الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :...............

Centre Universitaire de Mila

Institut des Sciences et de la Technologie **Département de Mathématiques et Informatique**

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de licence

en : - Filière Mathématiques Fondamentales

Thème
Topologie faible

Préparé par :

- Ferkous Kenza
- Aiouaz Meriem
- Mezzi Samia
- Chekhbab Assia

Encadré par: Sekhane Chafika

Année universitaire : 2013/2014

Centre Universitaire de MILA

دعاء

يا رب لا تدعني أصاب بالغرور إذا نجحت

ولا أصاب باليأس إذا فشلت بل ذكرني دائما أن الفشل

هو التجارب التي تسبق النجاح.

يا رب .... علمني أن التسامح أكبر مراتب القوة

و أن حب الانتقام هو أول هو مظاهر الضعف

يا رب ....إذا جردتني من النجاح اترك قوة العناد

حتى أتغلب على الفشل.

إذا جردتني من نعمة الصحة اترك لي نعمة الإيمان

يا رب ....إذا أسأت إلى الناس أعطني شجاعة الاعتذار

و إذا أساء الناس إلي أعطني شجاعة العفو .

يا رب ....إذا نسيتك فذكرني دائما انك ذو مغفرة و ذو عذاب شديد ......أمين يا رب العالمين

ربي خلقتنا و أبدعت ....سبحانك تباركت و تعاليت.

شكر و تقدير

في مثل هذه اللحظات و قبل أن يدون القلم الحروف

ليجمعنا في كلمات و عبارات. تتبعثر الأحرف و عبثا

نحاول تجميعها

في سطور و سطور كثيرة تمر في الخيال

نتقدم باسمي الشكر و الامتنان و التقدير

إلى كل الذين حملوا أقدس رسالة في الحياة على أن يبلغوها جيل بعد جيل,

إلى الذين مهدوا و نوروا لنا طريق العلم و المعرفة باكتساب معلوماتهم ,

إلى جميع الأساتذة الأفاضل.

و نخص بالشكر الأستاذة* سخان شفيقة *التي تفضلت بإشرافها على هذا البحث

فجزاها الله كل خير و لها كل التقدير و الاحترام

كما نتوجه بالشكر الكثير لكل من ساعد على إتمام هذا العمل

و قدم العون و يد المساعدة و زودنا بالمعلومات لإكماله,

و لكل من كان عونا و نورا يضيء الظلمة التي كانت تقف

أحيانا في طريقنا

ربما لم يشعروا بدورهم فلهم منا عظيم الشكر و التقدير

و جزاهم الله خير الجزاء.

إهداء

العلم بحر لا ساحل له كلما ارتشفنامنه زادت حلاوته غير أن لكل بداية نهاية و لكل محصول ثمار و ثمرة دراستي من خلال مشواري تتمثل في هذه المذكرة .

إلى الذي أخرجني من الظلمات إلى النور إلى الذي كان عونا ليفي كل مراحل حياتي ..إلى الذي لم يبخل عليا نعمه إلى الذي رفعت يدي فلم يخيب رجائي .إلى الذي سألته فأجاب دعائي .إليك ربي كل حمدي و شكري و ثنائي.

إلى صفاء الحب في عيون والدتي إلى تمتمات صلواتها بدعوات الخير و النجاح لي.إلى وجهها الذي لا يعرف اليأس إلى الينبوع الذي نغترف منه الطاقة و الصمود لإكمال هذا الدرب ..إليك أنت أمي الغالية حفظك الله لي إلى الذي يكافح من أجلنا بصدق و قناعة. إلى من جعل عمره ثمنا لسعادتنا و نجاحنا إلى الذي يخاصم الزمن عندما نشكو ألما بسيطا سألت الله عز و جل و أسأله دائما أن يوفقني لأحقق أحلامي و هو جزء قليل من الجميل الذي يكلفني حياتي لإرضائك إليك أنت أبي الغالي رعاك الله لي."و قل ربي ارحمهما كما ربياني صغيرا.إلى الأم الثانية و الحضن الدافئ و الأخت الحنونة إلى أختي شريفة التي لطالما ساندتني في دروب الحياة في الشدة و الرخاء.إلى الأغصان المورقة بشجرة الحب إلى من أحاطوا حياتي بالسعادة و ترعرعت بينهم إخوتي " عيسى – العيد – عبد الحق – نبيل – حمزة ".إلى أبناء إخوتي صغيرا و كبيرا وكذا زوجات إخوتي. إلى صديقاتي اللواتي أتمنى لهم السعادة " مريم – سامية – أسيا – وسيلة – خلود – سهيلة ". إلى عماي وعمتي فطيمة التي أتمنى لها الشفاء العاجل و عمتي خديجة إلى جدتي مسعودة . إلى كل من يحمل لي الحب من قريب أو بعيد إلى كل مسلم و مسلمة.

كنزة

إهداء

قال الله تعالى :"وقل ربي ارحمهما كما ربياني صغيرا"

صدق الله العظيم

إلىينبوع الحب و الحنان التي أضاءتلي دروب الحنان بفيض حبها إلى التي منحتني كل شيء و كان لها الفضل الكبير بعد الله عز و جل إلى ماوصلت إليه، إلى أحلىكلمة تلفظ بها اللسان التي لا يوجد اغلي منها في الوجود إلىالتي لم تنسني أبدابدعوات النجاح إليك يا اروع أم أمي الغالية سامية.

إلىمن زرعني بذرة و اعتنى بي إلي أن قطفني ثمرة بعطفه و حنانه الذي مضى عمره يشقى لسعادتي و نجاحي، إليك أنت يا أغلىو أطيب أب في الدنيا رمضان.

1. إلى الجوهرتين الغاليتين"أختي

أحلام أتمنىلها السعادة و الصغيرة بثينة حفظها الله" و إلىأخوي " خالد و مهدي" أتمنى لهما النجاح، "إلى صديقاتي العزيزات على قلبي "كنزة–سامية–أسيا–شهرة–سعاد–أمال–صبيرة"إلىخالاتي و أخوالي، إلىعماتي و أعماميو كل أبناءهم، إلىجدتي الغالية فطيمة و جدي موسى أطال الله في عمره.

إلى كل من يحمل لي الحب في قلبه .

مريم

Table des matières

Introduction Général

Dans ce mémoire on introduira la notion de suite faiblement convergente, et on verra deux résultats importants :

-Si E est un espace de Banach réflexif, toute suite bornée $(x_n) \subset E$ admet des sous-suite faiblement convergentes.

-Si f est une fonction convexe continue sur un espace normé X et si $(x_n) \subset X$ converge faiblement vers $x \in X$, alors $f(x) \leq \liminf_n f(x_n)$.

ces deux résultats permettent de minimiser certaines fonctions convexes définies sur des espaces réflexifs.

Chapitre 1

Topologie initial

1.1 Notion d'espaces

Définition 1.1.1 *(Topologie)*

Soit E un ensemble une topologie sur E est un sous ensemble $A \subset p(E)$ vérifiant :
- $\theta \in A$, et $E \in A$,
- $\forall u, v \in A, u \cap v \in A$,
- si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de A, alors $\cup_{i \in I} x_i \in A$.

Définition 1.1.2 *(espace topologique, ouvert, fermé)*

Un espace topologique est un couple (E, A) où E est un ensemle et A est un topologie sur E. Un ouvert de (E, A) est un élément de A. Un fermé de (E, A) est un ensemble F tel que $E - F$. (On endéduit que l'unionfine de fermés est un fermé, et que l'interecection quelconque de fermés est un fermé).

Définition 1.1.3 *(Distance, espace métrique)*

Une distance sur un ensemble E est une application $E \times E \to \mathbb{R}_+$, telle que

$$\forall x \in E, d(x, x) = 0$$

et vérifiant les axiomes de séparation, symétrie, et l'inégalité trianggulaire. Un espace métrique est un couple (E, d), où d est une distance sur E.

Définition 1.1.4 *(pseudo-distances)*

Soit E un ensemble. Une pseudo distance sur E est une application vérifiant les mêmes axiomes qu'une distance, sauf la séparation. Une famille de pseudo distance (d_i) est dite séparante si

$$d_i(x,y) = 0 \forall i \Rightarrow x = y$$

Une semi-norme est une application vérifiant $\|0\| = 0$, au lieu de$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.Une famille de pseudo normes est dite séparante si la famille de pseudo distances associées est séparante, ie le seul vecteur $x \in E$ tel que $\|x\|_i = 0 \ \forall i$ est 0.

Définition 1.1.5 *(Topologie associée à une famille de pseudo distances)*

Soit E un ensemble, et $(d_i)_{i \in I}$ une famille de pseudo distances sur E. On définit $O \subset p(E)$, par :

$$U \in O \Leftrightarrow \forall \alpha \in U, \exists r > 0, \exists J \subset I, \text{finie}, \cap_{i \in J} B_{d_i}(\alpha, r) \subset U$$

On définit ainsi une topologie sur E.

Définition 1.1.6 *(Partie dense)*

$D \subset E$ est dense si $D = E$. Cette définition est équivalente à "tout ouvert non vide de E rencontre D", ou encore " tout ouvert non vide d'une base d'ouverts de E rencontre D".

Définition 1.1.7 *(Espace séparable)*

Un espace topologique est séparable s'il existe une partie dénombrable dense.

Tout espace topologique à base dénombrable d'ouvert est séparable.

Définition 1.1.8 *(Espace séparé)*

Un espace topologique A est dit séparé si $\forall (x,y) \in A^2, \exists U, V$ deux ouverts/voisinages/éléments d'une base de voisinages disjoints tels que $x \in U$ et $y \in V$ Cette notion est invariante par homéomorphisme, et, si A est séparé, $\forall x \in A$, $\{x\}$ est un fermé.

Tout espace métrique est séparé.

Définition 1.1.9 *(Groupe topologique)*

Un groupe topologique est un groupe G muni d'une topologie rendant le produit et le passage à l'inverse continus.

Définition 1.1.10 *(Espace vectoriel topologique)*

Un espace vectoriel topologique est un espace vectoriel muni d'une topologie telle que la somme et la multiplication par un scalaire soient continus. Un morphisme (resp. isomorphisme) d'espaces vectoriels topologiques est une application linéaire (resp. linéaire et bijective) qui est continue pour la topologie de l'espace vectoriel (resp. qui est un homéomorphisme).

Définition 1.1.11 *(Espace complet)*

On dit qu'un espace métrique est complet si toute suite de Cauchy converge.

Définition 1.1.12 *(Espaces de banach, de Fréchet)*

i) On appelle espace de banach tout espace vectoriel complet.

ii) On appelle espace de Fréchet tout espace vectoriel topologique localement convexe séparé à base denombrable de voisinages de 0, qui est complet.

1.2 Topologie initiale

Soit X un ensemble, soit $(y_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et pour tout $i \in I$, soit $f_i : X \to y_i$ une application. La topologie initiale sur X définie par $(f_i)_{i\in I}$ est la topologie la moins fine rendant contines les application $f_i$pour $i \in I$. Celle-ci existe, car l'intersection d'une famille de topologies sur X, rendant toutes les applications f_i continues, rend encore toutes les f_i continues.

Les proppriétés suivantes sont immédiates.

- C'est la topologies engendrée par :

$$\left\{ f_i^{-1}\left(U_i\right) : i \in I, U_i \text{ ouvert de } y_i \right\}$$

Dans le cas particulier où I est un singleton, nous pouvons omettre les mots "engendrée par " : la topologie initiale est l'ensemble des images réciproques des ouverts de l'espace d'arrivée par l'unique élément de la famille.

- Si B_i est une base d'ouverts de y_i pour tout $i \in I$, alors l'ensemble des intersections finies d'éléments de

$$\left\{ f_i^{-1}\left(U_i\right) : i \in I, U_i \in B_i \right\}$$

est une base d'ouverts de E.

En particulier, si I est dénombrable, et si y_i est à base dénombrable pour tout $i \in I$, alors X est à base denombrable.

