الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Minstère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

CENTRE UNIVERSITAIRE DE MILA
INSTITUT DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

Réf. / 12

Mémoire de fin d'étude
Présenté pour l'obtention du diplôme de

Licence Académique

Domaine : **Mathématiques et Informatique**
Filière : **Mathématiques**
Spécialité : **Mathématiques Fondamentales**

Thème

Connexité-Espace Connexe

Présenté par :
1- *Bounefikha Sara*
2- *Bensimessaoud Souad*

Dirigé par :
Ahmed yahia Rakia

Année universitaire 2011-2012

Remerciement

Mes remerciements premièrement à Dieu toute puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il nous a données pour réaliser ce travail .

Ms Ahmed yahia Rakia, qui à dirigé ce travail, pour ses conseils de valeur et ses orientations constrictives.

Avec nous profonds sentiment de respect et de reconnaissance, nous Tenons a présenter nos sincères remerciements à tous ceux qui de prés ou loin, ont contribué à l'élaboration de ce mémoire et surtout Mr Kecies Mohamed de ses proposantes.

Nous adressons également, mes remerciements chaleurs aux membres de l'institut des sciences et de la technologie.

MERCI A VOUS TOUS

Table des matières

Introduction Générale

En mathématiques, la notion de connexité est très importante en topologie.

Pour cela et vu l'importance de cette notion nous allons en faire le sujet de ce mémoire.

Ce mémoire est reparti sur l'introduction générale, deux chapitres et une conclusion générale.

Dans le premier chapitre nous allons commencer par donner des notions fondamentales sur la connexité (définition de l'espace connexe, composantes connexes par arcs, ...etc) en suite, on présentera la connexité dans la sphère.

Dans le deuxième chapitre nous allons présenter l'application de la connexité en topologie et en analyse (principe de maximum, théorème de Runge....etc).

Chapitre 1

Espaces Connexes

1.1 Espace connexe

Définition 1.1.1 *(**Espace connexe**)*

Un espace topologique X est dit connexe si les seules parties à la fois ouvertes et fermées de X sont $\varnothing$ et X. De manière équivalente, X est connexe s´il n´existe pas de partition de X en deux parties ouvertes (reps. fermées) non vides (cette précision est redondante, puisqu´une partition est formée d´ensembles non vides). Une partie A d'un espace topologique X est dite connexe si le sous-espace topologique A de X est connexe, i.e. Si A est connexe quand on la muni de la topologie induite par cell

Définition 1.1.2 *(**de partition**)*

Soit X un ensemble. Un ensemble P de parties non vides de X sera appelé une partition de X si tout élément de X appartient à un élément de P et un seul. Autrement dite une partition de X est un ensemble de partie de X non vides disjointes et de réunion X de toute entier. Par exemple un ensemble à trois éléments $\{A, B, C\}$ admet cinq partitions :

1) $\{A\}$,$\{B\}$,$\{C\}$.
2) $\{A, B\}$,$\{C\}$.
3) $\{A, C\}$,$\{B\}$.
4) $\{B, C\}$,$\{A\}$.
5) $\{A, B, C\}$.

Proposition 1.1.3 *On a équivalence entre :*

a) si $X = O_1 \cup O_2$*, avec* O_1,O_2 *ouverts, alors* $O_1 = \varnothing$ *ou* $O_2 = \varnothing$.
b) si $X = F_1 \cup F_2$*, avec* F_1,F_2 *fermés, alors* $F_1 = \varnothing$ *ou* $F_2 = \varnothing$.
c) si $A \subset X$ *et* A *ouvert-fermé, alors* $A = \varnothing$ *ou* $A = X$.
d) Toute application continue $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ *est constante.*

Un espace connexe est un espace X vérifiant a), b), c) ou d).

Preuve. a)$\Longrightarrow$b) Soit $O_J = F_J^C$; $X = O_1 \cup O_2$, d'où par exemple $O_1 = \varnothing$ et $F_2 = \varnothing$.

b)$\Longrightarrow$c) Posons $F_1 = A$, $F_2 = A^C$; ou bien $F_1 = A = \varnothing$, ou bien $F_2 = \varnothing$ et $A = X$.

c)$\Longrightarrow$d) Soit $x_0 \in X$, $n_0 = \varphi(x_0)$, $A = \varphi^{-1}(n_0)$; A est ouvert-fermé car $\{n_0\}$ est ouvert-fermé dans $\mathbb{Z}$ et φ continue ; A contient x_0 ; donc $A = X$ et φ vaut constamment n_0.

d)$\Longrightarrow$a) Soit $\varphi = 1_{o_1}$; φ est continue car les O_J sont ouverts, et à valeurs dans $\mathbb{Z}$; donc ou bien $\varphi = 1$ et $O_2 = \varnothing$, ou bien $\varphi = 0$ et $O_1 = \varnothing$. ■

Proposition 1.1.4 *Soit X un espace topologique, en a les conditions suivantes sont éléments équivalentes :*

1. L'espace X est connexe ;

2. toute application continue de X à valeurs dans l´espace discret $\{0,1\}$ est constante.

Preuve. Supposons que X est connexe et soit $f : X \longrightarrow \{0,1\}$ une application continue. L'ensemble $\{1\}$ est ouvert et fermé dans $\{0,1\}$, donc $f^{-1}(\{1\})$ est une partie ouverte et fermée de X. Puisque X est connexe, on a $f^{-1}(\{1\}) = \varnothing$ ou $f^{-1}(\{1\}) = X$; donc f est constante égale à 0 dans le premier cas, à 1 dans le second. Soit U une partie ouverte et fermée de X. Notons $f : X \longrightarrow \{0,1\}$ la fonction égale à 1 sur U et à 0 sur $X \backslash U$. On a $f^{-1}(\{0,1\}) = X$, $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, $f^{-1}(\{1\}) = U$ et $f^{-1}(\{0\}) = X \backslash U$. Tous ces ensembles sont ouverts, donc f est continue. Si (2) est vérifiée, f est constante ; alors il vient $U = \varnothing$ ou $U = X$, donc X est connexe. ■

Exemple 1.1.5 *1 Tout espace topologique grossier est connexe.*

2 Un espace topologique discret n'est connexe que s'il ne possède qu'un point au plus.

3 Tout espace topologique homéomorphe à un espace connexe est connexe.

Proposition 1.1.6 *L'adhérence d'une partie connexe d'un espace topologique est connexe.*

Preuve. Soient A une partie connexe d'un espace topologique X et soient B et C des parties fermées disjointes de $\overline{A}$ telles que $\overline{A} = B \cup C$. Alors $A \cap B$ et $A \cap C$ sont des parties fermées disjointes de A et leur réunion est A. Comme A est supposée connexe, $A \cap B = A$ ou $A \cap C = A$, i.e. $A \subset B$ ou $A \subset C$; l'une des deux parties fermées B ou C contient A, donc son adhérence $\overline{A}$; autrement dit $B = \overline{A}$ ou $C = \overline{A}$. ■

Théorème 1.1.7 *L'image d'un espace topologique connexe par une application continue est connexe.*

Preuve. Soit f une application continue d'un espace topologique connexe X dans un espace topologique Y. Soit A une partie ouverte et fermée du sous-espace topologique $f(X)$ de Y. Alors $f^{-1}(A)$ est une partie ouverte et fermée de l'espace connexe X, donc $f^{-1}(A)$ est soit vide soit égale à X. Comme $A \subset f(X)$, on a $A = f(f^{-1}(A))$; donc A est soit vide, soit égale à $f(X)$. ■

Définition 1.1.8 ***(de l'intervalle)***

Un intervalle est un partie I de $\mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\forall a \in I \ \forall b \in I \forall x \in \mathbb{R} \, (a < x < b) \Longrightarrow (x \in I) \, .$$

Théorème 1.1.9 *Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est connexe.*

Preuve. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et A, B des parties fermées non vides de I telles que $A \cup B = I$; on doit montrer que $A \cap B$ n'est pas vides. Comme A et B ne sont pas vides, on peut choisir $a \in A$ et $b \in B$; quitte à intervertir les rôles de A et B, on peut supposer que $a \leq b$. Puisque I est un intervalle, on a $[a, b] \subset I$; la partie $A \cap [a, b]$ de $\mathbb{R}$ n'est pas vide (car elle contient a) et est majorée (par b) ; notons c sa borne supérieure ; comme $A \cap [a, b]$ est fermée dans $\mathbb{R}$, nous savanes que $c \in A$; montrons que $c \in B$. Si $c = b$ alors $c \in B$; supposons maintenant $c \neq b$; comme c est la borne supérieure de $A \cap [a, b]$, on a $]c, b] \cap A = \varnothing$; or $]c, b] \subset I$, donc $]c, b] \subset B$; comme $B \cap [a, b]$ est fermé, il s´ensuit que $[c, b] \subset B$, donc $c \in B$. ■

En particulier, l´espace $\mathbb{R}$ est connexe.

Corollaire 1.1.10 *Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*

Preuve. Par le théorème 1.1.9, les intervalles de $\mathbb{R}$ sont connexes. Inversement, soit A une partie connexe de $\mathbb{R}$. Montrons que A est un intervalle. Soient $a, c \in A$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b \leq c$; on doit montrer que $b \in A$. Posons $F =]-\infty, b] \cap A$ et $G = [b, +\infty[\cap A$; ce sont deux parties fermées de A ; elles ne sont pas vides, puisque $a \in F$ et $c \in G$; enfin, on a $A = F \cup G$. Or A est supposé connexe, donc $F \cap G \neq \varnothing$; mais $F \cap G =]-\infty, b] \cap [b, +\infty[= \{b\} \cap A$; comme cet ensemble n´est pas vide, il vient $b \in A$, ce qu´il fallait démontrer. ■

Corollaire 1.1.11 ***(théorème de la valeur intermédiaire)***

L´image d'un intervalle par une application continue à valeurs réelles est un intervalle.

Preuve. Cela résulte du (théorème1.1.7) et du (corollaire1.1.10). ■

Corollaire 1.1.12 *L´image d´un segment par une application continue à valeurs réelles est un segment.*

Preuve. Soient I un segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors I est compact car les parties compactes de $\mathbb{R}$ sont les parties fermée et bornes donc $f(I)$ est compact on a l'image d'un espace topologique quasi-compact par une application continue est quasi-compacte, donc il est fermé et borné. Comme c´est un intervalle (corolliare.1.1.11), c'est un intervalle fermé, borné, non vide, c´est-à-dire un segment. ■

Exemple 1.1.13 *Le cercle* $U = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = 1\}$ *est connexe. En effet, l´application* $t \longmapsto \exp(2i\pi t)$ *est une application continue surjective de* $\mathbb{R}$ *sur* U*. Comme* $\mathbb{R}$ *est connexe, il en va de même pour* U*, par le (théorème 1.1.7)*

Voici une autre manière de démontrer la connexité de U *: comme* U *est homéomorphe au compactifié d'Alexandroff de* $\mathbb{R}$*, il suffit de montrer que ce compactifié d'Alexandroff, notons-le* $\widetilde{\mathbb{R}}$*, est connexe. Comme* $\mathbb{R}$ *n'est pas compact, il n'est pas fermé dans son compact fié d'Alexandroff ; donc* $\mathbb{R}$ *est dense dans* $\widetilde{\mathbb{R}}$ *; comme* $\mathbb{R}$ *est connexe,* $\widetilde{\mathbb{R}}$ *est connexe (d´après la prop.1.1.6).*

Proposition 1.1.14 *Il n´existe pas d´application continue injective du cercle* U *dans* $\mathbb{R}$*.*

