الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :...............

Centre Universitaire

Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Mathématiques et Informatique **Département de Mathématiques**

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentale

Anneaux locaux

Préparé par : BAAZIZ Rahma
BAOUCHE Nessrine

Soutenue devant le jury

KHALFAOUI Mohamed	MAA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Président
BOUGUEBINA Monir	MAA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
DAOUI Amina	MAA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Examinateur

Année universitaire :2022/2023

Remerciment

Nous remercions tout d'abord ALLAH le tout puissant qui nous a aidé et donné la force et la santé pour atteindre ce rang et achever ce modèste travail.
La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma gratitude.
Nous voudrions tout d'abord et en gras adresser nos sincères remerciements et nos énormes respects a notre encadreur **Dr Bougbuna Mounir**.
Qui nous a suivi et orienté durant cette étude grâce a son excellente expérience acquise au cours de son riche carrière et sa compétence tous les respects qu'il le doit pour sa patience, sa disponibilité et sa présence.
Sincèrement on a eu l'honneur d'être encadrer par sa personne notre brave directeur de mémoire.
Nous remerciont ensuite l'ensemble des membres du jury **Mme Daoui Amina** et monsieur **Khalfaoui Mohamed**, qui nous ont fait l'honneur de bien vouloir étudier avec attention notre travail.
Nous vous remercions de votre enseignement nous avons bénéficié de façon clair et précis.
Nous adressons, également, nos remerciements chaleureux à monsieur **Ibrahim Boufelgha**, Maître assistant à l'université de Mila, qui a bien voulu prendre la responsabilité d'évaluer ce travail, qu'il soit vivement remercié.
Nous voudrions également remercier tout le personnel de l'institut de sciences et de la technologie.
Enfin, nous remercions toutes personnes qui ont contribué de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicaces

A Dien, la raison de ma vie.
Tout d'abord, je voudrais remercier la personne la plus chère à mon cœur, ma mère Châma que j'aime tant, Sur qui j'ai compté tout au long de mes années scolaires, jusqu'à ce qu'aujourd'hui j'atteigne la partie la plus importante de ma vie, je dédie tous mes mots de gratitude et d'amour pour vous.
A mon trés cher père Saleh : Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime et le respect que j'ai toujours pour vous. Rien au monde ne vant ces efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être. Ce travail est le fruit des sacrifices que tu as consentis pour ma formation le long de ces années.
A mes chers frères : Mourad, Farid, Djamel, Fouaz.
A mes sœrs : Hanene, Nawel et ses filles.
A ma grande mère : Taoues
A mes meilleurs amies : Manel, Rania, Loupi, Hala, Basma,...
A mes amies : Tout d'abord, je voudrais remercier ma chère binôme Rahma, avec qui j'ai partagé ce travail ... Zakia, Dounia, Zineb, Hanene, Khawla ...et toutes les aimes de l'école.
A mon directeur de mémoire : **Dr Bougbuna Mounir**.
A toute ma famille, en particulier mon oncle : Naouar et ma cousine Amina.
A toute mes collègues de la promotion de Mathématique Fondamental 2023.
A tous ceux qui m'ont encouragé, je dédie ce mot.
Il était le rêve de mes parents avant qu'il soit le mien.

Nessrine.

Dédicaces

Grâce à dieu le tout puissant, le tout miséricordieux.
Je tiens sincèrement a dider ce modeste travail à la mémoire de mon père, ce personne qui m'a tout donné et ma soutenu jusqu'au dernier souffle de sa vie.
(que dieu l'accueil dans son vaste paradis)
A toutes les personne qui m'ont aidé et m'ont setenu de prés ou de loin durant tout mon parcours universitaire.
A mes sœures et frères.
A toute ma famille, mes oncles Djamel Madjid et Hamoudi les plus chers, mes tantes et ma cousine Nesrine.
A ma tante Aicha qui nous a quitées, et qui a toujours sa place dans mon cœurs.
A mes enseignants de l'université, en particulier mon professeur **Dr Kaouache Ismail**.
Pour tous ses encouragements permanents.
A une personne spécial, une de mes meilleures rencontres a l'université **Mm Daoui Amina**, qui a toujours été un soutien pour moi.
A mes meilleures amies : Sirine, Dalila, Yakout, Amira, Soumia, Halima, Aya.
A mes collègue de l'université avec qui j'ai partagé mon parcours.
A toutes les personnes que j'aime.

Rahma.

Table des matières

Introduction

Ce travail est une introduction à la théorie des topos de Grothendieck [1]. On y explique l'assertion suivante : *Le topos de Zariski classifie les anneaux locaux*, démontrée pour la première fois dans [2]. Le chemin sera long avant de pouvoir comprendre cet énoncé et il le sera encore plus avant de pouvoir le démontrer. Faire des topos ici à côté de Boufouh peut sembler surréaliste mais nous pensons que les topos constituent les assises des mathématiques des siècles à venir et qu'il n'est donc pas inutile de les connaître.

Un topos est la catégorie des faisceaux sur un site (une sorte de catégorie sur laquelle on peut faire de la topologie). Par sa définition même un faisceau est un objet qui permet le passage de constructions locales à des constructions globales sur un espace (par exemple des variétés géométriques ou l'espace-temps). Un physicien dirait le passage du microscopique vers le macroscopique et donc du monde de la mécanique quantique vers celui de la théorie de la gravitation. Nous pensons aussi que les topos vont certainement jouer un rôle important dans l'élaboration de ce qui est le Graal des physiciens ces jours-ci : une théorie de la gravité quantique.

Ce mémoire est organisé de la manière suivante. Dans le premier chapitre la définition d'un anneau local est donnée et on montre comment ces anneaux interviennent de manière naturelle dans l'étude de ce qu'on appelle le spectre d'un anneau via essentiellement le faisceau des fonctions régulières sur le spectre. On sent déja ici qu'on est en train de faire de la Géométrie (Algébrique). Les points du spectre sont les idéaux premiers $\wp$ de l'anneau et travailler au voisinage d'un point revient à travailler avec l'anneau local en ce point $A_\wp$ qui est le localisé de l'anneau A par rapport à la partie multiplicative $S = A - \wp$.

On retrouve ce spectre au second chapitre mais complètement réinterprété dans le cadre de la théorie des topos de Grothendieck. Le spectre et sa topologie seront vu alors comme un site et on obtient donc le topos des faisceaux sur ce site. Ce chapitre, par rapport au premier, est beaucoup plus technique et nécessite un certain effort de la part du lecteur. On y utilise beaucoup le langage catégorique pour définir d'abord les sites qui sont des catégories sur lesquelles on peut faire de la topologie, puis les topos qui sont les catégories de faisceaux sur ces sites. On donne quelques exemples de topos, les plus importants pour nous étant les topos de préfaisceaux $Ens^{\mathcal{C}^{op}}$ pour $\mathcal{C}$ une petite catégorie et le topos de Zariski $\mathcal{Z}$. Ens la catégorie des ensembles est aussi un topos de Grothendieck.

Le dernier chapitre est encore plus technique. Ici on définit ce que sont les anneaux et les anneaux locaux dans un topos quelconque (au premier chapitre on travaillait dans le topos des ensembles Ens). Certaines constructions sont nécessaires pour ces définitions et heureusement ces constructions sont présentes dans tous topos. Nous définissons aussi les morphismes géométriques entre topos (et en particulier les points d'un topos) et nous faisons le lien entre ces morphismes et les anneaux dans un topos. Nous montrons qu'il y a équivalence entre la catégorie des morphismes géométriques d'un topos $\mathcal{E}$ vers un certain topos (dit topos classifiant) et la catégorie des anneaux (et anneaux locaux) dans le topos $\mathcal{E}$. Dans le cas des anneaux locaux ce topos classifiant est le topos de Zariski $\mathcal{Z}$. Il convient de revenir sur ce qui est problématique : Comment le topos de Zariski classifie les anneaux locaux ?

Chapitre 1

Anneaux Locaux

Dans ce premier chapitre on définit les anneaux locaux dans le cas classique (celui de la catégorie des ensembles). Plus tard on définira les anneaux et les anneaux locaux dans un topos quelconque. Pour la commodité du lecteur on rappelle les constructions des structures algébriques élémentaires tels que groupes, anneaux et corps. On décrit ensuite la construction de la localisation d'un anneau par rapport à une partie multiplicative, les exemples les plus importants étant ceux où la partie multiplicative est égale aux puissance a^n d'un élément a de l'anneau et au complémentaire d'un idéal premier $\wp$ de l'anneau. Un anneau local sera alors défini comme un anneau ayant un idéal maximal et un seul et ces anneaux s'obtiennent de manière générale par le processus de localisation déja mentionné. La dernière section de ce chapitre est peut-être la plus importante. On y définit le spectre d'un anneau qui est un espace topologique qui nous servira plus tard à définir le petit site de Zariski de l'anneau. Pour tout ce qui concerne ce chapitre on pourra consulter n'importe quel livre d'Algèbre commutative, par exemple [3] ou [5].

1.1 Structures Algébriques

1.1.1 Loi de composition interne

Soit E un ensemble. Une loi de composition interne $*$ sur E est une application $E \times E \longrightarrow E$ qui à deux éléments $x, y \in E$, associe un troisième élément $x * y$. On dit aussi que $*$ est une opération sur E et on parle du couple $(E, *)$. Comme exemple on peut prendre $* =$ addition dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$

ou encore $* = \cup$ ou $\cap$ dans $E = P(A)$, l'ensemble des parties d'un ensemble quelconque A.

La loi $*$ est associative si $x * (y * z) = (x * y) * z, \forall x, y, z \in E$. Elle est commutative si $x * y = y * x, \forall x, y \in E$. Soit $e \in E$. On dit que e est un élément neutre pour $*$ si $x * e = e * x = x, \forall x \in E$. Si e existe, il est alors unique. En effet supposons que $e^{'}$ soit un autre élément neutre. On a alors $e * e^{'} = e$ ($e^{'}$ est élément neutre) et $e * e^{'} = e^{'}$ (e est élément neutre) et donc $e = e^{'}$. Un couple $(E, *)$ ayant un élément neutre est appelé monoide. Par exemple $(\mathbb{N}, +)$ est un monoide d'élément neutre 0.

Soit e un élément neutre de $(E, *)$. Soient $x, x^{'}$ deux éléments de E. On dit que $x^{'}$ est le symétrique de x pour la loi $*$ si $x * x^{'} = x^{'} * x = e$. Le symétrique, s'il existe, est unique si $*$ est associative. En effet si $x^{'}$ et $x^{''}$ sont deux symétriques de x, on a $x^{''} = e*x^{''} = (x^{'}*x)*x^{''} = x^{'}*(x*x^{''}) = x^{'}*e = x^{'}$. Par exemple, dans $(\mathbb{N}, +)$, aucun élément autre que 0 n'a de symétrique. Le symétrique de 0 est 0. Dans $(\mathbb{Z}, +)$, tout élément a un symétrique : le symétrique de x est $-x$. Dans $(\mathbb{Z}, \times)$, l'élément neutre est 1 et c'est le seul élément qui ait un symétrique.

1.1.2 Groupes

Soit $(G, *)$ un ensemble G muni d'une loi de composition interne $*$.

Définition 1.1.1. *[3] $(G, *)$ est un groupe si*

- *$*$ est associative.*
- *$*$ admet un élément neutre e.*
- *tout élément x de G admet un symétrique $x^{'}$ pour $*$.*

Si $*$ est commutative, on dit que $(G, *)$ est un groupe commutatif ou abélien.

Par exemple $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +)$ sont des groupes. L'élément neutre est 0 et le symétrique de x est $-x$. L'associativité est évidente. $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe car aucun élément autre que 0 n'a de symétrique. $(\mathbb{Z}, \times)$ n'est pas un groupe. La multiplication est associative dans $\mathbb{Z}$ d'élément neutre 1, mais si $x \neq 1$, alors x n'a pas de symétrique. $(\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}, \times)$ est un groupe ainsi que $(\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}, \times)$. L'élément neutre est 1 et le symétrique de x est $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$

Définition 1.1.2. *[3] Soit* $(G, *)$ *un groupe et soit* H *une partie non vide de* G. *On dit que* H *est un sous-groupe de* G *si :*

- H *est stable pour la loi* $*$: $x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$.
- *muni de la loi* $*$, H *est lui-même un groupe.*

On note $H < G$. En pratique pour montrer que H est un sous-groupe de G, il suffit de vérifier que $x, y \in H \Rightarrow xy^{-1} \in H$. Remarquer aussi que G et H ont même élément neutre : $e_G = e_H$. Par exemple pour $* = +$, on a des inclusions de sous-groupes : $\mathbb{Z} < \mathbb{Q} < \mathbb{R} < \mathbb{C}$. Pour $* = \times$, on aussi des inclusions : $\{1\} < \{-1, 1\} < \mathbb{Q}^* < \mathbb{R}^* < \mathbb{C}^*$. Tout sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ est de la forme $n\mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{N}$. En effet $n\mathbb{Z}$ est clairement un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Inversement soit H un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Soit n le plus petit élément positif non nul de H. Si $x \in H$, la division euclidienne de x par n donne $x = kn + r$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq r < n$. Comme H est un sous-groupe, on doit avoir $x - kn = r \in H$. Par définition de n, on doit avoir $r = 0$ et $x = kn$. Donc $H = n\mathbb{Z}$.

Définition 1.1.3. *Soient* $(G, *)$ *et* $(H, \perp)$ *deux groupes. Une application* $f : G \longrightarrow H$ *est un morphisme de groupes si* $f(x*y) = f(x) \perp f(y)$ $\forall x, y \in G$.

Autrement dit f préserve les structures de groupes de G et H. Si f est bijective, on dit que c'est un isomorphisme. Si $G = H$ et $* = \perp$, on parle d'endomorphisme et d'automorphisme. Noter que $f(e_G) = e_H$. Le noyau du morphisme f est :

$$Ker f = \{x \in G : f(x) = e_H\} = f^{-1}(e_H).$$

C'est un sous-groupe de G. Le noyau est utile pour détecter si f est injective ou non. En effet on a : f injective $\Leftrightarrow Ker f = \{e_G\}$. Par exemple le morphisme $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ donné par $f(x) = 3x$ est injectif puisque $Ker f = \{0\}$ (la loi de groupe est l'addition).

Soit $(G, *)$ un groupe et soit H un sous-groupe de G. On définit une relation sur G par :

$$x \Re y \Leftrightarrow x - y \in H.$$

On vérifie facilement que $\Re$ est une relation d'équivalence. On a donc l'ensemble quotient, ensemble des classes d'équivalence :

$$\frac{G}{\Re} = \frac{G}{H} = \{\overline{x}, x \in G\}$$

.

Définissons $\overline{*}$ par $\overline{x} \,\overline{*}\, \overline{y} = \overline{x * y}$. On a donc une loi $\overline{*}$ sur $\dfrac{G}{H}$ qui devient ainsi un groupe (commutatif si G l'est) appelé le groupe quotient de G par H. En effet l'associativité de $\overline{*}$ découle de celle de $*$ par définition, l'élément neutre de $\overline{*}$ est $\overline{e}$ avec e l'élément neutre de $*$ et le symétrique de $\overline{x}$ est $\overline{x'}$ avec x' le symétrique de x.

On a automatiquement un morphisme surjectif canonique de groupes :

$$\phi : G \longrightarrow \frac{G}{H}$$

qui à x associe $\overline{x}$, de noyau $Ker\phi = H$. Si on prend $(G, *) = (\mathbb{Z}, +)$ et $H = n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}$. On a $x\Re y \Leftrightarrow x - y \in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \equiv y \ mod(n)$ et :

$$\frac{G}{H} = \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$$

Dans la suite un groupe $(G, *)$ sera noté multiplicativement : $* = \cdot$ et $e_G = 1$. Le symétrique x' de x sera noté x^{-1}. Si la loi est commutative, on le notera additivement : $* = +$, $e_G = 0$ et le symétrique x' de x sera noté $-x$.

1.1.3 Anneaux

Soit A un ensemble muni de deux lois de composition interne $+$ et $\cdot$.

Définition 1.1.4. *[3] On dit que le triplet $(A, +, \cdot)$ est un anneau si :*

- $(A, +)$ *est un groupe abélien d'élément neutre* 0_A.
- *La loi $\cdot$ est associative et admet un élément neutre* $1_A \neq 0_A$.
- *La loi $\cdot$ est distributive à gauche et à droite par rapport à la loi + :* $\forall x, y, z \in A$, *on a :*

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

Si la loi $\cdot$ est commutative, l'anneau est dit commutatif ou abélien. On notera le plus souvent $x \cdot y = xy$.

On a appelé ici anneau ce que d'autres appellent anneau unitaire : autrement dit dans la définition d'un anneau, la loi $\cdot$ n'est pas obligée d'avoir un élément neutre 1_A. Comme les anneaux que nous allons rencontrer sont tous unitaires, cela ne pose pas vraiment de problème. Dans un anneau, on a $0_A x = 0_A, \forall x \in A$. En effet $0_A x = (x-x)x = xx - xx = 0_A$. $(\mathbb{Z}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot)$ et $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sont des exemples bien connus d'anneaux commutatifs. Un autre exemple est $A = P(E)$ l'ensemble des parties d'un ensemble E. On prend $+ = \cup$ et $\cdot = \cap$. $(A, +, \cdot)$ est alors un anneau commutatif avec $0_A = \emptyset$ et $1_A = E$.

Définition 1.1.5. *Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau soit B une partie de A contenant 1_A et stable pour les lois $+$ et la loi"$\cdot$". On dit que B est un sous-anneau de A si muni de ces deux lois B est lui-même un anneau.*

Remarquer que la condition $1_A \in B$ est nécessaire. Par exemple $2\mathbb{Z}$ n'est pas un sous-anneau de $\mathbb{Z}$ car il ne contient pas 1. Par contre $B = \{a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$. Dans la pratique pour montrer que B est un sous-anneau de A, il suffit de vérifier que $1_A \in B$ et que $\forall x, y \in B$, on a $x - y$ et $xy \in B$.

Définition 1.1.6. *[3] Une partie I d'un anneau A est appelé idéal à gauche (respectivement à droite) si :*

- *I est un sous-groupe de $(A, +)$.*
- *$\forall a \in A, \forall x \in I, ax \in I$ (respectivement $xa \in I$).*

Si I est un idéal à gauche et à droite à la fois de A, on dit que c'est un idéal bilatère de A.

Si A est commutatif, les idéaux à gauche et à droite coincident. Remarquer que $\{0_A\}$ et A sont des idéaux de A. Ils sont appelés idéaux triviaux. Les autres idéaux de A sont dits propres. Un idéal de A n'est pas forcément un sous-anneau de A, car il ne contient pas en général 1_A. Plus précisément on a :

$$1_A \in I \Leftrightarrow I = A$$

Dans la suite, on va considérer uniquement des anneaux commutatifs. On dira donc anneau pour anneau commutatif.