- Si $x \in X$ et V_i est un système fondamental de voisinages de $f\ _i(x)$ dans y_i pour tout $i \in I$, alors l'ensemble des intersections finies d'éléments de

$$\left\{ f_i^{-1}(v_i) : i \in I, v_i \in V_i \right\}$$

est un système fondamental de voisinages de x dans X.

- Si Z est un espace topologique et si $g : Z \to X$ est une application, alors g est continue si et seulement si chacune des applications $f_i \circ g$ est continue.

En effet, si g est continue, alors $f_i \circ g$ l'est par composition d'applications continues. Réciproquement, comme les $f_i^{-1}(U_i)$, où $i \in I$ et U_I est un ouvert de y_i, engendrent la topologie de X, pour montrer que g est continue, il suffit de montrer que les $g^{-1}\left(f_i^{-1}(U_i)\right)$ sont des ouverts de Z. Or

$$g^{-1}\left(f_i^{-1}(U_i)\right) = (f_i \circ g)^{-1}(U_i)$$

ce qui montre le sens réciproque.

1.2.1 topologie image réciproque

Si X est un ensemble, si (y, O) est un espace topologique et si $f : X \to y$ est une application[1], alors la topologie image réciproque $f\ ^{-1}(O)$ est (par exemple par le premier point ci-dessus) la topologie initiale sur X définie par (la famille réduite à une seule application) f.

1.2.2 topologie définie par une famille de pseudo-distances

Soit X un espace topologique dont la topologie est définie par une famille de pseudo-distances $(d_i)_{i \in I}$ [2], alors cette topologie O_1 coincide avec la topologie initiale O_2 sur X définie par la famille d'applications $(f_{\alpha,x_0} : x \to d_\alpha(x, x_0))_{x_0 \in X, \alpha \in A}$ de pseudo-distances à un point.

En effet, comme la pseudo-boule $B_\alpha(x_0, \epsilon)$ est égale à $f_{\alpha,x_0}^{-1}([0, \epsilon[)$, la topologie O_1 est moins fine que O_2.

Réciproquement, soient

$$x_0 \in X, t_0 \in \mathbb{R}, \epsilon > 0, x \in f_{\alpha,x_0}^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[)\,, \text{ et } \epsilon' = \epsilon - |d_\alpha(x, x_0) - t_0|$$

Alors $\epsilon' > 0$ par définition de x. De plus, $B_\alpha(x, \epsilon')$ est contenue dans

$$f_{\alpha,x_0}^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[)$$

car si $y \in B_\alpha(x, \epsilon')$, alors

$$|d_\alpha(y, x_0) - t_0| \le |d_\alpha(y, x_0) - d_\alpha(x, x_0)| + |d_\alpha(x, x_0) - t_0|$$

$$\le d_\alpha(x, y) + |d_\alpha(x, x_0) - t_0|$$

$$< \epsilon' + |d_\alpha(x, x_0) - t_0| = \epsilon$$

Donc

$$f_{\alpha,x_0}^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[)$$

est un voisinage pour O_1 de chacun de ses points. Comme l'ensemble des

$$f_{\alpha,x_0}^{-1}(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[)$$

pour $x_0 \in X$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$ est une prébase d'ouverts de O_2 par la seconde propriété ci-dessus, la topologie O_2 est moins fine que O_1, et les deux topologies coincident.

En particulier, la topologie d'un espace métrique (X, d) est la topologie initiale définie par la famille d'application :

$$(x \to d(x, x_0))_{x_0 \in X}$$

de X dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire la topologie la moins fine rendant continues les applications de distance à un point.

Exemple 1.2.1 *(Topologie définie par une famille de semi-normes)*

Soit E un espace vectoriel réel ou complexe, et $(\|.\|_\alpha)_{\alpha \in A}$une famille de semi-normes sur E.

- La topologie définie par la famille $(\|.\|_\alpha)_{\alpha \in A}$ sur E est la topologie initiale définie par la famille d'applications :

$$(f_{\alpha,x_0} : x \to \|x - x_0\|_\alpha)_{x_0 \in E, \alpha \in A}$$

de E dans $[0, +\infty[$, c'est-à-dire la topologie la moins fine rendant continue ces applications.

-La topologie définie par $(\|.\|_\alpha)_{\alpha \in A}$ est exactement la topologie de E définie par la famille de pseudo-distances

$$d_\alpha(x, y) = \|x - y\|_\alpha$$

par ce qui précède. En particulier, elle est engendrée par les pseudo-boules

$$B_\alpha(x_0, \epsilon) = \{x \in E : \|x - x_0\|_\alpha < \epsilon\}$$

où $x_0 \in E$, $\epsilon > 0$ et $\alpha \in A$. Donc elle a pour base d'ouverts les intersections finies de telles boules. De plus, l'ensemble des parties

$$\cap_{\alpha \in A\prime} \{x \in E : \|x - x_0\|_\alpha < \epsilon\}$$

de E, où $\epsilon > 0$ et $A\prime$ est une partie finie de A, est un systéme fondamental de voisinages d'un point donné $x_0 \in E$.

Notons que les translations sont des homéomorphismes : pour tout v_0 dans E, l'application t_{v_0} de E dans E définie par $x \to x + v_0$ est bijective, d'inverse t_{-v_0}, et elle est continue, car pour tous $x_0 \in E$ et $\alpha \in A$, nous avons

$$f_{\alpha,x_0} \circ t_{v_0} = f_{\alpha,x_0} - v_0$$

et on applique le quatrième point ci-dessus.

Soit y un espace topologique, soit $y_0 \in y$, soit A_{y_0} un système fondamental de voisinages de y_0 dans y, et soit $f : y \to E$ une application. D'après ce qui précède, si E est munie de la topologie ci-dessus, alors f est continue en y_0 si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \forall \alpha \in A, \exists U \in A_{y_0}, \forall y \in U, \|f(y) - f(y_0)\|_\alpha < \epsilon$$

En effet, si f est continue en y_0, alors la propriété en découle par composition des applications continues f et $x \to \|x - f(y_0)\|_\alpha$. Réciproquement, si cette propriété est satisfaite, alors pour tout $\mathbb{k}$ dans $\mathbb{N}$, pour tous $x_1, ..., x_k$ dans E, pour tous $\alpha_1, ..., \alpha_k$ dans A et pour tout $\epsilon > 0$, il existe, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq k$, un élément $_{Vi} \in A_{y_0}$ tel que

$$\|f(y) - f(y_0)\|_\alpha < \epsilon$$

Par conséquent, pour tout y dans le voisinage $\cap_{1 \leq i \leq n} V_i$ de y_0, et

$$\left| \|f(y) - x_i\|_{\alpha_i} - \|f(y_0) - x_i\|_{\alpha_i} \right| \leq \|f(y) - f(y_0)\|_{\alpha_i} < \epsilon$$

ce qui montre la continuité de f.

(1) La topologie définie par une famille de semi-normes est séparée si etseulement si la famille est séparante.

(2) La topologie sur un espace vectoriel réel ou complexe, définie par une famille dénombrable et séparante de semi-normes, est métrisable.

Preuve. (1) Si la famille n'est pas séparante, alors il existe deux points distincts x et y dans E tels que $\|y - x\|_\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in A$, donc y appartient à tout voisinage de x, et E n'est pas séparé. La preuve du sens direct est similaire à celle du fait que la topologie induite par (une distance associée à) une norme est séparée.

En effet, si x, $y \in E$ sont distincts, soit $\alpha \in A$ tel que $\epsilon = \|x - y\|_\alpha > 0$.

Les applications :

$$f_x : u \to \|u\text{-}x\|_\alpha$$

et

$$f_y : y \to \|u\text{-}y\|_\alpha$$

sont continues. Donc $f_x^{-1}\left(\left[0, \frac{\epsilon}{2}\right[\right)$ et $f_y^{-1}\left(\left[0, \frac{\epsilon}{2}\right[\right)$ sont des ouverts contenant respectivement x et y. Ces ouverts sont disjoints, par inégalité triangulaire, car s'il existait z dans E tel que

$$\|z - x\|_\alpha < \epsilon$$

et

$$\|z - y\|_\alpha < \epsilon$$

alors on aurait

$$\|x - y\|_\alpha < \epsilon$$

ce qui n'est pas possible.

Supposons que l'ensemble d'indice A soit égal à $\mathbb{N}$ (ce qui est possible, à bijection près, quitte à rajouter, si A est fini, des semi-normes nulles). Notons d_n la pseudo-distance associée à la semi-norme $\|.\|_n$, et d la distance définie par :

$$d(x, y) = \sum_{n \in N} 2^{-n} \min\{1, d_n(x, y)\}$$

Notons O_{norm} et O_{dis} respectivement la topologie définie par la famille de semi-normes et celle induite par la distance d. Comme les translations dans E sont des homéomorphismes à la fois pour O_{norm} et O_{dis} (ce sont même des isométries pour O_{dis}), il suffit de montrer que tout voisinage du vecteur nul pour l'une contient un voisinage du vecteur nul pour l'autre. Rappelons que $\{B_d(0, \epsilon) : \epsilon > 0\}$ est un système fondamental de voisinages de 0 pour O_{dis}, et que

$$\left\{\cap_{n=0}^{N} \{x \in E : \|x\|_n < \epsilon\} : N \in \mathbb{N}, \epsilon > 0\right\}$$

est un système fondamental de voisinages de 0 pour O_{norm}.

Soit $\epsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} 2^{-n} \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Soit x dans X. Si $\|x\|_n < \frac{\epsilon}{4}$ pour $0 \leq n \leq N$, alors

$$d(x,0) < \frac{\epsilon}{4}\sum_{n=0}^{N} 2^{-n} + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon$$

Donc tout voisinage de 0 pour O_{dis} contient un voisinage de 0 pour O_{norm}.

Réciproquement, soient $\epsilon \in]0,1[$ et $N \in \mathbb{N}$. Soit x dans X. Si $d(x,0) < \epsilon 2^{-N}$, alors pour tout $n \in N$, on obtient $2^{-n}\min\{1, d_n(x,0)\} \in 2^{-N}$. Donc, pour $0 \leq n \leq N$,

$$\|x\|_n = \min\{1, d_n(x,0)\} < \epsilon$$

et le résultat en découle. ∎

Exemple 1.2.2 *(L'espace de Schwartz des applications lisses à décroissance rapide).*

Pour tout $r \in \mathbb{N} - \{0\}$, soit $\zeta(\mathbb{R}^r)$ l'espace vectoriel des applications C^∞ de $\mathbb{R}^r$ dans $\mathbb{R}$ à décroissance rapide[3]. Considérons la famille$\left(\|.\|_{k,m}\right)_{k\in\mathbb{N},m\in\mathbb{N}'}$ de semi-normes, la topologie définie par cette famille coïncide avec la topologie induite par la distance

$$d(x,y) = \sum_{k\in N, m\in N'} \frac{1}{2^{k+|m|}} \min\left\{1, \|x-y\|_{k,m}\right\}$$

Sauf mention contraire, l'espace vectoriel $\zeta(\mathbb{R}^r)$ sera muni de cette topologie (métrisable), et s'appelle l'espace de Schwartz.

L'espace des applications lisses à support dans un compact prescrit. Pour $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, pour tout $r \in \mathbb{N} - \{0\}$, pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^r$ et pour tout compact non vide $\mathbb{k}$ dans Ω, rappelons que $D_k(\Omega)$ est l'espace vectoriel sur k des applications C^∞ de Ω dans $\mathbb{k}$ dont le support est contenu dans $\mathbb{k}$.

Pour tout f dans $D_{\mathbb{k}}(\Omega)$ et tout m dans $\mathbb{N}^r$, posons

$$\|f\| = \max_{x\in\mathbb{k}} |\partial^m f(x)|$$

Il est facile de vérifier que $\|.\|_m$ est une semi-norme sur $D_k(\Omega)$, et que la famille$(\|.\|_m)_{m\in\mathbb{N}'}$ est une famille dénombrable séparante de semi-normes sur $D_k(\Omega)$. La topologie sur $D_k(\Omega)$ définie par cette famille est donc métrisable.