Preuve. Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. L´application $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $z \in U$ associe $f(z) - f(-z)$ est continue, donc $g(U)$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$, i.e. un intervalle. Soit z un point de U. L´intervalle $g(U)$ contient $g(z)$ et $g(-z)$, donc $\frac{g(Z)+g(-Z)}{2} = 0$; il existe donc $\acute{z} \in U$ tel que $g(\acute{z}) = 0$, i.e. $f(-\acute{z}) = f(\acute{z})$. Cela montre que f n'est pas injective. ■

Corollaire 1.1.15 *Le cercle* U *n´est homéomorphe à aucun sous-espace de* $\mathbb{R}$*.*

Corollaire 1.1.16 *L´espace* $\mathbb{R}^2$ *n´est pas homéomorphe à* $\mathbb{R}$*.*

Preuve. Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Sa restriction au cercle $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ n´étant pas injective (proposition 1.1.14), g ne peut être un homéomorphisme. ■

Proposition 1.1.17 *Soient* A *et* B *deux parties d'un espace topologique* X*. Si* A *et* B *sont fermées ou ouvertes dans* X*, et* $A \cap B$*,* $A \cup B$ *sont connexes, alors* A *et* B *sont connexes.*

Preuve. Soit U une partie ouverte et fermée de A ; alors $U \cap B$ est ouverte et fermée dans $A \cap B$; comme $A \cap B$ est connexe, cette intersection est soit vide soit égale à $A \cap B$. Quitte à remplacer U par $A \backslash U$, on peut supposer que $U \cap B = \varnothing$. Puisque A est fermée et U est fermée dans A, U est fermée dans X, donc dans $A \cup B$; puisque U est ouverte dans A, elle est ouverte dans $A \backslash B$; comme B est fermée, $A \backslash B$ est ouverte dans $A \cup B$; donc U est ouverte dans $A \cup B$. On démontre de même que, si A et B sont ouvertes, U est encore ouvert et fermé dans $A \cup B$. Comme $A \cup B$ est connexe, U est vide ou égale à $A \cup B$ (ce dernier cas n'est possible que si B est vide, puisque $U \cap B = \varnothing$). On en déduit que A est connexe. Échangeant les rôles de A et B, on trouve que B est aussi connexe. ■

Proposition 1.1.18 *Soient* A *et* B *deux parties d´un espace topologique* X*. Si* A *et* B *sont connexes, et que* $\overline{A} \cap B$ *n´est pas vide, alors* $A \cup B$ *est connexe.*

Preuve. Soit U une partie ouverte et fermé de $A \cup B$. Alors $A \cap U$ est ouvert et fermé dans A. Comme A est connexe, quitte à remplacer U par son complémentaire dans $A \cup B$, on peut supposer que $A \subset U$; mais alors, comme U est fermé dans $A \cup B$, il contient l´adhérence $(A \cup B) \cap \overline{A}$ de A, donc U contient $\overline{A} \cap B$. Alors $B \cap U$ est ouvert, fermé et non vide dans B ; puisque B est connexe, $B \cap U = B$. On en déduit que $U = A \cup B$. ■

1.2 Composantes connexes

Définition 1.2.1 *Soient X un espace topologique et $x \in X$. On appelle composante connexe de x la plus grande partie connexe de X qui contient x. Une partie de X s'appelle une composante connexe de X si c'est la composante connexe d'un point de X.*

Proposition 1.2.2 *Soient X un espace topologique et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes de X telle que $\cap_{i \in I} A_i \neq \varnothing$. Alors la réunion $\cup_{i \in I} A_i$ est connexe.*

Preuve. Posons $A = \cup_{i \in I} A_i$. Soit B une partie ouverte et fermée de A. Choisissons $a \in \cap_{i \in I} A_i$. Quitte à remplacer B par $A \backslash B$, on peut supposer que $a \notin B$; alors pour tout $i \in I$, $B \cap A_i$ est une partie ouverte, fermée de A_i, distincte de A_i, car $a \in A_i \backslash B$; puisque A_i est connexe, on a $B \cap A_i = \varnothing$; cela étant vrai pour tout $i \in I$, on en déduit que $B = \varnothing$, d´où le résultat. ■

Proposition 1.2.3 *Soient X un espace topologique et $x \in X$. Il existe une plus grande partie connexe de X qui contient x, i.e. il existe une partie connexe C_x de X contenant x ainsi que toutes les parties connexes de X contenant x ; de plus C_x est fermée dans X.*

Preuve. Soit I l'ensemble de toutes les parties connexes de X contenant x ; puisque $x \in \cap_{A \in I} A$, la réunion $C_x = \cup_{A \in I} A$ est connexe (proposition. 1.2.3). Comme $\{x\}$ est connexe, $x \in C_x$; si A est une partie connexe contenant x, alors $A \in I$, donc $A \subset C_x$; enfin C_x étant connexe, il en va de même de son adhérence ; comme C_x est la plus grande partie connexe de X contenant x, il en résulte que C_x contient son adhérence, i.e. que C_x est fermé dans X. ■

Proposition 1.2.4 *La relation ‹‹y appartient à la composante connexe de x›› est un relation d'équivalence. Autrement dit, les composantes connexes de X forment une partition de X.*

Preuve. Pour tout $x \in X$, notons C_x la composante connexe de x dans X. Soient x et y tels que $C_x \cap C_y \neq \varnothing$; par la (prop. 1.2.3), $C_x \cup C_y$ est connexe ; or $C_x \subset C_x \cup C_y$ et C_x est la plus grande partie connexe de X contenant x, donc $C_x = C_x \cup C_y$; de même,

$C_y = C_x \cup C_y$. On a ainsi montré que deux composantes connexes sont disjointes ou égales, i.e. que les composantes connexes de X forment une partition de X. Comme $y \in C_y$, la relation ‹‹$y \in C_x$›› coïncide avec la relation ‹‹$C_x = C_y$›› ; or il est clair que cette dernière est une relation d´équivalence : c'est la relation d´équivalence associée à la partition de X en composantes connexes. ■

Remarque 1.2.5 *Soient X un espace topologique et A une partie ouverte et fermée de X. Si C est une partie connexe de X, alors $C \cap A$ est ouverte et fermée dans C ; donc $C \cap A$ est soit vide soit égale à C. En particulier la composante connexe (dans X) de tout point de A est contenue dans A. Si de plus A est non vide et connexe; c´est une composante connexe de X.*

Finalement, toute partie non vide; ouverte, fermée et connexe est une composante connexe de X. Mais attention; la réciproque n´est pas vraie; car en général une composante connexe n´est pas ouverte comme le montre l´exemple qui suit.

Exemple 1.2.6 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ d´intérieur vide. Soit C une composante connexe de X. C´est une partie connexe non vide de $\mathbb{R}$, donc un intervalle non vide, si l´intervalle C contenait plus d´un point, son intérieur serait non vide, ce qui est impossible car $C \subset A$. Tout composant connexe de A est donc réduite à un point. Par exemple, les composantes connexes de $\mathbb{Q}$ sont réduites à un seul point.*

Proposition 1.2.7 *Un produit fini d´espaces topologiques connexes est connexe.*

Preuve. Il suffit (par récurrence) de montrer que si X et Y sont deux espaces topologiques connexes, leur produit $X \times Y$ est connexe. On doit montrer qu´il n´y a qu´une seule composante connexe dans $X \times Y$, i.e. que deux points quelconques (x, y) et (x', y') de $X \times Y$ ont même composante connexe. Comme $X \times \{y\}$ est homéomorphe à X, il est connexe donc contenu dans la composante connexe de (x, y) et de (x', y) ; donc (x, y) et (x', y) ont même composante connexe dans $X \times Y$. De même, $\{x'\} \times Y$ est connexe, donc (x', y) et (x', y') ont même composante connexe dans $X \times Y$. ■

Remarque 1.2.8 *Un produit quelconque d'un espaces connexes est connexe.*

1.3 Connexité par arcs

Définition 1.3.1 *Un espace topologique X est dit connexe par arcs si pour tous $a, b \in X$, il existe une application continue $f : [0, 1] \longrightarrow X$ telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$.*

Une application continue $f : [0,1] \longrightarrow X$ s´appelle souvent un *chemin* ou un *arc* tracé dans X joignant $f(0)$ à $f(1)$. Un espace topologique X est donc connexe par arcs si deux points quelconques de X peuvent être joints (connectés) par un arc. Notons que si l´on peut joindre a à b et b à c par des arcs, on peut joindre a à c. En effet, soient $f : [0,1] \longrightarrow X$ et $g : [0,1] \longrightarrow X$ des applications continues telles que $f(0) = a$, $f(1) = b = g(0)$ et $g(1) = c$. Notons $h : [0,1] \longrightarrow X$ l´application définie par $h(t) = f(2t)$ si $t \leq 1/2$ et $h(t) = g(2t-1)$ si $t \geq 1/2$ (remarquons que pour $t = 1/2$ ces deux définitions coïncident : on a $h(1/2) = f(1) = g(0) = b$). Les restrictions de h aux fermés $[0,1/2]$ et $[1/2,1]$ sont continues comme composées de fonctions continues. On en déduit que h est continue. Finalement, h est un arc joignant a à c, puisqu´on a $h(0) = a$ et $h(1) = c$.

Proposition 1.3.2 *Tout espace topologique connexe par arcs est connexe.*

Preuve. Soient X un espace connexe par arcs et a un point de X. Pour tout point b de X, soit $f : [0,1] \longrightarrow X$ une application continue telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$. Alors $f([0,1])$ est connexe; donc $f([0,1])$ est contenu dans la composante connexe C_a de a et par suite $b \in C_a$; cela ayant lieu pour tout b, on en déduit que $C_a = X$, donc X est connexe. ■

Exemple 1.3.3 *Une partie C d´un espace vectoriel réel est dite convexe si pour tout x, $y \in C$ et tout $t \in [0,1]$, on a $(1-t)x + ty \in C$. Soient C une partie convexe d´un espace vectoriel normé et x, y deux points de C ; l´application $t \mapsto (1-t)x + ty$ est un arc tracé dans C joignant x à y. Il en résulte aue toute partie convexe d´un espace vectoriel normé est connexe par arcs, donc connexe.*

