الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Nº Réf :……………

Centre Universitaire de Mila

Institut des Sciences et de la Technologie **Département de Mathématiques et informatique**

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de licence en : -Filière: Mathématiques Fondamentales

Opérateurs auto-adjoints non bornés

Préparé par :
GAOUA NOUHAD
CHOUGUI AZIZA
BAHRI AIDA

Encadre par : SEKHANE CHAFIKA **Grade : B**

Année universitaire : 2013/2014

الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Nº Réf :……………

Centre Universitaire de Mila

Institut des Sciences et de la Technologie **Département de Mathématiques et informatique**

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de licence en : -Filière: Mathématiques Fondamentales

Opérateurs auto-adjoints non bornés

Préparé par :

GAOUA NOUHAD
CHOUGUI AZIZA
BAHRI AIDA

Encadre par : SEKHANE CHAFIKA **Grade : B**

Année universitaire : 2013/2014

Remeciements

Nous remercierons dieu tout puissant pour nous avoir offert la force et la patience durant toutes ces années.

Nous tenons à exprimer Un remerciement particulier à notre encadreur madame« Sekhane Chafika » pour avoir dirigé ce travail, pour sa Présence, son aide et surtout pour ses précieux conseils.

Mille merci nos trop chères familles, que dieu vous garde pour nous.

Nous tenons à exprimer, nos sincères remerciements à tout le personnel de l'institut des sciences et de la technologie surtout les enseignants qui nous ont formé durant les années d'étude, et tous ceux qui nous ont apporté une aide au pour la réalisation de ce projet.

Sans oublier bien-sûre tous les amis et collègues d'études pour leur enjouement et soutient moral.

Table des matières

Introduction Générale

La mécanique quantique utilise un ensemble d'outils mathématiques indispensables à l'étude rigoureuse des phénomènes physiques, et parmi ces outils, les opérateurs linéaires. Lorsque ces opérateurs sont continus leurs manipulation n'offre pas de difficulté majeure, mais dans le cas contraire, il faut être d'une extrême prudence, car le domaine de définition d'opérateur est très important. L'importance que constitue l'étude des opérateurs linéaires, nous à poussé à choisr ce thème pour l'étudier et l'analyser.

Au premier chapitre ; on donne des définitions sur les espaces fonctionnnels spécialement l'espace vectoriel normé, l'espace de Hilbert et l'espace de banach puis en définit l'application linéaire continue

Le deuxième chapitre est consacré aux opérateurs précisément l'opérateur borné et l'opérateur adjoint et auto-adjoint, opérateur non borné.

Le troisième chapitre, concerne l'opérateur auto-adjoint non borné dans le quel on parle du spectre des opérateurs fermé, Transposés et adjoints, théorème de représentation. décomposition spectrale et le théorème de stone.

Chapitre 1

Espaces fonctionnels et Application linéaire continue

1.1 Espace vectoriel normé

1.1.1 Espace vectoriel

Définition 1.1.1 *On dit que l'ensemble X est un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$, ou un $\mathbb{k}$-espace vectoriel, si :*

1) X est muni d'une loi interne $+$ pour laquelle X est un groupe commutatif

2) Il existe une application $(\alpha, u) \to \alpha u$ de $\mathbb{k} \times X$ dans X dite loi externe telle que :

$$\forall\, (\alpha, \beta) \in \mathbb{k}^2 \quad \begin{cases} (\alpha + \beta) = \alpha u + \beta u \\ \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v \end{cases}$$

$$\forall\, (u, v) \in X^2 \quad \begin{cases} \alpha(\beta u) = (\alpha\beta) u \\ 1u = u \end{cases}$$

1.1.2 Sous espace vectoriel

Définition 1.1.2 *Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$. Soit F une partie de X. On dit que F est un sous-espace vectoriel de X si :*

1) F est stable pour les deux lois : $\begin{cases} \forall\, (u, v) \in F^2, \forall\ \lambda \in \mathbb{k} \\ u + v \in F \text{ et } \lambda u \in F \end{cases}$

2) Muni des lois induites, F est un espace vectoriel

1.1.3 La norme

Définition 1.1.3 *Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$. Une application N de X dans $\mathbb{R}_+$ est dite une norme si :*

1) $\forall x \in X,\ N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
2)$\forall x \in X,\ \forall \alpha \in \mathbb{k}\ ,\ N(\alpha x) = \mid \alpha \mid N(x)$
3)$\forall x, y \in X,\ N(x+y) \leq N(x) + N(y)$
une norme est souvent notée $\| x \|$ au lieu de $N(x)$
Un espace vectoriel muni d'une norme est applé un espace vectoriel normé
Une norme est utilisée pour exprimer la notion de proximité dans un espace vectoriel définie des distances.

1.2 Application linéaire continue

1.2.1 Espace d'application linéaire continue

Notation 1.2.1 *Soient (X, N_X) et (Y, N_Y) deux $\mathbb{k}$-espace normé. On adopte les notations suivantes :*
$L(X,Y) = \{f :\ X \to Y,\ f$ *linéaire si :* $\forall \lambda \in \mathbb{k},\ (x,y) \in X^2,\ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)\}$
et $L(X,Y) = \{f : X \to Y,\ f$ *linéaire et continue*$\}$

Théorème 1.2.2 *Soient X et Y deux espaces normés et $T : X \to Y$ une application linéaire, les propriétés suivantes sont équivalentes :*
$i)$L'application T est continue sur X ;
$ii)$ L'application T est continue au point O_X ;
$iii)$Il existe un nombre $M \geqslant 0$ telque, pour tout $x \in X$ on ait $\| T(x) \|_Y \leqslant \| M(x) \|_X$

Preuve. Preuve. Il est calir que$(i) \implies (ii)$. si T est continue en 0, il existe un nombre $\delta > 0$ telque pour tout u $\in X$, la condition $d_X(u, 0) \leqslant \delta \Rightarrow d_Y(T(u), T(0)) \leqslant 1$ ■