Exemple 1.2.3 *(L'espace des applications lisses à support compact)*

Pour $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, pour tout $r \in \mathbb{N} - \{0\}$, pour tout ouvert non vide Ω de $\mathbb{R}^r$, rappelons que $D(\Omega)$ est l'espace vectoriel des applications lisses de $\mathbb{R}^r$dans $\mathbb{k}$ à support compact dans Ω. Pour tout f dans $D(\Omega)$ et tout ε dans $\zeta^0_{0,+}(\Omega)$, posons

$$\|f\|_\varepsilon = \max_{x\in\Omega} \max_{m\in\mathbb{N}', |m|\leq \frac{1}{\varepsilon(x)}} \frac{|\partial^m f(x)|}{\varepsilon(x)}$$

Il est facile de vérifier que la borne supérieure définissant $\|f\|_\varepsilon$ est bien un maximum (par compacité du support de f), que $\|.\|_\varepsilon$ est une semi-norme sur $D(\Omega)$: si $f \in D(\Omega)$ n'est pas la fonction nulle, alors $\|f\|_\varepsilon > 0$ pour tout $\varepsilon \in \zeta^0_{0,+}(\Omega)$(qui est non vide).

Proposition 1.2.4 *La topologie sur $D(\Omega)$ définie par cette famille de semi-normes est la topologie de Schwartz. En particulier, la topologie de Schwartz est séparée.*

Preuve. Preuve. Pour ces deux topologies, les translations dans l'espace vectoriel $D(\Omega)$ sont des homéomorphismes[4]. Donc il suffit de montrer que tout voisinage de la fonction nulle 0 pour l'une contient un voisinage de 0 pour l'autre, et réciproquement. ■

Rappelons que les

$$B_{0,\varepsilon} = \left\{ f \in D(\Omega) : \forall x \in \Omega, \forall m \in \mathbb{N}^r, |m| \leq \frac{1}{\varepsilon(x)} \Rightarrow |\partial^m f(x)| < \varepsilon(x) \right\}$$

pour $\varepsilon \in \zeta^0_{0,+}(\Omega)$, forment un système fondamental de voisinages de 0 pour la topologie de Schwartz. Soit $\varepsilon \in \zeta^0_{0,+}(\Omega)$. Il est immédiat que $\{f \in D(\Omega) : \|f\|_\varepsilon < 1\}$, qui est un voisinage ouvert de 0 pour la topologie définie par la famille de semi-normes, est contenu dans $B_{0,\varepsilon}$.

Réciproquement, soient $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_k$ dans $\zeta^0_{0,+}(\Omega)$ et $\eta_1, ..., \eta_k$ dans $]0, 2]$.
Posons $\varepsilon = \min_{1\leq i\leq k} \varepsilon_i$, qui appartient à $\zeta^0_{0,+}(\Omega)$, et $\eta = \min_{1\leq i\leq k} \eta_i$, qui est strictement positif.

Alors l'ensemble

$$\cap_{1\leq i\leq k} \left\{ f \in D(\Omega) : \|f\|_{\varepsilon_i} < \eta_i \right\}$$

contient le voisinage pour la topologie de Schwartz $B_{0,\eta\varepsilon/2}$, car $1/\varepsilon_i \leq 2/(\eta\varepsilon)$
pour $1 \leq i \leq k$.
Remarquons qu'à la fois dans $L(\mathbb{R}^r)$, dans $D_k(\Omega)$ et dans $D(\Omega)$, pour tout m dans $\mathbb{N}^r$, les applications $f \to \partial^m f$ sont continues : pour tous $k \in \mathbb{N}$, $m, m' \in \mathbb{N}^r$, $\varepsilon \in \zeta^0_{0,+}(\Omega)$, on a $\varepsilon/(1 + m\varepsilon) \in \zeta^0_{0,+}(\Omega)$, et pour tout $f \in L(\mathbb{R}^r)$, pour tout $g \in D_k(\Omega)$ et pour tout $h \in D(\Omega)$,

$$\|\partial^m f\|_{k,m'} = \|f\|_{k,m+m'}, \|\partial^m g\|_{m'} \|g\|_{m+m'}, \text{ et } \|\partial^m h\|_\varepsilon \leq \|h\|_{\varepsilon/(1+m\varepsilon)}$$

■

1.2.3 Topologie étroite

Soit X un espace topologique. Notons $M(X)$ l'ensemble des mesures boréliennes positives de probabilité sur X [5]. Notons $\zeta_{0,+}^{0}(X)$ l'espace vectoriel réel des applications continues bornées de X dans $\mathbb{R}$. La topologie étroite sur $M(X)$ est la topologie initiale définie par la famille d'applications $\mu \rightarrow \mu(f)$ lorsque f parcourt $\zeta_{b}^{0}(X)$.

Chapitre 2

Espaces vectoriels topologiques

Soit $\Bbbk$ un corps topologique. Un espace vectoriel topologique sur $\Bbbk$ est un ensemble E muni d'une structure d'espace vectoriel sur le corps $\Bbbk$ et d'une structure d'espace topologique compatibles, i.e. telles que les applications :

$$E \times E \to E$$

$$(x, y) \longmapsto x - y$$

et

$$\Bbbk \times E \to E$$

$$(\lambda, y) \longmapsto \lambda y$$

soient continues. En particulier, le groupe additif $(E, +)$ est un groupe topologique.

Les translations $t_x : y \longmapsto y + x$, où $x \in E$, sont des homéomorphismes. Les homothéties $h_\lambda : y \longmapsto \lambda y$, où $\lambda \in \Bbbk^*$, sont des homéomorphismes. Sauf quelques exemples, tous les espaces vectoriels topologiques de ce cours seront réels ou complexes.

Un morphisme d'espaces vectoriels topologiques entre deux espaces vectoriels topologiques est une application linéaire qui est continue. Un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques est un isomorphisme linéaire qui est un homéomorphisme. Deux espaces vectoriels topologiques sont isomorphes s'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques de l'un sur l'autre.

Exemple 2.0.5 *Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel topologique, muni de la structure de sous-espace topologique, est un espace vectoriel topologique.*

Si $(E_i)_{i \in I}$ est une famille d'espaces vectoriels topologiques sur un corps topologique

$\mathbb{k}$, alors l'ensemble produit $E = \prod_{i \in I} E_i$, muni de la structure d'espace vectoriel produit sur $\mathbb{k}$ (de lois terme à terme $\left((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}\right) \longmapsto (x_i + y_i)_{i\in I}$ et $\left(\lambda, (x_i)_{i\in I}\right) \longmapsto (\lambda x_i)_{i\in I}$ et de la topologie produit, est un espace vectoriel topologique.

Soit $((E_i), (f_{ij}))$ un système projectif d'espaces vectoriels topologiques, i.e.$(I, \leq)$ est un ensemble ordonné ; E_i est un espace vectoriel topologique pour tout $i \in I$, $f_{ij} : E_j \to E_i$ est un morphisme d'espaces vectoriels topologiques pour tous $i, j \in I$ tels que $i \leq j$, et ces données vérifient $f_{ii} = id$ si $i \in I$ et $f_{ij} \circ f_{jk} = f_{ik}$ si $i \leq j \leq k$. Alors muni de la topologie limite projective et de la structure d'espace vectoriel limite projective (sous espace vectoriel de l'espace vectoriel produit $\prod_{i\in I} E_i$), l'ensemble limite projective $\varprojlim E_i$ est un espace vectoriel topologique.

Soit $\mathbb{k}$ un corps topologique. Une algèbre topologique sur $\mathbb{k}$ est un ensemble E muni d'une structure d'algèbre sur le corps $\mathbb{k}$ et d'une structure d'espace topologique compatibles,i.e. telles que les applications :

$$E \times E \to E$$

$$(x, y) \longmapsto x - y$$

$$E \times E \to E$$

$$(x, y) \longmapsto xy$$

$$\mathbb{k} \times E \to E$$

$$(\lambda, y) \longmapsto \lambda y$$

soient continues. En particulier, l'anneau sous-jacent est un anneau topologique, et l'espace vectoriel sous-jacent est un espace vectoriel topologique. Par exemple, si $\mathbb{k}$ est un corps topologique, alors l'algèbre des matrices carrées $n - n$ sur $\mathbb{k}$, muni de la topologie produit de $M_n(\mathbb{k}) = \mathbb{k}^{n^2}$, est une algèbre topologique.

(1) Si X est un espace topologique et E un espace vectoriel topologique, si $f, g : X \to E$ et $h : X \to \mathbb{k}$ sont des applications continues, alors les applications $f + g : X \to E$ et $hg : X \to E$ définies par $x \longmapsto f(x) + g(x)$ et $x \longmapsto h(x) f(x)$ sont continues, par composition d'applications continues.

(2) Par continuité des applications de différence et de multiplication externe, l'adhérence d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel topologique est un sous-espace vectoriel. De même, l'adhérence d'une sous-algèbre d'une algèbre topologique est une sous algèbre.

(3) Rappelons qu'un convexe dans un espace vectoriel réel ou complexe E est une partie P de E telle que, pour tous x, y dans P et pour tout $t \in [0,1]$, le point $tx+(1-t)y$ appartienne encore à P.

Tout convexe d'un espace vectoriel topologique (réel ou complexe) E est connexe par arcs, donc connexe : pour tous x, y dans E, l'application :

$$t \longmapsto tx + (1-t)\,y$$

est continue.

L'adhérence d'un convexe d'un espace vectoriel topologique est convexe : pour tout $t \in [0,1]$, l'application f de $E \times E$ dans E définie par : $(x,y) \longmapsto tx + (1-t)\,y$ est continue, et donc

$$f\left(\overline{C} \times \overline{C}\right) = f\left(\overline{C \times C}\right) \subset \overline{f\,(C \times C)} \subset \overline{C}$$

L'intérieur d'un convexe C d'un espace vectoriel topologique est convexe : si x et y appartiennent à l'intérieur de C, alors pour tout $t > 0$, l'ensemble des $(1-t)\,x + tz$, pour z dans un voisinage ouvert de y contenu dans C, est un voisinage ouvert de $(1-t)\,x + ty$ contenu dans C, par continuité de l'application :

$$\omega \longmapsto \frac{1}{t}\,(\omega\,(1-t)\,x)$$

(4) Une application linéaire $f : E \to F$ entre espaces vectoriels topologiques est continue si et seulement si elle est continue en 0 (c'est une propriété des groupes topologiques sous jacent).

En particulier, deux structures d'espaces vectoriels topologiques sur un même espace vectoriel coïncident si et seulement si tout voisinage de 0 pour l'une contient un voisinage de 0 pour l'autre, et réciproquement.

2.1 Espaces vectoriels normés sur un corps valué

La classe la plus importante d'espaces vectoriels topologiques est bien sûr fournie par celle des espaces vectoriels normés.

Soit $\Bbbk$ un corps muni d'une valeur absolue $|.|$.

Soit E un espace vectoriel sur K. Une norme sur E est une application $\|.\|$ de E dans $[0,+\infty[$ telle que, pour tous x, y dans E et tout λ dans K,

(i) $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$,

(ii) $\|yx\| = |y|\,\|x\|$,

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + c$.

Cette norme est ultramétrique si la troisième condition est remplacée par $\|x+y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}$.

Exemple 2.1.1 *(des normes)*

La valeur absolue de K est une norme sur l'espace vectoriel K sur K, qui est ultramétrique si et seulement si la valeur absolue l'est.

La restriction d'une norme à un sous-espace vectoriel F de E est une norme sur F. Sauf mention contraire, lorsque E est muni d'une norme, nous munirons tout sous-espace vectoriel de la norme restreinte.

Pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, et pour tout p dans $[1, +\infty]$, la formule :

$$\|(x_1, ..., x_n)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

pour $p \neq +\infty$, et $\|(x_1, ..., x_n)\|_\infty = \sup_{1\leq i\leq n} |x_i|$, définit une norme sur l'espace vectoriel K^n (pour les mêmes raisons que lorsque $K = \mathbb{C}$).

Pour tout p dans $[1, +\infty[$, la formule :

$$\left\|(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\right\|_p = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} |x_i|^P\right)^{1/p}$$

pour $p \neq +\infty$, et$\left\|(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\right\|_\infty$, définit une norme sur l'espace vectoriel $\ell_p(K)$ des suites à coefficients dans K, dont la somme des puissances $p - èmes$ des termes est convergente si $p \neq +\infty$ et qui sont bornées si $p = +\infty$ (pour les mêmes raisons que lorsque $K = \mathbb{C}$).

La distance définie par la norme$\|.\|$ est l'application $d : E \times E \to [0, +\infty[$ définie par :

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

qui est bien une distance sur l'ensemble E (ultramétrique si la norme l'est).

Une semi-norme sur E est une application $\|.\|$ de E dans $[0, +\infty[$ vérifiant les propriétés ci-dessus des normes, où l'on remplace la propriété (i) par celle, plus faible
si $x = 0$ alors, $\|x\| = 0$ La topologie définie par une famille de semi-normes $(\|.\|_\alpha)_{\alpha\in A}$ sur E est la topologie initiale définie par la famille d'applications de E dans $[0, +\infty[$, qui vérifie les mêmes propriétés que celles qui ont été énoncées, lorsque $K = \mathbb{R}$.

Un espace vectoriel normé sur K est un espace vectoriel sur K muni d'une norme.

Lorsque K est $\mathbb{R}$ou $\mathbb{C}$ avec leurs valeurs absolues usuelles, cette définition est celle déjà vue. Sauf quelques exemples, tous les espaces vectoriels normés de ce cours seront réels ou complexes. Sauf mention contraire, nous munirons tout espace vectoriel normé sur K de la distance définie par sa norme, et de la topologie définie par cette distance.

Remarque 2.1.2 *Un espace vectoriel normé, muni donc de la topologie induite par sa norme, est un espace vectoriel topologique (la preuve est la même que celle pour l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ sur le corps $\mathbb{C}$, et est un cas particulier de celle qui suit).*

Un espace vectoriel E, muni de la topologie définie par une famille de semi-normes $(\|.\|_\alpha)_{\alpha\in A}$ (et en particulier un espace vectoriel normé, ainsi qu'un espace vectoriel muni d'une topologie normable[6]), est un espace vectoriel topologique.

En effet, par continuité des translations pour une topologie définie par une famille de semi-normes et les propriétés des topologies initiales, il suffit de montrer que pour tout $\alpha \in A$, les application $(x, y) \longmapsto \|x-y\|_\alpha$et $(t, x) \longmapsto \|tx\|_\alpha$ sont continues en $(0, 0)$ et en $(t_0, 0)$ respectivement. Ceci découle des inégalités

$$\|x-y\|_\alpha \leq \|x\|_\alpha + \|y\|_\alpha$$

et

$$\|tx\|_\alpha = |t| \|x\|_\alpha \leq (|t_0| + |t-t_0|) \|x\|_\alpha$$

En particulier, l'espace de Schwartz $L(\mathbb{R}^r)$ des applications réelles lisses à décroissance rapide dans $\mathbb{R}^r$, où $r \in \mathbb{N} - \{0\}$, est un espace vectoriel topologique[7]. Sa topologie n'est pas induite par une norme[8].

Pour $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, pour tout ouvert Ω non vide de $\mathbb{R}^r$, où $r \in \mathbb{N} - \{0\}$, pour tout compact non vide K dans Ω, l'espace vectoriel $D_k(\Omega)$ des applications C^∞ de Ω dans $\mathbb{k}$ dont le support est contenu dans K, est un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{k}$.

Avec $\mathbb{k}$ et Ω comme ci-dessus, l'espace vectoriel $D(\Omega)$ des applications lisses de Ω dans $\mathbb{k}$, à support compact dans Ω, muni ou bien de la topologie de Whitney ou bien de la topologie de Schwartz, est un espace vectoriel topologique (ces topologies sont définies par des familles de semi-normes. Mais ces topologies ne sont pas métrisables, donc elles ne peuvent pas être induite par une norme.

2.2 Espaces vectoriels topologiques localement convexes

Voici une classe d'espaces vectoriels qui joue un rôle important en analyse fonctionelle.

Un espace vectoriel topologique réel ou complexe E est dit localement convexe si le vecteur nul admet un système fondamental de voisinages convexes. Bien sûr, par continuté des translations et puisque l'intérieur d'un convexe est convexe, tout point admet alors un système fondamental de voisinages convexes ouverts.

Lemme 2.2.1 *Soient E un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, et C un* *voisinage convexe de* 0*. Appelons jauge de* C *l'application :*

$$\|.\|_C : E \to [0, +\infty[$$

définie par : $\|x\|_C = \inf \left\{ t > 0 : \frac{1}{t}x \in C \right\}$.

Elle vérifie les propriétés suivantes :

(1) $x, y \in E$, $\forall \lambda > 0$,

$$\|\lambda x\|_C = \lambda \|x\|_C$$

et

$$\|x + y\|_C \leq \|x\|_C + \|y\|_C$$

(2) L'application $\|.\|_C$ est continue. En particulier, si E est un espace vectoriel normé, alors il existe $M \geq 0$ tel que $\forall x \in E, \|x\|_C \leq M \|x\|$.

(3) Si C est ouvert, alors $C = \{x \in E : \|x\|_C < 1\}$.

(4) Si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ et si C est symétrique i.e. si $-x$ appartient à C pour tout x dans C, alors la jauge de C est une semi-norme sur E.

(5) Si $C\prime$ est un voisinage convexe de 0 tel que $C\prime \subset C$, alors $\|.\|_C \leq \|.\|_{C'}$.

(6) Si $(C_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille de convexes de E telle que $\cap_{\alpha \in A} C_\alpha$ soit un voisinage de 0, alors $\|.\|_{\cap_{\alpha \in A} C_\alpha} = \sup_{\alpha \in A} \|.\|_{C_\alpha}$.

(7) Pour tous $\lambda > 0$ et $x \in E$, $\|x\|_{\lambda C} = \frac{1}{\lambda} \|x\|_C$.

Preuve. Montrons les assertions (1) et (4). Comme C est un voisinage de 0, pour tout x dans E, pour t assez grand,$\frac{1}{t}x$ appartient à C, donc $\|x\|_C$ est bien défini. La jauge de C est nulle sur le vecteur nul (ainsi que sur tout éventuel vecteur non nul x, tel que le rayon $\mathbb{R}_+ x$ soit contenu dans C), et vérifie par construction la propriété d'homogénéité $\|\lambda x\|_C = |\lambda| \|x\|_C$ pour tout réel $\lambda > 0$ (et elle vérifie aussi cette formule pour $\lambda < 0$ si C est symétrique car alors $\|-x\|_C = \|x\|_C$).

Montrons que $\|.\|_C$ est sous-additive. Soient x et y dans E. Pour tous $s, t > 0$, tels que $\frac{1}{s}x, \frac{1}{t}y \in C$, soit $u = \frac{s}{s+t} \in [0, 1]$. Par convexité de C, on a

$$\frac{1}{s+t}(x + y) = \frac{u}{s}x + \frac{1-u}{t}y \in C$$

Donc $\|x + y\|_C \leq s + t$. En prenant la borne inférieure sur s et sur t, on a donc $\|x + y\|_C \leq \|x\|_C + \|y\|_C$.

(2) Comme pour les normes, on déduit de la sous-additivité de $\|.\|_C$ que

$$\forall x, y \in E, |\|x\|_C - \|y\|_C|$$

Donc la continuité de $\|.\|_C$ en un point quelconque de E découle de sa continuité en

0.

Montrons la continuité de $\|.\|_C$ en 0. Soit $\epsilon > 0$. Comme C est un voisinage de 0 et puisque $\frac{1}{\epsilon}x$ tend vers 0 quand x tend vers 0, il existe un voisinage V de 0, tel que pour tout $x \in V$, on ait $\frac{1}{\epsilon}x \in C$. Par définition de la jauge, on a alors $\|x\|_C \leq \epsilon$ pour tout x dans V, ce qu'il fallait démontrer. L'assertion concernant le cas particulier des espaces vectoriels normés s'en déduit par homogénéité de $\|.\|_C$. (On peut aussi dire que si E est un espace vectoriel normé, alors comme C est un voisinage de 0, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(0, \epsilon) \subset C$.

En posant $M = \frac{1}{\epsilon}$, on a donc par construction $\|x\|_C \leq M \|x\|$ pour tout x dans E.)

(3) Pour tout x dans C, comme C est ouvert, si ϵ est assez petit, alors $(1+\epsilon)x \in C$ donc $\|x\|_C \leq \frac{1}{1+\epsilon} < 1$. Réciproquement, si $x \in E$ et $\|x\| < 1$, alors il exist $t \in]0,1[$, tel que $\frac{1}{t}x \in C$, et donc par convexité $x = t\left(\frac{1}{t}x\right) + (1-t)\,0 \in C$.

L'assertion (5) est évidente, par définition de la jauge d'un convexe.

(6) Notons $C = \cap_{\alpha\in A} C_\alpha$,qui est un voisinage convexe de 0. Par (5), nous avons $\sup_{\alpha\in A} \|\cdot\|_{C_\alpha} \leq \|.\|_C$. Réciproquement, soient x dans E, $\epsilon > 0$ et $t = sup_{\alpha\in A} \|x\|_{C_\alpha} + \epsilon$.

Alors pour tout $\alpha \in A$, nous avons $t > \|x\|_{C_\alpha}$, donc $\frac{1}{t}x \in C_\alpha$ Par conséquent, $\frac{1}{t}x \in C$, et $\|x\|_C \leq t = \sup_{\alpha\in A} \|x\|_{C_\alpha} + \epsilon$. Le résultat en découle en faisant tendre vers 0.

L'assertion (7) est évidente, par définition de la jauge d'un convexe. ■

Théorème 2.2.2 *Un espace vectoriel topologique réel ou complexe est localement convexe si et seulement si sa topologie est définie par une famille de semi-normes.*

Un espace vectoriel topologique réel ou complexe admet un système fondamental dénombrable de voisinages convexes de 0 si et seulement si sa topologie est définie par une famille dénombrable de semi-normes.

Preuve. Si $(\|.\|_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une famille de semi-normes sur un espace vectoriel réel ou complexe E, alors l'ensemble des parties

$$\{x \in E : \forall\alpha \in F, \|x\|_\alpha < \epsilon\}$$

où F est une partie finie de A et $\epsilon > 0$, est un système fondamental de voisinages (dénombrable si la famille de semi-normes l'est et en ne prenant que les ϵ rationnels) de 0 pour la topologie définie par cette famille de semi-normes. Comme toute semi-norme $\|.\|$ vérifie :

$$\|tx + (1-t)\,y\| \leq t\,\|x\| + (1-t)\,\|y\| \text{ pour tout } t \in [0,1]$$

ces parties sont convexes, et E muni de la topologie définie par $(\|.\|_\alpha)_{\alpha\in A}$, est localement convexe.

Réciproquement, soit E un espace vectoriel topologique localement convexe réel. Si C est un voisinage ouvert convexe de 0, alors $C \cap (-C)$ est encore un voisinage ouvert convexe de 0, qui est symétrique et contenu dans C. L'ensemble des voisinages ouverts convexes symétriques de 0 est donc un système fondamental de voisinages de 0 dans E.

Soit V un système fondamental de voisinages ouverts convexes symétriques de 0.

Montrons que la topologie définie par la famille de semi-normes $(\|.\|_C)_{C\in V}$ (qui est dénombrable si V l'est) coïncide avec la topologie originelle de E. Ces deux topologies faisant de E un espace vectoriel topologique, il suffit de montrer que tout voisinage de 0 pour l'une est un voisinage de 0 pour l'autre, et réciproquement.