Exemple 1.3.4 *Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa topologie usuelle, soit $A = \left\{(x, \sin 1/x) ; x \in \mathbb{R}_+^*\right\}$. L´application $x \mapsto (x, \sin 1/x)$ est un homéomorphisme de $]0,+\infty[$ sur A ; il s´ensuit que A est connexe, donc $\overline{A}$ est connexe. Or $\overline{A}$ est réunion de A et de $\{0\} \times [-1,1]$; en effet A est contenu dans la partie fermée $\mathbb{R}_+ \times [-1,1]$ et est fermé dans $\mathbb{R}_+^* \times [-1,1]$ c´est le graphe de l´application continue $x \mapsto \sin 1/x$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $[-1,1]$ et est donc fermé car si f est une application continue d´un espace topologique X dans un espace topologique séparé Y, son graphe $G_f = \{(x, f(x)) ; x \in X\}$ est une partie fermée de $X \times Y$; donc $\overline{A} \backslash A \subset \{0\} \times [-1,1]$. Par ailleurs pour tout $y \in [-1,1]$, il existe $t \in]0, 2\pi]$ tel que $\sin t = y$; alors $(0,y)$ est limite de la suite $(1/(t+2n\pi), y)$ de points de A, donc $(0,y) \in \overline{A}$. Finalement, on a donc bien $\overline{A} = A \cup \{0\} \times [-1,1]$. Montrons que $\overline{A}$ n´est pas connexe par arcs. Posons $A´ = \overline{A} \cap \mathbb{R} \times]-1,1]$ et $A´ = \overline{A} \cap \mathbb{R} \times [-1,1[$; ce sont deux parties ouvertes de $\overline{A}$; remarquons que pour tout $n \in N^*$, le sous ensembles $B_n´ = \left\{(1/x, \sin x) ; x \in \left]2n\pi - \frac{\pi}{2}, 2(n+1)\pi - \frac{\pi}{2}\right[\right\}$ (resp. $B_n´ = \left\{(1/x, \sin x) ; x \in \left]2n\pi + \frac{\pi}{2}, 2(n+1)\pi + \frac{\pi}{2}\right[\right\}$) est une partie non vide ouvert, fermée et connexe de $A´$ (resp. de $A´$); par la remarque1.2.5, c´est une composante* *connexe de A' (resp. A'). Comme le point $(0,0)$ n´appartient à aucun de ces sous-ensemble, il en résulte que la composante connexe de $(0,0)$ dans A' (resp. A') ne rencontre aucun de ces sous-ensembles. Elle est donc contenue dans $\{0\} \times]-1,1]$ (resp. $\{0\} \times [-1,1[$). Cela montre que $\{0\} \times]-1,1]$ (resp. $\{0\} \times [-1,1[$) est une composante connexe de A' (resp. A'). Soit $\alpha : [0,1] \longrightarrow \overline{A}$ une application continue telle que $\alpha(0) = (0,0)$; posons $B = \alpha^{-1}(\{0\} \times [-1,1])$; c´est une partie fermée de $[0,1]$. Montrons que B est ouverte dans $[0,1]$. Soit $s \in B$; si $\alpha(s) \in A'$, alors, puisque A' est ouvert dans $\overline{A}$, il existe un $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]s-\varepsilon, s+\varepsilon[\cap [0,1] \subset \alpha^{-1}(A')$; il s´ensuit que la partie connexe $\alpha(]s-\varepsilon, s+\varepsilon[\cap [0,1])$ de A' est contenue dans la composante connexe de $\alpha(s)$ dans A'. Comme $\alpha(s)$ appartient à la composante connexe $\{0\} \times]-1,1]$ de A', il vient $]s-\varepsilon, s+\varepsilon[\cap [0,1] \subset B$. Ainsi, B est un voisinage de s dans $[0,1]$. Un raisonnement analogue montre que B est un voisinage de s dans $[0,1]$ si $\alpha(s) \in A'$. Puisque B est ouverte et fermée dans $[0,1]$ et $0 \in B$, on en déduit que $B = [0,1]$. En particulier nous avons $\alpha(1) \neq (1, \sin 1)$; donc il n´existe pas de chemin tracé dans $\overline{A}$ joignant $(0,0)$ à $(1, \sin 1)$. L´espace $\overline{A}$ n´est donc pas connexe par arcs.*

1.4 Espace localement connexe

Définition 1.4.1 *Un espace X est localement connexe si et seulement si pour tout point x de X, x possède un système fondamental de voisinages dont chacun est connexe (pour la topologie induite par celle de X), autrement dit, tout voisinage de x contient un voisinage connexe de x.*

Proposition 1.4.2 • *Tout ouvert U d'un espace X localement connexe est encore localement connexe (puisqu'on obtient une base d'ouverts de U – pour la topologie induite par celle de X – en sélectionnant, parmi les ouverts d'une base de X, ceux qui sont inclus dans U).*

• *Dans un espace localement connexe, les composantes connexes sont ouvertes (puisque pour tout point x d'une telle composante U, il existe un ouvert contenant x et connexe, donc inclus dans U).*

• *Tout espace où les composantes connexes de chaque ouvert sont ouvertes est connexe (puisque les ouverts connexes forment alors une base d'ouverts).*

• *La connexité locale n'est pas préservée par image continue.*

Exemple 1.4.3 • *Tout espace localement connexe par arcs est localement connexe (puisque tout espace connexe par arcs est connexe). Les exemples les plus classiques sont $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$...*

• *Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa topologie usuelle, un exemple d'espace connexe qui n'est pas localement connexe est le ‹‹peigne››. Un exemple de même nature est la partie $A =$*

$(\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{Q})$ *: tout point de* A *possède dans* A *un voisinage connexe (à savoir* A *lui-même) mais ne possède pas forcément de base de voisinages connexes.*

• *Un autre exemple classique de partie connexe de* $\mathbb{R}^2$ *qui n'est pas localement connexe est la courbe* sin *du*

1.5 Ouverts simplement connexes

Définition 1.5.1 ***(L'espace simplement connexe)***

Soit U *est ouvert de* $\mathbb{C}$*, Deux arcs* γ_0 *et* $\gamma_1 : [a,b] \longrightarrow U$ *sont dite homotopies s'ils ont même origines et de mêmes extrémités et s'il existe une application continue* h*, appelée homotopie, de* $[a,b] \times [0,1]$ *dans* U *tel que*

$$\begin{aligned} \forall t &\in [a,b] \quad h(t,0) = \gamma_0(t) \quad \text{et} \quad h(t,1) = \gamma_1(t), \\ \forall s &\in [0,1] \quad h(a,s) = \gamma_0(a) = \gamma_1(a) \quad \text{et} \quad h(b,s) = \gamma_0(b) = \gamma_1(b). \end{aligned}$$

On vérifie que ceci définit une relation d'equivalence sur les arcs $[a,b] \longrightarrow U$*.*

Proposition 1.5.2 *Un ouvert connexe de* C *est simplement connexe.*

Preuve. On sait déjà qu'une partie convexe est connexe. Si γ_0 et γ_1 sont deux arcs de mêmes extrémités, et si on pose, pour $0 \leq t \leq 1$ et $a \leq s \leq b$,

$$h(t,s) = s\gamma_1(t) + (1-s)\gamma_0(t),$$

on vérifie sans peine que h est homotopie entre γ_0 et γ_1 . ■

Théorème 1.5.3 *Un ouvert* V *homéomorphe à un ouverte* U *simplement connexe est lui-même simplement connexe.*

Preuve. Si φ est un homomorphisme de U sur V, V est connexe. De plus, si γ_0 et γ_1 sont deux arc de V de même extrémités, $\varphi^{-1} \circ \gamma_0$ et $\varphi^{-1} \circ \gamma_1$ sont deux arcs de U de même extrémités : il existe alors une homotopie h entre $\varphi^{-1} \circ \gamma_0$ et $\varphi^{-1} \circ \gamma_1$. Il suffit alors de remarque que $\varphi \circ h$ est l'homotopie cherchée. ■

Théorème 1.5.4 *Soient* U *ouvert de* $\mathbb{C}$*,* ω *une forme différentielle fermée sur* U*,* γ_0 *et* γ_1 *deux arcs de homotopes. Alors*

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega.$$

Preuve. Soit $h : [a,b] \times [0,1] \longrightarrow U$ une homotopie entre γ_0 et γ_1. On notera $\alpha = \gamma_0(a)$, $\beta = \gamma_0(b)$ et γ_s l'arc $t \longmapsto h(t,s)$. puisque le compact $k = h([a,b] \times [0,1])$ est inclus dans U, le nombre $\delta := \inf_{z \in K} d(z, U^c)$ est strictement positif. Puisque h est uniformément continue, il existe donc un $\varepsilon \succ 0$ tel que

$$\max(|t-t'|, |s-s'|) < \varepsilon \Rightarrow |h,(t,s) - (t',s')| < \delta,$$

donc en particulier pour $t = t'$,

$$|s-s'| < \varepsilon \Rightarrow \|\gamma_s - \gamma_{s\prime}\| < \delta \leq \inf_{t \in [a,b]} d(\gamma_s(t), U^c).$$

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, ω une forme différentielle fermée sur U, γ_0 et γ_1 deux arcs continus : $[a,b] \longrightarrow U$ ayant mêmes extrémités et satisfaisant $\|\gamma_0 - \gamma_1\| < \inf_{t \in [a,b]} d(\gamma(t), U^c)$. Alors

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega.$$

donc $\int_{\gamma_s} \omega = \int_{\gamma_{s'}} \omega$, ce qui montre que la fonction $\varphi : S \longmapsto \int_{\gamma_s} \omega$ est localement constante sur $[0,1]$, donc constante. Ceci prouve l'égalité $\varphi(0) = \varphi(1)$. ■

Théorème 1.5.5 *Si U est un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, tout forme différentielle fermée ω sur U est exacte*

Preuve. Il suffit de montre que, pour tout lacet $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$, $\int_\gamma \omega = 0$. Or, si γ_0 est la lacet constant : $t \longmapsto \gamma(a)$, γ est homotopie à γ_0 donc

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_0} \omega = 0.$$

■

1.6 Représentation conforme des ouverts simplement connexes

Théorème 1.6.1 ***(de Riemann)***

Soit U un ouvert connexe non vide de $\mathbb{C}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) U est simplement connexe.

2) On a $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$, pour toute fonction holomorphe f sur U et tout lacet γ de classe C^1 par morceaux dans U.

3) Tout fonction holomorphe sur U possède une primitive.

4) Tout fonction holomorphe qui ne s'annule pas sur U possède un logarithme holomorphe.

5) tout fonction holomorphe qui ne s'annule pas sur U possède une racine carrée holomorphe.

6) U est égal à $\mathbb{C}$ ou conformément équivalent à D.

Preuve. 1)⇒2)⇒3) Puisque la forme $f(z)\,dz$ est fermée, ceci résulte du (théorème 1.5.5).

3)⇒4) C'est le résultat du théorème suivant : soient U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur U qui ne s'annule pas sur U. Il existe alors une détermination holomorphe du logarithme de f, c'est-à-dire une fonction holomorphe g sur U telle que

$$f(z) = e^{g(z)}, \text{ pour tout } z \text{ de } \mathbb{C}.$$

Plus précisément, si a est un point de U et $\alpha \in \mathbb{C}$ est tel que $e^{\alpha} = f(a)$, on peut choisir une telle détermination g telle que $g(a) = \alpha$.

4)$\Longrightarrow$5) Si f ne s'annule pas sur U, elle a par hypothèse un logarithme holomorphe, soit g. Alors $f = e^g$. Et si $h = e^{g/2}$, on a $h^2 = e^g = f$. Donc h est la racine carrée cherchée.

6)⇒1) En effet, D est simplement connexe, et U l'est aussi, s'il est égal à $\mathbb{C}$ ou homéomorphe à D.

5)⇒6) Supposons donc $U \neq \mathbb{C}$ et prenons un point a dans U. On commence par montrer qu'il existe des fonctions holomorphes univalentes de U dans D, nulles en a. Puisque $U \neq \mathbb{C}$, il existe $b \in \mathbb{C} \backslash U$. la fonction $z \longmapsto z - b$ ne s'annule pas sur U, donc possède une racine carrée holomorphe g. Comme g n'est pas constante, $g(U)$ est ouvert, donc contient un disque $D(g(a), \rho)$. Si $g(U)$ rencontrait $D(-g(a), p)$, on aurait un z tel que $g(z) \in D(-g(a), \rho)$, et $-g(z) \in D(g(a), p)$ serait égal à $g(z')$, pour un z'de U. Alors

$$z' - b = g(z')^2 = (-g(z))^2 = g(z)^2 = z - b,$$

donc $z = z'$ bien que $g(z) \neq g(z')$. cette contradiction montre que $g(U)$ est disjoint de $D(-g(\omega), \rho)$. Alors, si on pose

$$f(z) = \frac{\rho}{2}\left(\frac{1}{g(z) + g(a)} - \frac{1}{2g(a)}\right),$$

la fonction f est univalente, nulle en a et bornée par 1.

Prenons maintenant un point a dans U. On considère l'ensemble H des fonctions $f \in \mathcal{H}(U)$ qui valent 0 en a, sont à valeurs dans D et univalentes ou constantes. L'ensemble H est relativement compact dans $\mathcal{H}(U)$ d'après le (théorème de Montel), est donc compact. Puisque la dérivation est continue sur $\mathcal{H}(D)$, la fonction $f \longmapsto |f\prime(\omega)|$ atteint son maximum en une fonction h de H. On va montrer que $h(U) = D$, ce qui prouvera que h est la bijection holomorphe cherchée de U sur D. Puisqu'il existe dans H une fonction univalente f, on a $|h'(a)| \geq |f'(a)| > 0$, puisque la dérivée d'une fonction univalente ne peut s'annuler ; et h n'est pas constante.

