الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليــم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :...............

Centre Universitaire de Mila

Institut des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé **En vue de l'obtention du diplôme de** licence

En -Filière Mathématiques Fondamentales

Thème

THÉORÈME DU POINT FIXES ET CES APPLICATIONS

Préparé par :

1) Bensassi Wissam
2) Boulektout Ahlem
3) Brik Kenza
4) Chellouf Yassamine

Dirigé par : Benhabiles Hanane
Grade Maitre assistant -b-

Année universitaire : 2013/2014

Remerciements

Nous remercions Allah, le tout puissant de m'avoir donné, la santé, la volonté et la patiente pour l'accomplissement de cette mémoire.

Nos remerciements en deuxième temps, à toutes nos familles qui nous soutient dans les moments de pénibles comme dans les moments de joie.

Également, nous remerciement Melle Benhabiles Hanane qui encadre ce mémoire et nous dirigeons et nous encourageons tout le long du travaille.

Un grand remerciement a mes enseignants au département des sciences et technologie surtout, les enseignants des mathématique et informatique et tous les membres du département des sciences et technologie du centre universitaire de Mila.

Enfin, nous exprimons nos plus remerciements à toute personne qui nous a aidé à élaborer ce travail de proche ou de loin.

Table des matières

Notations :

$\mathbb{Q}$	: Corps des nombres rationnels.
$\mathbb{R}$	: Corps des nombres réels ou $]-\infty,+\infty[$.
$\mathbb{R}_+$	: $[0,+\infty[$.
$\mathbb{C}$	: Corps des nombres complexes.
$\mathbb{R}^*$	: $\mathbb{R}/\{0\}$.
$\mathbb{R}_+^*$	: $]0,+\infty[$.
C_E^A	: Complémentaire de A sur E.
$\mathbb{R}^n$	:L'ensemble des n tuples ordonnés $(x_1,x_2,...,x_n)$ tel que $x_i\in\mathbb{R},\forall i=\overline{1,n}$.
$\Bbbk$	: Corps des nombres réels ou corps des nombres complexes.
$g\circ f$	: Composition de la fonction f par la fonction g.
f'	: Dérivée de la fonction f.
C^1	: La fonction f dérivable avec f' continue.
$\langle u,v\rangle$	: Produit scalaire des vacteurs u et v.
$d(A,B)$	: Distance des points A et B.
$S(A,r)$	: Sphére de centre A et de rayon r.
$B(A,r)$	: Boule ouverte de centre A et de rayon r.
$\bar{B}(A,r)=B_f(A,r)$	: Boule fermée de centre A et de rayon r.

Lettres gereques utilisés :

λ	: Lamda.
ε	: Epsilon.
Ψ	: Psi.
φ,Φ	: Phi.

Introduction

En analyse, un théorème de point fixe est un résultat qui permet d'affirmer qu'une fonction f admet sous certaines conditions un unique point fixe. Ces théorèmes se révèlent être des outils très utiles en mathématiques des base en montrant l'existence des solutions. La théorie du point fixe est au cœur de l'analyse non linéaire puis qu'elle fournit les outils nécessaires pour avoir des théorèmes d'existence dans beaucoup de problèmes non-linéaires différent.

Soit X un ensemble et $T : X \to X$ une application. Une solution d'une équation $T(x) = x$ est appelé un point fixe de T. L'original de la théorie du point fixe, une branche importante de l'analyse fonctionnelle non linéaire, qui remonte à la dernière partie du XIX éme siècle, le reste dans l'utilisation d'approximations successives de l'existence et l'unicité de la solution, en particulier aux équations différentielles. Cette méthode est associée aux noms de mathématiciens célèbres tels que Cauchy, Lipschitz et surtout Picard.

Dans ce travail, nous présenterons quelques définitions bien connues, et les théorèmes importants et très utiles qui sont des théorèmes du point fixe dans l'espace métrique, topologiques et quelques variantes et ses applications, finalement on étude les autres théorèmes du point fixe dans différent l'espaces.
L'objet de premier chapitre est de donner quelques rèsultats fondament aux qui concernent les espaces métriques, topologiques et les espaces normés, qui nous permettent de miex comprendre le continue de ce travail.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation du théorème du point fixe et quelques variantes. On commence par donner une définition générale du point fixe . On s'intéresse ensuite au théorème du point fixe.

Nous allons presenter quelques applications du point fixe dans léspace métrique, topologique et affine dans le troixième chapitre.

Enfin, on va parler du théorème de Kakutani, Brower, Banach...

Chapitre 1

Préliminaires

Résumé :

Ce chapitre est consacré aux notions fondamentales de l'espace métrique et topologique, ainsi qu'à quelques définitions.

1.1 Distance et espace métrique

Distance

Définition 1.1.1 *:*
Soit E un ensemble non vide quelconque.
Une distance sur E est une fonction $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ définie sur le produit cartésien $E \times E$, à valeur dans l'ensemble $\mathbb{R}_+$ de nombres réels positives, qui vérifiant les propriétés suivantes :

$$
\begin{aligned}
&1.\forall x, y \in E : d(x,y) \geq 0 \ \ (\textit{positivité}), \\
&2.\forall x \in E : d(x,x) = 0 \ \ (\textit{nullité sur la diagonale}), \\
&3.\forall x, y \in E : d(x,y) = 0 \implies x = y \ \ (\textit{séparation}), \\
&4.\forall x, y \in E : d(x,y) = d(y,x) \ (\textit{symétrique}), \\
&5.\forall x, y, z \in E : d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \ \ (\textit{inégalité triangulaire}).
\end{aligned}
$$

Espace métrique

Définition 1.1.2 *:*
On appelle espace métrique un couple (E, d) constitue par un ensemble non vide et par une distance d sur E. On dit souvent que E est muni de la distance d.
Un espace métrique sera en générale noté (E, d) ou bien E_d.