Pour tout $C \in V$, on a $\{C = x \in E : \|x\|_C < 1\}$, donc tout voisinage de 0 pour la topologie originelle est un voisinage de 0 pour la topologie définie par $(\|.\|_C)_{C\in V}$.

Réciproquement, pour tout $C \in V$ et tout $\epsilon > 0$, nous avons

$$\{x \in E : \|x\|_C < \epsilon\} = \frac{1}{\epsilon}C$$

et les homothéties sont des homéomorphismes fixant le vecteur nul. Donc tout voisinage de 0 pour la topologie définie par $(\|.\|_C)_{C\in V}$ est un voisinage de 0 pour la topologie originelle.

Supposons finalement que E soit un espace vectoriel topologique localement convexe complexe. La preuve ci-dessous utilise des notions de compacité et d'uniforme continuité. Le lecteur se convaincra facilement qu'il n'y a pas de boucle logique!

Soit V un système fondamental de voisinages ouverts convexes de 0. Notons $S_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda = 1|\}$.

Pour tous $C \in V$ et $x \in E$, définissons$\|x\|'_C = \sup_{\lambda\in S_1} \|\lambda x\|_C$.

L'application $\lambda \longmapsto \|\lambda x\|_C$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ continue, par composition d'applications continues. Par compacité de S_1, la borne supérieure définissant $\|x\|'_C$ est atteinte, et en particulier, $\|x\|'_C$ est fini. Il est alors immédiat, par construction, que l'application :

$$\|.\|'_C : E \to [0, +\infty[$$

est une semi-norme.

Montrons que la topologie définie par la famille de semi-normes $\left(\|.\|'_C\right)_{C\in V}$ (qui est dénombrable si V l'est) coïncide avec la topologie originelle de E.

Pour tout x dans E, si $\|x\|'_C < 1$, alors $\|x\|_C < 1$, donc $x \in C$. Donc tout voisinage de 0 pour la topologie originelle contient un voisinage de 0 pour la topologie définie par $\left(\|.\|'_C\right)_{C\in V}$.

Réciproquement, comme l'application de $S_1 \times E \to E$ définie par $(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$ est continue et puisque S_1 est compact, l'application $x \longmapsto \lambda x$ est continue uniformément en λ. Donc pour tout $C \in V$, et tout $\epsilon > 0$, il existe $C\prime \in V$ tel que pour tout $x \in C'$ et pour tout $\lambda \in S_1$, nous avons $\lambda x \in \frac{2}{\epsilon}C$, c'est-à-dire $\|\lambda x\|_C < \frac{\epsilon}{2}$. Ceci implique que $C\prime$ est contenu dans

$$\left\{x \in E : \|x\|'_C < \epsilon\right\}$$

Donc (en passant aux intersections finies), tout voisinage de 0 pour la topologie définie par $\left(\|.\|'_C\right)_{C\in V}$ contient un voisinage de 0 pour la topologie originelle.

Exemple 2.2.3 *Les exemples suivants sont des cas particuliers d'espaces vectoriels réels ou complexes, munis de topologies définies par une famille de semi-normes. Les espaces vectoriels normés réels ou complexes sont localement convexes. L'espace de Schwartz $L(\mathbb{R}^n)$ des fonctions lisses à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^n$ est localement convexe. Pour tout ouvert Ω non vide de $\mathbb{R}^r$, où $r \in \mathbb{N}$, pour tout compact non vide K dans Ω, les espaces vectoriels réels ou complexes $D(\Omega)$ et $D_K(\Omega)$ sont localement convexes.*

■

Si E est un espace vectoriel topologique localement convexe, et $f : D(\Omega) \rightarrow E$ est une application linéaire, alors f est continue pour la topologie de Schwartz sur $D(\Omega)$ si et seulement si, pour tout compact non vide K de Ω, la restriction $f_{D_K(\Omega)} : D_K(\Omega) \rightarrow E$ est continue pour la topologie de $D_K(\Omega)$ (définie par la famille de semi-normes $(\|.\|_m)_{m\in\mathbb{R}^r}$).

2.3 Continuté des applications linéaires et multilinéaires

Soit $\Bbbk$ un corps muni d'une valeur absolue non triviale $|.|$. Soient E, F deux espaces vectoriels normés sur $\Bbbk$. Pour toute application linéaire $f : E \rightarrow F$, on pose

$$\|f\| = \sup_{x\in E-\{0\}} \frac{\|f(x)\|}{x}$$

Lorsque $\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\Bbbk = \mathbb{C}$, on a aussi $\|f\| = \sup_{x\in E,\|x\|=1} \|f(x)\| = \sup_{x\in E,\|x\|\leq 1} \|f(x)\|$.

Si $F = \Bbbk = \mathbb{R}$, c'est-à-dire lorsque f est une forme linéaire réelle, on a aussi, par invariance de la sphère unité et de la boule unité par passage à l'opposé

$$\|f\| = \sup_{x\in E,\|x\|=1} f(x) = \sup_{x\in E,\|x\|\leq 1} f(x)$$

Proposition 2.3.1 *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) f est continue en 0 ;

(2) f est continue ;

(3) $\|f\|$est finie.

C'est à cause de l'équivalence entre (1) et (3) que les termes « application linéaire bornée » et « application linéaire continue » sont parfois employés comme synomymes.

La preuve a déjà été vue dans le cas $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{k} = \mathbb{C}$. L'équivalence des deux premières assertions est une propriété des espaces vectoriels topologiques.

Preuve. Supposons que (3) soit vérifié, et montrons (2). Nous pouvons supposer que $\|f\| \neq 0$, car sinon f est l'application nulle, qui est continue. Si $\|x - x_0\| < \frac{\epsilon}{\|f\|}$, alors $\|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$, donc (2) est vérifié. Il est immédiat que (2) implique (1).

Montrons que (1) implique (3). Comme la valeur absolue de $\mathbb{k}$ est non triviale (et en considérant les inverses), il existe t dans $\mathbb{k}$, tel que $|t| > 1$. Soit $\epsilon > 0$, tel que si $\|x\| \leq \epsilon$, alors $\|f(x)\| \leq 1$. Pour tout y dans E, soit $n \in \mathbb{Z}$, tel que $\epsilon |t|^{n-1} \leq \|y\| \leq \epsilon |t|^n$. Alors

$$\frac{\|f(y)\|}{\|y\|} = \frac{\|f(t^{-n}y)\|}{\|t^{-n}y\|} \leq \frac{|t|}{\epsilon}$$

■

(i) L'application $f \longmapsto \|f\|$ est une norme sur $L(E, F)$, appelée norme d'opérateur.

(ii) Si $f \in L(E, F)$et $g \in L(F, G)$, alors $\|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|$.

(iii) Si $E \neq \{0\}$, alors $\|id\| = 1$.

En particulier, si V est un espace vectoriel normé, alors l'espace vectoriel $End(V)$ des endomorphismes continus de V est un espace vectoriel normé pour la norme définie ci-dessus.

Si $f \in L(E, E)$, alors

$$\|f^n\| \leq \|f\|^n$$

Pour tout f dans $L(E, F)$, la composition à droite par f, c'est-à-dire l'application linéaire de $L(F, G)$ dans $L(E, G)$ définie par

$$g \longmapsto g \circ f$$

est continue, de norme inférieure ou égale à $\|f\|$. De même, pour tout g dans $L(F, G)$, la composition à gauche par g, c'est-à-dire l'application linéaire de $L(E, F)$ dans $L(E, G)$ définie par

$$f \longmapsto g \circ f$$

est continue, de norme inférieure ou égale à $\|g\|$.

Si E est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{k}$, alors l'application de E dans $L(\mathbb{k}, E)$ définie par $x \longmapsto \{\varphi_x : t \longmapsto tx\}$ est un isomorphisme linéaire isométrique (la norme d'opérateur de φ_x est égale à la norme de x).

Soient $E_1, ..., E_n, F, G$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{k}$. Comme ci-dessus, une application multilinéaire u de $E_1 \times ... \times E_n$ dans F est continue si et seulement si elle est continue en $(0, ..., 0)$, et si et seulement s'il existe $c \geq 0$, tel que $\forall x_1 \in E_1, ..., \forall x_n \in E_n, \|u(x_1, ..., x_n)\| \leq c \|x_1\| ... \|x_n\|$.

Notons $L(E_1, ..., E_n; F)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{k}$ des applications multilinéaires continues de $E_1 \times ... \times E_n$dans F.

Muni de la norme

$$\|u\| = \sup_{x_1 \in E_1 - \{0\}, ..., x_n \in E_n - \{0\}} \frac{\|u(x_1, ..., x_n)\|}{\|x_1\| ... \|x_n\|}$$

c'est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{k}$. Lorsque $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, on a aussi $\|u\| = \sup_{\|x_1\|=1, ..., \|x_n\|=1} \|u(x_1, ..., x_n)\| = \sup_{\|x_1\| \leq 1, ..., \|x_n\| \leq 1} \|u(x_1, ..., x_n)\|$.

Si $F = \mathbb{k} = \mathbb{R}$, c'est-à-dire lorsque u est une forme multilinéaire réelle, on a aussi,

par invariance de la sphère unité et de la boule unité par passage à l'opposé, $\|u\| = \sup_{\|x_1\|=1, ..., \|x_n\|=1} \|u(x_1, ..., x_n)\| = \sup_{\|x_1\| \leq 1, ..., \|x_n\| \leq 1} \|u(x_1, ..., x_n)\|$.

Si $f \in L(E_1, ..., E_n; F)$ et si $g \in L(F, G)$, alors $g \circ f \in L(E_1, ..., E_n; G)$ et $\|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|$.

En particulier, l'application de $L(E_1, ..., E_n; F) \times L(F, G)$ dans $L(E_1, ..., E_n; G)$ définie par :

$$(f, g) \longmapsto g \circ f$$

est bilinéaire, continue, de norme inférieure ou égale à 1.

Proposition 2.3.2 *Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés sur $\mathbb{k}$. Alors l'application de $L(E, F; G)$ dans $L(E, L(F, G))$ définie par*

$$u \longmapsto \{x \longmapsto (u_x : y \longmapsto u(x, y))\}$$

est un isomorphisme linéaire qui est une isométrie pour les normes.

Par récurrence, il existe donc une isométrie linéaire entre les espaces vectoriels normés $L(E_1, ..., E_n; F)$ et $L(E_1, L(E_2, ..., L(E_n, F)) ...)$.

Preuve. Comme

$$\|u_x(y)\| = \|u(x, y)\| \leq \|u\| \|x\| \|y\|$$

l'application linéaire $u_x : F \to G$ est continue, et $\|u_x\| \leq \|u\| \|x\|$. Donc l'application linéaire $x \longmapsto u_x$ est continue, de norme au plus $\|u\|$. Comme

$$\sup_{x \in E-\{0\}} \frac{\|u_x\|}{\|x\|} = \sup_{x \in E-\{0\}} \sup_{y \in F-\{0\}} \frac{\|u_x(y)\|}{\|x\| \|y\|} = \|u\|$$

l'application considérée est bien une isométrie. Enfin, montrons qu'elle est surjective. Si $v \in L(E, L(F, G))$, alors l'application :

$$u : (x, y) \longmapsto v(x)(y)$$

est clairement bilinéaire, et comme

$$\|v(x)(y)\| \leq \|v(x)\| \|y\|$$

l'application u est continue, et $v(x) = u_x$, ce qui démontre le résultat.

Nous terminons ce paragraphe par deux constructions d'espaces vectoriels topologiques, qui sont très importantes en analyse. ■

2.4 Topologie faible

La topologie faible d'un espace vectoriel topologique E est une topologie définie sur E au moyen de son dual topologique $E\prime$. On définit également sur $E\prime$ une toplogie dite faible-* au moyen de E.

