-\exp(it)}\right) \\ &= \left(\frac{\exp(-iNt)-\exp(i(N+1)t)}{1-\exp(it)}\right) \\ &= \frac{\exp(i\frac{t}{2})\left(\exp(-i(2N+1)\frac{t}{2}))-\exp(i(2N+1)\frac{t}{2}))\right)}{\exp(i\frac{t}{2})\left(\exp(-i\frac{t}{2}))-\exp(i\frac{t}{2})\right)} \\ &= \frac{\sin\left((2N+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \end{aligned}$$

■

Le rôle important que va jouer le noyau de Dirichlet dans l'étude de la convergence des séries de Fourier est dévoilé par la proposition suivante.

Proposition 2.1.4 *Soient f une fonction $2\pi-$périodique continue par morceaux et N un entier naturel. On a*

$$P_N f = D_N * f$$

Preuve. Pour tout réel x, on a

$$\begin{aligned} p_N\ f(x) &= \sum_{n=-N}^{N}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-int}dt\right)e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in(x-t)}dt = f * D_N(x) \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

2.2 Le théorème de convergence ponctuelle de Dirichlet

Théorème 2.2.1 *(Dirichlet). Soit f une fonction $2\pi-$périodique de classe C^1 par morceaux. Alors la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout x de $\mathbb{R}$*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)\exp(inx) = \frac{1}{2}\left(f\left(x^{+}\right)+f\left(x^{-}\right)\right)$$

Preuve. Remarquons d'abord qu'il suffit d'établir la convergence de la série, et de montrer que sa somme a bien la valeur annoncée, au point $x = 0$.
On doit alors distinguer deux cas.
(i)Premier cas : la fonction f est continue en 0.
On a alors

$$f\left(0^{-}\right) = f\left(0^{+}\right) = f(0)$$

Il s'agit donc de démontrer que l'on a

$$\lim_{n\to\infty} P_N f(0) = f(0)$$

Compte tenu du lemme (2.1.2) et de la proposition (2.1.4), on a

$$\begin{aligned} P_N f(0) - f(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) f(-t)\,dt - f(0)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\left(f(-t) - f(0)\right)dt \end{aligned}$$

Posons $g(t) = f(-t) - f(0)$, de sorte que

$$P_N f(0) - f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\, g(t)\,dt$$

D'après le lemme(2.1.3), on a par ailleurs

$$D_N(t)\, g(t) = \sin\left((2N+1)\frac{t}{2}\right), \text{ pour } t \in [-\pi,\pi]\setminus\{0\}$$

Nous allons voir que la fonction $t \to \frac{g(t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ apparaissant dans l'expression précédente a une limite à gauche et à droite en 0. Pour cela, on observe d'abord que, puisque f est

supposée de classe C^1par morceaux et continue en 0, il existe un réel $\delta > 0$ tel que f soit continue sur $[0, \delta]$ et de classe C^1sur $]0, \delta]$.
En appliquant le théorème des accroissements finis entre 0 et un point t quelconque de $[-\delta, 0[$, on a l'existence d'un réel $c_t \in]-t, 0[$ tel que.

$$f(-t) - f(0) = -t\grave{f}(c_t)$$

On obtient ainsi

$$\frac{g(t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{-t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\grave{f}(c_t)$$

De l'inégalité $-t < c_t < 0$ et du fait que $\sin\left(\frac{t}{2}\right) \sim \frac{t}{2}$, on obtient finalement

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{g(t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = -2\grave{f}\left(0^-\right)$$

On montrerait de la même manière que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{g(t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = -2\grave{f}\left(0^-\right)$$

Du fait que g est continue par morceaux sur $[-\pi, \pi]$ et de l'existence de ces limites, on tire que la fonction h définie par

$$h(t) = \frac{g(t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \text{pour } t \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\} \ \text{ et } h(0) = 0$$

(ou une quelconque autre valeur) est continue par morceaux sur$[-\pi, \pi]$.
Par suite

$$\begin{aligned} P_N f(0) - f(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin\left((2N+1)\frac{t}{2}\right) h(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi}(X_N - Y_N) \end{aligned}$$

avec

$$X_N = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin Nt)\cos(\frac{t}{2}) h(t)\, dt \text{ et } Y_N = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos Nt)\sin(\frac{t}{2}) h(t)\, dt$$