Remarque :
Sur un même ensemble E on peut définit une infinité de distance.

1.2 Notions topologiques dans les espaces métriques

Définition 1.2.1 *:*
On appelle topologie sur un ensemble E une famille ζ de partie de E $(\zeta \subset \mathcal{P}(E))$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

$$
\begin{aligned}
&1.\phi \in \zeta, \ \ E \in \zeta, \\
&2.\forall (u_i) \in \zeta, \bigcap_{i=1}^{n} \in \zeta, \\
&3.\forall (u_i)_{i \in I} \in \zeta, \bigcup_{i \in I} u_i \in \zeta.
\end{aligned}
$$

Remarque :
Le couple (E, ζ) est appelé «espace topologique».
Les éléments de ζ sont appelles ouverts de la topologie ζ.

Partie ouverte

Soit $A \subset E$ tel que (E, d) espace métrique, on dit que A est une partie ouverte (*ou un ouvert*) dans E si :

$$\forall x \in A,\ \exists r > 0, B(x, r) \subset A.$$

Partie fermée

On dit que A est une partie fermée (*ou un fermé*) dans E si son complémentaire C^A est un ouvert c'est-à-dire :

$$\forall x \in A,\ \exists r > 0, B(x, r) \subset C^A.$$

Notion de voisinage

Soit (E, ζ) un espace topologique, et soit $A \subset E$, une partie v de E est appelé un voisinage de A dans E si v contient une partie ouverte contenant A c'est-à-dire :

$$\exists u \in \zeta, A \subset u \subset v.$$

Notion d'intérieur

Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$, un point $x \in A$ est dit intérieure de A dans (E, d) s'il existe $r > 0$ tel que :

$$B(x, r) \subset A.$$

L'ensemble de tous les points d'intérieurs est appelé l'intérieur de A, on le note $\mathring{A}$.

$$x \in \mathring{A} \iff \exists r > 0, B(x, r) \subset A.$$

Notion d'adhérence

Soit (E, d) espace métrique, $A \subset E$, un point $x \in E$ est dit adhérent à A si toute boule centrée en x a une intersection non vide avec A. L'ensemble de tous les points de E qui sont adhérents à A est appelé l'adhérence de A, on le note $adh(A)$ ou bien A surmonté d'une barre : $\bar{A}$.

$$\bar{A} = \{x \in E, d(x, A) = 0\}.$$
$$x \in \bar{A} \iff \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \phi.$$

Notion de densité

Soit (E, d) un espace métrique, soient A, B deux parties de E.

• On dit que A est dense dans E si A=E.

• On dit que A est dense dans B si B⊂A.

Exemple :

$\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ alors $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Remarque :

Tout espace métrique (E, d) est un espace topologique, où la topologie ζ est constitue des parties ouvertes pour la distance d, par contre un espace topologique n'est pas nécessairement associe une distance.

1.3 Suite de Cauchy-espace métrique

Dans tout ce qui suit $\mathbb{N}$ désignera l'ensemble des entiers naturels :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Et on notera

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}.$$

Définition 1.3.1 (*d'une suite*)

Soit E un ensemble non vide quelconque, on appelle suite de points de E toute application $f : S \to E$ définie sur une partie infinie S de $\mathbb{N}$ à valeurs dans l'ensemble E, quand $S = \mathbb{N}$ ou bien $S = \mathbb{N}^*$.

On définie

$$\begin{array}{ccl} f & : & S \to E, \\ n & \to & f(n) \end{array}$$

Tel que $f(n)$ une suite de points de E.

$$(f(m), f(n), f(p), ...) = (u_k)_{k \in S}.$$

où

$$u_k = f(k) \in E.$$

Si $S = \mathbb{N}$ on trouve :

$$(f(0), f(1), f(2), ...) = (u_0, u_1, u_2, ...).$$

$f(n) = u_n$ s'appelle le terme de rang n de la suite $(u_k)_{k\in S}$.

Définition 1.3.2 *(d'une suite extraite)*
On appelle suite extraite d'une suite $f : S \to E$, soit $(u_n)_{n\in S}$ toute restriction de l'application f à une partie infinie T de S, on notera $(u_n)_{n\in T\subset S}$ une suite extraite.

Définition 1.3.3 *(d'une suite convergente)*
Soit (E, d) un espace métrique et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de E et $u \in E$, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u si l'on a :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies d(u_n, u) \leq \varepsilon.$$

Si $\exists u \in E$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ on dit que la suite (u_n) est convergente.

Remarque :
Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente avec la même limite.

Suite de Cauchy

Définition 1.3.4
Dans un espace métrique (E, d), on dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy lorsqu'elle vérifier :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, p, q \geq n \implies d(u_p, u_q) < \varepsilon.$$

Proposition 1.3.5 *:*
1. Toute suite convergente est une suite de Cauchy mais la réciproque n'est pas toujours vraie.
2. Une suite de Cauchy est bornée.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans l'espace métrique (E, d) si on peut extraire une suite convergente (u_{nk}) de (u_n) alors (u_n) converge vers la même limite c'est-à-dire :

$$(\lim_{n\to\infty} u_{nk} = \lim_{n\to\infty} u_n).$$

Espace métrique complet

Définition 1.3.6 *:*
L'espace métrique E est dit complet lorsque toute suite de Cauchy d'éléments de E est convergente dans (E, d) par exemple $(\mathbb{R}, |.|)$ est un espace métrique complet.