Pour voir que $h(U) = D$, on va maintenant montre que si $h(U) \neq D$, il existe une fonction g de h telle que $|g'(\omega)| > |h'(\omega)|$. En effet , si α appartient à $D \backslash h(U)$, et si on pose

$$h_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z},$$

la fonction h_α est un automorphisme de D ; il en résulte que $h_\alpha \circ h$ est univalente de U dans D et ne s'annule pas.Il existe donc une fonction holomorphe φ dont le carré est $h_\alpha \circ h$. Et si $\beta = \varphi(a)$, on a $\beta^2 = -\alpha$.

Posons $g = h_\beta \circ \varphi$. Alors g est univalente de U dans D et s'annule en a. Si on note c l'application : $z \longmapsto z^2$ de D dans D, et $\Phi = h_{-\alpha} \circ c \circ h_{-\beta}$, l'application Φ est nulle en 0 et non injective. Il résulte, par le lemme de Schwarz , qu'on $|\Phi'(0)| < 1$. Et puisque

$$\Phi \circ g = (h_{-\alpha} \circ c \circ h_{-\beta}) \circ (h_{-\alpha} \circ \varphi) = h_{-\alpha} \circ g^2 = h_{-\alpha} \circ h_\alpha \circ h = h,$$

on a $|h'(a)| = |\Phi'(g(a)).h'(a)| = |\Phi'(0)|.|g'(a)| < |g'(a)|$, et ceci est la contradiction cherchée qui montre que h est bien un isomorphisme de U sur D. ■

1.7 Connexité dans la sphère de Riemann

1.7.1 Compacts connexes de S^2

Théorème 1.7.1 ***(Tietze)***

Soient E un espace métrique et F un compact non vide de E. Alors toute fonction continue de F dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) se prolonge en une fonction continue de E dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

Théorème 1.7.2 *Soit U un ouvert connexe de S^2. Alors U est simplement connexe si et seulement si son complémentaire $S^2 \backslash U$ est connexe.*

Théorème 1.7.3 *Soit U un ouvert simplement connexe de S^2. Alors $S^2 \backslash U$ est connexe.*

Preuve. Si $U = S^2$, son complémentaire dans S^2 est vide donc connexe. On peut donc supposer que $S^2 \backslash U$ contient un point a,et quitte à transformer U par l'homographie $z \longmapsto \frac{1}{Z-a}$, qui est un automorphisme de S^2, on supposera que $\infty \in S^2 \backslash U$, c'est-à-dire que $U \subset \mathbb{C}$.

Si $S^2 \backslash U$ n'est pas connexe, il existe alors un compact K de $\mathbb{C}$ et un fermé F de S^2 contenant ∞, disjoints et de réunion $S^2 \backslash U$. Quitte à effectuer une translation, on suppose que $0 \in K$. Alors la fonction $z \longmapsto z$ ne s'annule pas sur U, donc possède un logarithme holomorphe L puisque U est simplement connexe.

Notons R le rayon d'un disque compact contenant K et

$$F_1 = \{z \in \mathbb{C} : z \in F \text{ ou } |z| \geq R+1\}.$$

Alors K et F_1 sont deux fermés disjoints dans $\mathbb{C}$. Il existe donc un $\eta > 0$ tel que, pour $z \in K$ et $\omega \in F_1$, on ait $|\omega - z| \geq 3\eta$. L'ensemble

$$T = \{z \in \mathbb{C} : d(z, K \cup F_1) \geq \eta\}$$

est compact et contenu dans U. Par suite, la fonction L possède, d'après le (théoréme de Tietze) un prolongement continu φ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. On définit maintenant la fonction ψ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$par

$$\psi(z) = \begin{cases} z & \text{si } z \in T \cup \{\omega : d(\omega, F_1) \leq \eta\} \\ e^{\varphi(z)} & \text{si } z \in T \cup \{\omega : d(\omega, K) \leq \eta\}. \end{cases}$$

Alors ψ est continue, et si γ_t désigne, pour $0 \leq t \leq 1$, le lacet : $[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}^*$

$$\mathcal{V} \longmapsto \psi\left((R+1)\left(1 - t\left(1 - e^{iv}\right)\right)\right)$$

on a une homotopie entre γ_0 et $\gamma_1$dans $\mathbb{C}^*$. On doit donc avoir

$$I_{\gamma_0}(0) = I_{\gamma 1}(1).$$

Mais γ_0 est un lacet constant, et $\gamma_1(\mathcal{V}) = (R+1)\, e^{i\mathcal{V}}$. On en conclut que $I_{\gamma_0}(0) = 0$ et $I_{\gamma_1}(0) = 1$. Cette contradiction prouve la connexité de $S^2 \backslash U$. ■

Théorème 1.7.4 *Soit U un ouvert connexe de S^2. Si le compact $S^2 \backslash U$ est connexe, alors U est simplement connexe.*

Preuve. Comme précédemment, on peut supposer que $U \neq S^2$, puisque la sphère S^2 est simplement connexe, et, quitte à faire une homographie, que $\infty \in S^2 \backslash U$, c'est-à-dire $U \subset \mathbb{C}$.

Pour montre que U est simplement connexe, il suffit, d'après le (théorème 2.6.1), de montrer que l'intégrale $\int_\gamma f(z)\, dz$ est nulle, pour tout fonction holomorphe f sur U et tout lacet γ de classe C^1 par morceaux dans U.

Soient donc f une fonction holomorphe sur U et γ un lacet de classe C^1 par morceaux dans U. Notons Γ l'image de γ, qui est un compact de U. L'indice I_γ est défini et localement constant sur $\mathbb{C}\backslash\Gamma$, et en particulier nul au voisinage de ∞. Il est donc défini et localement constant au voisinage de $S^2\backslash U$. Et puisque $S^2\backslash U$ est connexe, cet indice est constant sur $S^2\backslash U$, et y prend en tout point la valeur 0, qu'il prend en ∞. Alors,

$$X = \Gamma \cup \{\omega \notin \Gamma : I_\gamma(\omega) \neq 0\}$$

est un compact contenu dans U. Pour tout arc affine J dans U ne coupant pas X, on pose

$$\varphi_J(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_J \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega.$$

Alors, par le théorème de Fubini, on obtient

$$\int\limits_\gamma \varphi_J(z)\, dz = \int\limits_J f(\omega)\, I_\gamma(\omega)\, d\omega = 0.$$

Soit $r = \frac{1}{3}\inf_{\omega\notin U} d(\omega, X) > 0$.On considère un quadrillage (Q_j) du plan en carrés de côté r. Puisque le diamètre de chaque Q_j est $r\sqrt{2}$, un carré Q_j ne peut couper à la fois X et $S^2\backslash U$. Notons $(J_\alpha)_{\alpha\in A}$ la famille de chemins affines définis sur $[0,1]$, ayant pour image les côtés de ceux des carrés Q_j qui coupent X et orientés dans le sens de ∂Q_j, et soit B l'ensemble des $\alpha \in A$ tel que $J_\alpha$ne coupe pas X.

Si le côté d'un Q_j coupe X, il est le côté d'un carré $Q_{j'}$, adjacent à Q_j, et qui coupe aussi X. Il y aura alors α et α'dans A tel que J_α et $J_{\alpha'}$aient ce côté pour image , avec des orientations opposées. On en déduit que, pour tout forme différentielle ω,

$$\sum_{Q_j\cap X}\int_{\partial Q}\omega = \sum_{\alpha\in A}\int_{J_\alpha}\omega = \sum_{\alpha\in B}\int_{J_\alpha}\omega.$$

Pour tout j tel que Q_J coupe X, $Q_j \subset U$, et on a, par la formule de Cauchy, pour un ω appartenant à l'intérieur de Q_j,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial Q_k}\frac{f(z)\,dz}{z-\omega} = \begin{cases} f(\omega) & \text{si } J = k \\ 0 & \text{si } J \neq k, \end{cases}$$

donc, puisque $g(\omega) = \sum_{\alpha\in B}\varphi_{J_\alpha}(\omega)$ est continu au voisinege de X et vaut $f(\omega)$ sur la réunion des intérieurs de ceux des Q_j qui coupent X, on a $f = g$ sur Γ, donc, pour tout t,

$$\begin{aligned} f \circ \gamma (t) &= \sum_{\alpha \in B} \varphi_{J_\alpha} \circ \gamma (t) \\ \int_\gamma f (z) \, dz &= \sum_{\alpha \in B} \int_\gamma \varphi_{J_\alpha} (z) \, dz = 0. \end{aligned}$$

■

Chapitre 2

Application de la connexité ; Homotopie

La notion de connexité a de nombreuses applications en topologie et en analyse ; il est parfois souhaitable d'introduire une autre notion, celle d'homotopie des applications.

2.1 Espaces non homéomorphes

Nous allons contenter d'une approche intuitive, très facile à mettre en forme quand il le faut ; certains espaces topologiques X ont de façon claire un ensemble E d'extrémités (ou bouts) c'est-à-dire un ensemble E tel que $E \backslash X$ soit connexe ; par exemple $X = [0, 1]$ et $E = \{0, 1\}$; supposons pour simplifier que E a un nombre fini p d'éléments et que f est un homéomorphisme de X sur Y ; la restriction de f à $X \backslash E$ induit un homéomorphisme de $X \backslash E$ sur $Y \backslash f(E)$, en particulier $Y \backslash f(E)$ est connexe ; si donc Y est tel que $Y \backslash F$ est non connexe chaque fois que F a p éléments, Y ne peut être homéomorphe à X ; voici quelques exemples.

Deux intervalles de $\mathbb{R}$ de nature différente ne sont pas homéomorphes. (2.1)

Montrons par exemple que $X = [0, 1[$ n'est pas homéomorphe à $Y =]0, 1[$; en effet, X a une extrémité 0, tandis que Y privé d'un point n'est plus un intervalle, donc n'est plus connexe ; or, si f était un homéomorphisme de X sur Y, $Y \backslash \{f(0)\}$ devrait être homéomorphe à $X \backslash \{0\}$.

$[0, 1]$ et Γne sont pas homéomorphes. (2.2)

En effet, $[0, 1]$ a les deus extrémités 0 et 1, tandis que Γ privé de deux points est réunion de deux arcs ouverts disjoints, donc n'est pas connexe.

Les lettres T et L ne sont pas homéomorphes. (2.3)

En effet, la lettre T a trois extrémités ; la lettre L est homéomorphe à un segment, et un segment privé de trois points est non connexe. On peut faire variations sur le thème des extrémités :

le segment $[0,1] = I$ et le carré I^2 ne sont pas homéomorphes. (2.4)

En effet, $I\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ est non connexe, et I^2 privé d'un point est toujours connexe. On pourrait de cette façon redémontrer (2.2). On va maintenant énoncer un théorème plus précis et en donner une application.

2.2 Absence d'un théorème de contor-Bernstein topologique

Le théorème de Contor-Bernstein affirme ceci : si X,Y sont deux ensembles, s'il existe une injection de X dans Y et une injection de Y dans X, il existe une bijection de X sur Y (voir. [5]). Il est naturel de se poser la même question dans la catégorie des espaces topologiques : s'il existe une injection continue de X dans Y et une injection continue de Y dans X, existe-t-il une bijection bicontinue de X sur Y, autrement dit X et Y sont-ils homéomorphes ? On va voir qu'il n'est rien, sous une forme renforcée.