Soit A un anneau et soit $a \in A$. Alors l'ensemble $I = aA = \{ax, x \in A\}$ est un idéal de A. On l'appelle l'idéal principal engendré par a. L'anneau A

sera dit principal si tous ses idéaux sont principaux. Par exemple $(\mathbb{Z}, +, .)$ est un anneau principal. En effet, on a vu que tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et ce sont donc les seuls idéaux de $\mathbb{Z}$. L'intersection d'un nombre quelconque d'idéaux est un idéal. Plus généralement l'intersection de tous les idéaux contenant une partie G de A est un idéal. On l'appelle l'idéal engendré par la partie G. Ses éléments sont les sommes finies $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k$ avec $a_k \in A$ et $x_k \in G$. La somme de deux idéaux I_1 et I_2 est l'idéal $I_1 + I_2 = \{x + y, x \in I_1, y \in I_2\}$. On peut aussi le définir comme étant l'idéal engendré par$I_1 \cup I_2$. En particulier il contient I_1 et I_2. De manière plus générale la somme $\sum_\lambda I_\lambda$ d'une famille d'idéaux I_λ est le plus petit idéal de A contenat chacun des I_λ. Enfin le produit de deux idéaux I et J est l'idéal IJ engendré par les produits xy avec $x \in I$ et $y \in J$. Concrètement ses éléments sont les sommes finies $\sum x_i y_i$ avec $x_i \in I$ et $y_i \in J$.

Soient $a, b \in A$. On dit que a divise b ou que b est un multiple de a s'il existe $c \in A$ avec $b = ac$. L'idéal $I = aA$ est donc l'ensemble des multiples de a. Remarquer que a divise b si et seulement si $bA \subset aA$. Un élément a est une unité s'il a un inverse a^{-1} pour la multiplication. a est dit premier ou irréductible si $a = bc$ implique que b ou c est une unité. $a \neq 0$ est un diviseur de 0 s'il existe $b \neq 0$ tel que $ab = 0$. Les anneaux qui n'ont pas de diviseurs de zéro sont appelés des anneaux intègres. Par exemple dans $\mathbb{Z}$, les éléments premiers sont (au signe prés) les nombres premiers p. L'équation $ab = 0$ n'a pas de solution non nulle dans $\mathbb{Z}$ qui est donc un anneau intègre.

Définition 1.1.7. *[3] Un idéal propre I d'un anneau A est dit premier si $ab \in I$ implique $a \in I$ ou $b \in I$. I est dit maximal s'il n'est contenu dans aucun autre idéal propre de A.*

Proposition 1.1.1. *[3] Un idéal maximal est premier. Les idéaux premiers de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $p\mathbb{Z}$ avec p un nombre premier et ils sont tous maximaux.*

Preuve. Soit I un idéal maximal. Soient $a, b \in A$ avec $ab \in I$. Supposons que $a \notin I$. Alors l'idéal $I + aA$ est égal à A, car I est maximal. Il existe alors $d \in I$ et $x \in A$ avec $(d + a)x = 1$ et donc $d(b + a)bx = b \in I$ (rappelons que A est commutatif). Ceci montre que I est premier. Tout idéal propre de $\mathbb{Z}$ est de la forme $n\mathbb{Z}$ avec $n \neq 0 \in \mathbb{N}$. Supposons que $n\mathbb{Z}$ premier. $ab \in n\mathbb{Z}$ implique $a \in n\mathbb{Z}$ ou $b \in n\mathbb{Z}$ s'écrit n divise ab implique n divise a ou n divise b, ce qui par le lemme de gauss veut dire que $n = p$ un nombre premier. Enfin $n\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z}$ si et seulement si m divise n. Ceci montre que tout idéal premier de $\mathbb{Z}$ est maximal. $\square$

Une application $f : A \longrightarrow B$ entre deux anneaux est un morphisme si :

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

$$f(1_A) = 1_B$$

pour tous $x, y \in A$. Autrement dit f préserve les opérations d'anneau. Si f est de plus bijective, on dit que c'est un isomorphisme entre A et B. Si $A = B$, on parle d'endomorphisme et d'automorphismes, respectivement. Le noyau d'un morphisme f est :

$$Kerf = \{x \in A : f(x) = 0_B\} = f^{-1}(0_B)$$

C'est un idéal de A. L'image de f est :

$$Imf = \{f(x), x \in A\} = f(A)$$

C'est un sous-anneau de B.

Soit A un anneau et soit I un idéal de A. On définit une relation $\Re$ sur A par :

$$x \Re y \Leftrightarrow x - y \in I$$

On vérifie facilement que $\Re$ est une relation d'équivalence sur A. Sur l'ensemble quotient

$$\frac{A}{\Re} = \frac{A}{I} = \{\overline{x}, x \in A\},$$

on définit deux opérations $\overline{+}$ et $\bar{\cdot}$ en posant : $\overline{x} \mathbin{\overline{+}} \overline{y} = \overline{x+y}$ et $\overline{x}\ \overline{y} = \overline{xy}$. Ces deux opérations sont bien définies et font de $\dfrac{A}{I}$ un anneau. C'est l'anneau quotient de A par I. Remarquer que $\overline{x} = x + I$. En particulier $\overline{0} = I$ est l'élément neutre de $\overline{+}$.

On a un morphisme canonique surjectif d'anneaux :

$$\phi : A \longrightarrow \frac{A}{I}$$

qui à x associe sa classe modulo I, $\overline{x} = x + I$ et de noyau $Ker\phi = I$. De plus il y a une correspondance bijective entre les idéaux J de A qui contiennent I et les idéaux $\overline{J}$ de $\dfrac{A}{I}$ donnée par $J = \phi^{-1}(\overline{J})$.

Exemple 1.1.1. *On prend* $A = \mathbb{Z}$ *et* $I = n\mathbb{Z}$*. On a alors* $x - y \in n\mathbb{Z} \Longleftrightarrow x \equiv y \; mod(n)$*. L'ensemble quotient est donc l'ensemble des classes de congruence modulo* n *:*

$$\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$$

et les opérations d'anneau sont celles bien connues de l'addition et de la multiplication des congruences.

Proposition 1.1.2. *L'idéal* I *est premier si et seulement si l'anneau quotient* $\frac{A}{I}$ *est intègre.*

Preuve. Un anneau est intègre s'il n'a pas de diviseurs de 0. Supposons I premier et soient $\overline{a}$ et $\overline{b}$ tels que $\overline{a}\overline{b} = \overline{0}$. donc $ab \in I$. Comme I est premier, cela veut dire que $a \in I$ ou $b \in I$, c'est à dire que $\overline{a} = \overline{0}$ ou que $\overline{b} = \overline{0}$ et donc que l'anneau quotient est intègre. Inversement supposons l'anneau quotient intègre et soient $a, b \in A$ avec $ab \in I$. Donc $\overline{a}\overline{b} = \overline{0}$ et donc $\overline{a} = \overline{0}$ ou $\overline{b} = \overline{0}$, c'est à dire que $a \in I$ ou $b \in I$. Ceci montre que I est premier. □

1.1.4 Corps

Définition 1.1.8. *[5] Un corps* K *est un anneau non nul dans lequel tout élément différent de* 0 *a un inverse pour la multiplication.*

Ainsi $K^* = K - \{0\}$ muni de la loi de multiplication devient un groupe qu'on appelle groupe multiplicatif de K. On a déja rencontré des exemples de corps : $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, etc. Un sous corps de K est une partie L de K stable pour les lois + et . et qui est, pour ces lois, elle-même un corps. Par exemple $\mathbb{Q}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$. Un corps K est automatiquement intègre. En effet soit $ab = 0$ et supposons $a \neq 0$. On a alors $a^{-1}ab = b = 0$.

Remarque 1.1.1. *Un corps* K *n'a pas d'idéal propre. Autrement dit les seuls idéaux de* K *sont* $\{0\}$ *et* K *lui-même. En effet soit* I *un idéal de* K *non nul et soit* $x \neq 0 \in I$*, alors* $x^{-1}x = 1 \in I$ *et donc* $I = K$*. En particulier tout morphisme non nul* $f : K \longrightarrow L$ *entre deux corps est injectif puisque,* $Ker f$ *étant un idéal, il doit-être égal à* $\{0\}$*.*

Proposition 1.1.3. *[5] Un idéal* I *d'un anneau* A *est maximal si et seulement si l'anneau quotient* $\frac{A}{I}$ *est un corps.*

Preuve. Supposons I maximal et soit $\overline{x} \neq \overline{0} \in \dfrac{A}{I}$. Nous devons montrer que $\overline{x}$ a un inverse pour la multiplication. Comme $\overline{x} \neq \overline{0}$, $x \notin I$. L'idéal $I + xA$ doit donc être égal à A car I est maximal. Il existe donc $a \in A$ et $b \in I$ avec $b + xa = 1$ ou encore $xa = 1 - b \in 1 + I = \overline{1}$. Ce qui veut dire que $\overline{xa} = \overline{1}$ et donc $\overline{x}$ a un inverse. Inversement supposons que $\dfrac{A}{I}$ est un corps. Pour montrer que I est maximal, il suffit de montrer que pour tout $x \notin I$, l'idéal $I + xA$ doit être égal à A. Pour cela il faut montrer que $1 \in I + xA$. Or $x \notin I$ équivaut à $\overline{x} \neq 0$ et donc $\overline{x}$ a un inverse $\overline{y}$: $\overline{xy} = \overline{1}$. Donc $xy \in 1 + I$ et $1 \in I + xA$. $\square$

On a vu que les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $p\mathbb{Z}$ avec p un nombre premier. Donc pour tout nombre premier p, les congruences modulo p :

$$\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$$

forment un corps fini qu'on appelle le corps premier à p éléments et qu'on note $\mathbb{F}_p$.

1.2 Localisation d'un anneau

1.2.1 Construction de la localisation

Soit A un anneau et soit S une partie de A.

Définition 1.2.1. *[5] La partie S est dite multiplicative si :*

- $x \in S$ *et* $y \in S \Longrightarrow xy \in S$.
- $1 \in S$.

Une partie S est donc multiplicative si elle est stable pour la multiplication et contient son élément neutre. En particulier S est non vide.

Exemple 1.2.1. *1. Soit A un anneau et soit S la partie de A formée des éléments qui ne sont pas des diviseurs de 0. S est alors une partie multiplicative. En effet $1 \in S$ et si x et y ne sont pas des diviseurs de 0, leur produit xy n'est lui aussi pas un diviseur de 0.*

2. *Soit I un idéal (propre) premier de l'anneau A. La partie $S = A - I$ est multiplicative. En effet $1 \notin I$ (sinon $I = A$ et I ne serait plus propre), donc $1 \in S$. De plus, comme I est premier, $x \notin I$ et $y \notin I$ implique $xy \notin I$, ce qui équivaut à $x \in S$ et $y \in S$ implique $xy \in S$.*

3. *Soit A un anneau et soit $f \in A$. La partie $S = \{f^n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ est clairement multiplicative.*

Sur $A \times S = \{(a, s), a \in A, s \in S\}$, on définit une relation $\Re$ par :

$$(a, s)\Re(b, t) \Longleftrightarrow \exists u \in S : (at - bs)u = 0$$

Proposition 1.2.1. *La relation $\Re$ est une relation d'équivalence.*

Preuve. Il faut montrer que la relation est réflexive, symétrique et transitive. Soit $(a, s) \in A \times S$. On a $(as - sa)1 = 0$, donc $(a, s)\Re(a, s)$, ce qui montre la réflexivité. Soient $(a, s), (b, t) \in A \times S$ et supposons que $(at - bs)u = 0$. Donc $(bs - at)u = 0$, ce qui montre la symétrie. Supposons maintenant que $(a, s)\Re(b, t)$ et $(b, t)\Re(c, u)$. Il existe donc $v, w \in S$ tels que $(at - bs)v = 0$ et $(bu - ct)w = 0$. En multipliant la première égalité par uw et la deuxième par sv et en les sommant, on élimine b et on obtient $(au - cs)tvw = 0$. Comme $tvw \in S$, ceci montre que $(a, s)\Re(c, u)$ et donc la transitivité. $\square$

Définition 1.2.2. *[5] L'ensemble quotient $\dfrac{A}{\Re} = S^{-1}A$ est appelé la localisation de A par S ou encore l'ensemble des fractions de A par S. La classe $\overline{(a, s)}$ sera notée $\dfrac{a}{s}$ et est appelée la fraction de a par s.*

Sur $S^{-1}A$, on définit une addition et une multiplication par les formules :

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st},$$

$$\frac{a}{s}\frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

Proposition 1.2.2. *[5] Ces deux opérations sont bien définies et font de $S^{-1}A$ un anneau.*

Preuve. Que les deux opérations soient bien définies veut dire qu'elles ne doivent pas dépendre du choix des représentants (a, s) et (b, t) des classes

$\frac{a}{s}$ et $\frac{b}{t}$. Soient donc $(a^{'}, s^{'})$ et $(b^{'}, t^{'})$ deux autres représentant. Il nous faut montrer que

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{a^{'}}{s^{'}} + \frac{b^{'}}{t^{'}},$$

$$\frac{a}{s}\frac{b}{t} = \frac{a^{'}}{s^{'}}\frac{b^{'}}{t^{'}}$$

On sait qu'il existe $u, v \in S$ tels que $(as^{'} - a^{'}s)u = 0$ et $(bt^{'} - b^{'}t)v = 0$. Un calcul simple montre que $((at + bs)s^{'}t^{'} - (a^{'}t^{'} + b^{'}s^{'})st)uv = 0$, ce qui montre la première égalité. La deuxième se démontre de manière analogue. D'autre part on a :

$$\frac{a}{s} + \frac{0}{1} = \frac{a}{s},$$

$$\frac{a}{s}\frac{1}{1} = \frac{a1}{s1} = \frac{a}{s}$$

Donc $\frac{0}{1}$ est l'élément neutre de l'addition et $\frac{1}{1}$ est l'élément neutre de la multiplication. Le symétrique de $\frac{a}{s}$ pour l'addition est $-\frac{a}{s}$. Enfin on vérifie facilement que l'addition et la multiplication sont associatives et commutatives et que la multiplication est distributive par rapport à l'addition. □

On a un morphisme d'anneaux $f : A \longrightarrow S^{-1}A$ qui à x associe $\frac{x}{1}$ et qui n'est en général pas injectif. Remarquer que :

$$\frac{s}{1}\frac{1}{s} = \frac{s1}{1s} = \frac{s}{s} = \frac{1}{1} = 1_{S^{-1}A}$$

C'est dans ce sens qu'on dit que les éléments s de S (qu'on identifie aux fractions $\frac{s}{1}$) deviennent inversibles dans $S^{-1}A$.

L'anneau des fractions vérifie la propriété universelle suivante :

Proposition 1.2.3. *[5] Soit $g : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux tel que $g(s)$ est une unité de B pour tout $s \in S$. Alors il existe un unique morphisme d'anneaux $h : S^{-1}A \longrightarrow B$ tel que $g = h \circ f$.*

Preuve. Montrons d'abord l'unicité. Si h satisfait les conditions de la proposition, on doit avoir :

$$h(\frac{a}{1}) = h(f(a)) = g(a)$$

Donc :

$$h(\frac{1}{s}) = h((\frac{s}{1})^{-1}) = h(\frac{s}{1})^{-1} = g(s)^{-1}$$

et enfin :

$$h(\frac{a}{s}) = h(\frac{a}{1})h(\frac{1}{s}) = g(a)g(s)^{-1}$$

Ainsi h est complètement déterminée par g et donc unique. Montrons maintenant l'existence. Posons :

$$h(\frac{a}{s}) = g(a)g(s)^{-1}$$

h sera clairement un morphisme d'anneaux pourvu qu'on montre qu'elle est bien définie, c'est à dire qu'elle ne dépend pas du représentant de la classe $\overline{(a,s)}$. Soient donc (a,s) et $(a^{'},s^{'})$ reliés par la relation $\Re$. Il existe $t \in S$ tel que $(as^{'} - a^{'}s)t = 0$, donc :

$$(g(a)g(s^{'}) - g(a^{'})g(s))g(t) = 0$$

Mais $g(t)$ est une unité dans B, donc :

$$g(a)g(s)^{-1} = g(a^{'})g(s^{'})$$

$\square$

Remarquer que parmi les propriétés de $S^{-1}A$, on peut citer les trois suivantes :

1. $s \in S \Longrightarrow f(s)$ est inversible dans $S^{-1}A$.
2. $f(a) = 0 \Longrightarrow as = 0$ pour un certain $s \in S$.
3. Tout élément de $S^{-1}A$ est de la forme $f(a)f(s^{-1})$ pour un certain $a \in A$ et un certain $s \in S$.

En utilisant la proposition précédente, on peut montrer que réciproquement ces propriétés déterminent l'anneau $S^{-1}A$ à isomorphisme prés :

Proposition 1.2.4. *Soit $g : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux tel que :*

1. *$s \in S \Longrightarrow g(s)$ est une unité de B ;*
2. *$g(a) = 0 \Longrightarrow as = 0$ pour un certain $s \in S$;*

3. Tout élément de B est de la forme $g(a)g(s)^{-1}$;

alors il existe un unique isomorphisme $h : S^{-1}A \longrightarrow B$ tel que $g = h \circ f$.

Preuve. Par la proposition précédente, nous devons montrer que le morphisme $h : S^{-1}A \longrightarrow B$ défini par :

$$h(\frac{a}{s}) = g(a)g(s)^{-1}$$

est un isomorphisme. Notons d'abord que ce morphisme est bien défini car par la propriété 1) $g(s)$ est inversible. Par la propriété 3) ce morphisme est clairement surjectif. Reste à montrer qu'il est injectif. Supposons que $h(\frac{a}{s}) = g(a)g(s)^{-1} = 0$. En multipliant à gauche par $g(s)$, on obtient $g(a) = 0$ et donc $at = 0$ pour un certain $t \in S$. Ceci veut dire que $(a, s)\Re(0, 1)$. Autrement dit, on a :

$$\frac{a}{s} = \frac{0}{1} = 0$$

dans $S^{-1}A$. $\square$

1.2.2 Etude de $S^{-1}A$

Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux. Soit J un idéal de B. On vérifie facilement que $f^{-1}(J)$ est un idéal de A.

Définition 1.2.3. *L'idéal $f^{-1}(J)$ est appelé la contraction de J par le morphisme f. On le note J^c.*

Si J est premier alors J^c est aussi premier. En effet soient $x, y \in A$ avec $xy \in f^{-1}(J)$. Donc $f(xy) = f(x)f(y) = b \in J$. Comme J est premier, on doit avoir $f(x) \in J$ ou $f(y) \in J$ et donc $x \in f^{-1}(J)$ ou $y \in f^{-1}(J)$.

Si I est un idéal de A, son image $f(I)$ n'est en général pas un idéal de B. Par exemple prenons l'inclusion de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$ et I un idéal non nul quelconque de $\mathbb{Z}$. $f(I)$ ne peut pas être un idéal de $\mathbb{Q}$ puisque celui-ci n'a pas d'idéaux propres.