2.4.1 topologie affaiblie d'un espace normé

Définition 2.4.1 *Soit E un espace vectoriel normé (réel ou complexe), ou plus généralement un espace vectoriel topologique $E\prime$ son dual topologique, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires continues sur E. On appele alors topologie faible sur E, notée $\sigma(E, E')$, la topologie initiale associée à la famille de toutes les formes linéaires continues sur E, c'est-à-dire la topologie la moins fine gardant continus les éléments de $E\prime$. Elle est engendrée par les ouverts de la forme $\varphi^{-1}(U)$, où φ est un élément de $E\prime$ et Uun ouvert du corps des scalaires.*

Cette topologie $\sigma(E, E')$ est définie par la famille de semi-normes

$$\|x\|_\varphi = |\langle \varphi, x \rangle|$$

où φ désigne un élément quelconque de $E\prime$. Elle munit donc E d'une structure d'espace localement convexe. Elle est séparée si et seulement si le dual $E\prime$ de E sépare les points (en) de E (i.e. $\forall x \neq 0, \exists \varphi(x) \neq 0$), ce qui est le cas d'après le théorème de Hahn-Banach dès que E est un espace vectoriel normé ou plus généralement, un espace localement convexe séparé.

En particulier, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élément de E converge faiblement vers un élément u de E lorsque :$\forall \varphi \in E', lim_{n\to+\infty} \langle \varphi, u_n \rangle = \langle \varphi, u \rangle$.

Par opposition, la topologie originelle de E s'appelle topologie forte.

Exemple 2.4.2 *Soit E l'espace $c_0(\mathbb{R})$ des suites réelles $x = (x_n)$ de limite nulle, muni de la norme $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n|, \ n \in \mathbb{N}\}$. Un élément φ de $E\prime$ peut être représenté par une suite réelle (φ_n) telle que la série $\sum \varphi_n$ soit absolument convergente . On a alors*

$$\langle \varphi, x \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n x_n$$

Pour n entier naturel, soit e_n l'élément de E consistant en une suite de réels tous nuls sauf le nième terme qui vaut 1. Alors $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constitue une suite de E qui converge faiblement vers 0 mais pas fortement.

Proposition 2.4.3 *(élémentaires)*

- La convergence forte dans E implique la convergence faible. Par exemple, si E est normé :

$$|\langle \varphi, u_n \rangle - \langle \varphi, u \rangle| \leq \|\varphi\|_{E'} \|u_n - u\|_E$$

- Plus précisément, la topologie forte sur un espace normé de dimension infinie est toujours strictement plus fine que la faible : par exemple, l'adhérence faible de la sphère unité est la boule unité, et toute ouverte ou fermée est d'intérieur faible vide.

Cependant, dans czrtains espaces comme l'espace, la convergence faible d'une suite équivaut à sa convergence forte : c'est la propriété de Schur.

- Le dual de E pour la topologie faible est le meme que le dual de E pour la topologie forte.

- Le théorème de Hahn-Banach est utilisé pour montrer que les sous-espaces vectoriels fermés de E sont les meme pour les deux topologie. Il en est de meme plus généralement des parties fermées convexes.

- Dans un espace vectoriel normé, toute suite faiblement convergente (u_n) est bornée, et la norme de sa limite faible est inférieure ou égale à la limite inférieure des normes des u_n. Ce résultat utilise le principe de la borne uniforme et le théorème de Hahn-Banach .

- La topologie faible sur E n'est jamais métrisable ni meme à bases dénombrables de voisinages (sauf bien sùr si E est de dimension finie).

Preuve. Pour $E = l^2$ par exemple, elle n'est meme pas séquentielle. ■

2.4.2 Continuité des opérateurs et topologie faible

Théorème 2.4.4 *Soit E et F des espaces localement convexes séparés et T un opérateur linéaire fortement continu de E dans F. Alors T reste continulorsque l'on munit E et F de leur topologie faible.*

La réciproque est fausse en général (un opérateur peut être continu pour les topologies faibles de E et F sans être continu pour les topologies fortes) mais vraie si Eet F sont des espaces de Fréchet (on peut le démontrer à l'aide du théorème du graphe fermé).

2.5 topologie faible-*du dual

Définition 2.5.1 *Il existe sur le dual $E\prime$ au moins trois topologies.*

- La topologie forte, définie par la famille de semi-normes

$$\|f\|_B = \sup\{|\langle\varphi, x\rangle|\,,\ x \in B\}$$

où B désigne une partie bornée quelconque de E. C'est la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de E. C'est de cette topologie que l'on munit $E\prime$ pour définir le bidual (topologique) E''de E comme le dual topologique de $E\prime$. Lorsque l'espace E est normé, $E\prime$ l'est aussi de façon naturelle et sa topologie forte est simplement celle induite par sa norme.

- La topologie faible $\sigma(E', E'')$.

- La topologie faible -*, notée $\sigma(E', E)$, définie par la famille de semi-normes

$$\|\varphi\|_x = |\langle\varphi, x\rangle|$$

où x désigne un élément quelconque de E. (C'est juste la topologie de la convergence simple, autrement dit : la restriction à $E\prime$ de la topologie produit sur $\mathbb{C}^E$). Comme E s'identifie à un sous-espace vectoriel de son bidual E'', cette topologie est a priori encore plus faible que la topologie faible.

Les trois topologies, forte faible et faible-* sont en général distinctes. Dans le cas d'un espace de Banach réflexif (identifiable à son bidual), les topologies faible et faible-* sont égales.

Exemple 2.5.2 *Soit E l'espace $c_0(\mathbb{R})$ des suites réelles $x = (x_n)$ de limite nulle, muni de la norme :*

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_n|\,,\ n \in \mathbb{N}\}$$

Son dual $E\prime$ est l'espace $l^1(\mathbb{R})$ des suites $\varphi = (\varphi_n)$ telle que la série $\sum \varphi_n$ soit absolument convergente, muni de la norme $\|\varphi\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |\varphi_n|$.

Le bidual E'', c'est-à-dire le dual de $l^1(\mathbb{R})$, est l'espace $l^\infty(\mathbb{R})$ des suites réelles bornées $u = (u_n)$ muni de la norme

$$\|u\|_\infty = \sup\{|u_n|, n \in \mathbb{N}\}$$

On a

$$\langle \varphi, x \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n x_n et \langle u, \varphi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n u_n$$

Considérons dans $E\prime$ l'élément e_n dont les n-premiers termes valent $1/n$ dont tous les autres sont nuls. Ces éléments forment une suite dans $E\prime$ qui ne converge pas vers 0 pour la topologie forte puisque $\|e_n\|_1 = l$. Elle ne converge pas non plus vers 0 pour la topologie faible de E', puisque, si l'on prend l'élément u de E''égale à la suite constante 1, alots $\langle u, e_n \rangle = 1$.

Mais elle converge vers 0 pour la topologie faible-* puisque, si l'on prend un élément x quelconque de E(donc une suite de limite nulle), alors bien vers 0 d'après le théorème de Cesàro.

- Le dual topologique de $E\prime$ muni de la topologie faible -* n'est autre que Elui-meme.

- Plus généralement, si F est un autre espace, la transposée établit une bijection entre l'espace vectoriel des application faiblement continues de F dans E et l'espace vectoriel des application faiblement-* continues de $E\prime$ dans $F\prime$. (Le point précédent correspond au cas $F = \mathbb{R}$).

Théorème 2.5.3 *(de Banach-Alaoglu)*

Le théorème suivant , dont une généralisation aux espaces vectoriels topologiques est le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki, permet parfois de pallier l'absence de compacité pour la topologie forte dans les espaces de Banach de dimension infinie. Il est la principale justification de la définition de la topologie faible-* :

Théorème 2.5.4 *Soit E un espace normé. Alors la boule unité fermée de $E\prime$ est compacte pour la la topologie faible-*.*

En particulier, si E est séparable, alors la boule unité du dual est séquentiellement compacte pour la topologie faible-* . En d'autre termes, toute suite bornée de $E\prime$ admet une sous-suite convergente pour la topologie faible-* .

Ce théorème permet d'en déduire une caractérisation des espaces normés réflexifs (égaux à leur biduaux).Un tel espace est nécessairement un espace de Banach.

Théorème 2.5.5 *Un espace normé est réflexif si et seulement si sa boule unité fermée est compacte pour la topologie faible, à extraction prés, une suite bornée d'un espace normé réflexif converge toujours faiblement (mais pas forcément fortement). Il existe de nombreuses méthodes récentes, développées notamment pour leurs applications dans le cadre de la théorie des equations aux dérivées partielles pour étudier le défaut de compacité d'une telle suite, en particulier dans les espaces de Hilbert (principe de concentration compacité de Pierre-Louis Lions, de mesure de défaut micro-locale de Patrick Gérard et Luc Tartar).*

2.5.1 Convergence faible et espaces de Hilbert

Par le théorème de représentation de Riesz la définition de la convergence faible d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur un espace de Hilbert H s'ecrit :

$$\forall v \in H, \lim_{n\to\infty} \langle u_n, v\rangle = \langle u, v\rangle$$

Ici $\langle u, v\rangle$ désigne le produit scalaire sur H.

L'espace H est réflexif donc d'après le théorème de Banach-Alaoglu, un borné pour la topologie forte qui est fermé pour la topologie faible est compact pour la topologie faible.

Ainsi, dans un espace de Hilbert, toute suite bornée admet une sous-suite faiblement convergente.

Mentionnons cette caratérisation élémentaire mais intéressante de la convergence forte dans un espace de Hilbert.

2.5.2 Propriété de Radon-Riesz (en) pour les espaces de Hilbert

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élément d'un espace de Hilbert H, convergeant faiblement vers un élément u de H. Alors cette convergence est forte si (et seulement si) :

(1)

$$lim_{n\to\infty} \|u_n\|_H = \|u\|$$

En effet, si (1) est vrai alors :

$$\|u_n - u\|^2 = \|u_n\|^2 + \|u\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle u_n, u\rangle \to \|u\|^2 + \|u\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle u, u\rangle = 0$$

Chapitre 3

Suites faiblement convergentes d'éléments

3.1 Suites faiblement convergentes d'éléments

Définition 3.1.1 *conditions pour la convergence faible des suites d'éléments.*

Un suite$\{|_{X_N}|\}$ d'éléments de E s'appelle faiblement convergente vers l'élément $x \subset E$, lorsque'on a

$$lim_{n\longrightarrow\infty} f(x) = f(x)$$

pour tout $f \subset \overline{E}$ c. à d. pour toute fonctionnelle linéaire f définie dans l'espace donné E.

Pour que la suite $\{x_n\}$ converge faiblement vers x, il faut et il suffit d'avoire simultanément

(1) la suite$\{|x_n|\}$ bornée et

(2)

$$lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x)$$

pour tout $\varphi \subset \Delta$ où Δ est un ensemble dense dans $\overline{E}$.

Preuve. Pour en démontrer la suffisance, considérons une fonctionnelle quelconque $f \subset \overline{E}$. en vertu de (2), il existe alors pour tout nombre $\varepsilon > 0$ une fonctionnelle $\varphi \subset \Delta$, telle que

$$|\varphi - f| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

où M désigne la borne supérieure des nombres$|x_n|$ et$|x|$, qui existe d'aprés(1). par conséquent :

$$|f(x - x_n)| \leq |\varphi(x - x_n)| + \frac{\varepsilon}{2M}|x - x_n| \leq |\varphi(x - x_n)| + \varepsilon$$

comme

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x)$$

et ε est arbitraire, on en conclut que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

c.à d. que la suite$\{x_n\}$ converge faiblement vers x. ■

Remarque 3.1.2 *il suffit d'admettre de Δ que les combinaisons linéaires formées de fonctionnelles appartenant à l'ensemble Δ constituent un ensemble dense dans $\overline{E}$.*

Théorème 3.1.3 *Si la suite$\{x_n\}$ converge faiblement vers x, il existe une suite$\{g_n\}$ de combinaisons linéaires d'éléments de$\{x_n\}$, telle que*

$$\lim_{n\to\infty} g_n = x$$

3.2 Convergence faible des suites d'éléments dans les espaces(C), $\left(L^{(P)}\right)$, (c) et $\left(l^{(P)}\right)$

Envisageons à présent la convergence faible des suites d'éléments dans les espaces particuliers les plus importants.