Or, d'après le lemme de Riemann-Lebesgue (1.4.3), on a

$$\lim_{t \to \infty} X_N = \lim_{t \to \infty} Y_N = 0$$

Il en résulte bien que

$$\lim_{n\to\infty} P_N\ f(0) = f(0)$$

$ii)$ Deuxième cas : f est discontinue en 0.
On définit deux fonctions f_0 et f_1 par

$$f_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) & \text{pour } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ \frac{1}{2}(f(0^+) + f(0^-)) & \text{pour } x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

et

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) & \text{pour } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 0, & \text{pour } x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

Il est facile de voir que f_0 et f_1 sont $2\pi-$périodiques, de classe C^1 par morceaux.
On rappelle maintenant que l'on a

$$P_N f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\, f(-t)\, dt$$

Or, sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, la formule f coincide avec $f_0 + f_1$ sauf peut-être en un point (le point 0).
Il en résulte que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\, f(-t)\, dt &= \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\,(f_0(-t) + f_1(-t))dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\, f_0(-t)\, dt + \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\, f_1(-t)\, dt \end{aligned}$$

On constate par ailleurs que la fonction f_1 est impaire, tandis que D_N est paire, ce qui implique facilement

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\, f_1(-t)\, dt = 0$$

Il reste donc

$$P_N f(0) = P_N f_0(0)$$

Pour conclure, il suffit maintenant d'observer que la fonction f_0 est continue en 0 : c'est une conséquence immédiate de sa définition.

Par le premier cas déjà traité, on peut alors affirmer que l'on a

$$\lim_{N\to\infty} P_N\ f_0\left(0\right) = f_0\left(0\right)$$

Nous avons ainsi obtenu

$$\lim_{N\to\infty} P_N f_0\left(0\right) = \frac{1}{2}\left(f\left(0^+\right) + f\left(0^-\right)\right)$$

Ce qui établit le deuxième cas. ■

Remarque 2.2.2 *Si la fonction f possède des points de discontinuité, la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$ en effet, la somme de la série est alors discontinue bien que ses sommes partielles soient continues.*

2.2.1 Un résultat de convergence uniforme

On commence par un résultat préparatoire qui est intéressant en lui-même .

Proposition 2.2.3 *Soit f une fonction $2\pi-$périodique de classe C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$.*
Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mid \hat{f}\left(n\right) \mid$ converge .

Preuve. D'après le lemme (1.2.7), on sait que pour $n \neq 0$. on a

$$\hat{f}\left(n\right) = \frac{1}{in}\widehat{\grave{f}}\left(n\right)$$

Donc

$$\mid \hat{f}\left(n\right) \mid = \frac{1}{\mid n \mid} \mid \widehat{\grave{f}}\left(n\right) \mid$$

Etant donné un entier $N \geq 1$, cette remarque va nous permettre de relier la somme

$$A_N = \sum_{n=-N}^{N} \mid \hat{f}\left(n\right) \mid$$

à un produit scalaire.
Pour cela, on introduit les polynômes trigonométriques

$$Q_N = \sum_{n=-N}^{N} \mid \widehat{\grave{f}}\left(n\right) \mid e_n \text{et} \sum_{\{n=1:1\leq |n| \leq N\}} \frac{1}{\mid n \mid} e_n$$

On a alors précisément

$$A_N = \mid \hat{f}(0) \mid + \langle Q_N \mid R_N \rangle$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\langle Q_N \mid R_N \rangle \leq \parallel Q_N \parallel \parallel R_N \parallel = \left(\sum_{n=-N}^{N} \mid \widehat{\hat{f}}(n) \mid^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\{n=1:1\leq |n| \leq N\}} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

On a par ailleurs, en utilisant le théorème (1.4.1)

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^{N} \left| \widehat{\hat{f}}(n) \right|^2 &\leq \sum_{n=-N}^{+\infty} \left| \widehat{\hat{f}}(n) \right|^2 \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \widehat{\hat{f}}(n) \right|^2 dt \end{aligned}$$