Définition 1.2.4. *L'extension I^e de I est l'idéal $f(I)B$ de B engendré par $f(I)$. C'est l'ensemble des sommes finies $\sum y_i f(x_i)$ avec $x_i \in I$ et $y_i \in B$.*

Si I est premier, I^e ne l'est pas nécéssairement (en prenant toujours l'exemple de l'inclusion de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$, on a $I^e = \mathbb{Q}$ qui n'est pas premier pour tout idéal non nul de $\mathbb{Z}$).

Ces notions de contraction et d'extension vont nous permettre de déterminer les idéaux et les idéaux premiers de $S^{-1}A$ en utilisant le morphisme canonique $f : A \longrightarrow S^{-1}A$.

Théorème 1.2.1. *[3] On a :*

1. *Tous les idéaux de $S^{-1}A$ sont de la forme $IS^{-1}A = I^e$ pour I un idéal de A.*
2. *Tout idéal premier de $S^{-1}A$ est de la forme $\wp S^{-1}A$ pour $\wp$ un idéal premier de A disjoint de S et inversement pour tout idéal premier $\wp$ de A disjoint de S, $\wp S^{-1}A$ est premier dans $S^{-1}A$*

Preuve. [3] Prouvons d'abord la première assertion. Soit J un idéal de $S^{-1}A$. Posons $I = J^c$. Si $x = \dfrac{a}{s} \in J$, alors $xf(s) = f(a) \in J$ et donc $a \in I$. Ainsi $x = (\dfrac{1}{s})f(a) \in IS^{-1}A$. Ceci montre que $J \subset IS^{-1}A$. Comme J est un idéal, l'inclusion inverse $IS^{-1}A \subset J$ est évidente. En définitive on a $J = IS^{-1}A$. Passons maintenant à la seconde assertion. Soit P un idéal premier de $S^{-1}A$. Posons $\wp = P^c$. Alors $\wp$ est un idéal premier de A et on a $P = \wp S^{-1}A$. De plus comme P ne contient pas les unités de $S^{-1}A$ (sinon il contiendrait 1 et ne serait donc pas premier), on a $\wp \cap S = \emptyset$. Inversement soit $\wp$ un idéal premier de A disjoint de S. On a donc :

$$\frac{a}{s}\frac{b}{t} \in \wp S^{-1}A \Longrightarrow rab \in \wp$$

pour $s, t \in S$ et pour un certain $r \in S$. Comme $r \notin \wp$, on doit avoir $a \in \wp$ ou $b \in \wp$, ce qui veut dire que $\dfrac{a}{s} \in \wp S^{-1}A$ ou $\dfrac{b}{t} \in \wp S^{-1}A$. Ce qui montre que $\wp S^{-1}A$ est premier. □

Le théorème suivant montre que la localisation commute au passage au quotient par les idéaux :

Théorème 1.2.2. *[5] Soit A un anneau et soient S une partie multiplicative de A et I un idéal de A. Notons par $\overline{S}$ l'image de S dans $\dfrac{A}{I}$. On a alors un isomorphisme :*

$$\frac{S^{-1}A}{IS^{-1}A} \cong \overline{S}^{-1}\frac{A}{I}$$

Preuve. [5] Les deux membres vérifient la propriété universelle pour les morphismes d'anneaux $g : A \longrightarrow C$ tels que :

- l'image de tout élément de S est une unité dans C.
- l'image de tout élément de I est nulle dans C.

Comme la solution à ce problème universel est unique, on en déduit l'isomorphisme précédent qui est donné explicitement par :

$$\overline{(\frac{a}{s})} \longmapsto \frac{\overline{a}}{\overline{s}}$$

avec $\overline{(\frac{a}{s})}$ la classe de $\frac{a}{s}$ modulo $IS^{-1}A$ et $\overline{a} = a + I$ et $\overline{s} = s + I$. $\square$

1.2.3 Exemples

$S =$ **Puissances de** f

Soit A un anneau et soit $f \in A$. La partie $S = \{f^n, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie multiplicative de A. En effet $1 = f^0 \in S$ et $f^n f^m = f^{n+m} \in S$.

Définition 1.2.5. *L'anneau $S^{-1}A$ est noté A_f. C'est l'anneau des inverses des puissances de f.*

Le théorème 1 nous permet de déterminer les idéaux premiers de A_f :

Proposition 1.2.5. *Les idéaux premiers de A_f correspondent aux idéaux premiers de A qui ne contiennent pas f.*

Preuve. Par le théorème 1 les idéaux premiers de $S^{-1}A$ correspondent aux idéaux premiers de A disjoints de S. Les idéaux de A_f correspondent donc aux idéaux de A disjoints de $S = \{f^n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$. Supposons que l'intersection d'un idéal premier I avec S soit non vide. Il existe donc $n \neq 0$ tel que $f^n \in I$. Mais on a :

$$f^n \in I \Longleftrightarrow f \in I$$

pour tout idéal premier I de A. Autrement dit les idéaux premiers de A non disjoints de S sont exactement ceux qui contiennent f. $\square$

Définition 1.2.6. *Un élément f d'un anneau A est dit nilpotent s'il existe un entier $n \neq 0$ tel que $f^n = 0$.*

Si f est un élément nilpotent, l'anneau A_f n'est pas d'une grande utilité. En effet on a :

Proposition 1.2.6. *Si f est nilpotent, l'anneau A_f est l'anneau nul :*

$$A_f = \{0\}$$

Preuve. Nous allons montrer que de manière générale, si S contient 0 alors $S^{-1}A = \{0\}$. Rappelons que

$$0_{S^{-1}A} = \frac{0}{1} = \overline{(0,1)}$$

Soit (a, s) un élément de $S \times A$. Nous devons montrer que $\overline{(a,s)} = \overline{(0,1)}$. Comme S contient un élément $u = 0$, on a :

$$(a1 - s0)u = 0$$

et donc :

$$\frac{a}{s} = \frac{0}{1}$$

Ceci montre la proposition. □

$S = A-$ **diviseurs de** 0

Soit A un anneau et soit S la partie de A formée des éléments qui ne sont pas des diviseurs de 0. S est une partie multiplicative. En effet $a1 = 0$ implique que $a = 0$, donc 1 n'est pas un diviseur de 0 et $1 \in S$. Soient $x, y \in S$. Supposons qu'il existe c tel que $xyc = 0$. Comme x n'est pas un diviseur de 0, on doit avoir $yc = 0$ et comme y n'est pas un diviseur de 0, on a forcément $c = 0 =$. Donc xy n'est pas un diviseur de 0 et $xy \in S$.

Définition 1.2.7. *[3] L'anneau $S^{-1}A$ est appelé l'anneau quotient total de A ou encore l'anneau des fractions total de A. On le note $K(A)$*

Cette partie S et la plus grande partie multiplicative de A telle que le morphisme canonique $f : A \longrightarrow S^{-1}A$ soit injectif comme le montre la proposition suivante :

Proposition 1.2.7. *[3] Le morphisme canonique $f : A \longrightarrow S^{-1}A$ est injectif si et seulement si S ne contient aucun diviseur de* 0.

Preuve. Rappelons que le morphisme f associe à $x \in A$ lélément $\dfrac{x}{1} \in S^{-1}A$. Supposons f injectif. Soit $u \in S$ avec $au = 0$ pour $a \in A$. Donc $(a1 - 01)u = 0$ et :

$$\frac{a}{1} = \frac{0}{1}$$

Autrement dit $f(a) = f(0)$. Par injectivité de f, cela donne $a = 0$ et u n'est pas un diviseur de 0. Inversement supposons que S ne contient aucun diviseur de 0. $f(a) = f(b)$ s'écrit :

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{1}$$

Donc il existe $u \in S$ avec $(a1 - b1)u = 0$ Comme u n'est pas un diviseur de 0, on doit avoir $a - b = 0$ et donc $a = b$. Ceci montre que f est un morphisme injectif. $\square$

Remarquer qu'on a une inclusion :

$$A \hookrightarrow K(A)$$

Si A est intègre (sans diviseurs de 0), On a $S = A^* = A - \{0\}$ et l'anneau $K(A)$ devient le corps de fractions de A.

$S = A - \wp$

Soit A un anneau et soit $\wp$ un idéal premier de A. La partie $S = A - \wp$ est multiplicative. En effet $1 \in S$ car $1 \notin \wp$ puisque celui-ci est un idéal premier et donc propre. Si x et y n'appartiennent pas à $\wp$ alors xy n'appartient pas non plus à $\wp$. Donc $x \in S$ et $y \in S$ implique $xy \in S$.

Définition 1.2.8. *[5] L'anneau $S^{-1}A$ est appelé la localisation de A en l'idéal premier $\wp$. On le note $A_\wp$.*

D'aprés le théorème 1, les idéaux premiers de $A_\wp$ correspondent bijectivement aux idéaux premiers de A disjoints de S et donc aux idéaux premiers de A contenus dans $\wp$.

posons :

$$M = \wp A_\wp = \{\frac{a}{s}, a \in \wp\}$$

Par définition un élément de $\wp A_\wp$ est une somme finie $\sum y_i f(x_i)$ avec $x_i \in \wp$ et $y_i \in A_\wp$. Comme $f(x_i) = \dfrac{x}{1}$, on a :

$$\sum y_i f(x_i) = \sum \frac{z_i}{t_i}\frac{x_i}{1} = \sum \frac{z_i x_i}{t_i}$$

En réduisant au même dénominateur et en utilisant le fait que $\wp$ est un idéal, on arrive à la deuxième égalité.

Proposition 1.2.8. *M est un idéal maximal de $A_\wp$. De plus c'est le seul idéal maximal de $A_\wp$.*

Preuve. D'aprés le théorème 1 $\wp A_\wp$ est un idéal (premier) de $A_\wp$. Redémontrons quand même ce fait. Soient $\frac{a}{s}$ et $\frac{b}{t}$ deux éléments de M. Comme $a, b \in \wp$, on a $at - bt \in \wp$, donc :

$$\frac{a}{s} - \frac{b}{t} = \frac{(at - bs)}{st} \in M$$

Ceci montre que M est un sous-groupe de $A_\wp$. Soient $\frac{a}{s} \in M$ et $\frac{b}{t} \in A_\wp$. Comme $ab \in \wp$, on a :

$$\frac{a}{s}\frac{b}{t} = \frac{ab}{st} \in M$$

Donc M est bien un idéal de $A_\wp$. Supposons maintenant que :

$$\frac{b}{t} \notin M$$

Alors $b \notin \wp$ et donc $b \in S$. Cela veut dire que $\frac{b}{t}$ est une unité dans $A_\wp$. Donc si J est un idéal de $A_\wp$ qui n'est pas contenu dans M, alors J contient forcément une unité et donc $J = A_\wp$. Ceci montre du même coup que M est maximal et que c'est le seul idéal maximal de $A_\wp$. □

Définition 1.2.9. *[5] On appelle anneau local tout anneau qui a un idéal maximal et un seul.*

Dans un tel anneau les éléments inversibles (pour la multiplication) sont exactement ceux qui n'appartiennent pas à l'idéal maximal $\wp$. En effet si a est inversible alors $a \notin \wp$ car sinon $\wp = A$. Si a n'est pas inversible alors a est contenu dans l'unique idéal maximal $\wp$. Une autre manière de définir un anneau local est de dire donc que A est local si et seulement si pour tout $a \in A$ on a soit a inversible soit $1 - a$ inversible. En effet si a et $1 - a$ ne sont pas inversibles alors a et$1 - a$ sont dans $\wp$ et donc aussi $1 = a + (1 - a)$ et $\wp$ ne serait plus maximal. Nous utiliserons cette caractérisation des anneaux locaux pour définir un anneau local dans un topos quelconque au chapitre 3.

Ainsi pour tout idéal premier $\wp$, l'anneau $A_\wp$ est local d'idéal maximal $\wp A_\wp$. Par exemple soit $A = \mathbb{Z}$ et $\wp = p\mathbb{Z}$ avec p un nombre premier. Le localisé $\mathbb{Z}_{p\mathbb{Z}}$ est noté $\mathbb{Z}_{(p)}$. Concrètement on a :

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : p \nmid b\}$$

et

$$M = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : p \mid a, p \nmid b\}$$

Remarque 1.2.1. *1. Ne pas confondre $\mathbb{Z}_{(p)}$ et $\mathbb{Z}_p$ qui est l'anneau des entiers p-adiques ensemble des suites (a_n) d'entiers définis modulo p^n et telles que $a_n + p^{n-1}\mathbb{Z} = a_{n-1}$.*

2. On peut montrer, mais nous ne le ferons pas ici, qu'il y a un isomorphisme de corps :

$$\frac{\mathbb{Z}_{(p)}}{M} \cong \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$$

1.3 Le spectre d'un anneau

Définition 1.3.1. *L'ensemble de tous les idéaux premiers d'un anneau A est appelé le spectre de A. On le note $Spec(A)$.*

Soit I un idéal de A. On pose :

$$V(I) = \{\wp \in Spec(A) \mid I \subset \wp\}$$

Proposition 1.3.1. *[5] On a :*

$$V(I) \cup V(J) = V(IJ)$$

et

$$\bigcap_\lambda V(I_\lambda) = V(\sum_\lambda I_\lambda)$$

pour tous idéaux I, J de A et pour toute famille d'idéaux $(I_\lambda)_\lambda$ de A.

Preuve. L'idéal IJ est par définition l'idéal engendré par les produits xy avec $x \in I$ et $y \in J$. C'est l'ensemble de toutes les sommes finies $\sum x_i y_i$ avec $x_i \in I$ et $y_i \in J$. Si $\wp$ contient I et J, il contient évidemment leur produit IJ. Inversement, supposons que $\wp$ contient IJ et supposons que $\wp$ ne contient pas J. Donc il existe $b \in J$ avec $b \notin \wp$. Pour tout $a \in I$, on a $ab \in \wp$ et donc $a \in \wp$ puisque $\wp$ est premier. Donc $\wp$ contient I. Passons à la deuxième égalité. Rappelons que l'idéal $\sum I_\lambda$ est le plus petit idéal contenant tous les idéaux I_λ. Donc un idéal premier $\wp$ contient la somme des I_λ si et seulement si il contient chaque I_λ. $\square$

Ainsi l'ensemble des $V(I)$ pour I un idéal de A est fermé pour les unions finies et les intersections quelconques. On peut donc considérer la topologie sur $Spec(A)$ dont les fermés sont les $V(I)$. Remarquer que :

$$V(0) = SpecA$$

et

$$V(A) = \emptyset$$

sont des fermés.

Définition 1.3.2. *Cette topologie est appelée la topologie de Zariski de $Spec(A)$.*

On peut aussi décrire cette topologie en termes d'ouverts. Pour $a \in A$, posons :

$$D(a) = \{\wp \in Spec(A) \mid a \notin \wp\}$$

On a alors :

Proposition 1.3.2. *Les $D(a)$ pour $a \in A$ sont des ouverts et forment une base pour la topologie de Zariski sur $Spec(A)$.*

Preuve. On a $D(a) = Spec(A) - V(aA)$ avec aA l'idéal principal engendré par a. En effet $a \in \wp$ équivaut à $aA \subset \wp$. Donc $D(a)$ est ouvert comme complémentaire d'un fermé. Soit $U = Spec(A) - V(I)$ un ouvert de $Spec(A)$. On peut écrire

$$U = \bigcup_{a \in I} D(a)$$

comme une réunion d'ouverts $D(a)$. Ce qui montre que ces ouverts forment une base pour une topologie, la topologie de Zariski. $\square$

Pour tout ouvert U de $Spec(A)$, on définit $F(U)$ comme étant l'ensemble des fonctions $s : U \longrightarrow \coprod_{\wp \in U} A_\wp$ telles que $s(\wp) \in A_\wp$ pour tout $\wp$ et telles que pour tout $\wp \in U$, il existe un voisinage V de $\wp$ contenu dans U, et des éléments $a, f \in A$, tels que pour tout $q \in V$, $f \notin q$ et $s(q) = \dfrac{a}{f}$ dans A_q. On vérifie facilement que la somme et le produit des fonctions s font de $F(U)$ un anneau commutatif unitaire (l'élément neutre 1 est la fonction 1 qui vérifie $1(\wp) = 1 \in A_\wp$). De plus si $V \subset U$ est une inclusion d'ouverts, on a un morphisme d'anneaux $F(U) \longrightarrow F(V)$ qui est tout simplement la restriction des fonctions s sur U à V. L'anneau $F(U)$ est souvent appelé l'anneau des fonctions régulières sur U.

Soit $f \in A$ et soit $D(f) = Spec(A) - V(fA)$. La proposition suivante montre qu'en fait $F(D(f))$ est un anneau de fractions :

Proposition 1.3.3. *L'anneau $F(D(f))$ est isomorphe à A_f l'anneau des inverses des puissances de f. En particulier $F(Spec(A)) = A$.*

Preuve. L'isomorphisme ψ cherché est celui qui à $\dfrac{a}{f^n} \in A_f$ associe la fonction $s \in F(D(f))$ telle que $s(\wp) = \dfrac{a}{f^n}$ vu comme élément de $A_\wp$ (remarquer que comme $\wp \in D(f)$, $\wp$ ne contient pas f et donc $S = \{f^n, n \in \mathbb{N}\} \subset A - \wp$. Ainsi tout élément de A_f peut-être vu comme un élément de $A_\wp$). L'égalité $F(Spec(A)) = A$ résulte de l'isomorphisme puisque pour $f = 1$, on a $D(f) = Spec(A)$ et donc $F(Spec(A)) = A_1 = A$. Montrons par exemple que ψ est injective. Nous laisserons la surjectivité au lecteur. Supposons que :

$$\psi(\frac{a}{f^n}) = \psi(\frac{b}{f^m})$$

Donc pour tout $\wp \in D(f)$, il existe $h \in A$ avec $h \notin \wp$ et $(af^m - bf^n)h = 0$ dans A. L'ensemble des annulateurs de $(af^m - bf^n)$, c'est-à-dire des éléments $c \in A$ tels que $(af^m - bf^n)c = 0$ est un idéal I de A. Donc $h \in I$ et $h \notin \wp$, ce qui veut dire que I n'est pas contenu dans $\wp$ pour tout $\wp \in D(f)$. Donc $V(I) \cap D(f) = \emptyset$. Ainsi f appartient à tout idéal premier contenant I. Autrement dit on a :

$$f \in \sqrt{I} = \{x \in A : \exists n \neq 0 : x^n \in I\}$$

le radical de I. Il existe donc $l \in \mathbb{N}$ avec $f^l \in I$. Par définition de I on a :

$$(af^m - bf^n)f^l = 0$$

ce qui montre que :

$$\frac{a}{f^n} = \frac{b}{f^m}$$

dans A_f et donc ψ est injective. □

Définissons maintenant l'ensemble $F_\wp$ comme étant l'ensemble des paires (U, s) avec U un ouvert de $Spec(A)$ et s un élément de $F(U)$ modulo la relation d'équivalence suivante : deux paires (U, s) et (V, t) seront dites équivalentes s'il existe un ouvert W contenu dans $U \cap V$ tel que la restriction de s à W soit égale à la restriction de t à W. Un élément de $F_\wp$ est donc une fonction s définie dans un voisinage ouvert de $\wp$. L'addition et la multiplication des fonctions s font aussi de $F_\wp$ un anneau commutatif unitaire.