Autrement dit :
$\| u \|_X \leqslant \delta \Rightarrow \| T(u) \|_Y \leqslant 1$
Etant donné un vecteur x non nul quelconque dans X.
Le vecteur$u = \delta \| x \|_X^{-1} x$ vérifie $\| u \|_X \leqslant \delta$ donc$\| T(u) \|_Y \leqslant 1$
Ce qui revient à dire que $\| T(x) \|_Y \leqslant \delta^{-1} \| x \|_X$
On ainsi montrer que(iii) est vraie. Avec $M = \delta^{-1}$
Enfin, sopposons(iii) vérifiée, si une suite (x_n) de X tend vers un vecteur $x \in X$, on aura :
$d(T(x_n), T(x)) = \| T(x_n) - T(x) \|_Y = \| T(x_n - x) \|_Y \leqslant M \| x_n - x \|_X \to 0$
Ce qui montre que T est continue au point x et ceci pour tout $x \in X$
Soient p et q deux semi normes. Sur un espace vectoriel X, on dit que p et q sont équivalents s'il existe deux nombres réels $m > 0$ et $M \geqslant 0$
telque : $mp \leqslant q \leqslant Mp$. ■

1.3 Produit scalaire et espace de Hilbert

1.3.1 Produit scalaire

Définition 1.3.1 *(Forme hermitienne) :*

On appelle forme hermitienne sur H une application ϕ :$H \times H \rightarrow \Bbbk$ qui vérifié, pour tout $x, y \in H$ et tous $\alpha, \beta \in \Bbbk$

1) $\phi(\alpha x+\beta y, z)=\alpha\phi(x, z)+\beta\phi(y, z)$

2) $\phi(x, y)=\overline{\phi(y, x)}$

une forme hermitienne est également appelé une forme sesquilinéaire

Théorème 1.3.2 *(L'inégalité de Cauchy Schwarz) :*

Pour tous x, y dans X on a $|< x\backslash y >|\leqslant \|x\|\|y\|$ l'égalité étant réalisée si et seulement si, x et y sont lié.

Preuve. Sur $\mathbb{R}^n$ muni de produit scalaire canonique , l'inégalité de Cauchy-Schwarz prend la forme suivante :

$\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $|\sum_{k=1}^n x_k y_k|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^n {x_k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^n {y_k}^2\right)$

On peut déduire de cette inégalité quelques inégalités intéressante sur les réels. ■

Corollaire 1.3.3 *Une forme hermitienne est définie positive si et seulement si elle est positive et non dégénérée. De plus pour une forme hermitienne définie positive , l'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité si et seulement si x et y sont liés dans H.*

Preuve. [1] ■

Définition 1.3.4 *(Produit scalaire) :*

On appelle produit scalaire sur H une forme hermitienne définie positive.

Si $(\cdot\backslash\cdot)$ est un produit scalaire sur H, l'application : $\|\cdot\|: H \rightarrow [0, +\infty[$

$x \rightarrow \sqrt{< x\backslash x >}$

est une norme sur H.

1.3.2 Espace de Hilbert

Espace complet

Définition 1.3.5 *Soit (x, d) un espace métrique, On dit q'une suite $(x_n) \subset E$ est une suite de Cauchy pour la distance d si "les termes de la suite finissenr par étre arbitrairement proches", autrement dit si la propriété suivante est verifiée que :*

$\forall\varepsilon > 0, \exists N, \forall p, q \geqslant N \qquad d(x_p, x_q) < \varepsilon$

L'espace métrique (X, d)est dit complet si toute suite de Cauchy de (X, d) est convergente.

Espace de Hilbert

Définition 1.3.6 *On appelle espace de Hilbert un espace vectoriel H (réel ou complexe) muni d'un produit scalaire $(x, y) \to < x, y >$ telque le semi-norme $x \to \sqrt{< x, x >}$ soit une norme sur H, qui rendre cet espace complet.*

Si H est un espace de Hilbert, on notera $\| x \| = \sqrt{< x, x >}$ pour tout $x \in H$. l'égalité de Cauchy-Schwarz s'écrit alors : $|< x, y >| \leqslant \| x \| \| y \|$.

La projection orthogonale :

Notation 1.3.7 *H est un espace de Hilbert réel ou complexe, on note $< \cdot , \cdot >$ le produit scalaire sur H. Dans le cas complexe, on adopte la convention suivante $< x, y >$ est linéaire par rapport à y et antilinéaire par rapport à x.*

Théorème 1.3.8 *soit X un sous espace vectoriel fermé de H*

(1) Pour tout $x \in H$, il existe un unique vecteur $z \in X$ tel que $\| x - z \| = d(x, X)$, ce vecteur est noté $P_x(x)$

(2) Le vecteur $P_X(x)$ est caractérise par les deux propriétés suivantes : $P_X(x) \in X$ et $x - P_X(x) \in X^\perp$

(3) L'application $P_X : H \to X$ est une projection linéaire continue de la norme 1. On dit que P_X est la projection orthogonale de H sur X.

Preuve. [2] ■

1.4 Espace de Banach

Définition 1.4.1 *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet pour la distance associé à la norme*

Si Y est un sous espace vectoriel fermé d'un espace de Banach X, il est lui aussi complet pour la norme induite par celle de X, donc Y est un espace de Banach.

Exemple 1.4.2 $(\mathbb{R}, | \, . \, |)$ *et* $(\mathbb{C}, | \, . \, |)$ *sont des espaces de Banach.*

- $(\varsigma[a, b], \mathbb{R}, \| \, . \, \|_\infty)$ *est un espace de Banach avec* $\| \, . \, \|_\infty = sup_{x \in [a,b]} = | f(x) |$

1.4.1 Quelques propriétés des espaces du Banach

1. *Tout espace normé de dimension finie est de banach*
2. *Soit $(X, \| \, . \, \|_X)$ est un espace vectoriel normé et $(F, \| \, . \, \|_F)$un Sous espace vectoriel normé de X si dimension $F < +\infty$, Alors F est fermée.*

Preuve. F est fermée $\Leftrightarrow$ F contient les limites les de tout ses suites qui convergent soit (x_n) une suite de F avec $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in F$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : \parallel x_n - x \parallel_F < \varepsilon$$

Puisque F est de dimension finie. ■

Chapitre 2

Les opérateurs

2.1 L'opérateur borné

Définition 2.1.1 *soit A un opérateur linéaire tel que $D(A) = X$ et $R(A) \subset X$. On dit que A est borné s'il est borné sur la boule unité $\overline{s}_1(0)$, ie si l'ensemble $\{\|Ax\|,\ \|x\| \leqslant 1\}$ est borné*

Conformément a cette définition, si A est borné, il existe une constante $c \succ 0$ telleque pour tout x tel que $\|x\| \leqslant 1$, on a l'inégalité $\|Ax\| \leqslant c$ ....(1)

Théorème 2.1.2 *A est borné si et seulement si $\|Ax\| \leqslant c\|x\|$ ....(2)*

pour tout $x \in X$, ou c'est la constante tirée de (1)

Preuve. Pour $x = 0$ l'inégalité (2) évidente.