Proposition 1.3.7 *:*
Soit (E, d) un espace métrique complet et $A \subset E$ alors on a :

$$A\ Complete \iff A\ fermé.$$

1.4 Applications continues dans l'espace métrique

Continuité en point-continuité sur un espace métrique

Soient (E, d), (F, d') deux espace métrique, $f : E \to F$ une application et a un point de E.

Définition 1.4.1 *:*
f est dite continue au point $a \in E\,($ou en $a)$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \rho > 0, \forall x \in E \ d(x, a) < \rho \implies d'(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Définition 1.4.2 *:*
f est dite continue sur E si elle est continue en toute point de E (ou a est quelconque).

Théorème 1.4.3 *:*
f est continue en $a \in E$ si et seulement si pour toutes suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élément de E est convergente dans (E, d) telle que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a.$$

La suite des images $(f(u_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est convergente dans (F, d') et

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(a).$$

Continuité uniforme

Définition 1.4.4 *:*
f est dit uniformément continue sur E, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \rho > 0, \forall u, v \in E, d(u, v) < \rho \implies d'(f(u), f(v)) < \varepsilon.$$

Proposition 1.4.5 *:*
f est continue uniformément sur $E \implies f$ est continue sur E.
Mais l'implication inverse n'est pas vraie.

Proposition 1.4.6 *:*
f est continue uniformément sur E si et seulement si :

$$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E, \forall (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, \lim_{n\to\infty} d(u_n, v_n) = 0 \implies \lim_{n\to\infty} d'(f(u_n), f(v_n)) = 0.$$

Proposition 1.4.7 *:*
Si f est uniformément continue sur E alors on a :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ une suite de Cauchy dans } E \implies f(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est de Cauchy dans } F.$$

1.5 Espaces métriques compactes

Définition 1.5.1 *:*
Soit E un ensemble quelconque, et soit A une partie de E. Un recouvrement de A est une famille $(B_i)_{i\in I}$ de parties de E vérifiant :

$$A \subset \bigcup_{i\in I} B_i.$$

Si I est fini on dira $(B_i)_{i\in I}$ recouvrement fini.

Définition 1.5.2 *:*
Soit (E,d) un espace métrique, on dit que (E,d) est précompact ou totalement borné si : Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un recouvrement fini de E par des parties de E dont le diamètre est inférieure à ε c'est-à-dire :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists (A_i)_{1\leq i\leq n}, A_i \subset E \text{ tel que} : diam(A_i) < \varepsilon \text{ et } E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

$$\left(diam(A_i) = \sup_{x\in A_i, y\in A_i} d(x,y) \right).$$

Définition 1.5.3 *:*
Un espace métrique (E,d) sera dit compact s'il est précompact et complet.

1.6 Normes et espaces vectoriels normés

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{k}$ $(\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{k} = \mathbb{C})$.

Normes

Définition 1.6.1 *:*
Une norme sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}^+$vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}&1.N(x) = 0 \iff x = 0,\\&2.\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x),\\&3.\forall x, y \in E, N(x+y) \leq N(x) + N(y).\end{aligned}$$

Remarque :
$|\lambda|$ désigne la valeur absolue de λ si le corps des scalaires de E est $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, et si le corps des scalaires de E est $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, $|\lambda|$ désigne le module de λ $\left(\text{si } \lambda = \alpha + i\beta \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ on a } |\lambda| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right)$
• Pour $x \in E$, $N(x)$ est appelé norme sur E souvent $N(x)$ est noté $\|x\|$.

Espaces vectoriels normés

Définition 1.6.2 *:*
On appelle espace vectoriel normé le couple $(E, \|.\|)$ où E est un espace vectoriel et $\|.\|$ est une norme sur E.

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{k}$ alors on a :

$$\begin{aligned}&1.\forall x \in E, \|-x\| = \|x\|.\\&2.\forall x \in E, |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.\end{aligned}$$

Distance associe à une norme

Définition 1.6.3 *:*
Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{k}$, on associe à la norme $\|.\|$ une distance d sur E définie par :

$$\forall (x, y) \in E, d(x, y) = \|x - y\|.$$

Remarque :

- Toute espace normé E est un espace métrique sa distance est la distance associe à la norme $\|.\|$ sur E.

- En conséquence, toute espace vectoriel normé est un espace topologique.

Définition 1.6.4 *:*
On appel espace de Banach tout espace vectoriel normé complet.

1.7 Application contractante

Définition 1.7.1 *:*
Soit (E, d) *un espace métrique, une application* $f : E \to E$ *est dite lipschitzienne de rapport* k *si et seulement si :*

$$\forall x, y \in E, d\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) \leq k\ d\left(x, y\right).$$

Définition 1.7.2 *:*
Une application d'un espace métrique dans un autre est dite contraction $($*ou contractante*$)$ *si elle est lipschitzienne de rapport* k *strictement plus petit que* 1 *c'est-à-dire :*

$$0 < k < 1$$

Chapitre 2

Théorème du point fixe et quelques variantes

Résumé :

Ce second chapitre, trés important, nous allons presenter la définition du point fixe et quelque exemple, il ne contient qu'un seul théorème, mais il est fondamental, c'est le théorème d'existence et l'unicite d'un point fixe "$f(x) = x$" pour les applications strictement contractante d'un espace métrique complet dans lui même, et on étude la nature du point fixe et quelque variante.