Proposition 2.2.1 *Soit h un homéomorphisme de X sur Y ; h échange les composentes connexes de X et Y, c'est -à-dire*

$$h\left(C\left(x\right)\right) = C\left(h\left(x\right)\right), \forall x \in X. \quad (2.5)$$

Preuve. Soit $Y = h\left(x\right)$; $h\left(C\left(x\right)\right)$ est un connexe contenant y, d'où inclusion $h\left(C\left(x\right)\right) \subset C\left(y\right)$; on a de même $h^{-1}\left(C\left(Y\right)\right) \subset C\left(x\right)$, ce qui entraîne l'inclusion inverse. ■

Exemple 2.2.2 $X = \left]0,1\right[\cup \{2\}$, $Y = \left]0,1\right]$, $f\left(x\right) = x$ *si* $0 < x < 1$ *et* $f\left(2\right) = 1$; f *est une bijection continue de* X *surY, car* 2 *est isolé dans* X *; mais* f^{-1} *n'est pas continue en* 1 *:* $f^{-1}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1-\frac{1}{n}$ *tend vers* 1*, alors que* $f^{-1}\left(1\right) = 2$.

Considérons maintenant l'exemple suivant, où on répète une infinité de fois (l'exemple précédent).

$$X = \cup_{n=0}^{\infty}(]3n, 3n+1[\cup \{3n+2\}); Y = (X\setminus\{2\}) \cup \{1\}.$$

Soit $f : X \longrightarrow Y$ définie par $f(x) = x$ si $x \neq 2$, et $f(2) = 1$. f est évidemment une bijection continue de X sur Y, mais f^{-1} n'est pas continue en 1 ; d'ailleurs il n'existe pas de bijection continue φ de $]0,1]$ sur $]0,1[\cup \{2\}$; pour Y, les choses sont différentes : Y ‹‹commence›› par $]0,1]$ et $]3,4[$; ces deux intervalles, rapprochés par la pensée, donnent un intervalle de la forme $]0,1[$, qui est le début de X ; ‹‹ensuite›› Y est ‹‹pareil›› à X, avec un décalage de trois ; cela suggère donc de définir $g : Y \longrightarrow X$ par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{x}{2} - 1 & \text{si } 3 < x < 4 \\ x - 3 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

et il est clair que $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow X$ sont des bijections continues ; d'autre part $]0,1]$ est une composante connexe de Y on a si $X = \cup_I \omega_i$, où les ω_i sont ouverts connexes non vides, alors les ω_i sont les composantes connexes de X, et elle n'est d'après (2.1) homéomorphe à aucune des composantes connexes de X ; d'après (2.5), cela exclut que X et Y soient homéomorphes et montre bien l'absence d'un théorème de Cantor-Bernstein topologique, même avec des bijections.

2.3 Principe du maximum ; inégalité de Bernstein ; théorème de Runge

Définition 2.3.1 *$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite sous-harmonique si*

$$f \text{ est continue.} \tag{2.6}$$

$$(\forall a \in \Omega) \left(\exists \overline{D}(a, r_a) \subset \Omega\right) (\forall r \in [0, r_a]) : \tag{2.7}$$
$$f(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(a + re^{i\theta}\right) d\theta.$$

En d'autres termes, une fonction sous-harmonique est une fonction continue qui possède localement la propriété de sous-moyenne ; on verra plus loin (théorème2.3.2) que cette propriété locale se ‹‹globalise›› automatiquement. On note $sh(\Omega)$ la classe des fonctions sous-harmonique sur Ω ; c'est un cône convexe réticulé, i.e. :

$$f, g \in sh(\Omega), \lambda \geq 0 \Longrightarrow f + g, \quad \lambda f, \quad \max(f, g) \in sh(\Omega).$$

On suppose connues les propriétés de la classe $h(\Omega)$ de la fonction harmoniques $f:\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$; ce sont la fonction vérifiant (2.6) et la propriété globale

$$\overline{D}(a,r) \subset \Omega \Longrightarrow f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a + re^{i\theta}\right) d\theta. \tag{2.8}$$

On rappelle en particulier le théorème de Dirichlet (voir. [6] et [7])

$$\varphi \in C^0\left(C(a,r)\right) \Longrightarrow \exists f \in h\left(D(a,r)\right) \cap C\left(\overline{D}(a,r)\right) ;\ f\left|_{C(a,r)}\right. = \varphi, \tag{2.9}$$

(autrement dit toute fonction continue sur le cercle $C(a,r)$ admet un prolongement continu sur le disque fermé $\overline{D}(a,r)$ et harmonique sur le disque ouvert $D(a,r)$. Les fonction sous-harmoniques sont aux fonction harmoniques ce que les fonction convexes sont aux fonctions affines ; pour mieux comprendre le parallélisme, rappelons que, si I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction : $I \longrightarrow \mathbb{R}$, on a équivalence entre :

1) f est convexe ;

2) $\forall [a,b] \subset I$, $\forall \ell$ affine, $x \in [a,b] \Longrightarrow g(x) \leq \max\left(g(a), g(b)\right)$, où $g = f - \ell$.

3) équivaut à dire que g atteint son maximum sur $[a,b]$ aux éxtrémités de $[a,b]$, ou encore à la frontière de $[a,b]$; voici l'analogue pour les fonctions sous-harmoniques, où la connexité joue rôle clé.

Théorème 2.3.2 ***(principe du maximum)***

Soit f une application de Ω dans $\mathbb{R}$.

a) On suppose Ω borné, f sous-harmonique sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$ (en abrégé $f \in sh\left(\overline{\Omega}\right)$). Alors f vé suppose réifie le principe du maximum

$$\sup_{\overline{\Omega}} f = \sup_{\partial\Omega} f. \tag{2.10}$$

En d'autres termes on a

$$z \in \Omega \Longrightarrow f(z) \leq \sup_{\partial\Omega} f. \tag{2.10$\prime$}$$

b) On a équivalence entre :

1) $f \in sh(\Omega)$

*2) $\forall$ **K** compact de Ω, $\forall \ell$ réelle $\in h(\mathring{k}) \cap C(K)$, $\forall z \in K$, $g(z) \leq \sup_{\partial k} g$, où $g = f - \ell$*

3) $\overline{D}(a,r) \subset \Omega \Longrightarrow f(a) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a + re^{i\theta}\right) d\theta$.

Preuve. a) $\overline{\Omega}$ est fermé, borné donc compact ; f est continue sur $\overline{\Omega}$ donc y atteint son maximum M en un point a ; si $a \in \partial\Omega$, (2.10) est prouvé ; si $a \in \Omega$, soit ω la composante connexe de Ω contenant a ; posons

$$A = \{b \in \omega; f(b) = M\}.$$

Je dis d'abord que soit ω un ouvert de $\mathbb{R}$; ω s'écrit de façon unique

$$\omega = \sqcup\,]a_n, b_n[\,,\ \ a_n, b_n \notin \omega.$$

Cette union disjointe est finie ou dénombrable.

$$\partial\omega \subset \partial\Omega. \tag{2.11}$$

En effet, ω est fermé dans Ω, i.e. $\overline{\omega} \cap \Omega = \omega$; un point de $\overline{\omega} \backslash \omega$ n'est donc pas dans Ω. À présent, notons que

1-) A est non-vide,car $a \in A$.

2-) A est fermé dans ω comme image inverse de $\{M\}$ par f continue.

3-) A est ouvert dans ω : soit en effet $b \in A$ et $r_b > 0$ tel que (2.7) ait lieu (remplaçant a par b et Ω par ω) ; ainsi

$$r \leq r_b \text{ entraîne } \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[f(b) - f\left(b - re^{i\theta}\right)\right] d\theta \leq 0;$$

mains la fonction $\varphi(\theta) = f(b) - f\left(b + re^{i\theta}\right) = M - f\left(b + re^{i\theta}\right)$ est continue positive; l'intégrale précédente et φ sont donc nulles, en d'autres termes $f\left(b + re^{i\theta}\right)$ vaut M, et le disque $\overline{D}(b, r_b)$ est inclus dans A, qui est bien ouvert dans ω. La connexité de ω entraîne $A = \omega$, i.e. $f = M$ sur ω ; par continuité, $f = M$ sur $\overline{\omega}$; $a\ fortiori$ $f = M$ sur $\partial\omega$. De ce précède, il résulte que l'on a (2.11)

$$M = \sup_{\partial\omega} f \leq \sup_{\partial\Omega} f,$$

ce qui prouve (2.10) ; on a même la précision :

$$\begin{cases} \text{si } f \text{ atteint son maximum en } a \in \Omega, \\ \ f \text{ est constante sur la composante connexe de } a. \end{cases} \tag{2.12}$$

b)

1)$\Longrightarrow$2) par translation, on peut supposer g de maximum nul sur la frontière de K ; posons $\Omega_1 = \mathring{K}$; $\overline{\Omega}_1 \subset K$, $\partial\Omega_1 = \overline{\Omega}_1 \backslash \mathring{K} \subset K \backslash \mathring{K} = \partial K$; on a clairement $g \in Sh\left(\overline{\Omega}_1\right)$, donc, par a),

$$\sup_{\Omega_1} g = \sup_{\partial\Omega_1} g \leq \sup_{\partial K} g = 0;$$

g est donc ≤ 0 sur $\Omega_1 \cup \partial K = K$.

2)$\Longrightarrow$3) D'après (2.9), on peut trouver ℓ continue dans $\overline{D}(a,r)$, harmonique dans $D(a,r)$, égale à f sur $C(a,r)$; appliquons l'hypothèse au compact $\overline{D}(a,r)$ et à $g = f - \ell$, de sup nul sur la frontière de ce comact ; il vient $g(a) \leq 0$, soit encore„ via (2.8) :

$$f(a) \leq \ell(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ell\left(a + re^{i\theta}\right) d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a + re^{i\theta}\right) d\theta.$$

3)$\Rightarrow$1) Évident.

Avant de passer à l'application suivante, notons que

$$P \in \mathbb{C}[X] \Longrightarrow P \in h(\mathbb{C}) \text{ et } |P| \in sh(\mathbb{C}). \tag{2.13}$$

En effet, suivant la formule de Taylor, $P\left(a + re^{i\theta}\right) = P(a) + \sum_{j=1}^{n} \frac{P^{(j)}(a)}{j!} r^j e^{ij\theta}$, où n est le degré de P ; prenant la moyenne des deux membres sur $[0, 2\pi]$, on obtient (2.8) pour p ; puis appliquant l'inégalité triangulaire on obtient (2.7) pour $|p|$, ce qui prouve (2.13). ■

Théorème 2.3.3 ***(inégalité de Bernstein)***

Soit $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ *un polynôme de degré* n *; alors*

$$\sup\{|P'(z)| ; |z| \leq 1\} \leq n \ \sup\{|P(z)| ; |z| \leq 1\}. \tag{2.14}$$

Preuve. Par homogénéité, on peut supposer que $\sup\{|P(z)| ; |z| \leq 1\} = 1$; montrons d'abord que

$$|z| \geq 1 \Longrightarrow |P(z)| \leq |z|^n. \tag{2.15}$$

Soit pour cela $Q(z) = z^n P\left(\frac{1}{z}\right)$ le polynôme réciproque de P ; d'après (2.13), on peut appliquer le principe du maximum à $|Q|$ et à l'ouvert borné D, ce qui donne

$$|a| \leq 1 \Longrightarrow |Q(a)| \leq \sup\{|Q(\omega)| ; |\omega| = 1\}. \tag{2.16}$$

Or (2.16) se lit $\left|a^n P\left(\frac{1}{a}\right)\right| \leq \sup\left\{\left|P\left(\frac{1}{\omega}\right)\right| ; |\omega| = 1\right\}$, d'où $\left|P\left(\frac{1}{a}\right)\right| \leq \left|\frac{1}{a}\right|^n$ pour $a \in D^*$, ce qui prouve (2.15). Montrons ensuite que

$$|\lambda| > 1 \text{ et } |\omega| = 1 \Longrightarrow P'(\omega) \neq n\lambda\omega^{n-1}. \tag{2.17}$$