Soit $x \neq 0$ posons $x' = \frac{x}{\|x\|}$, on a$\| x' \|= 1$, il ressort donc de (1) que$\| Ax' \|\leq c$, c'est à dire que :

$$\| A \left(\frac{x}{\|x\|}\right) \|\leq c$$

Puisque A est linéaire, on a $A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{1}{\|x\|}\ Ax$ et puisque la norme est homogène on a :

$\| \frac{1}{\|x\|}Ax \|= \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq c$ équivalente à (2)

Réciproquement si (2) a lieu on a $\| Ax \|\leq c$ dans $\overline{s_1}\,(0)$, ie A est borné. ■

Théorème 2.1.3 *Soit M un ensemble borné, $M \subseteq X$, alors l'ensemble$\{\| Ax, x \in M \|\}$ est bornè.*

Preuve. Par définition, pour M bornè il existe une boule $\overline{S_{\mathbb{R}}}\,(0) \supseteq M$

En vertu de (2) , pour $x \in \overline{S_{\mathbb{R}}}$on a $\| Ax \|\leq C \| x \|\leq C\ R$

A est borné sur $\overline{S_{\mathbb{R}}}\,(0)$ et à fortiori sur sa partie M. ■

Corollaire 2.1.4 *Toute opèrateur linèaire A est borné sur toute boule $\overline{S_{\mathbb{R}}}\ (x_0)$ pour tout $x_0 \in X$ et tout $R \succ 0$.*

2.2 L'opérateur adjoint et auto-adjoint

Théorème 2.2.1 *(Representation de Reisz)*

Soinent$(H, \prec, \succ)$ un espace de Hilbert, muni de la norme $\|\|$ associée au produit scalaire et H^* le duel topolojique de H Alors tout $\wp \in H^*$ il existe un unique $y_\wp \in H$ tel que pour tout $x \in H$ on ait $\wp(x) = \prec x, y_\wp \succ$.

Evidement dans ce cas on a $\| \wp \| = \|y_\wp\|$.

Auterement dit l'application $\wp_H$ est bijective.

Preuve. Si $\wp = 0$ il suffit prendre $y_\wp = 0$

Supposons donc $\wp \neq 0$ alors $F = \ker(\wp)$ est un sous-espace vectoriel fermé de H tel que$F \neq H$

On a $F^\perp \neq \{0\}$, soit $z \in F^\perp$ tel que $\wp(z) = 1$

Alors pour tout $x \in H$ on a $x = x - \wp(x) z + \wp(x) z$ avec $x - \wp(x) z \in F$

Donc on a $\prec x, z \succ = \prec x - \wp(x) z, z \succ + \prec \wp(x) z, z \succ = 0 + \wp(x) \| z \|^2$

D'ou on a $\wp(x) = \prec x, \frac{z}{\|z\|^2} \succ$

Alors il suffit de prendre $y_\wp = \frac{z}{\|z\|^2}$. ■

Définition 2.2.2 *Soit A un opérateur bornè sur un espace de Hilbert H ,pour tout $x_0 \in H$, la fonction f définie sur H par :*

$f(x) = \prec Ax, x_0 \succ$ est une forme linéaire borneé sur H.

Par le thèorème de reprèsentation de Reisz, il existe un unique $y_0 \in H$ tel que :

$f(x) = \prec x, y_0 \succ \quad \forall x \in H$

de façon équivalente $\prec Ax, x_0 \succ = \prec x, y_0 \succ \quad \forall x \in H$.

Définition 2.2.3 *Soit A un opérateur bornè sur un espace de Hilbert H*

L'opèrateur $A^* : H \to H$ définie par :

$\prec x,\, A^*y \succ = \prec Ax,\, y \succ \quad \forall x,\, y \in H$ est dit opérateur adjoint de A

Les propriétés suivantes sont des conséquences directes de cette définition.

Soint A et B deux opérateur de $B(H)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, alors on a :

1. $(A + B)^* = A^* + B^*$.

2. $(\alpha A)^* = \overline{\alpha}\, A^*$.

3. $(A^*)^* = A$.

4.$(I)^* = I$.

5.$(AB)^* = B^* A^*$.

Théorème 2.2.4 *L'opérateur adjoint A^*, d'un opérateur bornè A est bornè, de plus nous avons :*

$$\| A \| = \| A^* \| \text{ et } \| A\ A^* \| = \| A \|^2 .$$

Preuve. En premier lieu ,on montre que la norme d'un opérateur est ègale à la norme de son adjoint on a :

$$\| A^* (x) \|_H^2 = \prec A^* (x) , A^* (x) \succ = \prec AA^* (x) , x \succ \ \leq \| AA^* (x) \|_H \| x \|_H$$
$$\leq \| A \| \| A^* (x) \|_H \| x \|_H$$

Et par conséquence $\| A^* (x) \|_H \leq \| A \| \| x \|_H$.

Comme $\| A^* \| = sup_{x \neq 0} \frac{\|A^*(x)\|_H}{\|x\|_H}$ donc on a : $\|A^*\| \leq \|A\|$

On a aussi $(A^*)^* = A$,donc $\|A\| = \| (A^*)^* \| \leq \|A^*\|$

D'ou l'égalitè $\| A \| = \|A^* \|$

2.Reste à montrer que $\|AA^x\| = \|A\|^2$

D'une part nous avons :

$\|A\ A^* \| \leq \| A^* \| \| A \| = \|A\|^2$

Et d'autre part nous avons :

$$\|A (x) \|_H^2 = \prec A (x) , A (x) \succ = \prec A^* A (x) , x \succ$$
$$\leq \|A^* A (x) \|_H \ \|x\|_H$$
$$\leq \|A\ A^*\| \ \ \|x\|_H^2$$

Ce qui donne :

$\|AA^*\| \ = \|A\|^2$. ■

Remarque 2.2.5 *Nous avons pas en general* $A = A^*$

Par exemple, si $H = \mathbb{C}^2$ *et Aun opèrateur dèfinie par* $A (z_1,z_2) \ = (0, z_1)$ *Alors :*

$\prec A (z_1, z_2), \ (y_1,y_2) \succ \ = z_1\overline{y_2}$

et

$\prec (z_1, z_2) , A (y_1, y_2) \succ = z_2\overline{y_1}$.