Enfin, on a

$$\begin{aligned} \sum_{\{n=1:1\leq |n| \leq N\}} \frac{1}{n^2} &= 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \\ &\leq 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} \end{aligned}$$

En regroupant ces inégalités, on obtient que la suite$(A_N)_{N\geq 0}$ est majorée par la constante

$$\left| \hat{f}(0) \right| + \sqrt[2]{\frac{\pi}{6}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(t)^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Ce qui établit le résultat annoncé. ■

Théorème 2.2.4 *Soit f une fonction $2\pi-$périodique de classe C^1par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$. Alors la série de Fourier de f converge vers f uniformément sur $\mathbb{R}$.*

Preuve. D'après le théorème de Dirichlet, on sait déjà qu'il y a convergence simple vers f, puisque l'hypothèse de continuité implique

$$\frac{1}{2}(f\left(x^+\right) + f(x^-)) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Posons maintenant

$$f_0(x) = \hat{f}(0) \text{ et } f_n(x) = \hat{f}(-n)e^{-inx} + \hat{f}(n)e^{inx}, n \geq 1$$

Pour tout entier $n \geq 1$,on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \mid f_n(x) \mid \leq \mid \hat{f}(-n) \mid + \mid \hat{f}(n) \mid$$

Et la série numérique

$$\sum_{n\geq 1}(\mid \hat{f}(-n) + \hat{f}(n) \mid)$$

converge d'après la proposition (2.2.3).
Par suite, la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$. ■

2.3 Convergence en moyenne

On a vu que la série de Fourier d'une fonction $2\pi-$périodique de classe C^1par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$ converge vers f uniformément sur $\mathbb{R}$. Si l'hypothèse de régularité C^1par morceaux est omise, c'est-à-dire si la fonction est seulement supposée $2\pi-$périodiqueet continue sur $\mathbb{R}$.

2.3.1 Convergence en moyenne d'une suite numérique

Définition 2.3.1 *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de nombres complexes converge en moyenne vers a dans $\mathbb{C}$ si l'on a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}}{n} = a$$

Proposition 2.3.2 *(lemme de Cesàro). Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes qui converge vers une limite a dans $\mathbb{C}$. Alors $(u_n)_{n\geq 0}$converge aussi en moyenne vers a.*

Preuve. Soit un réel $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe un rang $N(\varepsilon)$ tel que

$$(n \geq N(\varepsilon)) \implies (\mid u_n - a \mid \leq \varepsilon)$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{u_0 + ... + u_{n-1}}{n} - a &= \frac{u_0 + ... + u_{n-1} - na}{n} \\ &= \frac{(u_0 - a) + ... + (u_{n-1} - a)}{n} \end{aligned}$$

Donc pour $n \geq N(\varepsilon) + 1$

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{u_0 + ... + u_{n-1}}{n} - a \right| \\
\leq\ & \frac{|u_0 - a| + ... + \left|u_{N(\varepsilon)-1} - a\right|}{n} + \frac{\left|u_{N(\varepsilon)} - a\right| + ...+ | u_{n-1} - a |}{n} \\
\leq\ & \frac{A(\varepsilon)}{n} + \frac{(n - N(\varepsilon))\,\varepsilon}{n} \\
\leq\ & \frac{A(\varepsilon)}{n} + \varepsilon
\end{aligned}$$

avec

$$A(\varepsilon) = |u_0 - a| + |u_1 - a| + ... + \left|u_{N(\varepsilon)-1} - a\right|$$

Posons

$$\grave{N}(\varepsilon) = max(\lfloor A(\varepsilon)/\varepsilon \rfloor, N(\varepsilon)) + 1,$$

où $\lfloor . \rfloor$ désigne la partie entière.
Pour $n \geq \grave{N}(\varepsilon)$, on a $A(\varepsilon)/n \leq \varepsilon$ et, par ce qui précède,

$$\left| \frac{u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}}{n} - a \right| \leq 2\varepsilon$$

En posant $N^2(\varepsilon) = \grave{N}(\varepsilon/2)$, on a donc établi

$$(n \geq N^2(\varepsilon)) \Rightarrow \left(\left| \frac{u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}}{n} - a \right| \leq \varepsilon \right)$$