2.1 Point fixe

Définition 2.1.1 *:*
Soit f une fonction d'un ensemble E dans lui-même $(f : E \to E)$ elle n'est pas nécessairement définie sur E tout entier (domaine de définitions) :

$$D_f \subset E.$$

On dit qu'un point $x \in E$ est un point fixe si :

$$\begin{aligned} &1.x \in D_f \\ &2.f(x) = x \end{aligned}$$

Exemples :
1. Dans le plan, la symétrie par rapport à un point A admet un unique point fixe A.
2. L'application inverse (définie sur l'ensemble des réels non nuls) admet deux points fixes :$-1, 1$.

Remarque :
Peut être application ne possédant aucun point fixe, alors toutes les fonctions n'ont nécessairement de point fixe.

Exemples :

1.

$$f(x) = x + 1.$$

On applique la définition :

$$\begin{aligned} f(x) &= x, \\ &\Longrightarrow x + 1 = x, \\ &\Longrightarrow x - x = 1, \\ &\Longrightarrow 0 = 1. \end{aligned}$$

(Impossible).
Alors f n'admet pas des points fixes.

2.

$$\begin{aligned} f(\mathbb{R}, |.|) &\to (\mathbb{R}, |.|), \\ f(x) &= \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right). \end{aligned}$$

Le point fixe :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) &= x, \\
&\Longleftrightarrow \left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = 2x, \\
&\Longleftrightarrow \sqrt{1+x^2} = x, \\
&\Longleftrightarrow 1+x^2 = x^2, \\
&\Longleftrightarrow 1 = 0.
\end{aligned}$$

(Impossible).
Donc f n'admet pas des points fixes.

2.2 Théorème du point fixe

Nous allons établir un théorème très important donnant des conditions suffisantes pour l'existence d'un point fixe.

Théorème 2.2.1 *:*
Soit (E, d) un espace métrique complet, et soit $f : E \to E$ une application contractante alors f admet un unique point fixe c'est-à-dire qu'il existe un unique point $x \in E$ tel que

$$f(x) = x.$$

Preuve. :
1. **existence :**
Soit (E, d) un espace métrique complet et $f : E \to E$ une application contractante c'est-à-dire lipschitzienne de rapport

$$0 < k < 1.$$

Soit $x_0 \in E$, et on pose :

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), ..., x_{n+1} = f(x_n).$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, x_n) &= d(f(x_n), f(x_{n-1})), \\
&\leq k\ d(x_n, x_{n-1}) \qquad \text{(car f lipschitzienne)}, \\
&\leq k\ d(f(x_{n-1}), f(x_{n-2})), \\
&\leq k.k\ d(x_{n-1}, x_{n-2}), \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&\leq k^n d(x_0, x_1).
\end{aligned}$$

• Si

$$d(x_0, x_1) = 0 \implies x_0 = x_1.$$

Car (d distance).
On a

$$x_1 = f(x_0) \implies x_0 = f(x_0).$$

Donc x_0 est un point fixe de f.
• Si

$$\begin{aligned}
d(x_0, x_1) &\neq 0 \implies d(x_0, x_1) > 0, \\
&\implies d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_0, x_1), \\
\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) &\leq d(x_0, x_1) . \lim_{n\to\infty} k^n = 0.
\end{aligned}$$

(car $0 < k < 1$).
Donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et puisque E est complet donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente.
Soit x sa limite où

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

On a

$$x_n = f(x_{n-1}).$$

et

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \implies x = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}).$$

et on a f est continue uniformément alors :

$$x = f\left(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}\right) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(x).$$

$\left(\text{Car} \lim\limits_{n\to\infty} x_{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x\right)$.
Donc f admet un point fixe.
2. **l'unicité :**
Soient x, y deux points fixes de f tel que $x \neq y$ alors :

$$y = f(y).$$

et

$$\begin{aligned} x &= f(x), \\ &\Longrightarrow d(x,y) = d(f(x), f(y)), \\ &\leq kd(x,y). \end{aligned}$$

Donc

$$d(x,y) < d(x,y).$$

(Contradiction).
Donc $x = y$ alors f admet un point fixe unique. ∎

2.3 Le point fixe et suites récurrentes

Théorème 2.3.1 *:*
Soit E un ensemble et f une application continue de E dans E et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par sa valeur initiale x_0 et par la relation de récurrence

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Dans ce cas, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, elle le fait nécessairement converge vers un point fixe de f.
Si f possède un point fixe pas nécessairement la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente.

Preuve.
Notons x la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = x\right).$$

Et aussi la limite de la suite extraire $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *mais* $x_{n+1} = f(x_n)$ *et on obtient par continuité de* f *et unicité de la limite.*

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1}.$$

Et on a

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n), \\ &\Longrightarrow x = \lim_{n\to\infty} f(x_n), \\ &\Longrightarrow f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right), \text{ car } f \text{ est continue,} \\ &\Longrightarrow x = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(x), \\ &\Longrightarrow x = f(x). \end{aligned}$$

Donc x *est un point fixe de* f. ■

Exemple :

Etudier la convergence de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [-1, +\infty[\\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$$

On introduit l'application f définie sur $[-1, +\infty[$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = \sqrt{1+x}.$$

Le point fixe de f *:*

$$\begin{aligned} f(x) &= x, \\ &\Longleftrightarrow \sqrt{1+x} = x, \\ &\Longleftrightarrow x^2 - x - 1 = 0, \\ &\Longleftrightarrow x = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

On montre facilement que f est dérivable sur $]-1, +\infty[$, *croissante sur* $[-1, +\infty[$ *puis que :*

$$f([-1, +\infty[) = [0, +\infty[\subset [-1, +\infty[.$$

La suite (u_n) est bien définie.
De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, |f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{2}.$$

D'après l'inégalité de l'accroissement finis :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, |f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|b-a|.$$

Donc f est $\frac{1}{2}$−lipschitzienne sur $[-1,+\infty[$, donc contractante sur $[-1,+\infty[$.
Alors la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [-1,+\infty[, \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}. \end{cases}$$

Est converge donc vers ϕ.