Définition 2.2.6 *Un opérateur A est dit auto-adjiont (ou hermitien)si* $A = A^*$, *ie :*

$\prec Ax,\ y \succ = \prec x,\ Ay \succ \qquad \forall x, y \in H.$

Exemple 2.2.7 *Considérons l'opérateur A définie sur* $L^2 (\mathbb{R})$ *par* $(Ax) (t) = e^{-(t)}x (t)$

A un opérateur borné auto -adjoint ,en effet

$\prec Ax,\ y \succ = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t)}x (t) \overline{y (t)}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x (t) \left[\overline{e^{-(t)}y (t)}\right] dt = \prec x,\ Ay \succ$.

Remarque 2.2.8 1.*tout opérateur borné A sur un espace de Hilbert a la représentation :* $T = A + iB$

Ou A et B sont deux opérateurs auto-adjonts de plus $T^* = A - iB$

En effet, il suffit de prendre :

$A = \frac{1}{2} (T^* + T)$ *et* $B = \frac{i}{2} (T^* - T)$

2.*Un opérateur A tel que*$A = -A^*$ *est dit anti-hermitien.*

2.3 Opérateur non bornès

Soint X et Y deux espaces vectoriels sur $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, une application linéaire partiellement dèfinie (on dira un opèrateur) A de X dans Y est donnée par un sous-espace vectoriel.

$dom\,(A)$ de X appelé domaine de A et par une application linaire $L_A$de $dom\,(A)$ dans Y.

Auterement dit la donnée A est celle de $(X, Y, dom\,(A)\,, L_A)$

Le graphe de A est le sous espace vectoriel d'un produit $X \times Y$ égal $G = \{(x, L_A\,(x)) : x \in \ dom\,(A)\}$
On va voir que A est complémentaire déterminé par $Gr\,(A)\,$, qui est un sous-espace vectoriel G de $X \times Y$ avec la propriété$((o_x, y) \in G) \Rightarrow (Y = o_y)\,.$

Définition 2.3.1 *Soit $G \subset X \times Y$ un graphe partiel. Notons $p_1 : G \rightarrow X$ et $p_2 : G \rightarrow Y$ les projections et définissons un opérateur A*

en posont $dom\,(A) = p_1\,(G)$ et $A\,(p_1\,(z)) = p_2\,(z)$ pour tout $z \in G$

Il est claire que $Gr\,(A) = G$

Comme le noyau de la première projection de $X \times Y$ dans X est le sous espace $\{0\} \times Y$ de $X \times Y$, la correspondance entre opérateur et graphe partiel est bijective.

Désormais on dira opérateur au lieu d'application linéaire partiellement définie.

On appélle noyau de A le sous-espace $ker\ (A) = \{x \in dom\,(A) : A\,(x) = 0\}$de X et image de A le sous_ espace $im\,(A) = A\,(dom\,(A))$ de Y.

On appelle extention d'un opérateur A tout opérateur S tel que :

$Gr\,(A) \subset Tr\,(S)$ et on écrit alors $A \subset S$.

Définition 2.3.2 *Soient S et A deux opérateurs de X dans Y, on définit l'opérateur $S+A$ en posant $dom\,(S + A) = dom\,(S) \cap dom\,(A)$ et on posant $(S + A)\,(x) = S\,(x) + A\,(x)$ pour tout vecteur $x \in dom\,(S + A)$*

Si R, S, A sont des opérateurs de X dans$Y$ on a clairement :

$R + S = S + R$ et$(R + S) + A = R + (S + A)\,.$

Définition 2.3.3 *Un opérateur A de X dans Y est dite injective si l'application*

$$A : dom\,(A) \rightarrow y \text{ est injective.}$$

Soit A un opèrateur injecif de X dans Y

le sous ensemble de $Y \times X$ ègale à $\{(y, x) \in Y * X : (x,\ y) \in Gr\,(A)\}$

est le graphe d'un opèrateur A^{-1} (de domaine $im\,(A)$)appelé inverse de A

Clairement A^{-1}est injective et $(A^{-1})^{-1} = A$

Si $A : X \rightarrow Y$ et $S : Y \rightarrow G$ sont injectifs alors SA injective et $(SA)^{-1} = A^{-1}S^{-1}$.

Exemple 2.3.4 *Considérons* $X = Y = L_2\ (0,\ 1)$, *soit* V *L'opérateur borné de "primitive nulle en* 0 *",* $(V\ f)(t) = \int_0^t f(s)\, ds$ *et posons* $D = imV$.

On a vu que$V$ *est injectif .*

On peut donc définir l'opérateur $A = V^{-1}$*de domaine* D *en posant pour tout* $g \in D$ *on a :*

$(Ag = f) \Leftrightarrow (V\ f = g)$

Cet opérateur A *est donc injectif lui-aussi.*

Chapitre 3

Décomposition spectrale des opérateurs

3.1 spectre des opérateurs fermés

Définition 3.1.1 *Soint A un opérateur d'un espace de Banach complexe E dans lui mème et $\lambda \in \mathbb{C}$.*

on dit que λ est une valeur régulière de A si $A \to \lambda \ Id_E$ est une application linéaire bijective de $dom(A)$ sur E et si l'application linéaire réciproque définit une application linéaire continue de E dans lui méme.

On appelle spectre de A le complémentaire $Sp(A)$ dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble des valeur régulière de A.

Soit A un opérateur sur un espace de Banach complexe E désignons par Ω_A l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ qui sont valeur régulière de A.

pour $\lambda \in \Omega_A$, on pose :

$R_\lambda(A) = (A-\lambda)^{-1} \in L(E)$.

On appelle $R_\lambda(A)$ la résolvante de A.

Lemme 3.1.2 *Soient A un opérateur injectif fermé d'un espace de Banach E dans lui même et λ une valeur régulière de A non nulle alors λ^{-1}est une valeur régulière de A^{-1}et on a :*

$$R_{\lambda^{-1}}(A^{-1}) = -\lambda \ AR_\lambda(A) = -\lambda Id_E - \ \lambda - \lambda^2 R_\lambda(A).$$

Preuve. On veut résoudre pour tout $y \in E$ l'équation $\left(A^{-1} - \lambda^{-1} Id_E\right)(x) = y$
(on cherche $x \in dom(A^{-1}) = im(A)$)
puisque λ est réquliére pour A, on peut écrire $y = (A - \lambda Id)(z)$ avec $z = R_\lambda(A)(y)$
On sait alors que $z \in dom(A) = im(A^{-1})$ donc il existe $\mu \in im(A)$ telque :

$z = A^{-1}(\mu)$. L'équation proposée est :

$A^{-1}(x) - \lambda^{-1}(x) = (A - \lambda Id)(A(^{-1}(\mu))) = \mu - \lambda A^{-1}(\mu) = A^{-1}(-\lambda\mu) - \lambda^{-1}(-\lambda\mu)$

Il en résulte que $x_0 = -\lambda\mu$ convient. Par ailleurs $A^{-1} - \lambda^{-1}Id$ est injectif

(donc la solution x_0 est unique).