Définition 1.3.3. *L'anneau $F_\wp$ est appelé l'anneau des germes de fonctions en $\wp$.*

Proposition 1.3.4. *[5] On a un isomorphisme $F_\wp \cong A_\wp$.*

Preuve. Définissons d'abord un morphisme $\phi : F_\wp \longrightarrow A_\wp$ en envoyant $s \in F(U)$ vers sa valeur $s(\wp) \in A_\wp$. Tout élément de $A_\wp$ s'écrit sous forme d'une fraction $\dfrac{a}{f}$ avec $a, f \in A$ et $f \notin \wp$. $D(f)$ est un voisinage ouvert de $\wp$ et on peut définir $s \in F(D(f))$ par :

$$s(\wp) = \frac{a}{f}$$

Ceci montre que le morphisme ϕ est surjectif. Soit un voisinage ouvert de $\wp$ et soient $s, t \in F(U)$ telles que $s(\wp) = t(\wp)$. Si $s(\wp) = \dfrac{a}{f}$ et $t(\wp) = \dfrac{b}{g}$ avec $a, b, f, g \in A$ et $f, g \notin \wp$. On doit donc avoir :

$$\frac{a}{f} = \frac{b}{g}$$

Cela veut dire qu'il existe $h \notin \wp$ tel que $(ag - bf)h = 0$ dans A. Donc l'égalité des deux fractions reste valable dans tout anneau local A_q tel que $f, g, h \notin q$. L'ensemble de tels idéaux premiers q est l'intersection $D(f) \cap D(g) \cap D(h)$. C'est un ouvert qui contient $\wp$ et $s = t$ dans tout cet ouvert, ce qui montre que ϕ est injective. En conclusion ϕ est bien un isomorphisme. $\square$

Chapitre 2

Topos

Un topos est une catégorie particulière. Ce chapitre commence donc par rappeler les définitions de catégories et de foncteurs entre catégories. On y rappelle aussi quelques constructions telles que les produits et les coproduits fibrés (et aussi les égaliseurs et coégaliseurs) qui nous seront indispensables pour la classification des anneaux dans le dernier chapitre et qui sont d'ailleurs des exemples de limites et de colimites dans une catégorie. Un morphisme entre topos sera défini comme une paire de foncteurs adjoints, adjonction qui est détaillée dans ce chapitre.

Un topos est la catégorie des faisceaux sur un site et un site est une catégorie munie de ce qu'on appelle une toplogie de Grothendieck. La notion de recouvrement ouvert du cours classique de topologie est remplacée ici par les cribles couvrants d'un objet de la catégorie et on utilise ces cribles couvrants pour définir un faisceau sur notre catégorie. En fait un faisceau va être d'abord un préfaisceau (qui est n'importe quel foncteur contravariant vers la catégorie des ensembles Ens) vérifiant des propriétés de recollement faisant intervenir les cribles couvrants.

Le site le plus important pour nous sera le grand site de Zariski sur $Spec(\mathbb{Z})$. La catégorie sous-jacente est celle des anneaux de présentation finie (ces anneaux sont en fait les anneaux de fonctions de variétés algébriques et proviennent donc de la Géométrie où pour travailler au voisinage d'un point on se localise en ce point en considérant l'anneau local des fonctions de la variété en ce point). Dans cette catégorie les constructions catégoriques prennent une forme simple. Par exemple le coproduit de deux anneaux est leur produit tensoriel (en tant que $\mathbb{Z}$-modules).

A la fin de ce chapitre nous définissons les topos et nous en donnons quelques exemples. On montrera en particulier que Ens la catégorie des ensembles est un topos et qu'un espace topologique X va définir un topos $Sh(X)$ qui ne sera autre que le topos des faisceaux classiques sur X. L'exemple le plus important pour nous bien sûr sera le topos de Zariski qui est le topos des faisceaux sur le grand site de Zariski.

Nos références principales pour ce chapitre sont [4] pour les catégories et [1], [6] pour les sites et les topos. Le livre [7] de Godement reste encore une trés bonne introduction à la théorie classique des faisceaux (sur les espaces topologiques).

2.1 Catégories t Foncteurs

2.1.1 Catégories

Une catégorie $\mathcal{C}$ est formée d'une collection d'objets et d'une collection de morphismes (ou flèches) entre ces objets. Chaque morphisme

$$f : C \longrightarrow D$$

a un objet source C et un objet arrivée D. On dit aussi que C est le domaine de f et que D est son codomaine. Chaque objet C a un morphisme identité

$$Id_C : C \longrightarrow C$$

et les flèches se composent

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & D \arrow[r, "g"] & E \end{tikzcd}$$

de sorte que

1. $Id_D \circ f = f$ et $f \circ Id_C = f$.
2. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

La seconde propriété est l'associativité de la composition.

Exemple 2.1.1. *1. $\mathcal{C} = Ens$ est la catégorie des ensembles. Les objets sont les ensembles et les flèches sont les fonctions entre ensembles.*

2. *$\mathcal{C} = Vect$ est la catégorie des espaces vectoriels réels et les morphismes sont les applications linéaires entre espaces vectoriels.*

3. *Soit P un ensemble muni d'un ordre partiel.*
   On note $\mathcal{P}$ la catégorie dont les objets sont les éléments de P et il existe une seule flèche entre p et q si et seulement si $p \leq q$. La composition des flèches est assurée par la transitivité de la relation d'ordre sur P.
   Pour $P = \emptyset, \{0\}, \{0,1\} \ldots$, on note ces catégories $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots$.

La collection des flèches entre deux objets C et D est notée $Hom_{\mathcal{C}}(C, D)$.
$Hom_{\mathcal{C}}(C, C)$ contient toujours la flèche particulière Id_C.
Un morphisme $f : C \longrightarrow D$ est un isomorphisme s'il existe une flèche $g : D \longrightarrow C$ telle que $g \circ f = Id_C$ et $f \circ g = Id_D$.
g est alors l'inverse de f et on note $f : C \xrightarrow{\sim} D$.
Le morphisme $f : C \longrightarrow D$ est un épimorphisme si pour tout objet E et pour tous morphismes $g : D \longrightarrow E$ et $h : D \longrightarrow E$, on a $g \circ f = h \circ f$ implique $g = h$.On note $C \twoheadrightarrow D$.
La flèche $f : C \longrightarrow D$ est un monomorphisme si pour tout objet E et pour tous morphismes $g : E \longrightarrow C$ et $h : E \longrightarrow D$, on a $f \circ g = f \circ h$ implique $g = h$.On note $f :\ C \rightarrowtail D$.
Par exemple dans la catégorie des ensembles les isomorphismes sont les bijections, les épimorphismes sont les surjections et les monomorphismes sont les injections.

Deux monomorphismes $f :\ A \rightarrowtail C$ et $g :\ B \rightarrowtail C$ sont équivalents s'il existe un isomorphisme $h : A \longrightarrow B$ tel que $g \circ h = f$. Un sous-objet de C est une classe d'équivalence de monomorphismes vers C. La collection des sous-objets de C est notée $Sub(C)$. Si $[f]$ est la classe du monomorphisme $f :\ A \rightarrowtail C$, on définit une relation d'ordre sur $Sub(C)$ en disant que $[f] \leq [g]$ s'il existe $h : A \longrightarrow B$ tel que $f = g \circ h$. Dans la catégorie des ensembles les sous-objets sont les sous-ensembles.

Définition 2.1.1. *[4] Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite localement petite si $Hom_{\mathcal{C}}(C, D)$ est un ensemble pour tous objets C, D. La catégorie $\mathcal{C}$ est dite petite si de plus la collection des objets de $\mathcal{C}$ est un ensemble.*

Dans une catégorie $\mathcal{C}$ toute opération concernant des flèches a une opération équivalente en renversant le sens des flèches. $\mathcal{C}^{op}$ est la catégorie ayant les mêmes objets que $\mathcal{C}$ mais dans laquelle les flèches sont renversées :

$$Hom_{\mathcal{C}^{op}}(C, D) = Hom_{\mathcal{C}}(D, C)$$

$\mathcal{C}^{op}$ est la catégorie duale de $\mathcal{C}$.

Pour tout objet C d'une catégorie $\mathcal{C}$ on peut construire une nouvelle catégorie $\mathcal{C}/C$ dont les objets sont les flèches $f : D \longrightarrow C$. Un morphisme entre $f : D \longrightarrow C$ et $g : E \longrightarrow C$ est un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & E \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

autrement dit un triangle qui vérifie $g \circ h = f$. La composition dans $\mathcal{C}/C$ est définie à partir da la composition dans $\mathcal{C}$

2.1.2 Foncteurs

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories.

Définition 2.1.2. *[4] Un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est une opération qui assigne un objet $F(C)$ dans $\mathcal{D}$ à tout objet C dans $\mathcal{C}$ et un morphisme $F(f) : F(C) \longrightarrow F(D)$ à tout morphisme $f : C \longrightarrow D$ dans $\mathcal{C}$ avec*

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

et

$$F(Id_C) = Id_{F(C)}$$

pour tous morphismes composables $f : C \longrightarrow D$ et $g : D \longrightarrow E$

Par exemple on a un foncteur $F : Vect \longrightarrow Ens$ qui a un espace vectoriel V associe l'ensemble $F(V)$ sous-jacent ou encore le foncteur $F_C : \mathcal{C}/C \longrightarrow \mathcal{C}$ qui à la flèche $D \longrightarrow C$ associe l'objet D dans $\mathcal{C}$. Toute catégorie $\mathcal{C}$ a un foncteur $Id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ qui envoie l'objet C vers lui-même.

On peut fabriquer la composition $G \circ F$ de deux foncteurs $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ en posant

$$G \circ F(C) = G(F(C))$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend right, "G \circ F"'] & \mathcal{D} \arrow[r, "G"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

Définition 2.1.3. *Soient $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ deux foncteurs. Une transformation naturelle $\alpha : F \longrightarrow G$ est une opération qui associe à chaque objet C de $\mathcal{C}$ un morphisme $\alpha_C : F(C) \longrightarrow G(C)$ dans $\mathcal{D}$ de telle sorte que pour toute flèche $f : D \longrightarrow C$ dans $\mathcal{C}$ on ait un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} F(D) \arrow[r, "\alpha_D"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(D) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(C) \arrow[r, "\alpha_C"'] & G(C) \end{tikzcd}$$

Autrement dit on doit avoir

$$G(f) \circ \alpha_D = \alpha_C \circ F(f)$$

α est un isomorphisme si α_C l'est pour tout objet C. Les transformations naturelles peuvent être composées. Pour $\alpha : F \longrightarrow G$ et $\beta : G \longrightarrow H$, on pose

$$(\beta \circ \alpha)_C = \beta_{G(C)} \circ \alpha_C$$

Un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est dit covariant à valeurs dans $\mathcal{D}$ et un foncteur $F : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{D}$ est dit contravariant avec $\mathcal{C}^{op}$ la catégorie duale de $\mathcal{C}$. Un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est dit plein (respectivement fidèle) si l'application

$$Hom_{\mathcal{C}}(C, D) \longrightarrow Hom_{\mathcal{D}}(F(C), F(D))$$

donnée par $f \mapsto F(f)$ est surjective (respectivement injective).

Définition 2.1.4. *$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est une équivalence de catégories si F est plein et fidèle et si tout objet de $\mathcal{D}$ est image d'un objet de $\mathcal{C}$ par F. De manière équivalente F est une équivalence de catégories s'il existe un foncteur $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ et des isomorphismes $G \circ F \cong Id_{\mathcal{C}}$ et $F \circ G \cong Id_{\mathcal{D}}$*

G est le quasi-inverse de F. Deux catégories équivalentes peuvent êtres considérées comme les mêmes.

2.1.3 Limites et colimites

Dans une catégorie un objet 1 est dit terminal (ou final) si pour tout autre objet C il existe un unique morphisme $C \longrightarrow 1$. De même un objet 0 est initial si pour tout autre objet C il existe un unique morphisme $0 \longrightarrow C$. Les objets final et initial peuvent ne pas exister. Dans la catégorie des ensembles l'objet final est tout singleton $\{*\}$. L'objet initial est $\emptyset$.

Définition 2.1.5. *Soient $f : D \longrightarrow C$ et $g : E \longrightarrow C$ deux flèches dans une catégorie $\mathcal{C}$. Le produit fibré de D par E sur C est (s'il existe) l'objet noté $D \times_C E$ muni de deux flèches $\pi_1 : D \times_C E \longrightarrow D$ et $\pi_2 : D \times_C E \longrightarrow E$ rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd} D \times_C E \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E \arrow[d, "g"] \\ D \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

et tel que pour tout autre diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "k"] \arrow[d, "h"'] & E \arrow[d, "g"] \\ D \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

Il existe une unique flèche $\delta : X \longrightarrow D \times_C E$ telle que $\pi_1 \circ \delta = h$ et $\pi_2 \circ \delta = k$

Quand $C = 1$ le produit fibré s'appelle le produit de D par E et on note

$$D \times_1 E = D \times E$$

Un diagramme

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E \arrow[d, "g"] \\ D \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

est un pullback si $P = D \times_C E$. Par exemple dans la catégorie des ensembles on a pour deux fonctions $f : D \longrightarrow C$ et $g : E \longrightarrow C$

$$D \times_C E = \{(x, y) \in D \times E / f(x) = g(y)\}$$

et

$$D \times_1 E = D \times E = \{(x, y), x \in D, y \in E\}$$

Définition 2.1.6. *Soient $f, g : C \longrightarrow D$ deux flèches dans une catégorie $\mathcal{C}$. L'égaliseur de f et g est l'objet (s'il existe) E muni d'une flèche $e : E \longrightarrow C$ rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

(et donc $f \circ e = g \circ e$) et tel que pour tout autre diagramme commutatif

$$X \xrightarrow{u} A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

il existe une seule flèche $v : X \longrightarrow E$ telle que $u = e \circ v$.

Par exemple dans la catégorie des ensembles on a

$$E = \{x \in C / f(x) = g(x)\}$$

et e est l'injection (inclusion) $E \longrightarrow C$. Ces notions catégoriques ont des duales dans la catégorie opposée $\mathcal{C}^{op}$ obtenues en renversant le sens des flèches. On peut donc parler de coproduit fibré, de coégaliseur et de pushout. Le coproduit de $f : C \longrightarrow D$ et $g : C \longrightarrow E$ est l'objet (s'il existe) $D \coprod_C E$ muni de flèches $p : D \longrightarrow D \coprod_C E$ et $q : E \longrightarrow D \coprod_C E$ rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & E \arrow[d, "q"] \\ D \arrow[r, "p"'] & D \coprod_C E \end{tikzcd}$$

et tel que pour tout autre diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & E \arrow[d, "k"] \\ D \arrow[r, "h"'] & X \end{tikzcd}$$

Il existe une unique flèche $\delta : D \coprod_C E \longrightarrow X$ telle que $\delta \circ p = h$ et $\delta \circ q = k$. Un diagramme

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & E \arrow[d, "q"] \\ D \arrow[r, "p"'] & Q \end{tikzcd}$$

est un pushout si $Q = D \coprod_C E$. Si C est l'objet initial le coproduit $D \coprod_C E$ est noté simplement $D \coprod E$ et est appelé le coproduit de D et E. Par exemple dans la catégorie des ensembles le coproduit de A et B est leur (somme) réunion disjointe

$$A \coprod B = (\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times B)$$

Dans la catégorie des $\mathbb{Z}$-modules (un $\mathbb{Z}$-module est un groupe abélien M muni d'une opértaion . externe par les éléments de $\mathbb{Z}$ vérifiant $1.x = x, n.(m.x) = (nm).x$ et $n.(x + y) = n.x + n.y$ pour tous $x, y \in M$ et tous $n, m \in \mathbb{Z}$) le coproduit de deux $\mathbb{Z}$-modules M et N est leur produit tensoriel

$$M \coprod N \cong M \otimes N$$

défini comme étant l'ensemble des combinaisons linéaires finies (sur $\mathbb{Z}$) des éléments du produit $M \times N$ quotienté par la relation d'équivalence $(x+y, z) = (x, y) + (y, z), (x, y + z) = (x, y) + (x, z), (n.x, y) = n.(x, y)$ et $(x, n.y) = n.(x, y)$. Remarquer que $M \otimes N$ est lui aussi un $\mathbb{Z}$-module et que l'objet initial de la catégorie des $\mathbb{Z}$-modules est $\mathbb{Z}$ lui même.

Ces constructions sont d'ailleurs des cas particulier de la notion de limite (et de colimite) qu'on peut définir de manière générale. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et soit $\mathcal{J}$ une petite catégorie (la catégorie indice). Les foncteurs $\mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{C}$ sont les objets de la catégorie $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ (les morphismes étant les transformations naturelles entre foncteurs). Un objet de $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ est aussi appelé un diagramme dans $\mathcal{C}$ de type $\mathcal{J}$. Par exemple tout objet C de $\mathcal{C}$ détermine le diagramme constant de valeur C qui est un foncteur

$$\Delta_{\mathcal{J}}(C) : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{C}$$

donné par $\Delta_{\mathcal{J}}(C)(j) = C$ pour tout objet j de $\mathcal{J}$. Une transformation naturelle π de $\Delta_{\mathcal{J}}(C)$ vers un autre diagramme (foncteur) F de $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ consiste tout simplement en des flèches $f_j : C \longrightarrow F(j) = F_j$ dans $\mathcal{C}$ de sorte que les triangles

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[d, "f_j"'] \arrow[dr, "f_k"] & \\
F(j) \arrow[r, "F(u)"'] & F(k)
\end{tikzcd}$$

commutent pour toute flèche $u : j \longrightarrow k$ dans $\mathcal{J}$.

Définition 2.1.7. *Une telle transformation est appelée un cône de sommet C sur le diagramme F. On le note $f : C \longrightarrow F$. Un cône $g : L \longrightarrow F$ est dit universel si pour tout autre cône $f : C \longrightarrow F$ il existe une unique flèche $h : C \longrightarrow L$ dans $\mathcal{C}$ telle que $g_j \circ h = f_j$ pour tout objet j dans $\mathcal{J}$. Ce cône universel (ou plutôt son sommet L) est appelé la limite du diagramme (foncteur) $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{J}$ On le note*

$$L = \varprojlim_{\mathcal{J}} F$$

L'objet final, le pullback (produit fibré) et l'égaliseur sont des exemples de limites dans la catégorie $\mathcal{C}$ en prenant respectivement pour $\mathcal{J}$ la catégorie vide, la catégorie à trois objets i, j, k avec un unique morphisme de j vers i et un unique morphisme de k vers i et la catégorie à deux objets i, j avec deux morphismes de i vers j. La notion duale de limite est la colimite. Elle s'obtient en travaillant dans $\mathcal{C}^{op}$. Les cônes deviennent des cocônes est la colimite est le sommet du cocône universel

$$L = \varinjlim_{\mathcal{J}} F$$

Un théorème d'existence de limites nous assure que si une catégorie a tous les égaliseurs et tous les produits indexés par $Ob(\mathcal{J})$ (les objets de $\mathcal{J}$) et $Hom(\mathcal{J})$ (les morphismes de $\mathcal{J}$) alors $\mathcal{C}$ a toutes les limites de type $\mathcal{J}$. Un énoncé analogue existe aussi pour les colimites en termes de coégaliseur et de coproduits. On en déduit par exemple que les limites et les colimites existent dans la catégorie des ensembles puisqu'on peut y construire facilement les égaliseurs et les produits (ainsi que les coégaliseurs et les coproduits).