Ce qui établit le lemme ■

2.4 Sommes de Cesàro et noyau de Fejér

Définition 2.4.1 *Soit f une fonction $2\pi-$périodique continue par morceaux. Pour tout entier $N \geq 1$, on appelle $N-$ème somme de Cesàro-Fejér de f la moyenne des N premières sommes de Fourier de f.*
C'est-à-dire le polynôme trigonométrique $\sigma_N f$ défini par

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{N}\left(P_0 f(x) + P_1 f(x) + ... + P_{N-1} f(x)\right)$$

Proposition 2.4.2 *On a*

$$\sigma_N f = K_N * f,$$

où K_N est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$K_N(t) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_N(t)$$

Preuve. En utilisant la proposition (2.1.4)et la linéarité du produit de convolution par rapport à chaque facteur, on a

$$\begin{aligned}\sigma_N\ f &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} P_N \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(Dn * f) \\ &= (\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} Dn) * f\end{aligned}$$

■

Définition 2.4.3 *La fonction K_N définie dans la proposition (2.4.2) s'appelle noyau de Fejér (pour le rang N).*

Les deux résultats qui suivent constituent, pour le noyau de Fejér, l'analogue des lemmes (2.1.2) et (2.1.3) sur le noyau de Dirichlet.

Lemme 2.4.4 *On a*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) = 1$$

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la définition de K_N et du lemme (2.1.2).

■

Lemme 2.4.5

$$K_N(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{N}\left(\frac{\sin\left(\frac{Nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)^2, & \textit{pour } t \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ N, & \textit{pour } t \in 2\pi\mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

Preuve. On utilise seulement le lemme (2.1.3). ■

2.4.1 Le théorème de convergence en moyenne de Fejér

Théorème 2.4.6 *(Fejér). Soit f une fonction $2\pi-$périodique continue sur $\mathbb{R}$. Alors la suite des sommes de Cesàro-Fejér$(\sigma_N f)_{N\geq 1}$ converge vers f uniformément sur $\mathbb{R}$.*

Preuve. Compte tenu de la proposition (2.4.2) et du lemme (2.4.4), on a, pour tout x de $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\sigma_N f(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k_N(t) f(x-t)dt - f(x)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k_N(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k_N(t)(f(x-t) - f(x))dt\end{aligned}$$

Soit alors un réel δ , avec$0 < \delta < \pi$.
On va découper l'intervalle d'intégration $[-\pi, \pi]$ en trois morceaux : $[-\pi, -\delta], [-\delta, \delta], [\delta, \pi]$ et évaluer les trois intégrales ainsi obtenues.
On a d'abord, en majorant le module de l'intégrale par l'intégrale du module et en tenant compte du fait que $K_N$est à valeurs positives

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} k_N(t)(f(x-t) - f(x))dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} k_N(t)(|f(x-t)| + |f(x)|\, dt \tag{2.1}$$

La fonction f est continue sur l'intervalle fermé borné $[-\pi, \pi]$.
Donc bornée sur cet intervalle.
Par périodicité, elle est aussi bornée sur $\mathbb{R}$; on posera $m = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$.
On remarque aussi que pour tout $t \in [-\pi, -\delta]$

$$0 \leq k_N(t) \leq \frac{1}{N(\sin(t/2))^2}$$

Compte tenu de ces remarques et de la majoration grossière

$$|f(x-t) - f(x)||f(x-t)| + |f(x)|,$$

on déduit de (2.1)que l'on a

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} k_N(t)(f(x-t) - \ f(x))dt\right| \leq \frac{c(\delta)}{N} \tag{2.2}$$

avec

$$C(\delta) = \frac{m}{p}\int_{-\pi}^{-\delta} \frac{dt}{(\sin(t/2))^2}$$

Les mêmes arguments fournissent une majoration identique pour l'intégrale sur $[\delta, \pi]$.
Il reste donc à évaluer l'intégrale sur $[-\delta, \delta]$.
Sur cet intervalle, les majorations grossières utilisées précédemment ne fonctionnent plus.
On procède en remarquant d'abord que, puisque f est continue sur le compact $[-2\pi, 2\pi]$,elle y est uniformément continue.
Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tq } \forall (y, y^1) \in [-2\pi, 2\pi], |y - y^1| \leq \delta(\varepsilon) : |f(y^1) - f(y)| \leq \varepsilon$$