Si $x \in dom(A^{-1})$ et $A^{-1}(x) - \lambda^{-1}x = 0$ alors $x = \lambda A^{-1}(x) \in dom(A)$ et $A(x) = \lambda x$ implique $x = 0$ puisque λest réguliére pour A.

Si $R_{\lambda^{-1}}(A^{-1})$existe on a :

$x = R_{\lambda^{-1}}(A^{-1})(y) = -\lambda\mu = -\lambda A(z) = -\lambda\ AR_\lambda(A)(y)$.

Il reste à expliquer pourquoi l'opérateur $AR_\lambda(A)$ est borné. Cela provient à l'égalité $(A - \lambda Id)R_\lambda(A) = Id$, qui donne $AR_\lambda(A) = \lambda R_\lambda(A) + Id$ qui est bien continue. ■

Proposition 3.1.3 *Le spectre d'un opérateur fermé A d'un espace de Banach complexe E dans lui méme est une partie de $\mathbb{C}$, et l'application $\lambda \to R_\lambda\ (A)$est continue et holomorphe du complémentaire du spectre dans $L(E)$.*

Preuve. Désignons par Ω_A l'ensemble des valeurs réguliéres pour A. et montrons que cet ensemble est ouvert.

Si Ω_A est vide, il est ouvert sinon supposons que $\lambda_0 \in \Omega_A$ et montrons que les valeurs voisines et λ_0 sont elle aussi réguliéres et $\lambda \to R_\lambda(A)$ continue dans ce voisinage.

En remlaçant A par $A_0 = A - \lambda_0 Id_E$ on se raméne à $\lambda_0 = 0$. on supposera donc que $A = A - 0Id_E$ est une bijection de $dom(A)$sur E, d'inverse $S = R_0(A)$continue, on veut alors montrer qu'il existe $\varepsilon \succ 0$ telque λ soit valeur réguliére de A quand $\mid \lambda \mid \prec \varepsilon$.

Etant donné $y \in E$ quelconque, on veut résoudre en$x \in dom(A)$ et avec solution unique, l'équation $A(x) - \lambda x = y$.

posons $z = A(x)$ ce qui équivant à $x = S(z)$.l'équation précédente devient alors $z - \lambda S(z) = y$ ou encore $\left(S - \lambda^{-1}Id_E\right)(z) = -\lambda^{-1}y$.

lorsque $\mid \lambda \mid \prec p(S)^{-1}$, on sait que $S - \lambda^{-1}Id_E$ est inversible donc z est uniquement défini par $z = R_{\lambda^{-1}}(S)\left(-\lambda^{-1}y\right)$. Et puisque $x = S(z)$ ceci montre que $R_\lambda(A) = -\lambda^{-1}SR_{\lambda^{-1}}(S)$ existe et borné.

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ telque $\mid \lambda \mid \prec p\left(A^{-1}\right)^{-1}$ si on réecrit :

$R_\lambda(A) = -\lambda^{-1}SR_{\lambda^{-1}}(S) = -S(Id_E - \lambda s)^{-1}$.

On voit que $\lambda \to R_\lambda(A)$ est continue et holomorphe au voisinage de $\lambda_0 = 0$ mais λ_0 est en fait un point quelconque de Ω_A. ■

3.2 Transposés et adjoints

Définition 3.2.1 *Soient E et F deux espaces de Banach et A un opérateur densément défini de E dans F, on défini le transposé de A qui est un opéeateur de F^*dans E^*, de la* *façon suivante :*

Le domaine de A *est l'ensemble des* $Y^* \in F^*$ *telles que la forme linéaire*$x \in dom(A) \to y^*(A(x))$ *soit continue*

$($*en ayant muni l'espace vectoriel* $dom(A)$ *de la norme induite par celle de* $E)$

Dans le cas ou $Y^* \in dom\left(A^T\right)$ *, cette forme linéaire continue ,défine sur le sous-espace dense* $dom(A) \subset E$*,se prolonge de façon unique en une forme linéaire* $x^* \in E^*$*continue sur* E.

On pose $A^T(y^*) = x^*$*on a donc :*

$\left(A^T\right)(y^*) = y^*\left(\overline{A}(x)\right)$ *pour tous* $x \in dom(A)$ *et* $y^* \in dom\left(A^T\right)$

Lorsque E *et* F *sont deux espace de Hilbert et* A *un opérateur densément définit de* E *dans* F*, on définit un opérateur* A^* *de* F*de la façon suivante :*

On définit $A^*(y) = x$ *si la forme linéaire* l_y *associée à* $y \in H$ *est dans dom* $\left(A^T\right)$ *et si* $l_x = x^* = T^T(l_y)$ *le vecteur* y *est donc dans le domaine de* A^* *si et seulement si la form linéaire :*

$l : u \in dom(T) \to \prec T(u), y \succ$ *est continue sur dom*(A) *et le couple* $(y,\ x) \in F \times E$ *est dans le graphe de* A^* *si et seulement si* $\prec A(u), y \succ = \prec u, x \succ$ ....$(*)$

Pour tout $u \in dom(T)$ *ce qui signifie que* x *represente la forme linéaire* l *(et son prolongement continue à* E*) on a donc :*

$Gr(A^*) = \{(x, y) \in F \times E : \forall z \in dom(A),\ \prec x,\ z \succ = \prec y, A(z) \succ\}$

La forme linéaire $u \to \prec A(u), y \succ$ *et alors continue puisqu'elle est égale à* $u \to \prec x, u \succ$ *et dans ce cas on a* $x = A^*(y)$.

Par définition de l'adjiont il est claire que la condition (1) *définit un ensemble fermé de couples* $(y,\ x)$ *,ce qui montre que* A^**est un opérateur fermé.*

On dit que A $($*densément défini sur un Hilbert* $)$ *est symétrique si :*

$\prec x,\ A(y) \succ = \prec A(x), y \succ$.