2.1.4 Foncteurs adjoints

Soient $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ deux foncteurs.

Définition 2.1.8. *On dit que G est l'adjoint de F à droite (ou encore que F est l'adjoint de G à gauche) si pour deux objets quelconques C dans $\mathcal{C}$ et D dans $\mathcal{D}$ on a une bijection*

$$\theta : Hom_{\mathcal{C}}(C, G(D)) \cong Hom_{\mathcal{D}}(F(C), D)$$

Autrement dit toute flèche $f : C \longrightarrow G(D)$ détermine uniquement une flèche $h : F(C) \longrightarrow D$ et inversement. θ doit être naturelle dans le sens que si on des flèches $k : C' \longrightarrow C$ et $g : D \longrightarrow D'$ on doit avoir

$$\theta(G(g) \circ f \circ k) = g \circ \theta(f) \circ F(k)$$

On note

$$F \dashv G$$

(F à gauche, G à droite).

Soit $\theta : F \dashv G$ une adjonction. Pour tout objet C dans $\mathcal{C}$, on a une flèche unique

$$\mu_C : C \longrightarrow (G \circ F)(C)$$

telle que
$$\theta(\mu_C) = Id_{F(C)}$$
La collection des μ_C définit une transformation naturelle
$$\mu : Id_{\mathcal{C}} \longrightarrow G \circ F$$
avec$Id_{\mathcal{C}}$ le foncteur identité sur $\mathcal{C}$ ($Id_{\mathcal{C}}(C) = C$). μ est appelée l'unité de l'adjonction. De même pour tout objet D dans $\mathcal{D}$ on a une flèche unique
$$\epsilon_D : (F \circ G)(D) \longrightarrow D$$
telle que
$$\theta(\epsilon_D) = Id_{G(D)}$$
La collection des ϵ_D définit une transformation naturelle
$$\epsilon : F \circ G \longrightarrow Id_{\mathcal{D}}$$
ϵ est la counité de l'adjonction. L'unité et la counité définissent des triangles commutatifs
$$\begin{tikzcd} F \arrow[d, "F\mu"'] \arrow[dr, "Id"] & \\ FGF \arrow[r, "\epsilon F"'] & F \end{tikzcd}$$
et
$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "\mu G"'] \arrow[dr, "Id"] & \\ GFG \arrow[r, "G\epsilon"'] & G \end{tikzcd}$$
Inversement la donnée de μ et ϵ rendant ces triangles commutatifs définit une adjonction $F \dashv G$.

Exemple 2.1.2. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie dans laquelle le produit de deux objets quelconques existe. Soit C un objet de $\mathcal{C}$ et soit le foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ donné par $F(D) = C \times D$. Si F a un adjoint à droite $G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, on dit que l'objet C est exponentiable et on note $G(D) = D^C$ l'exponentielle de C et D. On a donc $Hom_{\mathcal{C}}(C \times D, E) \cong Hom_{\mathcal{C}}(E, D^C)$ pour tous objets D, E de $\mathcal{C}$. La counité de l'adjonction $F \dashv G$ est $\epsilon : C \times D^C \longrightarrow D$ telle que pour toute* *flèche $h : C \times E \longrightarrow D$, il existe une unique flèche $f : E \longrightarrow D^C$ telle que $\epsilon \circ (1_C \times f) = h$. Autrement dit le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd}
C \times D^C \arrow[r, "\epsilon"] & D \\
C \times E \arrow[u, "1_C \times f"] \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

1_C est l'identité de C et $1_C \times f$ est la flèche produit $C \times E \longrightarrow C \times D^C$.

Dans la catégorie des ensembles D^C est tout simplement l'ensemble des fonctions de C vers D
$$D^C = \{f : C \longrightarrow D\}$$
et la bijection
$$Hom_{\mathcal{C}}(C \times E, D) \cong Hom_{\mathcal{C}}(E, D^C)$$
est tout simplement l'opération qui consiste à transformer une fonction de deux variables $h : C \times E \longrightarrow D$ en une fonction à une seule variable $g : E \longrightarrow D^C$
$$g(y)(x) = h(x, y) \in D$$
pour $x \in C$ et $y \in E$. Dans ce cas la counité ϵ est l'évalution $\epsilon(x, f) = f(x)$ pour $x \in C$ et $f : C \longrightarrow D$.

Définition 2.1.9. *La catégorie $\mathcal{C}$ est dite cartésienne fermée si elle a tous les produits finis (un objet terminal et les produits de deux objets quelconques) et si tout objet est exponentiable.*

Par exemple la catégorie des ensembles est cartésienne fermée. L'objet terminal est n'importe quel singleton $\{*\}$, le produit est le produit d'ensembles et l'exponentielle de C et D est l'ensemble des fonctions de C vers D.

Soit $G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un foncteur et soit $\mathcal{J}$ une petite catégorie. G induit un foncteur de diagrammes
$$G^{\mathcal{J}} : \mathcal{C}^{\mathcal{J}} \longrightarrow \mathcal{D}^{\mathcal{J}}$$
donné par
$$G^{\mathcal{J}}(F)(j) = F(j)$$

pour $F \in \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ un foncteur $\mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{C}$. Si les $\mathcal{J}$-limites existent dans $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, on obtient un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{\mathcal{J}} \arrow[r, "\varprojlim_{\mathcal{J}}"] \arrow[d, "G^{\mathcal{J}}"'] & \mathcal{C} \arrow[d, "G"] \\
\mathcal{D}^{\mathcal{J}} \arrow[r, "\varprojlim_{\mathcal{J}}"'] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

et on a une transformation naturelle

$$\alpha_{\mathcal{J}} : G \circ \varprojlim_{\mathcal{J}} \longrightarrow \varprojlim_{\mathcal{J}} \circ G^{\mathcal{J}}$$

Définition 2.1.10. *On dit que G préserve les limites de type $\mathcal{J}$ si $\alpha_{\mathcal{J}}$ est un isomorphisme naturel. G préserve les limites si G préserve les limites de tout type. Même définition pour les colimites.*

Par exemple si G a un adjoint à gauche alors G préserve toutes les limites. Si G a un adjoint à droite, il préserve toutes les colimites.

2.2 Sites

Les catégories les plus importantes pour nous dans ce travail seront la catégorie des ensembles Ens, la catégorie des préfaisceaux sur une catégorie $\mathcal{C}$ et la catégorie des faisceaux sur $\mathcal{C}$. Dans la suite on supposera $\mathcal{C}$ petite.

2.2.1 Préfaisceaux

Définition 2.2.1. *[1] Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie. Un préfaisceau sur $\mathcal{C}$ est un foncteur*

$$F : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow Ens$$

avec $\mathcal{C}^{op}$ la catégorie duale de $\mathcal{C}$.

Les préfaisceaux constituent les objets de la catégorie $Ens^{\mathcal{C}^{op}}$ des foncteurs contravariants sur $\mathcal{C}$ (les foncteurs sur $\mathcal{C}^{op}$) à valeurs dans Ens la catégorie des ensembles. Les flèches sont les transformations naturelles entre foncteurs. Rappelons que si $F : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow Ens$ et $G : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow Ens$ sont deux préfaisceaux alors une transformation naturelle

$$\theta : F \longrightarrow G$$

est la donnée pour tout objet C de $\mathcal{C}$ de flèches (fonctions entre ensembles)

$$\theta_C : F(C) \longrightarrow G(C)$$

de telle sorte que le carré

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\theta_C"'] & F(D) \arrow[d, "\theta_D"] \\ G(C) \arrow[r, "G(f)"'] & G(D) \end{tikzcd}$$

soit commutatif pour toute flèche $f : D \longrightarrow C$ dans $\mathcal{C}$ (une flèche $C \longrightarrow D$ dans $\mathcal{C}^{op}$. On note

$$\hat{\mathcal{C}} = Ens^{\mathcal{C}^{op}}$$

la catégorie des préfaisceaux sur $\mathcal{C}$.

Exemple 2.2.1. *Soit X un espace topologique et soit $\mathcal{C}$ la catégorie des ouverts de X. Les objets sont les ouverts $U \subseteq X$ et $Hom_{\mathcal{C}}(U,V)$ contient uniquement l'inclusion $U \longrightarrow V$ si $U \subseteq V$ et est égal à $\emptyset$ sinon. Un préfaisceau F sur $\mathcal{C}$ consiste donc à associer à tout ouvert U de X un ensemble $F(U)$ et à toute flèche (inclusion) $f : U \longrightarrow V$ une fonction $F(f) : F(V) \longrightarrow F(U)$. Par exemple si $F(U)$ est l'ensembles des fonctions continues sur U on peut prendre pour $F(f)$ la fonction restriction de V à U*

$$F(f)(g) = g_{\big|U}$$

pour $g : V \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur V.

De manière générale (et en suivant cet exemple) si $F : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow Ens$ est un préfaisceau, pour toute flèche $f : D \longrightarrow C$ la flèche $f(f) : F(C) \longrightarrow F(D)$ est appelée flèche de restriction de C à D. On note

$$F(f)(x) = x_{\big|D}$$

pour $x \in F(C)$.

Tout objet C de $\mathcal{C}$ définit un préfaisceau

$$h_C : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow Ens$$

en posant

$$h_C(D) = Hom_{\mathcal{C}}(D, C)$$

et pour toute flèche $f : E \longrightarrow D$ dans $\mathcal{C}$ la

$$h_C(f) : Hom_{\mathcal{C}}(D, C) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(E, C)$$

est donnée par

$$h_C(f)(g) = g \circ f$$

pour $g : D \longrightarrow C \in Hom_{\mathcal{C}}(D, C)$.

Définition 2.2.2. *Un préfaisceau de la forme h_C pour un objet C de $\mathcal{C}$ est dit représentable (représenté par l'objet C).*

Si $f : C \longrightarrow D$ est une flèche dans $\mathcal{C}$, on a une transformation naturelle

$$h_C \longrightarrow h_D$$

obtenue en composant avec f. Ceci définit un foncteur

$$h : \mathcal{C} \longrightarrow \hat{\mathcal{C}}$$

qui à C associe h_C.

Proposition 2.2.1. *[1] Ce foncteur est pleinement fidèle.*

Preuve. C'est une conséquence du lemme de Yoneda : il y a une bijection entre les transformations naturelles $h_C \longrightarrow F$ et les éléments de l'ensemble $F(C)$

$$\theta : Hom_{\hat{\mathcal{C}}}(h_C, F) \cong F(C)$$

donnée par

$$\theta(\alpha) = \alpha_C(Id_C)$$

pour $\alpha : h_C \longrightarrow F$. Inversement pour $v \in F(C), \theta^{-1}(v) : h_C \longrightarrow F$ est donnée par

$$\theta^{-1}(v)_D(f) = F(f)(v)$$

pour $f \in h_C(D) = Hom_{\mathcal{C}}(D, C)$. En appliquant le lemme de Yoneda au foncteur $F = h_D$, on obtient une bijection

$$Hom_{\hat{\mathcal{C}}}(h_C, h_D) \cong Hom_{\mathcal{C}}(C, D)$$

et donc le résultat. □

On obtient donc une équivalence entre la catégorie $\mathcal{C}$ et son image dans $\hat{\mathcal{C}}$ par ce foncteur. Autrement dit on peut identifier l'objet C avec le préfaisceau h_C. C'est dans ce sens qu'on dit que $\mathcal{C}$ est plongée dans $\hat{\mathcal{C}}$.

2.2.2 Cribles

Soit $\mathcal{C}$ une (petite) catégorie et soit C un objet de $\mathcal{C}$.

Définition 2.2.3. *[1] Un crible sur C est un ensemble S de flèches vers C tel que si $f : D \longrightarrow C$ est dans S alors $f \circ g$ est aussi dans S pour toute flèche $g : E \longrightarrow D$ composable avec f.*

Exemple 2.2.2. *Soit X un espace topologique et soit $Ouv(X)$ la catégorie des ouverts de X déja vue. Pour $U \subseteq X$ un ouvert de X un crible S sur U est un ensemble d'ouverts $V \subseteq U$ tel que $W \in S$ pour tout ouvert $W \subseteq V$. Autrement dit un crible S sur U est un ensemble d'ouverts de X contenus dans U tel que si $V \in S$ et $W \subseteq V$ alors $W \in S$.*

On peut aussi voir les cribles comme des sous-foncteurs (sous-objets) du préfaisceau h_C représenté par l'objet C. Un sous-foncteur (ou sous-objet) d'un préfaisceau F est un autre préfaisceau G tel que $G(C)$ soit un sous-ensemble de $F(C)$ pour tout objet C et tel que les flèches $G(f) : G(D) \longrightarrow G(C)$ soient les restrictions (au sens ensembliste) des flèches $F(f) : F(D) \longrightarrow F(C)$ pour toute flèche $f : C \longrightarrow D$ dans $\mathcal{C}$. L'inclusion $G \subseteq F$ est donc un monomorphisme dans la catégorie $\hat{\mathcal{C}}$ et définit donc un sous-objet de F.

Proposition 2.2.2. *La donnée d'un crible sur C est équivalente à la donnée d'un sous-foncteur de h_C.*

Preuve. Soit G un sous-foncteur de h_C. Posons

$$S = \{f / \exists D, f : D \longrightarrow C \in G(D)\}$$

S est bien défini puisque $G(D)$ est contenu dans $h_C(D) = Hom_{\mathcal{C}}(D, C)$. De plus S est un crible. En effet soient $g : E \longrightarrow D$ et $f : D \longrightarrow C$ deux flèches dans $\mathcal{C}$. Si $f \in G(D)$, on a $f \circ g \in G(E)$ par commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} G(D) \arrow[r, "G(g)"] \arrow[d] & G(E) \arrow[d] \\ h_C(D) \arrow[r, "h_C(g)"'] & h_C(E) \end{tikzcd}$$

Inversement si S est un crible sur C, posons

$$G(D) = \{f / f : D \longrightarrow C \in S\} \subseteq h_C(D)$$

Ceci définit bien un sous-foncteur G de h_C. □

Définition 2.2.4. *[1] Soit $f : D \longrightarrow C$ une flèche dans $\mathcal{C}$ et soit S un crible sur l'objet C. Le crible*

$$f^*(S) = \{g : E \longrightarrow D / f \circ g \in S\}$$

est appelé l'image inverse de S par f. C'est un crible sur D.

Exemple 2.2.3. *Reprenons l'exemple des ouverts d'un espace topologique X. Si $f : V \longrightarrow U$ est une inclusion d'ouverts et si S est un crible sur U alors $f^*(S)$ est formé des ouverts $W \subseteq V$ tels que $W \in S$.*

Définition 2.2.5. *Une topologie de Grothendieck sur la catégorie $\mathcal{C}$ est une fonction J qui à tout objet C de $\mathcal{C}$ associe une collection $J(C)$ de cribles de C de sorte que*

1. *le crible maximal M_C formé de toutes les flèches vers C est dans $J(C)$.*
2. *Si $S \in J(C)$ est un crible alors son image inverse $f^*(S) \in J(D)$ pour toute flèche $f : D \longrightarrow C$.*
3. *Si $S \in J(C)$ et si R est un crible sur C tel que $f^*(R) \in J(D)$ pour toute $f : D \longrightarrow C \in S$ alors $R \in J(C)$.*

Le second axiome est un axiome de stabilité alors que le troisième est un axiome de transitivité. Si $S \in J(C)$ et si R est un crible sur C tel que $S \subseteq R$ alors $R \in J(C)$. En effet soit $f : D \longrightarrow C$ dans S. Par définition de $f^*(S)$, on a $1_D \in f^*(S)$ et donc $f^*(S)$ est le crible maximal M_D sur D. Comme $f^*(S) \subseteq f^*(R)$ (car $S \subseteq R$), $f^*(R)$ doit aussi être le crible maximal M_D sur D et donc $f^*(R) \in J(D)$ pour tout $f : D \longrightarrow C$ dans S. Par l'axiome de transitivité on a donc $R \in J(C)$. Les cribles $S \in J(C)$ sont appelés les cribles couvrants de C. On vient juste de montrer que tout crible contenant un crible couvrant est couvrant. Remarquer aussi que si $S \in J(C)$ et si pour tout $f : D \longrightarrow C$ il y a un crible $T \in J(D)$ alors l'ensemble des composées $f \circ g$ avec $g \in T$ et $f \in S$ est dans $J(C)$. En effet posons $R = \{f \circ g, g \in T, f \in S\}$. $f^*(R)$ contient $T \in J(D)$. Donc $f^*(R) \in J(D)$ pour toute flèche $f : D \longrightarrow C$. Par l'axiome de transitivité on a que $R \in J(C)$.

Deux recouvrements ont toujours un raffinement commun (R est un raffinement de S si $R \subseteq S$). En effet si $R, S \in J(C)$, on a $R \cap S \in J(C)$. Cela est vrai car si $f : D \longrightarrow C$ est dans R, alors $f^*(R \cap S) = f^*(S) \in J(D)$ par l'axiome de stabilité et donc $R \cap S \in J(C)$ par l'axiome de transitivité.

Définition 2.2.6. *[1] Un site est un couple* $(\mathcal{C}, J)$ *formé d'une (petite)catégorie* $\mathcal{C}$ *et d'une topologie de Grothendieck* J *sur* $\mathcal{C}$.

Exemple 2.2.4. *Soit* X *un espace topologique et soit* $\mathcal{C} = Ouv(X)$ *la catégorie des ouverts de* X. *Rappelons qu'un crible sur l'ouvert* U *est un ensemble d'ouverts* $V \subseteq U$ *tel que* $W \in S$ *pour tout ouvert* $W \subseteq V$. *Soit* $J(U)$ *l'ensemble des cribles* S *de* U *tels que* $U = \cup_{V \in S} V$. J *définit une topologie de Grothendieck* J_{can} *(topologie canonique) sur la catégorie* $Ouv(X)$ *et cette topologie est la topologie usuelle sur* X. *On retrouve en particulier les notions de recouvrement et de raffinement du cours classique de topologie.*

Sur une petite catégorie $\mathcal{C}$ on peut toujours définir deux topologies particulières. La topologie triviale ou chaotique J_{chao} pour laquelle le seul crible couvrant est M_C le crible maximal sur l'objet C pour tout $C \in \mathcal{C}$ et la topologie discrète J_{disc} pour laquelle tout crible est un crible couvrant et donc $J(C)$ est l'ensemble de tous les cribles sur C pour tout C dans $\mathcal{C}$. Toute topologie J sur $\mathcal{C}$ est plus fine que J_{chao} et moine fine que J_{disc} (Une topologie J est plus fine qu'une autre J' si $J'(C) \subseteq J(C)$ pour tout objet C de $\mathcal{C}$).