Soit en effet $Q(X) = P(X) - \lambda X^n$; si $|z| \geq 1$, (2.15) entraîne :

$$|Q(z)| \geq |\lambda z^n| - |P(z)| \geq (|\lambda| - 1)|z|^n > 0.$$

Autrement dit Q a toutes ses racines dans le convexe D ; il en même de Q', ce qui prouve (2.17) et

$$|\omega| = 1 \Longrightarrow |P'(\omega)| \leq n. \tag{2.18}$$

posons en effet $\lambda = \frac{P'(\omega)}{n\omega^{n-1}}$; la contraposée de (2.17) donne $|\lambda| \leq 1$. Enfin, (2.18) et une nouvelle application du principe du maximum donnent l'inégalité (2.14) annoncée. ■

Remarque 2.3.4 *l'inégalité de Bernstein (voir. [4]) a lieu dans des cas plus généraux ; l'exemple $P(z) = z^n$ montre qu'elle est optimale.*

Théorème 2.3.5 ***(théorème de Runge)***

Soit K un compact de $\mathbb{C}$ de complémentaire connexe, et $a \in K^c$. Alors

$$\frac{1}{z-a} \text{ est limite uniforme sur } K \text{ de polynômes..} \tag{2.19}$$

Preuve. Désignons par $P(K)$ l'adhérence des polynômes dans $C(K)$; c'est une sous-algèbre de $C(K)$ car il est clair que, P_n, Q_n désignant des polynômes :

$$P_n \longrightarrow f,\ Q_n \longrightarrow g \Longrightarrow P_n + Q_n \longrightarrow f + g \text{ et } P_nQ_n \longrightarrow fg,$$

où la convergence est celle de l'espace normé $C(K)$; pour $a \in K^c$, désignons aussi par φ_a l'élément de $C(K)$ défini par $\varphi_a(z) = \frac{1}{z-a}$; (2.19) se reformule ainsi

$$a \in K^c \Longrightarrow \varphi_a \in P(K). \tag{2.19'}$$

pour prouver (2.19'), on va chanter le même refrain que dans la preuve du théorème 2.3 ; posons $A = \{a \in K^c ; \varphi_a \in p(K)\}$, et montrons que

1) $A \neq \varnothing$.

Soit $R = \sup\{|z| ; z \in K\}$; on va voir que $|a| > R$ entraîne $a \in A$; en effet, soit $|a| > R$; $\varphi_a(z) = -\frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{z}{a}} = -\sum_0^\infty \frac{z^n}{a^{n+1}}$, la série convergeant normalement sur K puisque $\left|\frac{z^n}{a^{n+1}}\right|$est inférieur à $\left(\frac{R}{|a|}\right)^n R^{-1}$; si donc on pose $P_N(z) = -\sum_0^n \frac{z^n}{a^{n+1}}$, P_n tend vers $\varphi_a$dans $C(K)$, et $\varphi_a \in P(K)$.

2) A est fermé dans K^c.

Cela a lieu presque par définition, module la propriété

$$a \in \bar{A} \cap K^c \Longrightarrow \varphi_a \in \overline{P(K)}\,(= P(K)). \tag{2.20}$$

En effet, pour un tel a, soit $d = d(a, K)$ et (a_n) une suite de A tendant vers a avec $|a_n - a| \leq \frac{d}{2}$; pour $z \in K$,

$$\left| \frac{1}{z - a_n} - \frac{1}{z - a} \right| = \left| \frac{a_n - a}{(z - a_n)(z - a)} \right| \leq \frac{|a_n - a|}{\frac{d}{2} \times d},$$

d'où

$$\left\| \varphi_{a_n} - \varphi_a \right\|_{C(K)} \leq \frac{2}{d^2} |a_n - a|,$$

ce qui prouve (2.20) et **2)**.

3) A est ouvert dans K^c. Soit $a \in A$, $d = d(a, K)$; il suffit de montrer que

$$\overline{D}\left(a, \frac{d}{2}\right) \subset A. \tag{2.21}$$

Or, si $|h| \leq \frac{d}{2}$ et $z \in K$,

$$\frac{1}{z - a - h} = \frac{1}{z - a} \frac{1}{1 - \frac{h}{z-a}} = \sum_0^\infty \frac{h^n}{(z - a)^{n+1}},$$

la série convergeant normalement sur **K** puisque son terme général est majoré par $d^{-1}2^{-n}$; donc $\sum_0^N h^n \varphi_a^{n+1}$ tend vers φ_{a+h} dans $C(K)$; or $\sum_0^N h^n \varphi_a^{n+1} \in P(K)$, puisque $a \in A$ et puisque $P(K)$ est une algèbre ; il en résulte que $\varphi_{a+h} \in P(K)$, ce qui prouve (2.21). le refrain est chanté et la preuve achevée : $A = K^c$ puisque K^c est connexe. Plus généralement, si B est une sous-algèbre fermée de $C(K)$, ω une composante connexe de K^c et E_B l'ensemble des $a \in \omega$ tels que $\varphi_a \in B$, le même raisonnement montre que E_B est ouvert-fermé dans ω ; on a donc $E_B = \omega$ dès que $E_B \neq \varnothing$. En particulier, on a démontre le résultat suivant : soit K un compact de $\mathbb{C}$, (ω_n) la suite des composantes connexe bornées de K^c, et pour chaque n, $a_n \in \omega_n$ fixé ; alors tout fonction φ_a $(a \in K^c)$ est limite uniforme sur K de fractions rationnelles dont les pôles sont contenus dans l'ensemble des a_n. ■

Remarque 2.3.6 *Le théorème de Runge est généralement énoncé sous la forme plus forte suivante :*

$$f \textit{ holomorphe au voisinage de } K \textit{ et } K^c \textit{connexe entraînent } f|_K \in p(K).$$

La preuve découle facilement de (2.19) et de l'ingrédient supplémentaire suivant, où Ω *est un ouvert contenant* K *sur lequel* f *est holomorphe :*

il existe un cycle γ *d'image contenue* K *dans* $\Omega \backslash K$ *tel que* *(2.22)*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega \text{ pour } z \in K.$$

En effet, (2.22) entraîne $f|_K = \frac{-1}{2i\pi} \int_\gamma f(\omega) \varphi_\omega d\omega$ *; on approche cette intégrale vectorielle par des sommes de Riemann vectorielles* $\sum \lambda_i \varphi_{\omega_i}$ *et on applique (2.19) ; la difficulté est d'établir (2.22) qui est intuitive, mais très difficile à formaliser ; pour une preuve vraiment rigoureuse, (voir. [8]).*

2.4 Passage du locale au global

$f : X \longrightarrow Y$ est localement constante si tout point $a \in X$ possède un voisinage V sur lequel f vaut $f(a)$.

Proposition 2.4.1 ***a)*** *Soit* X *connexe et* $f : X \longrightarrow Y$ *localement constante ; alors* f *est constante.*

b) *Soit* γ *une courbe fermée* C^1*par morceaux d'image* γ^* *et soit*

$$I(a, \gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z - a}$$

l'indice de a *par rapport à* γ *; alors l'indice est constant sur chaque composante connexe* X *de* Y^{*c}*.*

Preuve. a) Soit $a \in X$ et $A = \{x \in X ; f(x) = f(a)\}$;A est ouvert par hypothèse et contient a ; mais A^c est aussi ouvert ; soit en effet $x \notin A$, V un voisinage de x tel que $f|_V = f(x)$; si $y \in V$, $f(y) = f(x)$ et $f(y) \neq f(a)$; V est donc inclus dans A^c ; A est non vide, ouvert-fermé dans X connexe, d'ou $A = X$ et f est constante.

b) On sait que (voir. [6] et [7]) $a \longmapsto I(a, \gamma)$ est une application continue de $\mathbb{C} \backslash \gamma^*$dans $\mathbb{Z}$; le résultat découle donc de a), ou de la quatrième définition de la connexité. ∎

Remarque 2.4.2 *Une application classique de a) est celle où* X *est un ouvert connexe d'un espace normé* E *et* f *une application de classe* C^1*sur* X*, de dérivée nulle ; si* $B(a, r)$ *est incluse dans* X*,le théorème de la moyenne (voir. [9]) appliqué à l'ouvert convexe* $B(a, r)$*, montre que* f *est constante sur* $B(a, r)$*, donc localement constante ; l'exemple* $E = \mathbb{R}^2$*,*

$$X = \{(x, y) ; y \neq 0\}, \; f(x, y) = \begin{cases} 1 & si \;\; y > 0 \\ -1 & si \;\; y < 0 \end{cases}$$

montre que l'hypothèse X *connexe est essentielle.*

Dans le même ordre d'idées, on a les résultats suivants que nous énonçons sans démonstration (voir. respectivement [10] et [6] et [7])

Théorème 2.4.3 ***(théorème d'unicité globale de Cauchy-Lipschitz)***

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et localement lipchitzienne en la deuxième variable ; soit y_1 et y_1 deux solutions sur l'intervalle I de l'équation différentielle $y' = f(x, y)$; si y_1 et y_2 sont égales en un point de I, alors $y_1 = y_2$.

Théorème 2.4.4 ***(théorème d'unicité du prolongement analytique)***

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, f et $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphes et E une partie de Ω ayant un point d'accumulation dans Ω ; alors $f\,|_E = g\,|_E$, entrain $f = g$.

Voici une application du (théorème2.4.4), qui est une forme très faible du principe d'incertitude d'Heisenberg (voir. [11]) ; soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ sa transformée de Fourier définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(t)\, dt.$$

Alors, si f et $\hat{f}$ sont à support borné, $f = 0$.

En effet, si f est nulle presque partout hors de $[-A, A]$, on peut prolonger $\hat{f}$ en une fonction entière par la formule

$$\hat{f}(z) = \int_{-A}^{A} e^{-itz} f(t)\, dt;$$

par hypothèse, $\hat{f}$ s'annule sur un ensemble de la forme $[B, \infty[$ dont tous les points sont d'accumulation dans $\mathbb{C}$; d'après le (théorème 2.4.4), $\hat{f}(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, en particulier $\hat{f}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; le théorème d'unicité de Fourier entraîne alors $f = 0$.

2.5 Homotopie ; existence de logarithmes continus

Soit X, Y deux espaces topologiques, I le segment $[0, 1]$; dans l'étude de la connexité (entre autres), il est utile d'introduire une relation d'équivalence dans l'espace $C(X, Y)$ des applications continues de X dans Y.

Définition 2.5.1 ***i)*** *$f, g \in C(X, Y)$ sont dites homotopies s'il existe $F : X \times I \longrightarrow Y$ continue telle que $F(x, 0) = f(x)$ et $F(x, 1) = g(x)$ pour tout $x \in X$.*

On note $f \simeq g$; la relation $\simeq$ est clairement une relation d'équivalence.

ii) *$f \in C(X, Y)$ est dite équivalente à zéro si f est homotopie à une application constante de X dans Y. On note $f \simeq 0$.*

Intuitivement, F représente une déformation continue de f vers g quand le temps t varie de 0 à 1 ; posons en effet $F_1(x) = F(x, t)$; F_t varie continûment avec t (si X

est métrique compact, $t \longmapsto F_t$ est même un chemin joignant f à g dans $C(X,Y)$), $F_t \in C(X,Y)$, $F_0 = f$ et $F_1 = g$. Si $g \simeq f$, g hérite souvent des bonnes propriétés de f comme on le verra plus loin ; enfin la notion d'homotopie, convenablement ‹‹relativisée››, sert à définir les espaces simplement connexes, mais nous n'aurons pas besoin ici de cette nouvelle notion.