Pour tous $x,\ y \in dom(A)$ *,cela revient à dire que* $A \subset A^*$ *un opérateur* A *dans lui mème est auto-adjiont si* $A = A^*$

Tout auto-adjoint est symetrique mais l'inverse n'est pas vrais.

Proposition 3.2.2 *Soit* A *un opérateur densément définie d'un espace de Hilbert* E *dans un espace* F *alors* $Ker(A^*) = Im(A)^{\perp}$.

Preuve. Soit $y \in F$, on a $y \in ker(A^*)$ si et seulement si pour tout $x \in dom(A)$, on a $\prec 0,\ x \succ = \prec y,\ A(x) \succ$ cela a lieu si et seulement si $y \in Im(A)^{\perp}$. ■

Proposition 3.2.3 *Soient* E *et* F *deux espace de Hilbert et* A *un opérateur densément défini fermé de* E *dans* F

(i) *Si* R *est une extension de* A *alors* $R^* \subset A^*$.

(ii)*Si* A *est injectif et l'image dense alors* $\left(A^{-1}\right)^* = (A^*)^{-1}$.

Proposition 3.2.4 *Soient E et F deux espaces de Hilbert et A un opérateur fermé densément défini de E dans F.*

L'opérateur $(Id_E + A^*A)$ est injectif son image est égale à E et $(Id_E + A^*A)$ est un élement positif de $L(E)$.

L'opérateur A^*A est auto-adjoint et son spectre est contenu dans $[0, +\infty[$.

Preuve. Soit $x \in E$, comme $U_0(G(A^*))$ est l'orthogonal de $Gr(A)$ il existe deux vecteurs $\xi \in Gr(A)$ et $\eta \in Gr(A^*)$ tel que $(x, 0) = \zeta + U_0(\eta)$en d'autre temes il existe$z \in dom(A)$ et $y \in dom(A^*)$tels que :

$(x, 0) = (z, A(Z)) + (A^*(y), -y)$ alors $y = A(z)$ donc$z \in dom(A^*A) = dom(Id_E + A^*A)$ et $x = (Id_E + A^*A)(z)$ donc $(Id_E + A^*A)$ est surjectif.

Soit $z \in$ dom$(Id_E + A^*A)$ comme $z \in dom(A)$ et $A(z) \in dom(A^*)$ tel que :

$(x, 0) = (z, A(z)) + (A^*(y), -y)$ alors$y = A(z)$ donc $z \in dom(A^*A) = dom(Id_E + A^*A)$ et $x = (Id_E + A^*A)(z)$ donc $(Id_E + A^*A)$est surjectif.

Soit $z \in dom(Id_E + A^*A)$ comme $z \in dom(A)$ et $A(z) \in dom(A^*)$.

On a $\prec A^*(A(z)), z \succ = \prec A(z), A(z) \succ$.

On a $\prec (Id_E + A^*A)(z), z \succ = \prec z + A^*A(z), z \succ = \|z\|^2 + \|A(z)\|^2$alors :

$\|z\|^2 \leq \|z\|^2 + \|A(z)\|^2 = \prec (Id_E + A^*A)(z), z \succ \leq \|z\| \, \|(Id_E + A^*A)(z)\|$;

Donc $\|z\| \leq \|(Id_E + A^*A)(z)\|$ il en résulte que $Id_E + A^*A$ est injectif que l'inverse $(Id_E + A^*A)$ est continue et que $\|(Id_E + A^*A)^{-1}\| \leq 1$

Enfin, considérons $z = (Id_E + A^*A)^{-1}(x)$ avec $x \in E$

On a :$\prec x, (Id_E + A^*A) \succ = \prec (Id_E + A^*A)(z), z \succ = \|z\|^2 + \|A(z)\|^2 \geq 0$

Donc $(Id_E + A^*A)^{-1}$est un élement positif de $L(E)$ et comme $(Id_E + A^*A)^{-1}$injectif et auto-adjiont, son image est dense.

L'opérateur $(Id_E + A^*A)$ est positif de norme ≤ 1, on a $Sp(Id_E + A^*A)^{-1} \subset [0, 1]$ il en résulte que $S(Id_E + A^*A) \subset [1, +\infty[$ et $Sp(A^*A) \subset [0, +\infty[$. ■

3.3 Décomposition spectrale et théorème de représentation

Théorème 3.3.1 *Soient H un espace de Hilbert complexe et A un opérateur auto_ adjiont sur H, le spectre de A est réel : $Sp(A) \subset \mathbb{R}$.*

Proposition 3.3.2 *Soint H un espace de Hilbert complexe, A un opérateur fermé sur$H$ et λ, $\mu \notin SP(A)$, posons $r_\lambda = R_\lambda(A)$, $r_\mu = R_\mu(A)$,l'image $r_\lambda r_\mu(H)$ est égale au domaine de A^2et $r_\lambda r_\mu = r_\lambda r_\mu$.*

Preuve. Rappellons que dom $(A^2) = \{x \in dom\,(A) : Ax \in dom\,(A)\}$

Considérons $x = r_\lambda\,(r_\mu\,(y))$ pour un $y \in H$ quelconque par définition on a :

$r_\lambda\,(H) = dom\,(A)\, doncx \in dom\,(A)$ et $Ax - \lambda x = r_\mu\,(y) \in dom\,(A)$.

Par linéarité, $Ax \in dom\,(A)$ donc $x \in dom\,(A^2)$

Inversement supposons $x \in dom\,(A^2)$ alors $x \in dom\,(A)$ et $x_1 = Ax - \lambda x \in dom\,(A)$ ce qui permet de calculer $y = Ax_1 - \mu x_1$

On aurra $r_\mu y = x$ puis $r_\lambda r_\mu y = x$

Si $x \in dom\,(A^2)$, on vérifie immédiatement en développant que :

$(A - \lambda)\,(A - \mu)\,x = A^2\,(x) - \lambda A\,(x) - \mu A\,(x) + \lambda\mu x = (A - \mu)\,(A - \lambda)\,x$

En prenant l'inverse de cette relation sur l'image commune $dom\,(A^2) = r_\lambda r_\mu\,(H) = r_\mu r_\lambda\,(H)$

On obtient $r_\lambda r_\mu = r_\lambda r \mu$. ■

Proposition 3.3.3 *Soient H un espace de Hilbert complexe et A un opérateur auto-adjiont sur H alors $R_i\,(A) = (A - i\quad Id_H)^{-1}$est un opérateur borné normal, et son adjiont est égale à $R_i\,(A)$.*