Dans la pratique il est préferable de travailler avec ce qu'on appelle une base de la toplogie plutôt qu'avec la topologie elle-même (tout comme dans les espaces topologiques il est plus aisé de tavailler avec une base d'ouverts plutôt qu'avec tous les ouvetrs).

Définition 2.2.7. *[1] Une base* K *d'une toplogie de Grothendieck sur la catégorie* $\mathcal{C}$ *est la donnée pour tout objet* C *d'une famille* $K(C)$ *de flèches* $\{f_i : D_i \longrightarrow C, i \in I\}$ *(appelées familles couvrantes) de sorte que*

(i) *Si* $f : D \longrightarrow C$ *est un isomorphisme alors* $\{f : D \longrightarrow C\} \in K(C)$.

(ii) *Si* $\{f_i : D_i \longrightarrow C, i \in I\}$ *est dans* $K(C)$ *alors la famille des pullbacks* $\{\pi_2 : D_i \times_C D \longrightarrow D, i \in I\}$ *est dans* $K(D)$ *pour tout morphisme* $g : D \longrightarrow C$.

(iii) *Si* $\{f_i : D_i \longrightarrow C, i \in I\}$ *est dans* $K(C)$ *et si pour tout* i $\{g_{il} : D_{il} \longrightarrow D_i, i \in I, l \in L\}$ *est dans* $K(D_i)$ *alors la famille des composées* $\{f \circ g_{il} : D_{il} \longrightarrow C, i \in I, l \in L\}$ *est aussi dans* $K(C)$.

Proposition 2.2.3. *La donnée d'une topologie* J *sur* $\mathcal{C}$ *équivaut à la donnée d'une base* K.

Preuve. Une base K définit une topologie en posant

$$S \in J(C) \Longleftrightarrow \exists R \in K(C)/R \subseteq S$$

J est bien une topologie. En effet $M_C \in J(C)$ pour tout C puisque $R = \{Id_C : C \longrightarrow C\}(\in K(C)) \subseteq M_C$. Soit $S \in J(C)$ et soit $g : D \longrightarrow C$ une flèche de $\mathcal{C}$. Soit $R \subseteq S$ avec $R \in K(C)$. Soit $T \in K(D)$ la famille des flèches $h_i : D \times_C D_i \longrightarrow D$ qu'on trouve dans les diagrammes (obtenus à partir de (ii))

$$\begin{tikzcd} D \times_C D_i \arrow[r] \arrow[d, "h_i"'] & D_i \arrow[d, "f_i"] \\ D \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

pour $f_i : D_i \longrightarrow C$ dans R. On a $T \subseteq g^*(S)$ et donc $g^*(S) \in J(D)$. Ceci donne la condition de stabilité. Nous laissons la transitivité au lecteur. Inversement si J est une topologie, on pose

$$R \in K(C) \Longleftrightarrow (R) \in J(C)$$

avec $(R) = \{f \circ g/f \in R, domf = codg\}$. (R) est le crible engendré par la famille R. $\square$

2.3 Le site de Zariski

Notons Ann la catégorie dont les objets sont les anneaux commutatifs et dont les flèches sont les morphismes d'anneaux. On a vu dans le premier chapitre que tout morphisme d'anneaux $\phi : A \longrightarrow B$ induit un morphisme $\psi : Spec(B) \longrightarrow Spec(A)$ en sens inverse entre les spectres de A et B ($\psi(\wp) = \phi^{-1}(\wp)$ pour $\wp$ un idéal premier de B). Sur $Spec(A)$ on a défini une topologie (la topologie de Zariski) en prenant comme ouverts les complémentaires des $V(I) = \{\wp \in Spec(A)/I \subset \wp\}$ pour I un idéal de A ou de manière équivalente en prenant comme base d'ouverts les $D(a) = \{\wp \in Spec(A)/a \notin \wp\}$.

Définition 2.3.1. *[1] Le site $(Ouv(Spec(A)), J_{can})$ est appelé le petit site de Zariski de $Spec(A)$.*

Soit F le préfaisceau des fonctions régulières défini au chapitre 1 sur $Spec(A)$. Il définit donc un préfaisceau

$$F : Ouv(Spec(A))^{op} \longrightarrow Ens$$

avec $F(D(a)) = A_a$ pour $a \in A$ et $F(Spec(A)) = A$. Le préfaisceau F (qui sera en fait un faisceau) détermine donc l'anneau A. En Géométrie le couple $(Spec(A), F)$ est appelé un schéma affine. On voit donc que l'association $A \mapsto (Spec(A), F)$ est une équivalence entre la catégorie des schémas affines et l'opposée de la catégorie des anneaux commutatifs.

Nous allons maintenant définir le grand site de Zariski sur $Spec(\mathbb{Z})$. Rappelons qu'une k-algèbre A pour k un anneau est un anneau A muni d'un morphisme d'anneaux $k \longrightarrow A$. Il y a toujours un morphisme d'anneaux $\mathbb{Z} \longrightarrow A$ (celui qui envoie le 1 de $\mathbb{Z}$ vers le 1 de A). On peut donc voir tout anneau A comme une $\mathbb{Z}$-algèbre (et en particulier comme un $\mathbb{Z}$-module). On ne va pas travailler avec tous les anneaux mais seulement avec ceux qui proviennet des variétes et qu'on appelle anneaux de présentation finie.

Définition 2.3.2. *Un anneau (une $\mathbb{Z}$-algèbre) de présentation finie est un anneau A de la forme*

$$A = \frac{\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]}{(f_1, \ldots, f_m)}$$

avec les f_j des polynômes en $X_1, \ldots, X_n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et $(f_1, \ldots, f_m)$ est l'idéal engendré par les $f_j, j = 1, \ldots, m$ dans $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$.

On note Ann_{pf} la catégorie dont les objets sont les anneaux de présentation finie et dont les flèches sont les morphismes d'anneaux. Posons

$$\mathcal{C} = Ann_{pf}^{op}$$

la duale de Ann_{pf}. Les objets sont les mêmes mais les flèches sont inversées. Sur $\mathcal{C}$ nous allons définir une topologie de Grotendieck mais en en spécifiant uniquement une base. Une famille couvrante pour cette topololgie de l'anneau A sera la duale d'une famille finie de la forme $\{A \longrightarrow A[a_i^{-1}] = A_{a_i}, i = 1, \ldots k\}$ avec les a_i dans A vérifiant $1_A \in (a_1, \ldots, a_k)$ l'idéal de A engendré par les a_i. Remarquer que si A est de présentation finie, $A[a_i^{-1}] = A_{a_i}$ est aussi de présentation finie puisque

$$A[a_i^{-1}] \cong \frac{A[X]}{(a_i X - 1)}$$

en envoyant a_i^{-1} vers $\overline{X}$ la classe de X. Les morphismes $A \longrightarrow A_{a_i}$ sont les morphismes canoniques vus au premier chapitre.

Proposition 2.3.1. *Ces familles définissent bien une base K pour une topologie de Grothendieck J sur la catégorie $\mathcal{C}$.*

Preuve. Le (dual du) morphisme identité $Id_A : A \longrightarrow A$ est bien une famille couvrante de A. Il suffit de prendre $k = 1$ et $a_1 = 1$ et donc $A_1 = A$. C'est aussi valable pour tout isomorphisme $A \longrightarrow B$ en identifiant B à A et l'isomorphisme à l'identité de A. Ceci nous donne la condition (i) dans la définition d'une base. Pour la condition (ii), remarquons que le pullback dans Ann_{pf}^{op} va correspondre par dualité au pushout ou coproduit dans la catégorie Ann_{pf}. Mais dans Ann_{pf} (et aussi dans Ann) le coproduit de deux $\mathbb{Z}$-algèbres A et B est leur produit tensoriel $A \otimes B$. Soit $f_i : A \longrightarrow A[a_i^{-1}] = A_{a_i}, i = 1, \ldots, k\}$ une famille couvrante de A avec donc $1_A \in (a_1, \ldots, a_k)$. Soit $g : A \longrightarrow B$. Le pushout (coproduit fibré) de B avec $A[a_i^{-1}]$ sur A est le produit tensoriel

$$B \otimes A[a_i^{-1}] \cong B[g(a_i)^{-1}]$$

et on a $1_B = g(1_A) \in (g(a_1), \ldots, g(a_k))$ (car $1_A \in (a_1, \ldots, a_k)$). Ceci montre que la famille $\{g_i : B \longrightarrow B[g(a_i^{-1}] = B_{g(a_i)}, i = 1, \ldots, k\}$ est une famille couvrante pour B. Montrons enfin la condition (iii). Soit $\{f_i : A \longrightarrow A[a_i^{-1}], i = 1, \ldots, k\}$ une famille couvrante pour A et soit $\{A[a_i^{-1}] \longrightarrow A[a_i^{-}][c_{ij}^{-1}], j = 1, \ldots, l_i\}$ une famille couvrante pour chaque $A[a_i^{-1}]$. En tant qu'élément de $A[a_i^{-1}]$, c_{ij} s'écrit

$$c_{ij} = \frac{b_{ij}}{a_i^{m_{ij}}}$$

avec $b_{ij} \in A$ et m_{ij} des entiers. On a donc

$$A[a_i^{-1}][c_{ij}^{-1}] \cong A[a_i^{-1}][b_{ij}^{-1}] \cong A[(a_i b_{ij})^{-1}]$$

et la composée des deux familles sécrit donc

$$A \longrightarrow A[a_i^{-1}] \longrightarrow A[(a_i b_{ij})^{-1}]$$

Il nous reste donc à montrer que $1_A \in (a_i b_{ij}, i = 1, \ldots, k, j = 1, \ldots, l_i)$ Par hypothèse $1_{A[a_i^{-1}]}$ est dans l'idéal engendré par les c_{ij} qui est égal à l'idéal engendré par les b_{ij} dans $A[a_i^{-1}]$. Il existe donc un entier p_i tel que $a_i^{p_i}$ soit dans l'idéal de A engendré par les $a_i b_{ij}$ pour $j = 1, \ldots, l_i$. On sait aussi que 1_A est dans l'idéal de A engendré par les a_i pour $i = 1, \ldots, k$. Il s'écrit donc

$$1_A = \sum d_i a_i$$

pour certains d_i dans A. Soit q un entier plus grand que $k.max(p_i)$. On a donc

$$1_A = (\sum d_i a_i)^q \in (a_1^q, \ldots, a_k^q)$$

et ce dernier idéal est contenu dans l'idéal de A engendré par les $a_i b_{ij}$. $\square$

Définition 2.3.3. *[1] Notons J_{zar} la topologie ainsi définie. Le grand site de Zariski sur $Spec(\mathbb{Z})$ est le site $(\mathcal{C}, J_{zar})$ avec $\mathcal{C} = Ann_{pf}^{op}$.*

2.4 Topos

Soit X un espace topologique. La définition classique de préfaisceu et de faisceau est la suivante. Un préfaisceau F sur X est la donnée pour tout ouvert U de X d'un ensemble $F(U)$ et de fonctions de restrictions ρ_{UV} : $F(U) \longrightarrow F(V)$ pour tout ouvert $V \subseteq U$ avec $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$ pour $W \subseteq V \subseteq U$. La plupart du temps $F(U)$ est l'ensemble des fonctions continues sur U ou l'ensemble des fonctions différentiables sur U (si X est une variété différentiable) et ces fonctions de restrictions sont des restrictions au sens ensembliste. Toute fonction sur U va donner par restriction une fonction sur V

$$\rho_{UV}(f) = f_{|V}$$

Les éléments de $F(U)$ sont appelées les sections de F sur U. Cette définition coincide avec la donnée d'un préfaisceau d'ensembles sur la catégorie $Ouv(X)$ des ouverts de X en tant que foncteur

$$F : Ouv(X)^{op} \longrightarrow Ens$$

Le préfaisceau F va être un faisceau si pour tout recouvrement $U = \cup_i U_i$ de U par des ouverts U_i et pour toute famille de sections $(s_i)_{i \in I}$ avec $s_i \in F(U_i)$ telle que $(s_i)_{|U_i \cap U_j} = (s_j)_{|U_i \cap U_j}$ il existe une section et une seule $s \in F(U)$ telle que $s_{|U_i} = s_i$. La fibre du faisceau F en $x \in X$ est

$$F_x = \varinjlim_{x \in U} F(U)$$

qui est par définition l'ensemble des classes d'équivalence de sections pour la relation d'équivalence suivante : deux sections $s \in F(U)$ et $t \in F(V)$ seront dites équivalentes s'il existe un ouvert $W \subseteq U \cap V$ tel que $s_{|W} = t_{|W}$.

Exemple 2.4.1. *Soit $X = Spec(A)$ muni de sa topologie de Zariski (A anneau commutatif). Ici les points de X sont les idéaux premiers de A. D'aprés les résultats du chapitre 1, les ensembles des fonctions régulières $F(U)$ pour U un ouvert de $Spec(A)$ définissent un faisceau F sur X. Toutes les fibres de ce faisceau sont des anneaux locaux*

$$F_\wp = A_\wp$$

pour $\wp$ un idéal premier de A.

La définition d'un faisceau va maintenant être généralisée à une catégorie munie d'une topologie de Grothendieck. Remarquer que la condition qui définit un faisceau peut se reformuler en disant que le diagramme suivant est un égaliseur dans la catégorie des ensembles

$$F(U) \xrightarrow{e} \prod_i F(U_i) \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} \prod_{ij} F(U_i \cap U_j)$$

avec $e(s) = (s_i = s_{|U_i})_{i \in I}, f((s_i)_i) = ((s_i)_{|U_{ij}})_{ij}$ et $g((s_i)_i) = ((s_j)_{|U_{ij}})_{ij}$ ($U_{ij} = U_i \cap U_j$). Remarquer aussi qu'on a dans la catégorie des ensembles

$$U_i \cap U_j = U_i \times_U U_j$$

2.4.1 Faisceaux

Soit $(\mathcal{C}, J)$ un site et soit

$$F : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow Ens$$

un préfaisceau sur $\mathcal{C}$. Si $S \in J(C)$ est un crible couvrant de l'objet C de $\mathcal{C}$, une famille concordante d'éléments de F est une fonction qui associe à chaque flèche $f : D \longrightarrow C$ dans S un éément $x_f \in F(D)$ de telle sorte que

$$x_{f \circ g} = F(g)(x_f)$$

Une amalgamation d'une telle famille concordante est un élément $x \in F(C)$ tel que

$$x_f = F(f)(x)$$

pour tout $f \in S$.

Définition 2.4.1. *[6] Le préfaisceau F est un faisceau pour la topologie J si toute famille concordante a une amalgamation et une seule pour tout objet C et tout $S \in J(C)$.*

On a vu qu'on peut voir un crible S sur C comme un sous-foncteur du préfaisceau représentable h_C et une famille concordante peut être alors vue comme une transformation naturelle

$$S \longrightarrow F$$

donnée par $f \mapsto x_f$. Le préfaisceau F est alors un faisceau si et seulement si pour tout crible couvrant S la transformation naturelle précédente a une unique extension à h_C tout entier. Mais la description la plus commode d'un faisceau se fait en termes d'une base K de la topologie J. Soit $R = \{f_i : D_i \longrightarrow C, i \in I\}$ une famille couvrante de C ($R \in K(C)$). Une famille $x_i \in F(D_i), i \in I$ est une famille concordante pour R si

$$F(p_i)(x_i) = F(p_j)(x_j)$$

pour tous i, j avec $p_i : D_i \times_C D_j \longrightarrow D_i$ et $p_j : D_i \times_C D_j \longrightarrow D_j$ les projections naturelles. Une amalgamation de la famille $(x_i)_{i \in I}$ est un élément $x \in F(C)$ tel que

$$F(f_i)(x_i) = x$$

pour tout $i \in I$. Le préfaisceau F est alors un faisceau si toute famille concordante a une amalgamation et une seule ou de manière équivalente si le diagramme suivant est un égaliseur dans la catégorie des ensembles

$$F(C) \xrightarrow{e} \prod_i F(D_i) \overset{p}{\underset{q}{\rightrightarrows}} \prod_{ij} F(D_i \times_C D_j)$$

avec $e(x) = (F(f_i)(x_i))_i, p((x_i)_i) = (F(p_i)(x_i))_{ij}$ et $q((x_i)_i) = (F(p_j)(x_i))_{ij}$.

Les faisceaux sur $\mathcal{C}$ pour la topologie J forment une catégorie avec pour morphismes les transformations naturelles (en tant que préfaisceaux). On va la noter

$$\tilde{\mathcal{C}} = Sh(\mathcal{C}, J)$$

et on a un plongement

$$\tilde{\mathcal{C}} = Sh(\mathcal{C}, J) \subseteq Psh(\mathcal{C}) = Ens^{\mathcal{C}^{op}} = \hat{\mathcal{C}}$$

de la catégorie des faisceaux dans celle des préfaisceaux (la notation est ce qu'elle est car le terme pour faisceau en anglais est sheaf).

Définition 2.4.2. *Un topos de Grothendieck est toute catégorie équivalente à une catégorie de faisceaux sur un site $Sh(\mathcal{C}, J)$.*

Exemple 2.4.2. 1. *Soit X un espace topologique et soit $(Ouv(X), J_{can})$ le site associé. On a donc un topos associé à X qui est $Sh(Ouv(X), J_{can})$ qui est la catégorie des faisceaux sur $Ouv(X)$ pour la topologie J_{can}.*

Nous avons aussi défini les faisceaux au sens classique sur X. Soit $Sh(X)$ la catégorie de tels faisceaux. Par définition de J_{can} on a

$$Sh(X) \cong Sh(Ouv(X), J_{can})$$

et donc $Sh(X)$ est aussi un topos de Grothendieck.

2. *Soit $X = \{*\}$ un singleton muni de la topologie discrète. Soit le site $(Ouv(X), J_{can})$ le site associé. Un préfaisceau F consiste à associer au seul objet $*$ de $Ouv(X)$ un ensemble $F(*)$ et tout préfaisceau est un faiscau, les transformations naturelles entre faisceaux sont toutes les flèches entre ensembles. On a donc*

$$Sh(Ouv(X), J_{can}) \cong Ens$$

et la catégorie des ensembles Ens est donc un topos de Grothendieck.

3. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie munie de la topologie chaotique ou triviale J_{chao}. La condition de faisceau est vide dans ce cas et tout préfaisceau est un faisceau pour J_{chao}. On a donc*

$$Psh(\mathcal{C}) \cong Sh(\mathcal{C}, J_{chao})$$

Les catégories de préfaisceaux et de faisceaux sont intéréssantes car elles héritent de toutes les bonnes propriétés de la catégorie des ensembles. On peut y calculer des limites et des colimites et en particulier des produits et des coproduits. On peut aussi y calculer des exponentielles et tous topos devient donc une catégorie cartésienne fermée. Par exemple un topos de Grothendieck $\mathcal{E} = Sh(\mathcal{C}, J)$ a toujours un objet terminal $1_{\mathcal{E}}$ donné par

$$1_{\mathcal{E}}(C) = \{*\}$$

pour tout objet C de $\mathcal{C}$ et $\{*\}$ étant n'importe quel singleton.

2.4.2 Topos de Zariski

Définition 2.4.3. *[6] Le topos de Zariski $\mathcal{Z}$ est le topos des faisceaux sur le grand site de Zariski sur $Spec(\mathbb{Z})$*

$$\mathcal{Z} = Sh(Ann_{pf}^{op}, J_{zar})$$

Sur $\mathcal{Z}$ on peut définir un objet (faisceau) qui va jouer un rôle important dans la classification des anneaux dans le chapitre suivant. Soit

$$\mathcal{O} : Ann_{pf} \longrightarrow Ens$$

le foncteur d'oubli qui à l'anneau de présentation finie A associe A mais seulement vu comme ensemble.

Proposition 2.4.1. *$\mathcal{O}$ est un objet de $\mathcal{Z}$. Autrement dit $\mathcal{O}$ est un faisceau sur Ann_{pf}^{op} pour la topologie J_{zar}.*

Preuve. Soit $\{A \longrightarrow A[a_i^{-1}], i = 1, \ldots, n\}$ (la duale d') une famille couvrante de l'anneau A. Il faut montrer que le diagramme

$$A \longrightarrow \prod_i A[a_i^{-1}] \rightrightarrows \prod_{ij} A[(a_i a_j)^{-1}]$$

est un égaliseur dans la catégorie des ensembles puisque $A[(a_i a_j)^{-1}] \cong A[a_i^{-1}] \otimes A[a_j^{-1}]$ est le pushout (pullback dans la catégorie duale) de $A[a_i^{-1}]$ et $A[a_j^{-1}]$. Soient des éléments $x_i \in A[a_i^{-1}, i = 1, \ldots, n$ tels que $x_i = x_j$ dans $A[(a_i a_j)^{-1}]$ pour tous i, j. En posant

$$x_i = \frac{y_i}{a_i^m}$$

pour tout i avec $y_i \in A$, l'égalité $x_i = x_j$ dans $A[(a_i a_j)^{-1}]$ veut dire que

$$y_i a_j^m (a_i a_j)^k = y_j a_i^m (a_i a_j)^k$$

pour un $k > 0$ assez grand. On sait que $1_A \in (a_1, \ldots, a_n)$ l'idéal engendré par les a_i (la famille est couvrante). En élevant à la puissance $n(m+k)$ l'écriture de 1_A dans cet idéal on a $1_A = \sum_i s_i a_i^{m+k}$ pour certains s_i dans A. Posons $x = \sum_i s_i y_i a_i^k$. On a alors $a_j^{m+k} x = a_j^k y_j$. Donc dans $A[a_j^{-1}]$ on a

$$x = \frac{a_j^k y_j}{a_j^{m+k}} = \frac{y_j}{a_j^m} = x_j$$

ce qui veut dire que x est une amalgamation des x_i. Il nous reste à montrer que cette amalgamation est unique c'est-à-dire que le morphisme $e : A \longrightarrow A[a_i^{-1}]$ est injectif. Supposons $e(x) = x = 0$ dans $A[a_i^{-1}]$pour tout i. Pour un m assez grand on doit donc avoir $a_i^m x = 0$ dans A pour tout i. Mais comme on peut écrire $1_A = \sum_i t_i a_i^m$ on doit avoir $x = \sum_i t_i a_i^m x = 0$ dans A. Donc e est injective et l'amalgamation x est unique. $\square$

Chapitre 3

Topos classifiants

Ce chapitre constitue le coeur de ce travail. On y démontre deux théorèmes de classification. Le premier concerne la classification des anneaux par le topos $Ens^{Ann_{pf}^{op}}$ des préfaisceaux et le second la classification des anneaux locaux par le topos de Zariski $\mathcal{Z} = Sh(Ann_{pf}^{op}, J_{zar})$. Le second est une conséquence du premier et tous les deux relient la catégorie des morphismes géométriques à la catégorie des anneaux (et des anneaux locaux) dans un topos.

On commence donc par définir la notion de morphisme géométrique entre topos de Grothendieck. Un point clef ici est que ces morphismes sont décrits par certains foncteurs sur la catégorie sous-jacente au site. Ce sont ces foncteurs (dits exacts à gauche) qui vont relier les morphismes géométriques aux anneaux. Bien sûr les anneaux et anneaux locaux sont définis maintenant dans un topos quelconque $\mathcal{E}$ et ils vont former la catégorie $Ann(\mathcal{E})$ pour les anneaux et $AnnLoc(\mathcal{E})$ pour les anneaux locaux.

Le chapitre est achevé alors par l'énoncé et la démonstration des deux théorèmes de classification. Pour plus de détails concernant les topos nous recommandons [1] et [2] qui malheureusement sont d'une lecture assez difficile. On pourra donc peut être commencer par le livre de Johnstone [6].

3.1 Morphismes géométriques

Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue entre espaces topologiques. Pour tout faisceau F sur X on peut définir un faisceau $f_*(F)$ sur Y en posant $f_*(F)(V) = F(f^{-1}(V))$ pour V un ouvert Y. Inversement un faisceau G sur

Y va définir un faiscau $f^*(G)$ sur X. On obtient donc une paire de foncteurs

$$f_* : Sh(X) \longrightarrow Sh(Y)$$

$$f^* : Sh(Y) \longrightarrow Sh(X)$$

avec $f^* \dashv f_*$ et f^* ayant la bonne propriété de préserver les limites finies. Ceci motive la

Définition 3.1.1. *[1] Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux topos de Grothendieck. Un morphisme géométrique $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ est une paire (f_*, f^*) de foncteurs adjoints $f^* \dashv f_*$*

$$f_* : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$$

$$f^* : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}$$

avec f^* préservant les limites finies.

f_* est appelé l'image directe du morphisme géométrique et f^* est son image inverse. On a donc

$$Hom_{\mathcal{E}}(G, f^*(F)) \cong Hom_{\mathcal{F}}(f_*(F), G)$$

pour tous faisceaux F sur $\mathcal{E}$ et G sur $\mathcal{F}$ (les Hom ici sont les transformations naturelles) et

$$f^*(\varprojlim_J G) = \varprojlim_J f^*(G)$$

pour toute catégorie finie J.

Les morphismes géométriques de et vers la catégorie des ensembles Ens sont particulièrement importants. Soit $\mathcal{E}$ un topos de Grothendieck. Alors il existe un morphisme géométrique et un seul

$$\mathcal{E} \longrightarrow Ens$$

En effet soit $\mathcal{E} = Sh(\mathcal{C}, J)$ la catégorie des faisceaux sur le site $(\mathcal{C}, J)$. Le morphisme géométrique $\mathcal{E} \longrightarrow Ens$ est donné par les foncteurs adjoints

$$f_* = \Gamma : \mathcal{E} \longrightarrow Ens$$

donné par $\Gamma(F) = Hom_{\mathcal{E}}(1_{\mathcal{E}}, F)$ (le foncteur sections globales) et le foncteur

$$f^* = \Delta : Ens \longrightarrow \mathcal{E}$$

donné par $\Delta(A) = \coprod_{a \in A} 1_{\mathcal{E}}$ (le faisceau constant en A) avec $\coprod_{a \in A} 1_{\mathcal{E}}$ étant le coproduit de l'objet terminal $1_{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}$ sur les éléments de l'ensemble A. Pour montrer l'unicité remarquer que le foncteur image inverse $f^* = \Delta$ doit être tel que $f^*(1_{Ens}) = 1_{\mathcal{E}}$ avec $1_{Ens} = \{*\}$ un singleton quelconque car il préserve les limites finies et l'objet terminal est une limite finie. f^* préserve aussi toutes les colimites (ayant un adjoint à droite f_*) et donc les coproduits. Or un ensemble A s'écrit toujours comme le coproduit (union disjointe)

$$A = \coprod_{a \in A} \{a\}$$

et donc

$$f^*(A) = f^*(\coprod_{a \in A} \{a\}) = \coprod_{a \in A} f^*(\{a\}) = \coprod_{a \in A} 1_{\mathcal{E}}$$

et donc f^* est unique. Le morphisme géométrique est par conséquent unique.

Soit $(Ouv(X), J_{can})$ le site associé à un espace topologique X. Soit $x \in X$ un point de X. L'inclusion

$$\{x\} \longrightarrow X$$

détermine un morphisme géométrique

$$Ens = (Ouv(\{x\}), J_{can}) \longrightarrow (Ouv(X), J_{can})$$

qu'on appelle aussi point du topos $(Ouv(X), J_{can})$. Ceci motive la

Définition 3.1.2. *Un point d'un topos de Grothendieck $\mathcal{E}$ est un morphisme géométrique $Ens \longrightarrow \mathcal{E}$.*

Il existe une description simple des points $Ens \longrightarrow Ens^{\mathcal{C}^{op}}$ du topos des préfaisceaux $Ens^{\mathcal{C}^{op}}$ en termes de certains foncteurs $\mathcal{C} \longrightarrow Ens$.

Définition 3.1.3. *Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories ayant toutes les limites finies. Un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est dit exact à gauche s'il préserve les limites finies.*

Les foncteurs exacts à gauche vont former (avec les transformations naturelles comme flèches) une catégorie qu'on va noter $\mathcal{G}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$. Il existe alors une équivalence de catégories

$$Geom(Ens, Ens^{\mathcal{C}^{op}}) \cong \mathcal{G}(\mathcal{C}, Ens)$$

entre les morphismes géométriques (les points) $Ens \longrightarrow Ens^{\mathcal{C}^{op}}$ et les foncteurs exacts à gauche $\mathcal{C} \longrightarrow Ens$. Les détails de la preuve de cette équivalence ne nous intéressent pas vraiment. Voyons seulement comment un morphisme géométrique détermine un foncteur. Soit donc $f : Ens \longrightarrow Ens^{\mathcal{C}^{op}}$ un morphisme géométrique. On peut montrer facilement (mais nous ne le ferons pas ici) que tout préfaisceau est colimite de préfaiscaux représentables de la forme h_C. Le morphisme image inverse $f^* : Ens^{\mathcal{C}^{op}} \longrightarrow Ens$ préserve les colimites puisqu'il a un adjoint à gauche et est donc complètement déterminé par son action sur les préfaisceaux h_C et donc par le morphisme composé $f^* \circ h : \mathcal{C} \longrightarrow Ens$ avec $h : \mathcal{C} \longrightarrow Ens^{\mathcal{C}^{op}}$ le foncteur de Yoneda ($h(C) = h_C$). Cette discussion se généralise aisément en remplaçant le topos Ens par un topos plus général et on obtient donc une équivalence

$$Geom(\mathcal{E}, Ens^{\mathcal{C}^{op}}) \cong \mathcal{G}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$$

Si on passe du topos des préfaisceaux $Ens^{\mathcal{C}^{op}}$ à un topos plus général $Sh(\mathcal{C}, J)$ cette équivalence garde un sens mais à condition de travailler avec les foncteurs exacts à gauche continus.

Définition 3.1.4. *Un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ sera dit continu pour la topologie J s'il envoie des cribles couvrants dans $\mathcal{C}$ vers des familles épimorphiques de flèches dans $\mathcal{E}$ (Une famille de flèches $\{f_i : U_i \longrightarrow U, i \in I\}$ est épimorphique si la flèche coproduit $\coprod_i U_i \longrightarrow U$ est un épimorphisme).*

Notons $\mathcal{G}_{cont}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ la catégorie des foncteurs exacts à gauche continus. On a alors l'équivalence

$$Geom(\mathcal{E}, Sh(\mathcal{C}, J)) \cong \mathcal{G}_{cont}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$$

pour $\mathcal{E}$ un topos.

3.2 Anneaux dans un topos

Soit $\mathcal{E}$ un topos de Grothendieck (admettant donc des limites finies en particulier les produits et un objet terminal $1 = 1_{\mathcal{E}}$). Un groupe dans $\mathcal{E}$ est un objet G de $\mathcal{E}$ muni de morphismes $a : G \times G \longrightarrow G, i : G \longrightarrow G$ et $u : 1 \longrightarrow G$ exprimant les opérations usuelles d'un groupe (multiplication, inverse et unité) mais sous forme de commutativité de certains diagrammes. Par exemple l'associativité de la multiplication a est exprimée par la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times G & \xrightarrow{a \times Id} & G \times G \\ {\scriptstyle Id \times a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a} \\ G \times G & \xrightarrow[a]{} & G \end{array}$$

Le groupe G est abélien si le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} G \times G & & \\ {\scriptstyle \sigma}\downarrow & \searrow^{a} & \\ G \times G & \xrightarrow[a]{} & G \end{array}$$

avec $\sigma = (\pi_2, \pi_1) : G \times G \longrightarrow G \times G$ et π_1 et π_2 les premières et seconde projection $G \times G \longrightarrow G$. Un anneau A dans un topos est un groupe abélien muni en plus de deux morphisme $m : A \times A \longrightarrow A$ et $u_m : 1 \longrightarrow A$ définissant respectivement la multiplication d'anneau et l'unité pour cette multiplication et vérifiant des diagrammes commutatifs exprimant l'associativité et la commutativité de m et la distributivité de m par rapport à a (l'addition de l'anneau). Un morphisme d'anneaux entre A et B est une flèche $A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{E}$ compatible avec les opérations d'anneaux (compatibilité qui est exprimée aussi en termes de diagrammes commutaifs). Si $\mathcal{E} = Ens$ la catégorie des ensembles on retrouve les définitions bien connues d'anneau et de morphisme d'anneaux vues au chapitre 1. Remarquer que la définition d'un anneau que nous venons de donner est valable dans toute catégorie $\mathcal{C}$ ayant toutes les limites finies.

Définition 3.2.1. *[1] Appelons $Ann(\mathcal{C})$ la catégorie dont les objets sont les anneaux dans $\mathcal{C}$ et dont les flèches sont les morphismes d'anneaux pour toute catégorie $\mathcal{C}$ avec limites finies*

Remarquer qu'un morphisme géométrique $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}$ entre topos de Grothendieck va induire via son image inverse f^* (qui rappelons le préserve les limites finies et donc transforme un anneau en un anneau) un foncteur qu'on va noter aussi f^*

$$f^* : Ann(\mathcal{E}) \longrightarrow Ann(\mathcal{F})$$

entre les catégories des anneaux.

Soit Ann_{pf} la catégorie des anneaux ($\mathbb{Z}$-algèbres) de présentation finie, les anneaux de la forme

$$A = \frac{\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]}{(f_1, \ldots, f_m)}$$

avec $(f_1, \ldots, f_m)$ l'idéal de $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ engendré par les polynômes $f_1, \ldots, f_m$ en $X_1, \ldots, X_n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$. La catégorie Ann_{pf} a un objet initial qui est $\mathbb{Z}$ (les éléments de $\mathbb{Z}$ étant vus comme des polynômes constants) et le coproduit de deux objets A et B est leur produit tensoriel $A \otimes B$. Si

$$A = \frac{\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]}{(f_1, \ldots, f_m)}$$

et

$$B = \frac{\mathbb{Z}[Y_1, \ldots, Y_k]}{(g_1, \ldots, g_l)}$$

alors

$$A \otimes B \cong \frac{\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_k]}{(f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_l)}$$

qui est aussi un anneau de présentation finie. Ann_{pf} a aussi tous les coégaliseurs. En effet un morphisme

$$h : \frac{\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]}{(f_1, \ldots, f_m)} \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}[Y_1, \ldots, Y_k]}{(g_1, \ldots, g_l)}$$

est complètement déterminé par ses valeurs $h(X_i), i = 1, \ldots, n$ qui sont des polynômes en $Y_1, \ldots, Y_k$ avec $f_j(h(X_1), \ldots, h(X_n)) = 0$ modulo les g_r pour $j = 1, \ldots, n$. Le coégaliseur d'un tel morphisme h avec un autre k est tout simplement le quotienté

$$\frac{\mathbb{Z}[Y_1, \ldots, Y_k]}{(g_1, \ldots, g_l, h(X_1) - k(X_1), \ldots, h(X_n) - k(X_n))}$$

Ann_{pf} a donc toutes les colimites finies. La catégorie opposée Ann_{pf}^{op} a donc un objet terminal, tous les produits et tous les égaliseurs. Elle a donc toute les limites finies. Posons

$$R = \mathbb{Z}[X]$$

vu comme objet de Ann_{pf}^{op}.

Proposition 3.2.1. *[2] L'objet $R = \mathbb{Z}[X]$ est un anneau dans Ann_{pf}^{op}.*

Preuve. [2] Explicitons les morphismes définissant les opérations d'anneau dans R. l'addition $a : R \times R \longrightarrow R$ est la flèche duale de $\mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}[X] \otimes \mathbb{Z}[X] \cong \mathbb{Z}[X, Y]$ qui envoie X vers $X + Y$ (le produit est le coproduit dans la catégorie duale). La multiplication $m : R \times R \longrightarrow R$ est la duale du morphisme $\mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}[X] \otimes \mathbb{Z}[X] \cong \mathbb{Z}[X, Y]$ qui envoie X vers $X.Y$. L'unité de l'addition $u : 1 \longrightarrow R$ est la duale de $\mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}$ qui envoie X vers 0. L'unité de la multiplication $u_m : 1 \longrightarrow R$ est la duale de $\mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}$ qui envoie X vers 1. Enfin l'inverse $i : R \longrightarrow R$ est la duale de $\mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}[X]$ qui envoie X vers $-X$. Nous laissons au lecteur (courageux) le soin de spécifier les diagrammes commutatifs correspondants. $\square$

Rappelons que si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont deux catégories ayant des limites finies, un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est dit exact à gauche s'il préserve les limites finies (en particulier les produits et l'objet terminal). Un tel foncteur envoie donc un anneau dans $\mathcal{C}$ vers un anneau dans $\mathcal{D}$. Les foncteurs exacts à gauche entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ forment les objets d'une catégorie qu'on a noté $\mathcal{G}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, les flèches étant les transformations naturelles entre foncteurs. Le choix d'un anneau R dans $\mathcal{C}$ va définir un foncteur évaluation

$$ev : \mathcal{G}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \longrightarrow Ann(\mathcal{D})$$

donné par

$$ev(F) = F(R)$$

Définition 3.2.2. *Une catégorie $\mathcal{C}$ ayant toutes les limites finies et munie d'un objet anneau R sera dite librement engendrée par R pour la théorie des anneaux si pour toute autre catégorie $\mathcal{D}$ avec limites finies le foncteur évaluation précédent induit une équivalence de catégories*

$$\mathcal{G}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \cong Ann(\mathcal{D})$$

Théorème 3.2.1. *[6] La catégorie Ann_{pf}^{op} est librement engendrée par son anneau objet $R = \mathbb{Z}[X]$.*

Preuve. [6] Il suffit de trouver un foncteur $\phi : Ann(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{G}(Ann_{pf}^{op}, \mathcal{D})$ qui soit quasi-inverse du foncteur $ev : \mathcal{G}(Ann_{pf}^{op}, D) \longrightarrow Ann(\mathcal{D})$. Nous le ferons dans le cas particulier de la catégorie $\mathcal{D} = Ann(Ens)$ des anneaux. Le cas général est analogue mais est compliqué par l'utilisation de diagrammes commutatifs. Pour A un anneau de $\mathcal{D}$, définissons $\phi(A) = \phi_A$ comme le foncteur

$$\phi_A : Ann_{pf}^{op} \longrightarrow \mathcal{D}$$

qui envoie l'anneau de présentation finie $B = \dfrac{\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]}{(f_1, \ldots, f_m)}$) vers l'égaliseur

$$\phi_A(B) \xrightarrow{e} A^n \underset{q}{\overset{p}{\rightrightarrows}} A^m$$

avec $p(a_1, \ldots, a_n) = (f_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, f_m(a_1, \ldots, a_n))$ et $q(a_1, \ldots, a_n) = (0, \ldots, 0)$ □

3.3 Topos classifiant

Un topos classifiant pour la théorie des anneaux est un topos de Grothendieck $\mathcal{R}$ muni d'un objet anneau (l'anneau universel) R tel que pour tout autre topos de Grothendieck $\mathcal{E}$ on ait une équivalence de catégories entre la catégorie des morphismes géométriques $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{R}$ et la catégorie $Ann(\mathcal{E})$ des anneaux de $\mathcal{E}$

$$Geom(\mathcal{E}, \mathcal{R}) \cong Ann(\mathcal{E})$$

qui soit naturelle en $\mathcal{E}$. Ceci veut dire que l'objet anneau R correspond par cette équivalence au morphisme géométrique $Id_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ et que pour tout anneau A dans $\mathcal{E}$, il existe un unique morphisme géométrique $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{R}$ avec $A = f^*(R)$ (c'est dans ce sens que R est un anneau universel).