Définition 2.5.2 *Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{C}^*$ continue ; on dit que f a démet un logarithme n continu s'il existe $g : X \longrightarrow \mathbb{C}$ continue telle que $f(x) = e^{g(x)}$ pour tout $x \in X$; en abrégé, on écrit $f = e^g$ et on dit que f a un log continu.*

Remarque 2.5.3 *Souvent, f est plus précisément à valeurs dans le cercle unité Γ ; un logarithme continu de f (s'il existe) est nécessairement à valeurs imaginaires pures et on écrit plutôt $f = e^{ig}$ ou $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue ; d'ailleurs on a l'équivalence immédiate :*

$$f : X \longrightarrow \mathbb{C}^* a \text{ un log continu} \Longleftrightarrow \frac{f}{|f|} : X \longrightarrow \Gamma \text{ a un log continu.} \qquad (*)$$

En effet, la partie modulaire $|f|$ peut toujours s'écrire $e^{\log|f|}$, où log est le logaritme népérien. Voici une première application de l'homotopie.

Théorème 2.5.4 *Soit X un espace métrique compact et f_0, $f_1 : X \longrightarrow \mathbb{C}^*$ continues ; on suppose que f_0 a un log continu et que f_1 est homotopie à f_0 ; alors f_1 a un log continue*

Preuve. *D'après la (remarque 2.5.3) (et quitte à remplacer $F(x,t)$ par $\frac{F(x,t)}{|F(x,t)|}$, on peut supposer que f_0, f_1 sont à valeurs dans Γ et qu'il existe une homotopie $F : X \times I \longrightarrow \Gamma$ déformant continûment f_0 en f_1; $X \times I$ est métrique compact, donc F est uniformément continue en particulier, on a la propriété suivante*

$$\exists n \in \mathbb{N}^*; \left|t - t^{'}\right| \leq \frac{1}{n} \|F_t - F_{t^{'}}\|_{c(X)} < 2. \qquad (2.23)$$

Rappelons que Soit X un espace topologique et $f : X \longrightarrow \Gamma$ continue non surjective. Alors, il existe $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f = e^{ig}$ (en d'autres termes, f a un logarithme continu et

$$\text{si } f \in C(X,\Gamma) \text{ est non surjective, } f \text{ a un log continu.} \qquad (2.24)$$

posons $\varnothing_k(x) = F\left(x, \frac{k}{n}\right)$ et montrons par récurrence sur K que

$$\varnothing_k \text{ a un log continu, } (k = 0, ..., n). \qquad (2.25)$$

Par hypothèse, $\varnothing_0 = f_0$ a un log continu ; et on remarque que $\frac{\varnothing_{k+1}}{\varnothing_k} : X \longrightarrow \Gamma$ évite la valeur $-1 \in \Gamma$; en effet, $\frac{\varnothing_{k+1}(x)}{\varnothing_k(x)} = -1$ entraînerait $|\varnothing_{k+1}(x) - \varnothing_k(x)| = 2$ et contredirait

(2.23) pour $t = \frac{k}{n}$, $t' = \frac{k+1}{n}$ *; (2.24) entraîne alors* $\frac{\varnothing_{k+1}}{\varnothing_k} = e^{iu}$ *; si donc* $\varnothing_k = e^{iv}$, $\varnothing_{k+1} = e^{i(u+v)}$ *(où* $u, v : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *sont continues), ce qui prouve(2.25) ; en particulier,*$\varnothing_n = f_1$ *a un log continu.* ■

Théorème 2.5.5 *Soit* K *un compact étoilé d'un evn* E, $a \in K$.

a) *Tout fonction continue* $f : K \longrightarrow \mathbb{C}^*$ *possède un logarithme continu* g *; deux tels logarithmes diffèrent d'un multiple entier constant de* $2i\pi$ *; si* $f(a) = e^b$, *on peut choisir* $g(a) = b$.

b) *Tout fonction continue* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}^*$ *possède un logarithme continu ; les précisions de a) restent valables, avec* $a \in \mathbb{R}^n$.

Preuve. a) Par translation, on peut supposer K étoilé par rapport à 0 ; posons $F(x,t) = f(tx)$, où $x \in K$, $t \in [0,1]$; cela a un sens car $tx \in K$; F est continue : $K \times I \longrightarrow \mathbb{C}^*$ avec $F(x,0) = f(0)$, $F(x,1) = f(x)$; f est donc homotope à l'application constante $f(0)$ dans $\mathbb{C}^*$; cette application a un *log* continu, à savoir une constante c telle que $f(0) = e^c$; il en est de même pour f d'après le (théorème 2.5.4) ; d'autre part, $e^{g_1} = e^{g_2} = f$ entraîne $g_1 - g_2 = 2in\pi$, $(n \in \mathbb{Z})$ on soit X un espace connexe, g_1 et g_2 deux applications continues de X dans $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$.a) $e^{2in\pi g_1} = e^{2in\pi g_2} \Longrightarrow g_1 - g_2 =$ constante entière.b) $g_1^n = 1 \Longrightarrow g_1 =$ constante racine $n - ième$ de l'unité.donc enfin si $f = e^g$ et $f(a) = e^b$,on a $g(a) = b + 2in\pi$,$(n \in \mathbb{Z})$ et il suffit de remplacer g par $\gamma = g - 2in\pi$ pour avoir $f = e^\gamma$ et $\gamma(a) = b$.

b) Posons $f(0) = e^\alpha$ et $K_j = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq j\}$, où $\|\|$ est une norme sur R^n, $j = 1, 2.....$;K_j est compact et étoilé par rapport à 0, donc il existe $g_j \in C(K_j)$ telle que $g_j(0) = \alpha$ et $e^{g_j} = f\,\big|_{K_j}$; de plus $e^{g_{j+1}} = e^{g_j}$ sur K_j, donc $g_{j+1}\,|K_j - g_j = c_j$, où c_j est une constante ; et c_j est une constante ; et $c_j = g_{j+1}(0) - g_j(0) = \alpha - \alpha = 0$, autrement dit $g_{j+1}\,|K_j = g_j$; les g_j se recollent donc en $g \in C(\mathbb{R}^n)$ telle que $f = e^g$; les précisions se prouvent comme dans a). ■

• Soit X un espace topologique et $A \subset X$. A s'appelle un retract de X si l'identité $i : A \longrightarrow A$ se prolonge en une application continue $r : X \longrightarrow A$; r s'appelle une rétraction de X sur A. Le (théorème2.5.5) et la notion de rétract vont donner un important théorème de point fixe.

Théorème 2.5.6 ***(théorème de Brouwer en dimension 2)*** *Soit* B *une boule euclidienne fermée de* $\mathbb{R}^2$. *Alors :*

a) ∂B *n'est pas un retracte de* B.

b) *Tout application continu* $f : B \longrightarrow B$ *possède un point fixe.*

Preuve. a) On peut supposer que B est la boule unité, de sorte que $\partial B = \Gamma$; soit r une rétraction éventuelle de B sur Γ ; d'après le (théorème 2.5.5), $r = e^{i\varphi}$, où $\varphi : B \longrightarrow \mathbb{R}$

est continue ; notons ψ la restriction de φ à Γ ; on a par définition :

$$x = e^{i\Psi(x)}, \forall x \in \Gamma. \tag{2.26}$$

Si $j = \psi(\Gamma)$, J est compact connexe, c'est donc un segment de $\mathbb{R}$; d'autre part, ψ est injective d'après (2.26) :

$$\psi(x) = \psi(x') \Longrightarrow e^{i\psi(x)} = e^{i\psi(x')} \Longrightarrow x = x'.$$

Γ étant compact, ψ est un homéomorphisme de Γ sur J, ce qui est impossible d'après (2.2) ; ∂B n'est donc pas un rtract de B.

b) Supposons f sans point fixe et définissons $r : B \longrightarrow \Gamma$ ainsi $r(x)$ est le point où la demi-droite d'origine $f(x)$ et de vecteur directeur $x - f(x)$ perce Γ. Analytiquement, $r(x) = f(x) + t(x - f(x))$ avec $t \geq 0$ et $|r(x)| = 1$; élevant au carré, on obtient l'équation du second degré

$$|x - f(x)|^2 t^2 + 2(f(x) / (x - f(x)))\, t + |f(x)|^2 - 1 = 0.$$

Le discriminant réduit est

$$\triangle'(x) = |(f(x) / (x - f(x)))|^2 + |x - f(x)|^2 (1 - |f(x)|^2) \geq 0,$$

et le produit des racines est négatif ; il y a donc une racine positive $t(x) = \frac{-(f(x)/(x-f(x))) + \sqrt{\triangle'(x)}}{|x-f(x)|^2}$ et on a $r(x) = f(x) + t(x)(x - f(x))$; on voit que r est une application continue de B dans Γ, par définition égale à l'identité sur Γ ;r est donc une rétraction de B sur ∂B, ce qui est impossible d'après a),et prouve b) par l'absurde. ■

Remarque 2.5.7 *Le théorème de Tietze affirme que si A est un fermé que si A est un fermé d'un espace métrique X, toute fonction continue $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ se prolonge en $\tilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$; le résultat reste vrai si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ (en prolongeant les parties réelles et imaginaire de f), mais le théorème de Brouwer dit qu'il ne l'est plus si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{C}^*$ ou Γ ; on a cependant la proposition utile suivante.*

Proposition 2.5.8 *Soit A un fermé d'un espace métrique X et $f : A \longrightarrow \mathbb{C}^*$ continue ; alors il existe un ouverte $\omega \supset A$ et une extension continue $\tilde{f}$ de f, avec $\tilde{f} : \omega \longrightarrow \mathbb{C}^*$.*

Preuve. Soit $F : X \longrightarrow \mathbb{C}$ un prolongement continu de f, et soit $\omega = \{F \neq 0\}$, $\tilde{f} = F|_\omega$; ω est un ouvert contenant A, donc ω et $\tilde{f}$ répondent à la question. ■

Étant donné un compact A de $\mathbb{R}^2$ et p, $q \in A^c$, il est souvent important de savoir si A ne sépare pas p et q, c'est-à-dire si p et q sont dans une même composante connexe de A^c ; on va donner un critère ‹‹algébrique›› pour qu'il en soit ainsi ; ce critère utilise l'application β_p (variante de l'application de Borsuk $x \longrightarrow \frac{x-p}{|x-p|}$) ainsi définie sur A

$$\beta_p(x) = x - p,\ p \in A^c, x \in A;\ \beta_p \in C(A, \mathbb{C}^*). \qquad (2.27)$$

Nous aurons besoin de deux résultats préliminaires.

Proposition 2.5.9 ***(critère de Borsuk)***

Soit A un fermé d'un espace métrique X et f_0, f_1 :$A \longrightarrow \mathbb{C}^*$ continues ; on suppose que

a) *f_0 a une extension continue $F_0 : X \longrightarrow \mathbb{C}^*$;*

b) *$f_1 \simeq f_0$ (dans $C(A, \mathbb{C}^*)$).*

Alors f_1 a aussi une extension continue $F_1 : X \longrightarrow \mathbb{C}^*$.