Preuve. D'aprés le théorème (3.3.1), les opérateur $R_i\,(A)$ et $R_{-i}\,(A)$ existent et sont

bornés

D'aprés la propositon précédente il suffit de savior que $R_{-i}\,(A)$ est l'adjiont de $R_i\,(A)$

Soient y, v deux vecteurs quelconque dans H et posons $x = R_i\,(A)\,(y)$, $u = R_{-i}\,(A)\,(v)$ on a :

$\prec R_i\,(A)\,(y)\,, v \succ\, = \,\prec x, (A + i)\,(u) \succ\, = \,\prec Ax - ix, u \succ\, = \,\prec y, R_{-i}\,(A)\,(v) \succ$. ■

Théorème 3.3.4 *Soient H un espace de Hilbert séparable et A un opérateur auto-adjoint de H dans H, il existe un espace mesuré (Ω, μ), une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable et un isomorphisme.*

$u : L_2\;(\Omega, \mu) \to H$ d'espace de Hilbert tels que $A = u\; M_f\; u^*$.

On donne à l'opérateur M_f son domaine naturel, la relation ci dessus sous en tend que u^* échangent les domaines de A et de M_f, c'est à dire qu'on l'égalité $u\,(dom\,(M_f)) = dom\,(A)$ inversement $u^*\,(dom\,(A)) = dom\,(M_f)$.

Preuve. On va servir de l'opérateur normal $S = (A - i\; Id_H)^{-1}$, il existe une espace mesuré $\sigma-$fini (Ω, T, μ), un unitaire U de $H_1 = H$ sur $H_2 = L_2\,(\Omega, \mu)$ une folction $h \in L_\infty\,(\Omega, \mu)$ tel que :

$S = U^* M_h U.$

Ou M_h désigne l'opérateur borné sur $L_2\;(\Omega, \mu)$ définie par la multiplication par h $\forall g \in L_2\,(\Omega, \mu)\;, M_h\,(g) = hg.$

Puisque S est injectif, il en resulte que M_h est injectif cela implique que l'ensemble $T = \{h = 0\}$ est négligeable.

Si on comprend la traduction de S sur$L_2(\Omega, \mu)$ il n'est pas bien difficile de comprendre celle de $(A - i)$ puis celle de A.

L'opérateur $(A - i)$ qui l'inverse de $S = R_i(A)$ se traduit sur $L_2(\Omega, \mu)$ par l'inverse de la traduction de S : c'est l'opérateur M_2 de multiplication par la fonction $1/h$ (fonction qui est $\mu-$presque partout définie).

Le domaine D_2de M_2 est l'image de M_h, l'ensemble des fonctions g de la forme $g = hk$ pour $k \in L_2$.comme $h \neq 0$ presque partout cele revient à dire que :

$$D_2 = \left\{g \in L_2 : \int_\Omega \mid g\ /h \mid^2 d\mu \prec +\infty\right\}.$$

Pour finir ou définit l'opérateur non borné A_2 sur $L_2(\Omega, \mu)$ pour son domaine D_2 et la formule :

$\forall g \in D_2, A_2(g) = g/h + ig$

Autrement dit si on pose $f = i + 1/h$ et $u = U^*$, on obtient bien la representation voulue : l'opérateur de multiplication $M_f = A_2$ vérifie $A = u\ M_f\ u^*$. ■

3.4 Le thèoréme de stone

Soit H un espace de hilbert, on appelle groupe à un paramétre d'unitaire une famille $(V_t)_{t\in\mathbb{R}}$, d' élément unitaire de $\mathcal{L}(H)$ telle que :

(i) Pour tous s,t $\in \mathbb{R}$ ona $V_{s+t} = V_s + V_t$.

(ii) Pour tout $x \in H$ l'application $t \to V_t(x)$ est continue .

Lemme 3.4.1 *Soit H un espace de hilbert, $(V_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un groupe à un paramétre d'unitaires. D un sous ensemble dense de H tel que pour tout $z \in D$ et $t \in \mathbb{R}$ on ait $V_t(z) \in D$.*

Soient x,$y \in H$ tels que pour $z \in D$ l'application $t \to \langle V_t(x), z\rangle$ soit dérivable en 0 de dérivée $i\ \langle y, z\rangle$ alors $t \to V_t(x)$ est continument dérivable de $\mathbb{R}$ dans H est sa dérivée en t est $i\ V_t(y)$.

Preuve. L'application $t \to V_t(y)$ est continue de $\mathbb{R}$ dans H . Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $x_t = x + \int_0^t i\ v_s(y)\, ds$. l' application $t \to x_t$ est continument dérivable est sa dérivée en t est $i\ V_t(y)$. Soit $z \in D$, posons $\varphi(t) = \langle x_t, z\ \rangle$ et $\psi(t) = \langle V_t(x), z\ \rangle$ la fonction φ est continument dérivable et sa dérivée en t est $\langle iv_t(y), z\rangle$.

Soient t , $s \in \mathbb{R}$,ona $\psi(t + s) = \langle V_{tV_s}(s), V_t V_{-1}(z)\rangle = \langle V_s(x), V_{-1}(z)\rangle$, par hypothése cette fonction de s est dérivable en 0 et sa dérivée est : $i\ \langle y, V_{-1}(z)\rangle = i\ \langle V_t(y), z\ \rangle$.

On a montré que φ est dérivable en t et $\psi' = \varphi'$, comme $\varphi(0) = \psi(0)$ on trouve : $\varphi = \psi$ donc pour tout $z \in D$ et tout $t \in \mathbb{R}$ ona $\langle (x_t - V_t(x)), z\ \rangle = 0$ alors :

$x_t - V_t(x) \in D^\perp$ donc $V_t(x) = x_t$ d'ou le resultat. ■

Théorème 3.4.2 *(thèoréme de stone)*

Soit H un espace de hilbert séparable,

(i) soit $(V_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un groupe à un paramétre d'opérateurs d'unitaires .Il existe un opérateur auto-adjoint A sur H le graphe est l'ensemble des couples $(x\ ,\ y) \in H * H$ tel que la fonction $t \to V_t(x)$ soit dérivable en 0 de dérivée iy . Pour $x \in dom(A)$ et $A(V_t(x)) = V_t(A(x))$.

On dit que A est le générateur infinitésimal de $(V_t)_{t\in\mathbb{R}}$.

(ii) tout opérateur autoadjoint A est le générateur infinitésimal d' un unique groupe à un paramétre d'unitaires $(V_t)_{t\in\mathbb{R}}$.