Espace(C). Etant donnée la forme générale des fonctionnelles linéaies définies dans(C), pour qu'une suite de fonctions continues$\{x_n(t)\}$ converge faiblement vers la fonction continue $X(t)$, il faut et il suffit que l'on ait

(3) $\lim \int_0^1 X_n(t)\,dg(t) = \int_0^1 X(t)\,dg(t)$ pour tout fonction $g(t)$ à variation bornée.

Il en résulte que pour la convergence faible d'une suite de fonctions$\{x_n(t)\}$

où

$$x_n(t) \subset (C)$$

vers la fonction $x(t) \subset (C)$, il faut et il suffit d'avoir simultanément,

(4) les fonctions $x_n(t)$ où $n = 1, 2, ...$ bornées dans leur ensemble,

(5) $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$ pour tout $t \subset [0,1]$.

En effet, la nécessité de (4) résulte du th.1,et celle de (5) est une conséquence du fait que, t_0 désignant un point arbitraire de$[0,1]$, la fonctionnelle $f(x) = x(t_0)$est linéaire, d'où $\lim_{n\to\infty} x_n(t_0) = x(t_0)$ et par coséquent $\lim_{n\to\infty} x_n(t_0) = x(t_0)$.

La suffisance consiste en ce que les conditions (4) et (5) entraînent l'égalité (3) pour tout fonction $g(t)$ à variation bornée

Ceci établi, le théorème suivant :

Si une suite de fontions cotinues$\{x_n(t)\}$, où $0 \leq t \leq 1$ est bornée et converge partout vers une fonction continue $x(t)$, il existe une suite de polynômes formés de termes de la suite $\{x_n(t)\}$ et qui converge vers $x(t)$ uniformément.

Espaces$\left(L^{(p)}\right)$ où $p > 1$. la suite $\{x_n(t)\}$où $x_n(t) \subset \left(L^{(p)}\right)$ converge faiblement vers $x(t) \subset \left(L^{(p)}\right)$, lorsqu'on a $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 X_n(t)\,\alpha(t)\,dt = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt$ pour tout fonction $\alpha(t) \subset \left(L^{\left(\frac{\rho}{\rho-1}\right)}\right)$, il en résulte en vertu de la remarque, le théorème suivant : pour la convergence faible d'une suite de fonctions$\{x_n(t)\}$ où $x_n(t) \subset \left(L^{(p)}\right)$ vers la fonction $x(t) \subset \left(L^{(p)}\right)$, il faut et il suffit d'avoir à la fois

(6) la suite$\left\{\int_0^1 |x_n(t)|^p\,dt\right\}$ bornée et

(7) $\lim_{n\to\infty} \int_0^u x_n(t)\,dt = \int_0^u x(t)\,dt$ pour $(0 \leq u \leq 1^1)$.

Espace (L). la suite$\{x_n(t)\}$ converge faiblement vers $x_0(t)$ où $x_n \subset (L)$, $x_0 \subset (L)$ et $0 \leq t \leq 1$, lorsqu'on a

(8) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n(t)\,\alpha(t)\,dt = \int_0^1 x_0(t)\,\alpha(t)\,dt$ pour toute fonction bornée $\alpha(t)$.

Il en résulte le théorème suivant : pour la convergence faible de la suite de fonctions $\{x_n\}$ appartenant à (L) vers la fonction $x(t) \subset (L)$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies simultanément :

(9) la suite$\left\{\int_0^1 |x_n(t)|\,dt\right\}$ est bornée.

(10) il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un nombre $\eta > 0$ tel que l'on ait $\left|\int_H x_n(t)\,dt\right| \leq \varepsilon$ où $n = 1, 2, ...$ pour tout ensemble H de mesure $< \eta$ de valeurs de t [9].

(11)

$$lim_{n\to\infty} \int_0^u x_n(t)\,dt = \int_0^H x_0(t)\,dt$$

pour $0 \leq u \leq 1$. en effet, (8) équivaut à l'égalité :

$$lim_{n\to\infty} \int_0^1 [x_n(t) - x_0(t)]\,\alpha(t)\,dt = 0$$

pour $\alpha(t) \subset (M)$; le théorème en question s'en déduit facilement à l'aide du théorème de Lebesgue.

Espace (c), pour qu'une suite$\{x_n\}$ où $x_n = \{\xi_i^n\} \subset (c)$ converge faiblement vers l'élément $x = \{\xi_i\} \subset (c)$, il faut et il suffit d'avoir à la fois :

(12) la suite $\{|x_n|\}$ bornée,

(13)

$$lim_{n\to\infty}\xi_i^n = \xi_i \text{et } lim_{n\to\infty}\left(\lim_{i\to\infty} \xi_i^n\right) = \lim_{i\to\infty} \xi_i$$

La démonstration est immédiate, étant donné que toute fonctionnelle liéaire dans (c) est de la forme $f(x) = C \lim_{i\to\infty} \xi_i + \sum_{i=1}^{\infty} C_i\ \xi_i$ où $x = \{\xi_i\}$ et $|f| = |C| + \sum_{i=1}^{\infty} |C_i|$ et en tenant compte du fait que, si l'on pose

$$f_i(x) = \{^{\lim_{i\to\infty}\xi_i \quad \text{pour } i=0}_{\xi_i \text{ pour } i\geq 1}$$

Les combinaisons linéaires formées de termes de la suite $\{f_i(x)\}$ où $i = 0, 1, 2, ...$ constituent un ensemble dense dans celui de toutes les fonctionnelles linéaires définies dans (c).

Espace $\left(l^{(p)}\right)$ où $p > 1$. pour qu'une suite $\{x_n\}$ où $x_n = \left\{\xi_i^{(n)}\right\} \subset \left(l^{(p)}\right)$ converge faiblement vers $x = \{\xi_i\} \subset \left(l^{(p)}\right)$, il faut et il suffit que l'on ait simultanément

(14) la suite des nombres :

$$\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left|\xi_i^{(n)}\right|^p\right\}$$

bornée et (15) $\lim_{n\to\infty}\xi_i^{(n)} = \xi_i$ pour tout $i = 1, 2, ...$

Espace (l). pour qu'une suite $\{x_n\}$ où $x_n = \left\{\xi_i^{(n)}\right\} \subset (l)$ converge faiblement vers $x = \{\xi_i\} \subset (l)$, il faut et il suffit que l'on ait :

$$lim_{n\to\infty}|x_n - x| = 0$$

c'est à dire,

$$lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left|\xi_i^{(n)} - \xi_i\right| = 0$$

En conséquence :

Dans l'espace (l) la convergence faible est équivalente à la convergence suivant la norme.

Preuve. Admettons que $\{x_n\}$ converge faiblement vers x.

En posant $\eta_i^{(n)} = \xi_i^{(n)} - \xi_i$, la suite $\{y_n\}$ où $y_n = \left\{\eta_i^{(n)}\right\}$ converge donc faiblement vers 0 avec $n \to \infty$, on a par conséquent pour toute suite bornée de nombres $\{c_i\}$

(16)

$$lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}c_i\eta_i^{(n)} = 0$$

Soit

$$c_i = \{^{1 \quad \text{pour} \quad j=i}_{0 \quad \text{pour} \quad j\neq i}$$

d'où (17)

$$\lim_{n\to\infty}\eta_j^{(n)} = 0 \text{ pour tout } \quad j = 1, 2, ...$$

Il sagit de montrer que l'on a

(18)

$$lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left|\eta_i^{(n)}\right| = \lim_{n\to\infty}|y_n| = 0$$

Supposons par contre que :

(19)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{i=1}^{\infty}\left|\eta_i^{(n)}\right| > \varepsilon > 0$$

Définissons par induction deux suites croissantes de nombres naturels $\{n_k\}$ et $\{r_k\}$ comme il suit :

1^0 n_1 est le plus petit n tel que

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\eta_i^{(n)}\right| > \varepsilon$$

2^0 r_1 est le plus petit r tel que

$$\sum_{i=1}^{r}\left|\eta_i^{(n_1)}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=r+1}^{\infty}\left|\eta_i^{(n_1)}\right| < \frac{\varepsilon}{5}$$

et

$$\sum_{i=r+1}^{\infty}\left|\eta_i^{(n_1)}\right| < \frac{\varepsilon}{5}$$

3^0 n_k est le plus petit nombre naturel dépassant n_{k-1} et tel que $\sum_{i=1}^{\infty}\left|\eta_i^{(n_k)}\right| > \varepsilon$ et $\sum_{i=1}^{r_{k-1}}\left|\eta_i^{(n_k)}\right| < \frac{\varepsilon}{5}$,

4^0 r_k est le plus petit nombre naturel dépassant r_{k-1} et tel que, $\sum_{i=r_{k-1}+1}^{r_k}\left|\eta_i^{(n_k)}\right| > \frac{\varepsilon}{2}$ et $\sum_{i=r_k+1}^{\infty}|\eta_i^{n_k}| < \frac{\varepsilon}{5}$.

Les suites $\{n_k\}$ et $\{r_k\}$ ainsi définies existent en vertu de (17) et (19). Or, soit maintenant

(20)

$$c_i = \{^{sign\eta_i^{(n_1)}\text{pour } 1\leq i\leq r_1}_{sign\eta_i^{(n_{k+1})}\text{pour } r_k\leq i\leq r_{k+1}}$$

On a donc $|c_i| = 1$ pour tout $i = 1, 2, ...,$ d'où selon (16)

(21)

$$lim = \sum_{i=1}^{\infty}c_i\eta_i^{(n_k)}0$$

Mais, d'aprés (20), on a $\left|\sum_{i=1}^{\infty}c_i\eta_i^{(n_k)}\right| \geq \sum_{i=r_{k-1}+1}^{r_k}\left|\eta_i^{(n_k)}\right| - \sum_{i=1}^{r_{k-1}}\left|\eta_i^{(n_k)}\right| - \sum_{i=r_k+1}^{\infty}\eta_i^{(n_k)}$, d'où, en vertu de 3^0 et 4^0, $\left|\sum_{i=1}^{\infty} c_i \eta_i^{(n_k)}\right| \geq \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{5} - \frac{\varepsilon}{5} = \frac{\varepsilon}{10}$, pour tout $k = 1, 2, ...$, ce qui est incompatible avec (21) on a donc l'égalité (18), c.q.f.d. ■

3.2.1 Relation entre la convergence faible et forte dans les espaces (L) et pour p>1

Au sujet de la relation entre la convergence faible d'éléments et celle selon la norme on peut énoncer pour les espaces$(L^{(p)})$ et $\left(l^{(p)}\right)$ où $p > 1$ les théorème plus généraux suivants :

Si la suite $\{x_n(t)\}$, où $x_n(t) \subset \left(L^{(p)}\right)$ et $p > 1$, converge faiblement vers $x(t) \subset \left(L^{(p)}\right)$ et si en outre

$$lim_{n\to\infty} \int_0^1 |x_n(t)|^p \, dt = \int_0^1 |x(t)|^p \, dt$$

alors la suite $\{x_n(t)\}$ converge vers $x(t)$ selon la norme, c.à d. que l'on a

$$lim_{n\to\infty} \int_0^1 |x_n(t) - x(t)|^p \, dt = 0 \, [10]$$

Nous allons démontrer le théorème analogue pour les espaces $\left(l^{(p)}\right)$ où $p > 1$.