On peut évidemment supposer $\delta(\varepsilon) < \pi$.
Soient à présent x un point quelconque de $\mathbb{R}$ et t un point quelconque de $[-\delta(\varepsilon), \delta(\varepsilon)]$.
On peut écrire $x = y + 2k$ où $y \in [-\pi, \pi]$ et k est un entier relatif convenable.
Si l'on pose $y_1 = y - t$,la périodicité de f implique

$$f(y_1) - f(y) = f(x - t) - f(x)$$

De plus, on a $y_1 \in [-2\pi, 2\pi]$.
Par ce qui précède, on a alors

$$|f(x - t) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,on a, en tenant compte du lemme (2.4.4)

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta(\varepsilon)}^{\delta(\varepsilon)} k_N(t)(f(x-t) - f(x)dt \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta(\varepsilon)}^{\delta(\varepsilon)} |k_N(t)(f(x-t) - f(x)| \, dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\delta(\varepsilon)}^{\delta(\varepsilon)} k_N(t) dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k_N(t) dt = \varepsilon \end{aligned}$$

On pourra remarquer, plus précisément, que la positivité de K_N intervient pour la première et la troisième inégalité.
Au final, les majorations qui précèdent et l'inégalité (2.2) appliquée avec $\delta = \delta(\varepsilon)$ donnent, pour tout entier $N \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$

$$| \sigma_N f(x) - f(x) | \leq \frac{A(\varepsilon)}{N} + \varepsilon,$$

avec $A(\varepsilon) = C(\delta(\varepsilon))$.
On procède alors comme à la fin de la preuve de la proposition (**??** pour trouver un entier $\acute{N}(\varepsilon)$ tel que l'on ait

$$N \geq \acute{N}(\varepsilon)) \Longrightarrow (\sup \mid \sigma_N f(x) - f(x) \mid \leq \varepsilon)$$

Ce qui établit le théorème. ■

Preuve de l'égalité de Parseval

Nous pouvons maintenant terminer la démonstration de l'égalité de Parseval qui était restée en suspens au chapitre 1. Reprenant les notations de la preuve du théorème (1.4.1): Nous considèrons une fonction$f$ dans F,pour laquelle nous devons montrer que l'inégalité de Bessel est en fait une égalité.
i) Première étape : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction g_ε $2\pi-$périodique continue sur $\mathbb{R}$ telle que l'on ait

$$\| f - g_\varepsilon \| \leq \varepsilon \diagup 4$$

Pour le voir,on note $t_1, ..., t_p$ les points de discontinuité de f dans l'intervalle$]-\pi, \pi[$,rangés dans l'ordre croissant.
Pour $\delta > 0$ assez petit, on définit une fonction g continue sur $[-\pi, \pi]$ de la manière suivante:
• On pose $g(t) = f(t)$ en dehors des intervalles $[t_j - \delta, t_j + \delta]$ avec $1 \leq j \leq p$ et $[\pi - \delta, \pi]$,
• on choisit g affine sur les intervalles $[t_j - \delta, t_j + \delta]$ avec1 $\leq j \leq p$ et sur $[\pi - \delta, \pi]$.
les segments de graphe étant déterminés par les conditions de recollement

$$\begin{aligned} g(t_j - \delta) &= f(t_j - \delta) \\ g(t_j + \delta) &= f(t_j + \delta) \\ g(\pi - \delta) &= f(\pi - \delta) \\ g(\pm\pi) &= f(-\pi) \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$m = \sup_{t \in [-\pi, \pi]} |f(t)|$$