Preuve. Montrons que le domaine de A est dense .

Soient $x \in H$ et $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 à support compact , posons $x_f = \int f(t)\, V_t V_s(x)\, dt$, ona :

$V_t(x_f) = \int f(s)\ V_t V_s(x)\, ds = \int f(s-t)\, V_t(s)\, ds.$

donc $(V_t(x_f) - x_f)/t\ =\ \int t^{-1}[f(s-t) - f((s))]\, V_s(x)\, ds$ .Quand t tend vers 0, $(V_t(x_f) - x_f)/t$ tend vers $-\int f^{'}(s)\, V_s(x)\, ds$. On en déduit que $x_f \in dom(A)$.

soit f_n une suite de fonctions positives de classe C^1 telles que $\int f_n(t)\, dt = 1$ et telles que f_n soit nulle en dehors de $\left]\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right[$, posons $y_n = \int f_n(t)\, V_t(x)\, dt$ ona $y_n \in dom(A)$ et $lim\ y_n = x$. donc dom(A) est dense.

Si $x \in dom(A)$, pour tout $z \in H$ la fonction : $t \to \langle V_t(x), z\rangle$ est dérivable en 0, $t \to V_t(x)$ est de classe C^1.

En particulére, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application : $s \to V_s(V_t(x))$ est dérivable en 0, donc $V_t(x) \in dom(A)$.

Soient x , $y \in dom(A)$.ona $\langle V_t(x), y\rangle = \langle x, V_{-t}(y)\rangle = \overline{\langle V_{-t}(y), x\rangle}$.la dérivée en 0 de $t \to \langle V_{-t}(y), x\rangle$ est $-i\ \langle A(y), x\rangle$, ona donc : $i\langle A(x), y\rangle = \overline{-i\langle A(y), x\rangle}$.On en déduit que $A \subset A^*$.

Enfin, soit $x \in dom(A^*)$, pour tout $z \in dom(A)$.

on a $< v_t(x), z > = < x, v_{-t}(z) >$. donc $t \to < v_t(x), z >$ est dérivable en 0 et sa dérivée est $i < x, A(z) > = i < A^*(z), z >$. par le lemme précédent $x \in dom(A)$ et $A(x) = A^*(x)$.

passons au deuxiéme point ; Soient (X, μ) un espace mesuré, $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et $u : L_2(X, \mu) \to H$ un isomorphisme d'espaces de Hilbert tels que l'on ait $A = uM_f u^*$, pour $t \in \mathbb{R}$, notons $g_t : X \to \mathbb{C}$ l'application $\exp(itf)$, posons $v_t = uM_{g_t}u^*$, comme $|g_t| = 1$, M_{g_t} est unitaire donc v_t est unitaire.

comme $g_s g_t = g_{s+t}$, on a $v_s v_t = v_{s+t}$. Si $t_n \to t$, pour tout $\epsilon \in L_2(X, \mu)$ la suite de fonctions $g_{t_n}\epsilon$ converge partout vers $g_t\epsilon$, son module est constant égal à $|\epsilon|$, par le théoreme de convergence dominée, $g_{t_n}\epsilon$ converge vers $g_t\epsilon$ dans L_2. Il en résulte que $t \to v_t$ est fortement continu, c'est donc un groupe à un paramétre d'unitaire, notons S son générateur infinitésimal, pourtout $t \in \mathbb{R}^*$.

On a $|g_t - 1| \leqslant |tf|$, si $\epsilon \in dom(M_f)$, pour tout suite (t_n) tendant vers 0, la suite de fonctions $t_n^{-1}(gt_n\epsilon - \epsilon)$ convergence dominée, $t_n^{-1}(gt_n\epsilon - \epsilon)$ converge vers $if\epsilon$ dans L_2. Donc $t \to g_t\epsilon$ est dérivable en 0 et sa dérivée est $if\epsilon$, on en déduit que $u\epsilon \in dom(S)$ et $iS(u\epsilon) = u(if\epsilon)$. On a montré que $A = uM_fu^* \subset S$. On en déduit que $S + S^* \subset A^* = A$ donc $A = S$.

Enfin, Soit $(v_t)_{t\in\mathbb{R}}$ et $(w_t)_{t\in\mathbb{R}}$ deux groupes à un paramétre d'unitaires ayant méme générateur infinitésimal A, pour $x \in dom(A)$ et $t \in \mathbb{R}$, on a $v_t \in dom(A)$,

$A\ (v_t(x)) = v_t(A(x))$, et $w_t(x) \in dom(A)$, $A\ (w_t(x)) = w_t(A(x))$.

posons $\varphi(t) = \|v_t(x) - w_t(x)\|^2$ pour tout t réel, on a :

$$\begin{aligned}\wp(t) &= \| v_t(x) \|^2 + \|w_t(x)\|^2 - 2\,\mathrm{Re} \prec v_t(x), w_t(x) \succ \\ &= 2\left(\| x \|^2 - \mathrm{Re} \prec v_t(x), w_t(x) \succ\right)\end{aligned}$$

La fonction $\wp$ est dérivable en tout $t \in \mathbb{R}$ et l'on a :

$$\wp'(t) = -2\,\mathrm{Re}\left(\prec v_t(x), i\ A(w_t(x)) \succ + \prec i\ A(v_t(x)), w_t(x) \succ\right)$$

Comme $A = A^*$, on a :

$$\prec A(v_t(x), w_t(x)) \succ = \prec v_t(x), A(w_t(x)) \succ .$$

Donc $\wp' = 0$, comme $\wp(0) = 0$, on trouve $\wp(t) = 0$.

Alors $v_t(x) = w_t(x)$, comme $dom(A)$ est dense, en déduit $v_t = w_t$.

On a en fait montré que, si A est le générateur infinit ésimal d'un groupe à un paramétre d'unitaire $(v_t)_{t\in\mathbb{R}}$ alors $v_t = \exp(i\ t\ A)$. ■

Bibliographie

[1] JEAN PIERRE MARCO,Mathématique L3 analyse,sous la direction , PARIS juin 2009

[2] CLAUDE PORTENIER-Analyse fonctionnelle-version du 1 juillet 2005

[3] V.TRENO guide, Analyse fonctionnelle-traduit du Russe par V.KOTLIA, edition MIR_MOSCOU

[4] www. klubprepa. net

[5] MASSAOUD GUESBA, Mémoire de magistére Sur quelques équations intégrale non linéaire, 2012