Dans la section précédente nous avons vu que pour tout topos $\mathcal{E}$ il y a une équivalence

$$\mathcal{G}(Ann_{pf}^{op}, \mathcal{E}) \cong Ann(\mathcal{E})$$

de catégories entre les foncteurs exacts à gauche F de Ann_{pf}^{op} ver $\mathcal{E}$ et les anneaux dans $\mathcal{E}$, équivalence obtenue en envoyant le foncteur F vers l'anneau $F(\mathbb{Z}[X])$ de $\mathcal{E}$. Un résultat général en théorie des topos permet de relier les foncteurs exacts à gauche $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ aux morphismes géométriques $\mathcal{E} \longrightarrow Ens^{\mathcal{C}^{op}}$ via une équivalence de catégories

$$Geom(\mathcal{E}, Ens^{\mathcal{C}^{op}}) \cong \mathcal{G}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$$

obtenue en envoyant le morphisme géométrique $f : \mathcal{E} \longrightarrow Ens^{\mathcal{C}^{op}}$ vers le foncteur $f^* \circ h : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ composé du foncteur image inverse $f^* : Ens^{\mathcal{C}^{op}} \longrightarrow \mathcal{E}$ et du foncteur de Yoneda $h : \mathcal{C} \longrightarrow Ens^{\mathcal{C}^{op}}$ qui à l'objet C associe le préfaisceau h_C représenté par C.

Pour $\mathcal{C} = Ann_{pf}^{op}$ on a donc des équivalences

$$Geom(\mathcal{E}, Ens^{Ann_{pf}}) \cong \mathcal{G}(Ann_{pf}^{op}, \mathcal{E}) \cong Ann(\mathcal{E})$$

Par ces équivalences un morphisme géométrique $f : \mathcal{E} \longrightarrow Ens^{Ann_{pf}}$ correspond d'abord (par la première équivalence) au foncteur $f^* \circ h : Ann_{pf}^{op} \longrightarrow Ens^{Ann_{pf}} \longrightarrow \mathcal{E}$ et ensuite (par la seconde équivalence) à l'objet anneau $f^*(h(\mathbb{Z}[X]) = f^*(h_{\mathbb{Z}[X]})$. Comme $\mathbb{Z}[X]$ est un anneau dans $Ann_{pf}^{op}, h_{\mathbb{Z}[X]}$ est un anneau dans $Ens^{Ann_{pf}}$. Pour $f = Id_{Ens^{Ann_{pf}}}$ on obtient que l'objet anneau universel R est

$$R = h_{\mathbb{Z}[X]}$$

On a donc démontré le

Théorème 3.3.1. *[2] Le topos des préfaisceaux $\mathcal{R} = Ens^{Ann_{pf}}$ est un topos classifiant pour la théorie des anneaux. L'objet anneau universel R est le préfaisceau représenté par l'anneau $\mathbb{Z}[X]$, $R = h_{\mathbb{Z}[X]}$*

3.4 Topos de Zariski et Anneaux locaux

Rappelons qu'un anneau A (dans la catégorie des ensembles) est dit local s'il a un idéal maximal et un seul. De manière équivalente A est local si pour tout $a \in A$, on a soit a inversible soit $1 - a$ inversible (pour la multiplication de l'anneau). Si on pose

$$U = \{a \in A \mid a \in A^*\}$$

et

$$V = \{a \in A \mid (1 - a) \in A^*\}$$

avec A^* l'ensemble des éléments inversibles pour la multiplication de A, alors A est un anneau local si et seulement si

$$A = U \cup V$$

Remarquer maintenant que U et V étant disjoints on a

$$A = U \cup V = U \coprod V$$

Autrement dit la famille des deux inclusions $U \longrightarrow A$ et $V \longrightarrow A$ est une famille épimorphique (dans la catégorie des ensembles un épimorphisme est une surjection). On peut aussi reformuler cette définition d'un anneau local en utilisant l'équivalence entre les foncteurs exacts à gauche $Ann_{pf}^{op} \longrightarrow Ens$

et les anneaux dans le topos Ens. Rappelons que cette équivalence est donnée par les foncteurs

$$ev : \mathcal{G}(Ann_{pf}^{op}, Ens) \longrightarrow Ann(Ens) = Ann$$

et

$$\phi : Ann \longrightarrow \mathcal{G}(Ann_{pf}^{op}, Ann)$$

avec $ev(F) = F(\mathbb{Z}[X])$ et $\phi(A) = \phi_A$ et le foncteur qui envoie l'anneau de présentation finie $B = \dfrac{\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]}{(f_1, \dots, f_m)}$ vers l'égaliseur

$$\phi_A(B) \xrightarrow{e} A^n \underset{q}{\overset{p}{\rightrightarrows}} A^m$$

avec $p(a_1, \dots, a_n) = (f_1(a_1, \dots, a_n), \dots, f_m(a_1, \dots, a_n))$ et $q(a_1, \dots, a_n) = (0, \dots, 0)$. Dans Ann_{pf} on a deux flèches évidentes

$$f_1 : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}[X, Y]}{(X.Y - 1)}$$

et

$$f_2 : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}[X, Y]}{(X.Y - Y - 1)}$$

qui consistent à envoyer X vers sa classe modulo $X.Y - 1$ et $X.Y - Y - 1$ respectivement. Mais on a

$$\phi_A(\mathbb{Z}[X]) = A$$

$$\phi_A(\frac{\mathbb{Z}[X, Y]}{(X.Y - 1)}) = U$$

et

$$\phi_A(\frac{\mathbb{Z}[X, Y]}{(X.Y - Y - 1)}) = V$$

On en déduit que A est un anneau local si et seulement si le foncteur ϕ_A envoie la famille $\{f_1, f_2\}$ dans Ann_{pf} vers une famille épimorphique (de deux flèches) dans $Ann = Ann(Ens)$ (les inclusions $U \longrightarrow A$ et $V \longrightarrow A$). On généralise ceci à un topos quelconque

Définition 3.4.1. *[2] L'anneau objet A dans un topos $\mathcal{E}$ est dit local si le foncteur ϕ_A envoie la famille $\{f_1, f_2\}$ dans Ann_{pf} vers une famille épimorphique dans $Ann(\mathcal{E})$*

Les anneaux locaux dans $\mathcal{E}$ vont former une catégorie qu'on va noter $AnnLoc(\mathcal{E})$. La proposition suivante permet de préciser le lien entre les anneaux locaux dans un topos $\mathcal{E}$ et la topologie du topos de Zariski $\mathcal{Z}$.

Proposition 3.4.1. *[6] A est un anneau local dans le topos $\mathcal{E}$ si et seulement si pour tout anneau de présentation finie B et tous éléments $b_1, \ldots, b_n \in B$ avec $b_1 + \ldots + b_n = 1_B$ le foncteur ϕ_A envoie la famille des flèches $\{B \longrightarrow B[b_i^{-1}], i = 1, \ldots, n\}$ dans Ann_{pf} vers une famille épimorphique $\{\phi_A(B[b_i^{-1}]) \longrightarrow \phi_A(B), i = 1, \ldots, n\}$ dans $\mathcal{E}$.*

Preuve. [6] En prenant $B = \mathbb{Z}[X], n = 2, b_1 = X$ et $b_2 = 1 - X$ on voit que la seconde assertion implique la première. Montrons l'inverse. Supposons donc A local. Soit B un anneau de présentation finie avec des éléments $b_1 + \ldots + b_n = 1$. Pour simplifier nous traitons uniquement le cas $n = 2$. Le cas général s'ensuivra par un argument facile de récurrence. On a donc $b_1 + b2 = 1$ ou encore $b_2 = 1 - b_1$. Soit $h : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow B$ le morphisme qui envoie X vers b_1. Formons les pushouts dans Ann_{pf} de f_1 et h et de f_2 et h

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}[X] \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h"'] & \frac{\mathbb{Z}[X]}{(X.Y-1)} \arrow[d] \\ B \arrow[r] & B[b_1^{-1}] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}[X] \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h"'] & \frac{\mathbb{Z}[X]}{(X.Y-Y-1)} \arrow[d] \\ D \arrow[r] & B[(1-b_1)^{-1}] \end{tikzcd}$$

qui sont des pullbacks dans Ann_{pf}^{op}. Le foncteur ϕ_A étant exact à gauche il envoie ces pullbacks vers les pullbacks dans $Ann(\mathcal{E})$

$$\begin{tikzcd} \phi_A(B[b_1^{-1}]) \arrow[r] \arrow[d] & \phi_A(B) \arrow[d] \\ U \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \phi_A(B[(1-b_1)^{-1}]) \arrow[r] \arrow[d] & \phi_A(B) \arrow[d] \\ V \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

Par hypothèse la famille des deux flèches $U \longrightarrow A$ et $V \longrightarrow B$ est épimorphique. Or un exercice facile montre que le pullback d'une famille épimorphique est épimorphique. Donc la famille des deux flèches $\phi_A(B[b_1^{-1}]) \longrightarrow B$ et $\phi_A(B[(1-b_1)^{-1}]) \longrightarrow B$ est épimorphique. Ceci démontre donc notre proposition. $\square$

Autrement dit A est local si et seulement si ϕ_A transforme un crible couvrant en une famille épimorphique et donc si et seulement si le foncteur ϕ_A est continu pour la topologie de Zariski J_{zar} sur Ann_{pf}^{op}.

Dans le topos de Zariski $\mathcal{Z} = Sh(Ann_{pf}^{op}, J_{zar})$ on a défini le faisceau d'oubli

$$\mathcal{O} : Ann_{pf} \longrightarrow Ens$$

qui a l'anneau de présentation finie B associe B lui même mais vu comme ensemble

$$\mathcal{O}(B) = B$$

Mais on a toujours une bijection

$$B \cong Hom(\mathbb{Z}[X], B)$$

obtenue en associant à $b \in B$ le morphisme $\mathbb{Z}[X] \longrightarrow B$ qui envoie X vers b. On a donc

$$\mathcal{O}(B) = B \cong Hom(\mathbb{Z}[X], B) = h_{\mathbb{Z}[X]}(B)$$

On a donc montré que

$$\mathcal{O} = h_{\mathbb{Z}[X]}$$

Comme $\mathbb{Z}[X]$ est un anneau dans Ann_{pf}^{op} on en déduit que $\mathcal{O}$ est un objet anneau dans le topos de Zariski $\mathcal{Z}$. $\mathcal{O}$ est un anneau local dans $\mathcal{Z}$ puisque pour tout anneau les (duales) des deux flèches $B \longrightarrow B[b_1^{-1}]$ et $B \longrightarrow B[b_2^{-1}]$ est une famille épimorphique si $b_1 + b_2 = 1$.

$\mathbb{Z}[X]$ est donc vu de trois manières. C'est un anneau dans Ann_{pf}^{op}, c'est un préfaisceau anneau $h_{\mathbb{Z}[X]}$ sur Ann_{pf}^{op} (ou encore un objet anneau de $Ens^{Ann_{pf}}$) et c'est un faisceau anneau $\mathcal{O} = h_{\mathbb{Z}[X]}$ sur Ann_{pf}^{op} pour la topologie de Zariski J_{zar} (ou encore c'est un objet anneau dans le topos de Zariski $\mathcal{Z}$).

On dira qu'un topos $\mathcal{R}$ muni d'un objet anneau local universel R est un topos classifiant pour la théorie des anneaux locaux si pour tout autre topos $\mathcal{E}$ on a une équivalence

$$Geom(\mathcal{E}, \mathcal{R}) \cong AnnLoc(\mathcal{E})$$

entre les morphismes géométriques $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{R}$ et les anneaux locaux dans $\mathcal{E}$ avec la propriété que le morphisme géométrique $Id_{\mathcal{R}}$ correspond à l'anneau local R et que l'anneau local dans $\mathcal{E}$ qui correspond au morphisme géométrique $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{R}$ est $f^*(R)$.

Théorème 3.4.1. *[6] Le topos de Zariski $\mathcal{Z}$ muni de l'anneau local $\mathcal{O}$ est un topos classifiant pour la théorie des anneaux locaux.*

Preuve. [6] On sait qu'il existe une équivalence entre la catégorie des morphismes géométriques $Geom(\mathcal{E}, \mathcal{Z} = Sh(Ann_{pf}^{op}, J_{zar}))$ et la catégorie des foncteurs exacts à gauche continus $\mathcal{G}_{cont}(Ann_{pf}^{op}, \mathcal{E})$. D'aprés la discussion de la section précédente (topos classifiant) les foncteurs exacts à gauche correspondent aux anneaux de $\mathcal{E}$ et par la proposition précédente les foncteurs exacts à gauche continus correspondent aux anneaux locaux de $\mathcal{E}$. On a donc une équivalence

$$Geom(\mathcal{E}, \mathcal{Z}) \cong AnnLoc(\mathcal{E})$$

avec $R = h_{\mathbb{Z}[X]}$ comme objet anneau universel mais vu comme objet de $\mathcal{Z}$ et donc $R = \mathcal{O}$. $\square$

Conclusion

Nous avons a donnez deux théorèmes de classification des anneaux par des topos. Le premier concerne les anneaux dans un topos quelconque et le topos classifiant est le topos des préfaisceaux $Ens^{Ann_{pf}}$. Le seconde concerne les anneaux locaux dans un topos quelconque et le topos classifiant est le topos de Zariski $\mathcal{Z} = Sh(Ann_{pf}^{op}, J_{zar})$. La classification ici s'exprime par une équivalence de catégories entre les morphismes géométriques du topos vers le topos classifiant et les anneaux dans le topos donné. Le lien entre les morphismes et les anneaux est fait par certains foncteurs définis sur la catégorie sous-jacente au site du topos. Pour le topos Ens des ensembles les morphismes géométriques de Ens vers le topos classifiant sont les points du topos classifiant et donc tout point détermine un anneau.

RÉSUMÉ

Dans ce travail nous expliquons comment (et dans quel sens) le topos de Zariski classifie les anneaux locaux dans un topos quelconque. Les topos sont des catégories de faisceaux sur des sites. Ils ressemblent beaucoup à la catégorie des ensembles Ens. Le topos de Zariski est construit sur le site Ann_{pf} des anneaux de présentation finie qui sont les anneaux des fonctions régulières sur des variétés algébriques (affines). On montre que la catégorie des morphismes géométriques d'un topos quelconque vers le topos de Zariski est équivalente à la catégorie des anneaux locaux dans le topos en question. Nous donnons la définition d'un anneau local dans le cas classique où le topos est le topos des ensembles Ens et nous généralisons cette définition dans un topos quelconque. Dans le cas du topos Ens les morphismes géométriques vers le topos de Zariski sont par définition les points du topos de Zariski et tout point correspond donc à un anneau local (et un seul) dans Ens.

ABSTRACT

In this work we explain how (what sense the Zariski topos classifies local rings in any topos). Topos are category of bundles on sites. It is very similar to the category of sets Ens, Zariski's topos is constituted on sites of regular function rings on algebraic (affine) varieties. We show that the category of geometric morphisms from any topos to the Zariski topos is equivalent to the category of local rings in the topos in question. We give the definition of a local ring in the classical case where the topos of the sets Ens and generalize this definition to any topos. In the case of the Ens, geometric morphisms to the Zariski topos are by definition the points of the Zariski.

الملخص

في هذا العمل سنشرح كيف طوبوس زاريسكي بامكانه تصنيف الحلقات المحلية في اي طوبوس ممكن، الطوبوس هو نوع من الاشعة على مواقع تشبه كثيرا اشعة المجموعات، و الطوبوس الخاصة بزاريسكي تشكل على مواقع الحلقات مهام جبرية منتظمة، وسنثبت ان خصائص التشكيل الهندسية لهذا الطوبوس موافقة لخصائص تشكيل الحلقات المحلية في الطوبوس المدروس.

سنقدم لكم تعريف (حلقة محلية) في حالتها العادية اين يكون الطوبوس هو نفسه طوبوس المجموعة ونعمم هذا التعريف على اي طوبوس في حالات الطوبوس مجموعة، التشكلات الهندسية نحو طوبوس زاريسكي تعرف بنقاط وكل نقطة تدل على حلقة محلية واحدة فقط في المجموعة.

Bibliographie

[1] M. Artin, A. Grothendieck and J. L. Verdier, Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie, année 1963-64 ; second edition published as Lecture Notes in Math., vols. 269, 270 and 305, Springer-Verlag (1972).

[2] M. Hakim, Topos annelés et schémas relatifs, Springer-Verlag (1972).

[3] M. Atiyah, and I. MacDonald, Introduction to commutative algebra, Addison-Wesley-Longman, (1969).

[4] S. Mac Lane, Categories for the Working Mathematician, SpringerVerlag, New York, 1971.

[5] Serge Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1971.

[6] P.T. Johnstone, Topos Theory, Academic Press, New York, 1977.

[7] R. Godement, Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux, Hermann, Paris, 1958.