Si la suite $\{x_n\}$, où $x_n = \left\{\xi_i^{(n)}\right\} \subset \left(l^{(p)}\right)$ et $p \geq 0$, converge faiblement vers $x = \{\xi_i\} \subset \left(l^{(p)}\right)$ et si l'on a

$$lim_{n\to\infty} |x_n| = |x|$$

alors (22)

$$lim_{n\to\infty} |x_n - x| = 0$$

Preuve. on a d'après (15),

(23)

$$lim_{n\to\infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i$$

et

(24)

$$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} \left|\xi_i^{(n)} - \xi_i\right|^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{N-1} \left|\xi_i^{(n)} - \xi_i\right|^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=N}^{\infty} \left|\xi_i^{(n)} - \xi_i\right|^p}$$

où $\mathbb{N}$ est un nombre naturel arbitraire. Or,

$$\sqrt[p]{\sum_{i=N}^{\infty} \left|\xi_i^{(n)} - \xi_i\right|^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{i=N}^{\infty} \left|\xi_i^{(n)}\right|^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=N}^{\infty} |\xi_i|^p}$$

d'où par l'hypothèse et d'après (23) et (24)

$$\overline{lim}_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left|\xi_i^{(n)}-\xi_i\right|^p \leq \left[2\sqrt[p]{\sum_{i=N}^{\infty}|\xi_i|^p}\right]^p = 2^p\sum_{i=N}^{\infty}|\xi_i|^p$$

comme $\lim_{N\to\infty}\sum_{i=N}^{\infty}|\xi_i|^p = 0$ et N est arbitraire, on en tire l'égalité (22). ■

3.2.2 Espaces faiblement complets

Etant donné dans un espace E du type (B) une suite d'éléments $\{x_n\}$ telle que,

$$lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

existe pour toute fonctionnelle linéaire $f(x)$ définie dans E, il peut n'exister aucun élément $x_0 \subset E$ vers lequel la suite $\{x_n\}$ soit faiblement convergente, c. à d. tel que l'on ait

$$lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

pour toutes les fonctionnelles linéaires $f \subset \overline{E}$ à la fois.

En voici un exemple dans l'espace (C). soit $\{x_n(t)\}$ où $0 \leq t \leq 1$ une suite de fonctions continues, bornées dans leur ensemble et convergeant partout vers une fonction $z(t)$ qui n'est pas continue. la limite :

$$lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)\, dg$$

existe alors pour toute fonction $g(t)$ à variation bornée, mais la suite $\{x_n(t)\}$ ne converge faiblement vers aucune fonction continue.

Cependant on a la théorème :

Dans les espaces $\left(L^{(p)}\right)$ et $\left(l^{(p)}\right)$ où $p \geq 1$ l'existence de $lim_{n\to\infty} f(x_n)$ pour une suite$\{x_n\}$, quelle que soit la fonctionnelle linéaire f, entraîne la convergence faible de la suite $\{x_n\}$ vers un élément x_0.

Preuve. pour (L), si $lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)\,\alpha(t)\,dt$, où $x_n(t) \subset (L)$, existe pour toute fonction $\alpha(t) \subset (M)$, on a évidemment

$$lim_{\substack{p\to\infty \\ q\to\infty}}\int_0^1 \left[x_p(t) - x_q(t)\right]\alpha(t)\,dt = 0 \text{ pour tout } \alpha(t) \subset (M)$$

Nous allons montrer qu'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un $\eta > 0$ et un N naturel tels que l'on a

(25)
$$\int_H |x_N(t) - x_n(t)|\, dt < \eta$$
pour tout $n \geq N$ et pour tout ensemble H de mesure $< \eta$.

En effet, il existerait dans le cas contraire deux suites infiniment croissantes de nombres naturels $\{p_k\}$ et $\{n_k\}$ et une suite d'ensembles $\{H_k\}$ de mesure tendant vers 0 telles que $\int_{H_k} |x_{p_k}(t) - x_{n_k}(t)|\, dt \geq \varepsilon$, d'où $lim_{k\to\infty} \int_0^1 [x_{p_k}(t) - x_{n_k}(t)]\, \alpha(t)\, dt = 0$ pour tout $\alpha(t) \subset (M)$, contrairement au th. de Lebesgue.

Ceci établi, on a donc en particulier, si η est suffisamment petit, $\int_H |x_n(t)|\, dt < \frac{1}{2}\varepsilon$ pour tout $n = 1, 2, ...$, d'où selon (25),

(26)
$$\int_H |x_n(t)|\, dt < \frac{3}{2}\varepsilon \text{pour tout } n = 1, 2, ...$$
pourvu que la mesure de H soit $< \eta$,

(27)
$$lim_{n\to\infty} \int_0^t x_n(u)\, du = \beta(t)$$

Nous allons montrer que la fonction $\beta(t)$ est absolument continue.

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe d'après (26) un $\eta > 0$ tel que l'on a $\int_H |x_n(t)|\, dt < \varepsilon$ pour $n = 1, 2, ...$ et pour tout ensemble H de mesure $< \eta$. En particulier, si H se compose d'un nombre fini de segments à extrémités t_i et $t_{i'}$ n'empiétant pas l'un sur l'autre, on a donc
$$lim_{n\to\infty} \int_H x_n(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \sum_i \int_{t_i}^{t_{i'}} x_n(t)\, dt = \sum_i [\beta(t_{i'}) - \beta(t_i)]$$
d'où
$$\left| \sum_i [\beta(t_{i'}) - \beta(t_i)] \right| \leq \varepsilon$$
ce qui exprime la continuité absolue de la fonction $\beta(t)$.

Ceci étant, on n'a qu' à poser $\beta'(t) = x_0(t)$ pour conclure de (27) et des conditions pour la convergence faible, établies p. que la suite $\{x_n(t)\}$ converge faiblement vers $x_0(t)$.

Preuve. pour $\left(L^{(p)}\right)$ où $p > 1$. Admettons que
$$lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n(t)\, y(t)\, dt$$
où $x_n(t) \subset \left(L^{(p)}\right)$ quel que soit $n = 1, 2, ...$, existe pour tout $y(t) \subset \left(L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)}\right)$. Les fonctionnelles $f_n(y) = \int_0^1 x_n(t)\, y(t)\, dt$ sont évidemment linéaires dans $\left(L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)}\right)$ et comme,

par hypothèse, $lim_{n\to\infty} f_n(y)$ existe pour tout $y(t) \subset \left(L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)}\right)$, la fonctionnelle

$$f(y) = lim_{n\to\infty} f_n(y)$$

est également linéaire dans $\left(L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)}\right)$; elle est donc de la forme

$$f(y) = \int_0^1 x_0(t)\, y(t)\, dt$$

où $y \subset \left(L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)}\right)$ et $x_0 \subset \left(L^{(p)}\right)$. Il en résulte que

$$lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n(t)\, y(t)\, dt = \int_0^1 x_0(t)\, y(t)\, dt \text{pour tout } y \subset \left(L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)}\right)$$

c. à d. que $\{x_n\}$ converge faiblement vers x_0, c. q. f. d. ■

Preuve. Pour $\left(l^{(p)}\right)$ où $p > 1$ est analogue à celle pour $\left(L^{(p)}\right)$. ■ ■

3.2.3 Un théorème sur la convergence faible d'éléments

Nous allons terminer ce chapitre par le théorème général suivant

Théorème 3.2.1 *Etant donnée une opération linéaire $y = U(x)$ définie dans un espace E du type (B) et dont le contredomaine est situé dans un espace E_1, également du type (B), si une suite $\{x_n\}$ converge faiblement vers x_0 dans E, la suite $\{U(x_n)\}$ converge faiblement vers $U(x_0)$ dans E_1.*

Preuve. Y étant une fonctionnelle linéaire quelconque définie dans E_1, la fonctionnelle $Y[U(x)] = X(x)$, définie dans E y est évidemment additive et continue, car on a $|X(x)| = |Y[U(x)]| \leq |Y| \cdot |U(x)| \leq |Y| \cdot |U| \cdot |x|$.

La convergence faible de $\{x_n\}$ vers x_0 implique donc que $lim_{n\to\infty} Y[U(x_n)] = lim_{n\to\infty} X(x_n) = X(x_0) = Y[U(x_0)]$, c. à d. que $\{U(x_n)\}$ converge faiblement vers $U(x_0)$, c. q. f. d. ■

Remarque 3.2.2 *Dans l'hypothése supplémentaire que l'opération $y = U(x)$ est totalement continue, la convergence faible de $\{x_n\}$ vers x_0 entraîne la convergence de $\{U(x_n)\}$ vers $U(x_0)$ selon la norme, c. à d. l'égalité$lim_{n\to\infty} |U(x_n) - U(x_0)| = 0$. En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait un $\varepsilon > 0$ et une suite partielle $\{x_{n_i}\}$, telle que*

(28)

$$|U(x_{n_i}) - U(x_0)| > \varepsilon pour i = 1, 2, ...$$

la suite $\{U(x_{n_i})\}$ convergeant en même temps suivant la norme vers un $y\prime \subset E_1$. Or, la convergence faible de $\{x_{n_i}\}$ vers x_0 entraînant d'autre part, celle de $\{U(x_{n_i})\}$ vers $U(x_0)$, on aurait $y\prime = U(x_0)$, ce qui est impossible selon (28).

Conclusion Générale

Rappelons tout d'abord que tout au long du mémoire, toutes les notions introduites ne l'ont été que dans le but de trouver des compacts et dans le cas où il est possible, de vérifier leur métrisabilité. Le problème qui s'est posé c'est qu'on est en dimension infinie, le célèbre théorème de Riesz dit que les boules fermées ne sont jamais compactes pour la topologie forte, contrairement en dimension finie où elles le sont. Il a fallu alors introduire des topologies moins fines mais conservant certains objets liés à l'espace de Banach sur lequel l'étude est faite. Un premier résultat de compacité (faible) nous est donné par le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki mais pour la topologie faible-*. Il demende tout de même que l'espace soit un dual. Il est important de rappeler aussi que cette topologie ne concerve pas le dual de l'espace en général, mais nous avons un résultat de densité important.

Le théorème de Kakutani donne quant à lui, la compacité (faible) sans condition de dualité. Il exige quand même que l'espace soit réflexif (il y a même équivalence), dans quel cas les topologies faible et faible-* coincident sur le dual. Ces espaces réflexifs sont donc de bons espaces pour établir des résultats de compacité. Nous avons une classe d'espaces qui sont tous réflexifs : ce sont les espaces uniformément convexe. Ensuite le théorème de James donne une caractérisation des espaces réflexifs par le fait que toute forme linéaire continue sur ceux-ci atteigne sa norme. L'équivalence est aussi importante dans un sens que dans un autre. La séparabilité vient ensuite métriser tous ces compacts. En effet nous avons ce résultat concernant E et $E\prime$ selon lequel la séparabilité de l'un équivaut à la métrisabilité des boules de l'autre.

Bibliographie

[1] Frédéric paulin.Topologie, analyse et calcul différentiel. E'cole normale Normale Supérieure, 2008-2009, p22.

[2] Frédéric paulin.Topologie, analyse et calcul différentiel. E'cole normale Normale Supérieure, 2008-2009, p24-25.

[3] Frédéric paulin.Topologie, analyse et calcul différentiel. E'cole normale Normale Supérieure, 2008-2009, p24-25.

[4] Frédéric paulin.Topologie, analyse et calcul différentiel. E'cole normale Normale Supérieure, 2008-2009, p34.

[5] Cours d'integration et probabilité.

[6] Frédéric paulin.Topologie, analyse et calcul différentiel. E'cole normale Normale Supérieure, 2008-2009, p20.

[7] Frédéric paulin.Topologie, analyse et calcul différentiel. E'cole normale Normale Supérieure, 2008-2009.

[8] Frédéric paulin.Topologie, analyse et calcul différentiel. E'cole normale Normale Supérieure, 2008-2009, p20.

[9] Ce théorème a été démontré par M. F. Riesz, l. c., Math. Ann. 69 (1910), p. 465-466.

[10] Ce théorème a été démontré pour la première fois par M. Radon (Sitzungsberichte der Kkad. fur Wissensch. in Wien, 122 (1913), Abf. Il-a, p. 1295-1438). Cf. aussi F. Riesz, Acta Litt. Ac. Scient. Szeged, 4.(1929), p. 58-64 et 182-185.