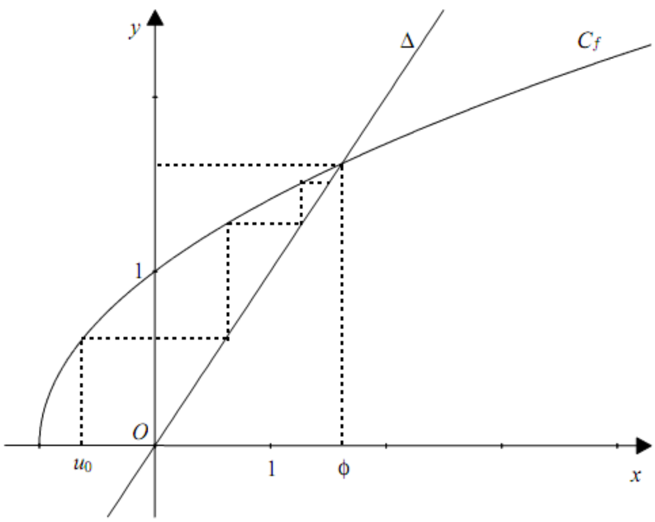

Figure (01)

2.4 La nature des points fixes

Dans tout ce qui suit, on considère que la fonction g est définie de classe C^1 sur l'intervalle $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ (*c'est-à-dir la dérivée de* g *d'ordre* 1 *existe et continue sur* $[a,b]$).

Comme précédemment, on note $a \in]a,b[$ un point fixe de la fonction g sur l'intervalle I, on peut alors distinguer trois cas :

Point fixe attractif

Si $|g'(a)| < 1$ alors il existe un intervalle $j \subset I$ pour lequel la suite (u_n) définie par $u_0 \in j$ tel que *:*

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = g(u_n).$$

Converge vers a.

On dit que le point fixe attractif si la convergence de toutes les suites récurrentes construites à partir de j pourvu que la valeur initiale soit suffisamment proche de ce point fixe.

Point fixe répulsif

Si $|g'(a)| > 1$ alors existe un intervalle $j \subset I$ et tel que :

$$\forall u_0 \neq a, u_0 \in j.$$

La suite $u_{n+1} = g(u_n)$ ne converge pas vers a.
Dans ce cas, le point fixe a est dit point fixe répulsif.

Un cas douteux

Etudions deux exemples tel que $a = 0$ et $g'(a) = 1$.

1. $g(x) = \sin x$, pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
   La convergence ne fait aucun doute si l'on remarque $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

   $$\sin x < x.$$

   Quel que soit son premier terme dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ la suite récurrente associer à g est alors décroissante minorée par 0 donc elle converge vers le point fixe 0, qui est bien attractif.

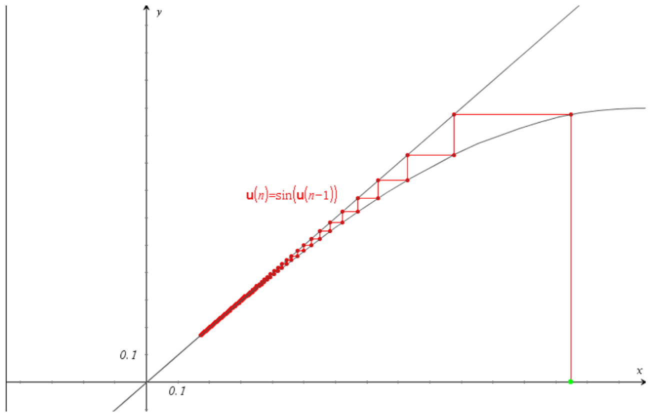

Figure (02)

2. $g(x) = \sinh x$, pour $x \in [0, +\infty[$, on a :

$$\sinh x > x$$

La suite (u_n) est strictement croissante et ne peut donc pas converge vers le point fixe 0, qui est donc répulsif.

Alors si $|g'(a)| = 1 \implies a$ est un point fixe attractif ou répulsif.

2.5 Graphe du point fixe

Graphiquement, les points fixes d'une fonction f s'obtient en traçant la droite d'équation $y = x$, tous les points d'intersection de la courbe représentative de f avec cette droite sont alors les points fixes de f.

Sur l'exemple de la figure ci-dessous il y a deux points fixes x_0 et x_1.

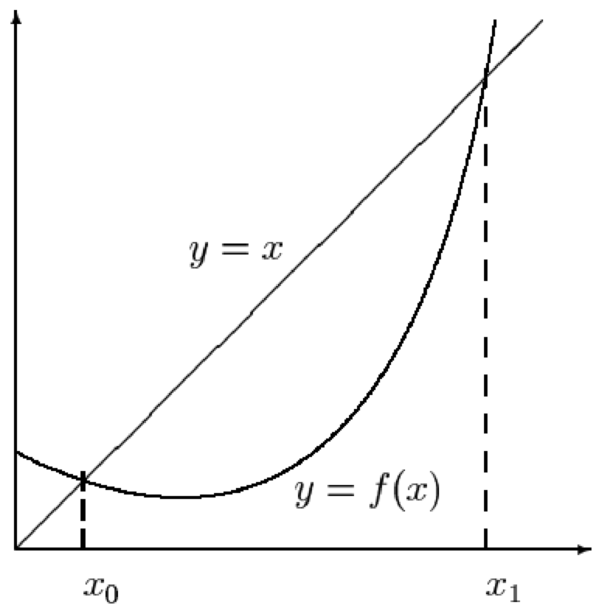

Figure (03)

2.6 Variantes du théorème fondamental et applications

Applications dont un itéré est strictement contractant

Proposition 2.6.1 *:*
Soient (E, d) un espace métrique complet et $f : E \to E$ une application, on définit f^p par :

$$f^0 = Id_E \text{ et } f^1 = f, ..., f^{p+1} = f^p \circ f, \text{ pour } p \geq 1.$$

On suppose qu'il existe $p \geq 1$ tel que f^p soit contractante alors f admet un unique point fixe.