Il est alors facile de voir que l'on a

$$|g(t) - f(t)| \leq m,$$

pour tout t de $[-\pi, \pi]$.
En tenant compte du fait que f et g diffèrent seulement sur une réunion d'intervalles de

longueur totale au plus égale à $(2p+1)$, on en déduit

$$\| f - g \|^2 \leq \frac{1}{2\pi}((2p+1)\delta m^2).$$

Comme g est continue sur$[-\pi, \pi]$ et qu'elle vérifie $g(-\pi) = g(\pi)$, elle se prolonge naturellement en une fonction $2\pi-$périodique continue sur $\mathbb{R}$.
Il suffit alors de prendre

$$\delta = \frac{\pi\varepsilon}{(4p+2)m^2} \text{ et } g_\varepsilon = g$$

pour obtenir la première étape annoncée.
ii) Deuxième étape : Soit $g_\varepsilon$la fonction construite à la première étape.
Alors il existe un polynôme trigonométrique $Q\varepsilon$ tel que l'on ait

$$\| g\varepsilon - Q\varepsilon \|^2 \leq \varepsilon/4.$$

En effet, d'après le théorème de Fejér, la suite $(Ng_\varepsilon)_{N\geq 1}$ converge uniformément vers g_ε sur $\mathbb{R}$, a fortiori sur$[-\pi, \pi]$.
On fixe un entier N assez grand pour que l'on ait

$$|g_\varepsilon(t) - \sigma_N g_\varepsilon(t) \leq \sqrt[2]{\varepsilon}/2,$$

pour tout t de $[-\pi, \pi]$.
On a alors

$$\begin{aligned} ||g_\varepsilon - \sigma_N g_\varepsilon||^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g_\varepsilon(t) - \sigma_N g_\varepsilon(t)|^2 \, dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\sqrt[2]{\varepsilon/2})^2 dt = \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

Il suffit donc de poser

$$Q_\varepsilon = \sigma_N g_\varepsilon$$

iii) Troisième étape:Soit $N(\varepsilon)$ le degré du polynôme trigonométrique construit à la deuxième étape.
Pour $N \geq N(\varepsilon)$, on a

$$\| f - P_N f \|^2 \leq \| f - Q_\varepsilon \|^2$$

En vertu du corollaire (1.3.5), on a

$$\begin{aligned} ||f - Q_\varepsilon||^2 &\leq (\| f - g_\varepsilon \| + \| g_\varepsilon - Q_\varepsilon \|^2) \\ &\leq (\sqrt[2]{\varepsilon}/2 + \sqrt{\varepsilon}/2)^2 \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Autrement dit, on a

$$\lim_{N\to\infty} ||f - p_N f|| = 0 \tag{2.3}$$

On rappelle enfin qu'en vertu de la proposition (1.3.4), on a

$$\begin{aligned} ||f - p_N f||^2 &= ||p_N f||^2 \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt - \sum_{n=-N}^{N} \left|\hat{f}(n)\right|^2 \end{aligned}$$

La propriété (2.3) devient

$$\lim_{N\to 0} \sum_{n=-N}^{N} \left|\hat{f}(n)\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt,$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Bibliographie

[1] math.univ-lille1.fr/~thilliez/biblio/SFourierV Thilliez. Séries de Fourier 24 avril 2008.

[2] S. G. Delabrière. Suites, Séries, Intégrales.-Cours et exercices. Université Pierre et Marie Curie.

[3] J. Dieudonné. Eléments d'Analyse 1, fondements de l'analyse moderne. Gauthier-Villars, Cahiers Scientifiques, Fascicule XXVIII, Paris (1972).

[4] E. Ramis. Exercices d'analyse, avec solutions développées. Masson et Cie, Paris (1968).

[5] J. Lelong-Ferrand, , J. M. Arnaudies. Cours de Mathématiques, Tome 2, Analyse. Dunod, Paris (1977).

[6] J.-P. Kahane & P.-G. Lemarié-Rieusset, Séries de Fourier et Ondelettes, Cassini (1998). Y. Katznelson, An introduction to harmonic analysis, Dover (1976).

[7] J. Lelong-Ferrand & J.-M. Arnaudiès, Cours de Mathématiques - Classe préparatoires et premier cycle universitaire, Dunod (tome 1 : algèbre, 3ème édition 1978 tome 2 : analyse, 4ème édition 1977 ; tome 3 : géométrie et cinématique, 2ème édition 1977 ; tome 4 : équations différentielles, intégrales multiples, 2ème édition 1977).