Preuve. Soit $\varphi : A \times I \longrightarrow \mathbb{C}^*$ continue avec $\varphi(a, 0) = f_0(a)$ et $\varphi(a, 1) = f_1(a)$; cosidérons $A \times I$ (resp $X \times I$) comme un cylindre de base A (resp. de base X) et posons $y = X \times \{0\} \cup A \times I$;Y est la réunion du cylindre au-dessus de A et la base du cylindre au-dessus de A et de la base du cylindre au-dessus de X ; l'homotopie φ fournit un prolongement continu $\varnothing$ de f_0 à Y par la formule

$$\begin{cases} \varnothing(x, 0) = F_0(x), & x \in X \\ \varnothing(a, t) = \varphi(a, t), & a \in A,\ t \in I \end{cases} \qquad (2.28)$$

La (proposition 2.5.8) (dans l'espace métrique $X \times I$) donne un ouvert $U \supset Y$ et une extension continue ψ de $\varnothing$ à U, à valeurs dans $\mathbb{C}^*$; I étant compact, l'ensemble V des x tels que $x \times I \subset U$ est ouvert ; soit en effet $x \in V$; pour chaque $y \in I$, on peut trouver un ouvert A_y de X et un ouvert $B_y$de I tels que $x \in A_y$, $y \in B_y$, $A_y \times B_y \subset U$. Par suite, un nombre fini $B_{y_1}, \ldots.., B_{y_p}$ de B_y recouvrent I, et si $V_x = \cap_{j=1}^{P} A_{y_j}$, V_x est un voisinage ouvert de x, et $V_x \times I \subset U$, donc $V_x \subset V$, et V est bien ouvert ; de plus,$V \supset A$; on a déjà un prolongement de f_1 à V par la formule $F_1(x) = \psi(x, 1)$, mais ceci est banal d'après la (proposition 2.5.8) ; on raffine en introduisant $p : X \longrightarrow I$ continue telle que

$$p\,|_A = 1;\ \ p\,|_{V^c} = 0 \qquad (2.29)$$

(c'est possible car X est métrique).

On pose alors $F_1(x) = \psi(x, p(x))$; F_1 a un sens et est continue, comme composée des application continues $x \longmapsto (x, p(x))$ de X dans U et $\psi : U \longrightarrow \mathbb{C}^*$(en effet, si $x \in V$, on a $(x, p(x)) \in V \times I \subset U$, et si $x \notin V$, on a $(x, p(x)) = (x, 0) \in Y \subset U$) ; enfin, $a \in A$ entraîne $F_1(a) = \psi(a, 1) = \phi(a, 1) = \varphi(a, 1) = f_1(a)$; $F_1 : X \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est donc une extension continue de f_1 ; on voit aussi (soit dit en passant) que F_1 est homotope à F_0 dans $C(X, \mathbb{C}^*)$. ■

Proposition 2.5.10 *Soit A un compact de $\mathbb{R}^2$, C une composante connexe bornée de A^c, $p \in C$; alors, β_p n'a pas d'extension continue à $A \cup C$ (à valeurs dans $\mathbb{C}^*$) ; il en est de même de β_p^n, $n \in \mathbb{N}^*$.*

Preuve. On se ramène par translation au cas $p = 0$; supposons qu'il existe une extension continue $F : A \cup C \longrightarrow \mathbb{C}^*$ de $x \longmapsto x^n$ (x^n étant la puissance $n-ième$ de x dans $\mathbb{C}$, assimilé à $\mathbb{R}^2$) ; considérons une grande boule fermée B de centre 0 et de rayon r dont l'intérieur contient $\overline{C}$ et posons

$$g(x) = \begin{cases} x^n & \text{si } x \in B \backslash C \\ F(x) & \text{si } x \in \overline{C}. \end{cases}$$

∂C est inclus dans A, on a la proposition suivant : soit K un compact non vide de $\mathbb{C}$, $\Omega = K^c$. Alors

a) Ω a une seule composante connexe non bornée notée C_∞.

b) Une composante connexe C de Ω est ouverte et sa frontière est incluse dans K.

c) la réunion $\hat{K}$ de K et des composantes connexes bornées de Ω est un compact de complémentaire connexe.

d) $\hat{K}$ n'est autre que l'enveloppe polynômialement convexe de K, i.e. :

$$z \in \hat{K} \Longleftrightarrow |P(z)| \leq \sup\{|P(\omega)|\,; \omega \in K\}, \quad \forall P \in \mathbb{C}[X].$$

Donc la définition de g est cohérente ; $B \backslash C$ et $\overline{C}$ sont fermés, g est donc continue sur B ; le (théorème 2.5.5) donne alors $h : B \longrightarrow \mathbb{C}$ continue telle que $g = e^h$; en pariculier $x^n = e^{h(x)}$ si $|x| = r$; par changement de variable $y^n = e^{h(ry) - nLogr} =: e^{i\varphi(y)}$ si $|y| = 1$,où $\varphi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue ; soit encore $\left(ye^{-i\varphi(y)/n}\right)^n = 1$; Γ étant connexe, on a $ye^{-i\varphi(y)/n} = e^{i\omega}$, où ω est de la forme $\frac{2k\pi}{n}$; mais alors $y = e^{i\psi(y)}$, où $\psi(y) = \omega + \frac{\varphi(y)}{n}$, et ceci est exclu comme on l'a vu dans la preuve du (théorème 2.5.6) ; la (proposition 2.5.6) est donc montrée par l'absurde. ■

Théorème 2.5.11 ***(critère d'Eilenberg)*** *Soit A un compact de $\mathbb{R}^2$, $p, q \in A^c$; on a équivalence entre*

a) *A ne sépare pas p et q.*

b) *β_p est homotope à β_b(dans $C(A, \mathbb{C}^*)$).*

Preuve. a)$\Longrightarrow$b) Soit C un composante connexe de A^c, contenant p et q ; C est connexe par arcs, on a :

1) X connexe par arcs entraîne X connexe.

2) La réciproque est vraie si X est un ouvert d'un *evn* E.

Il existe donc un chemin γ dans $\mathbb{C}$ tel que $\gamma(0) = p$ et $\gamma(1) = q$; si on pose $F(x,t) = x - \gamma(t)$, où $x \in A$, $t \in I$, on défini une homotopie de β_p vers β_q dans $C(A, \mathbb{C}^*)$.

b)$\Longrightarrow$a) Si A sépare p et q, on a par exemple $p \in C$, $q \notin C$, où C est une composante connexe bornée de A^c ; or β_q se prolonge (par $x \longrightarrow x - q$!) en une application continue de $\mathbb{R}^2 \setminus \{q\}$ donc $\mathbb{C}^*$, en particulier de $A \cup C$ dans $\mathbb{C}^*$, tel n'est pas le cas pour β_p d'après la (proposition 2.5.10) ; donc β_p et β_q ne peuvent être homotopes d'après le critère de Borsuk 2.21. ■

Théorème 2.5.12 ***(théorème de Janiszewski)***

Soit A, B des compacts de $\mathbb{R}^2$ et p, $q \notin A \cup B$. On suppose que

a) ni A ni B ne séparent p et q ;

b) $A \cap B$ est connexe.

Alors, $A \cup B$ ne sépare pas p et q.

Preuve. Notons d'abord que

$$\frac{\beta_p}{\beta_q} \simeq 0 \text{ dans } C(A, \mathbb{C}^*) \text{ et dans } C(B, \mathbb{C}^*). \tag{2.30}$$

Soit en effet $F : A \times I \longrightarrow \mathbb{C}^*$ continue avec $F(x,0) = \beta_p(x)$, $F(x,1) = \beta_q(x)$(F existe d'après le critère d'Eilenberg) ; alors $G = \frac{F}{\beta_q}$ est une homotopie de $\frac{\beta_p}{\beta_q}$ vers la constante 1 dans $C(A, \mathbb{C}^*)$; *idem* avec B. A et B étant compacts, le (théorème 2.5.4) fournit $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C}$ et $\psi : B \longrightarrow \mathbb{C}$ continues telles que

$$\frac{\beta_p}{\beta_q} = e^{\varphi} \text{ sur } A; \frac{\beta_p}{\beta_q} = e^{\psi} \text{ sur } B. \tag{2.31}$$

Ainsi $e^{\varphi} = e^{\psi}$ sur $A \cap B$; $A \cap B$ étant connexe (éventuellement vide), il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\varphi = \psi + 2in\pi \text{ sur } A \cap B. \tag{2.32}$$

Définissons $\mathcal{X} : A \cup B \longrightarrow \mathbb{C}$ par

$$\mathcal{X}(x) \begin{cases} \varphi(x), & x \in A \\ \psi(x) + 2in\pi, & x \in B. \end{cases}$$

D'après(2.32), cette définition est cohérente ; $\mathcal{X}$ est continue sur A et B fermés, donc continue sur $A \cup B$, soit $(A_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X, $f : X \longrightarrow Y$, $f_i = f|_{A_i}$.

a) On suppose les A_i tous ouverts et les f_i toutes continues ; alors f est continue.

b) On suppose les A_i tous fermés et en nombre fini, les f_i toutes continues ; alors f est continue ; et d'après (2.31) on montre que $\frac{\beta_p}{\beta_q} = e^{\mathcal{X}}$ sur $A \cup B$; posant $G(x,t) = e^{t\mathcal{X}(x)}$, $x \in A \cup B$, $t \in I$, on définit une homotopie de 1 vers $\frac{\beta_p}{\beta_q}$ dans $C(A \cup B, \mathbb{C}^*)$; autrement dit, dans $C(A \cup B, \mathbb{C}^*)$; autrement dit, dans $C(A \cup B, \mathbb{C}^*)$, on a $\frac{\beta_p}{\beta_q} \simeq 0$ et $\beta_p \simeq \beta_q$; une nouvelle application du critère d'Eilenberg montre que $A \cup B$ ne sépare pas p et q. ■

Remarque 2.5.13 *Prenons pour A un demi-cercle, pour B le diamètre de ce demi-cercle, pour p et q des points respectivement in intérieur et extérieur au demi-disque ouvert déterminé par $A \cup B$; il est clair que ni A ni B ne séparent p et q, mais que $A \cup B$ les sépare ; c'est ici l'hypothèse b) qui est en défaut($A \cap B$ est un ensemble non connexe à deux éléments).*

Remarque 2.5.14 *Les propositions 2.20 à 2.23 restant valables en remplaçant $\mathbb{R}^2$ par $\mathbb{R}^n$ et Γ ou $\mathbb{C}^*$ par la sphère unité euclidienne S^{n-1} ou $(\mathbb{R}^n)^*$; il n'ya rien à changer aux démonstration, module le fait (voir. [12]) que le théorème de Brouwer reste vrai en dimension n.*

Conclusion Générale

A la fin de cette étude nous conclurons que l'espace connexe est utilisé dans plusieurs domaines mathématiques, en particuliér dans l'analyse, la topologie, la géométrie...

Par rapport a l'immensité da notre thème, nous présentons une partie très simple dans ce mémoire.

Bibliographie

[1] G. SKANDALIS : *Topologie et analyse, cours et exercices avec solutions 3ᵉ année*, Dunod, Paris, 2001.

[2] H. QUEFFÉLEC : *Topologie, cours et exercices corrigés, 3ᵉ édition,* Dunod, Paris, 2002, 2007.

[3] J. SAINT RAYMOND : *Topologie calcul différentiel et variable complexe, Nouvelle édition,* Calvage & Mounet, Paris, 2008.

[4] H. QUEFFÉLEC, C. ZUILY : *Eléments d'Analyse*, *3ᵉ édition*, Dunod (2007).

[5] F. HIRSCH, G. LACOMBE : *Eléments d'Analyse Fonctionnelle,* Masson, 1997.

[6] W. RUDIN : *Real and Complex Analysis, 3ᵉ édition,* Mc Graw-Hill, 1987.

[7] W. RUDIN : *Fourier Analysis on groups*, Interscience Publishers, 1967.

[8] R.B.BURCKEL : *An introduction to Classical complex Analysis*, Academic Press, 1979.

[9] J. DIEUDONNÉ : *Fondements de l'Analyse Moderne,* tome 1, Gauthier-Villars, 1965.

[10] H. CARTAN : *Cours de Calcul Différentiel, 2ᵉ édition, Hermann, 1977.*

[11] V. HAVIN, B. JÖRICKE : *The Uncertainty Principle in Harmonic Analysis*, Springer Verlag, 1994.

[12] J. DUGUNDJI : Topology, Allyn and Bacon pub., Boston, 1966.