Preuve. :
D'après le théorème du point fixe, f^p admet un point fixe unique que l'on notera x.

On a

$$\begin{aligned} f^p(f(x)) &= f^{p+1}(x), \\ &= f(f^p(x)), \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Ainsi $f(x)$ *est un point fixe de* f^p *et l'on a donc* $f(x) = x$ *(unicité)*
D'autre part, tout point fixe de f *est aussi point fixe de* f^p *et donc égal à* x.
Donc f *admet bien un unique point fixe qui est le même que celui de* f^p. ■

Applications dont une restriction est strictement contractante

Proposition 2.6.2 *:*
Soient (E, d) *un espace métrique complet, et* $F = B(a, \rho)$ *une boule ouverte de* E*, soit* $f : F \to E$ *une contraction stricte de constante* $k \in]0, 1[$, *(*F *étant muni de* d *induite)*.
Sous l'hypothèse :

$$d(f(a), a) \leq \rho(1 - k).$$

Il existe $u \in F$ *unique tel que*

$$f(u) = u.$$

Preuve. :
Considérons la suite :

$$u_0 = a, u_1 = f(u_0) = f(a), u_2 = f(u_1), ..., u_{n+1} = f(u_n).$$

Si $u_n \in F$*, pour tout* n *vérifions qu' il en est bien ainsi, par récurrence*

$$\begin{aligned} u_0 &= a \in F = B(a, \rho), \\ u_1 &= f(a), \\ &\Longrightarrow d(u_{1,a}) = d(f(a), a) < \rho(1 - k) < \rho. \end{aligned}$$

Supposons que $u_n \in F$ *et prouvons qu' alors* $u_{n+1} \in F$ *on a :*

$$d(u_{n+1,a}) \leq d(u_{n+1,}u_n) + d(u_n, u_{n-1}) + ... + d(u_{2,}u_1) + d(u_1, a).$$

Mais

$$d(u_2, u_1) = d(f(u_1), f(u_0)) \leq d(u_1, a)k.$$

$$
\begin{aligned}
d\left(u_{n+1}, u_n\right) &= d\left(f\left(u_n\right), f\left(u_{n-1}\right)\right) \leq k d\left(u_n, u_{n-1}\right), \\
&\leq k^2 d\left(u_{n-1,} u_{n-2}\right), \\
& . \\
& . \\
& . \\
&\leq k^n d\left(u_1, a\right).
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\begin{aligned}
d\left(u_{n+1}, a\right) &\leq \left(k^n + k^{n-1} + ... + k^2 + k + 1\right) \cdot d\left(u_1, a\right), \\
&< \frac{1}{1-k} \rho (1-k) = \rho.
\end{aligned}
$$

Et

$$
u_{n+1} \in F.
$$

Donc la suite (u_n) *et bien définie* (u_n) *est suite de Cauchy, donc convergente dans* E *vers* $u \in E$.
On a

$$
\begin{aligned}
d(u, a) &\leq \frac{1}{1-k} d\left(f(a), a\right), \\
&\leq \frac{1}{1-k} \rho (1-k) = \rho \;\; (\textit{l'estimation a priori}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow \; d(u, a) \leq \rho, \\
&\Longrightarrow \; u \in B(a, \rho), \\
&\Longrightarrow \; u \in F.
\end{aligned}
$$

Comme dans la démonstration du théorème du point fixe, on démontre que u *est l'unique point fixe de* f. ■

Chapitre 3

Quelques applications du théorème du point fixe

Résumé :

Dans ce chapitre, nous présentons quelques applications des théorèmes de point fixe sur un espace métrique, de plus dans espace topologie et dans un espace affine de dimension finie.

Enfin, les principes de continuations seront abordés puisqu'ils sont très utiles pours pouvoir garantir l'existence d'un point fixe d'une fonction.

3.1 Dans les espaces métriques

Résolution de systèmes linéaires

On se propose de résoudre le système linéaire $M.X = B$, à n équations et n inconnues tel que :
M est une matrice carrée $n \times n$ donnée, B une matrice colonne donnée, et X est la matrice colonne cherchée.
Posons $A = I - M$, où I est la matrice unité et

$$g(X) = A.X + B.$$

La résolution de système $M.X = B$ est équivalente à la recherche d'un point fixe de g, en effet :

$$\begin{aligned} g(X) &= X, \\ &\Longleftrightarrow A.X + B = X, \\ &\Longleftrightarrow X - A.X = B, \\ &\Longleftrightarrow (I - A)X = B, \\ &\Longleftrightarrow M.X = B. \end{aligned}$$

Bien entendu, le fait que g soit ou bien ne soit pas une contraction stricte va dépendre du choix de la distance qu'on mettra sur $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$).
Pour $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ prenons d'abord sur $\mathbb{R}^n$ la distance :

$$d_\infty(X, Y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

Notons

$$A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
d_\infty\left[g\left(x\right),g\left(y\right)\right] &= d_\infty\left(A.X+B,A.Y+B\right), \\
&= \max_{1\leq i\leq n}\left|A\left(X-Y\right)_i\right|, \\
&= \max_{1\leq i\leq n}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}\left(x_j-y_j\right)\right|, \\
&\leq \max_{1\leq i\leq n}\left[\sum_{j=1}^{n}\left|a_{i,j}\right|\left|x_j-y_j\right|\right], \\
&\leq \max_{1\leq i\leq n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left|a_{i,j}\right|\right]\max_{1\leq i\leq n}\left|x_j-y_j\right|, \\
&\leq \max_{1\leq i\leq n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left|a_{i,j}\right|\right]d_\infty\left(X,Y\right).
\end{aligned}$$

Et donc g sera contraction strict lorsque $A=I-M$ vérifiée :

$$\|A\|_{1,\infty}=\max_{1\leq i\leq n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left|a_{i,j}\right|\right]\leq 1$$

Alors g n'est pas "obligée" d'être strictement contractante.

Résolution d'une équation intégrale

Soit $[a,b]$,$a<b$ un intervalle compact dans $\mathbb{R}$, on considère l'espace de Banach $E=C^\infty\left([a,b],\mathbb{R}\right)$, on se donne $\varphi\in E$ et une fonction $K:[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ continue sur son domaine de définition, on suppose donné, enfin $\lambda\in\mathbb{R}$.
On se propose de résoudre l'équation, intégrale linéaire il faut trouver une fonction $U\left(t\right)$ dans E telle que :

$$U\left(t\right)=\lambda\int_a^b K\left(t,s\right)U\left(s\right)ds+\varphi\left(t\right),\forall t,s\in[a,b].$$

A manifestement affine définie par :

$$\left[A\left(U\right)\right]\left(t\right)=\lambda\int_a^b K\left(t,s\right)U\left(s\right)ds+\varphi\left(t\right),\ \text{pour } U\in E.$$

D'après les propriétés élémentaires des intégrales dépendant d'un paramètre, puisque K est continue sur $[a,b]\times[a,b]$, et puisque $\varphi\in E$, on a $A\left(U\right)\in E$, A applique E dans E.

On calcule $d_\infty [A(U), A(V)]$, telle que :

$$\begin{aligned}
d_\infty [A(U), A(V)] &= \max_{a\leq t\leq b} |[A(U)](t) - [A(V)](t)|, \\
&= \max_{a\leq t\leq b} \left| \lambda \int_a^b K(t,s) U(s)\, ds + \varphi(t) - \lambda \int_a^b K(t,s) V(s)\, ds + \varphi(t) \right|, \\
&= \max_{a\leq t\leq b} |\lambda| \left| \int_a^b K(t,s) [U(s) - V(s)]\, ds \right|.
\end{aligned}$$

Puisque K est continue sur le compact $[a,b] \times [a,b]$, il existe réel $M > 0$ telle que $|K(t,s)| \leq M$ pour $(t,s) \in [a,b] \times [a,b]$, et donc :

$$\begin{aligned}
d_\infty [A(U), A(V)] &\leq \max_{a\leq t\leq b} |\lambda| \left(\int_a^b |K(t,s)| \, |[U(s) - V(s)]|\, ds \right), \\
&\leq |\lambda| . M. \max_{a\leq t\leq b} \left(\int_a^b |[U(s) - V(s)]|\, ds \right), \\
&\leq |\lambda| . M. \max_{a\leq t\leq b} |U(s) - V(s)| \int_a^b ds, \\
&\leq |\lambda| . M. (b-a) \|U - V\|_\infty .
\end{aligned}$$

L'application affine A est donc une contraction stricte si l'on a la condition $|\lambda| . M. (b-a) < 1$ c'est-à-dire si $|\lambda|$ “assez petite” :$|\lambda| < \frac{1}{M.(b-a)}$.
Le théorème du point fixe permet d'énoncer : l'équation intégrale admet une solution $U \in E$ telle que $A(U) = U$ si $|\lambda| < \frac{1}{M.(b-a)}$.

Méthodes des approximations successives

Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction strictement contractante de constante $k \in]0,1[$, tel que f est dérivable sur $[a,b]$ avec :

Théorème 3.1.1 $0 < |f'(t)| \leq k < 1, \forall t \in [a,b]$, (*théorème des accroissements finis.*)

D'aprés le théorème des suites récurrentes, la suite (t_n) définie par :

$$\begin{aligned} t_0 &\in [a,b]\,, \\ t_1 &= f(t_0)\,, ..., t_{n+1} = f(t_n)\,. \end{aligned}$$

Est convergente vers le point fixe t de f sur $[a,b]$.

Si

$$0 < f'(t) < 1.$$

La suite des itérés est monotone : croissante (Respectivement, décroissante) si t_0 a été pris à gauche (Respectivement, à droite) du point fixe t.

Si

$$-1 < f'(t) < 0.$$

Les Deux termes consécutifs de la suite encadrent la solution cherchée.
Soit à présent l'équation $g(t) = 0$, où $t \in [a,b]$, g vérifiant :
$g(a) < 0$ et $g(b) > 0$, g dérivable sur $[a,b]$ et :

$$\exists c, \exists C \in \mathbb{R}, 0 < c \leq g'(t) \leq C \text{ pour } a \leq t \leq b.$$

Posons

$$f(t) = t - \lambda g(t)\,.$$

Où

$\lambda \neq 0$ et choisir au mieux ultérieurement l'équation proposée $g(t) = 0$ équivaut à la recherche d'un point fixe pour f.

3.2 Dans les espaces topologiques :

Ce théorème donne l'existence d'un point fixe (mais pas nécessairement l'unicité) pour une fonction continue sur une boule fermé dans un espace de dimension finie.

Un théorème du point fixe topologique

Théorème 3.2.1 *:*
Soit k une partie non vide, compacte et convexe de $\mathbb{R}^n$ et : $f : k \to k$ une fonction continue, il existe $x \in k$ tel que $f(x) = x$.

Rétraction

Définition 3.2.2 *:*
On appelle rétraction de l'espace topologique E sur un fermé F de E toute fonction continue de E dans F qui est l'identité sur F.

Théorème 3.2.3 *:*
Soit K un compact convexe dans un espace de Hilbert E. Alors il existe une rétraction 1-Lipschitzienne $T_k : E \to E$.

Lemme 3.2.4 *:*
Toute application continue de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle même admet un point fixe.

Preuve. :
Soit $x \in E$. Par compacité de K, il existe $a \in K$ tel que

$$\|x-a\| = \inf_{k \in K} \|x-k\|.$$

Si $b \in K$ est tel que

$$\|x-b\| = \inf_{k \in K} \|x-k\| = \|x-a\|.$$

Alors

$$\left\langle a-b, x-\frac{a+b}{2} \right\rangle = 0.$$

Et donc

$$-\left\|x-\frac{a+b}{2}\right\|^2 + \|x-a\|^2 = \left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2.$$

Or $\frac{a-b}{2} \in K$ par convexité de K et donc

$$\left\|\frac{a-b}{2}\right\|^2 \leq \|x-a\|^2 - \left\|x-\frac{a+b}{2}\right\|^2 \leq 0.$$

Donc $a = b$. Comme pour tout $x \in E$, il existe un unique $a_x \in K$ tel que

$$\|x-a_x\| = \inf_{k \in K} \|x-k\|.$$

Alors $T_K(x) = a_x$ définit une application $T_K : E \to K$ qui est l'identité sur K.
Pour montrer que T_K est continue, remarquons d'abord que pour tout $k \in K$ et tout

$t \in [0,1]$, on a $(1-t)\,T_K(x) + tk \in K$ et donc

$$\begin{aligned} & \|x - T_K(x)\|^2 + 2t\,\langle x - T_K(x), k - T_K(x)\rangle + t^2 \|k - T_K(x)\|^2 \\ = & \; \|x - T_K(x) - t\,(k - T_K(x))\|^2, \\ \geq & \; \|T_K(x) - x\|^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\langle x - T_K(x), -b + T_K(x)\rangle \geq 0.$$

Pour tout $k \in K$.
Donc $\forall\,(u_1,u_2) \in E^2$, on a :

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\|^2 &= \|(u_1 - T_K(u_1)) + (T_K(u_1) - T_K(u_2)) + (T_K(u_2) - u_2)\|^2, \\ &= \|T_K(u_1) - T_K(u_2)\|^2 + 2\,\langle T_K(u_1) - T_K(u_2), u_1 - T_K(u_1) + T_K(u_2) - u_2\rangle + \|u_1 - T_K \\ &\geq \|T_K(u_1) - T_K(u_2)\|^2. \end{aligned}$$

Soit K un compact convexe de $\mathbb{R}^n$. Quitte à remplacer K par λK et f par $x \in \lambda K \to \lambda f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \in \lambda K$ on peut supposer que $K \subset B_f(0,1)$. Donc, T_K est une rétraction de $B_f(0,1)$ sur K. Soit $F : K \to K$ une fonction continue. Alors $\overline{F} = F \circ T_K : B_f(0,1) \to B_f(0,1)$ est continue.
Si le théorème de Brouwer est démontré pour $B_f(0,1)$, alors il existe $x \in B_f(0,1)$ tel que $x = \overline{F}(x) = F(T_K(x))$. Comme F est à valeurs dans K, on a $x \in K$ et donc $T_K(x) = x$, ce qui implique que x est un point fixe de F sur K. ∎

Le cas K=$B_f(0,1)$

On dit qu'un espace topologique a la propriété du point fixe si toute fonction continue $f : E \to E$ possède un point fixe, et la boule $B_f(0,1)$ a la propriété du point fixe en toute dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Lemme 3.2.5 *:*
S'il existe une rétraction de B_{2n} sur S_{2n}, il existe un champ de vecteurs par tout non nul sur S_{2n}.

Preuve. :
Voir (7). ∎

3.3 Applications du point fixe dans un espace affine

Définition 3.3.1 *:*
Soit $\overrightarrow{E}$ un espace vectoriel et A un ensemble quelconque non vide.
On dit que A est un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$ s'il existe une application bijective :

$$\begin{aligned} \Phi \quad &: \quad E \to A, \\ (\overrightarrow{u}, p) \quad &\to \quad \Phi(\overrightarrow{u}, p). \end{aligned}$$

Tel que vérifiée trois conditions :

1. $(p + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v} = p + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E, \forall p \in A,$
2. $p + \overrightarrow{u} = p \iff \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0},$
3. $\forall p, q \in A, \exists! \overrightarrow{u} \in E$ *tel que* $q = p + \overrightarrow{u}.$

Application affine

Définition 3.3.2 *:*
Soit A_1 et A_2 deux espaces affines de direction $\overrightarrow{E_1}$ et $\overrightarrow{E_2}$.
Une application $f : A_1 \to A_2$ est dite affine s'il existe une application linéaire $\Phi : E_1 \to E_2$ tel que :

$$\overrightarrow{f(p) f(q)} = \Phi(\overrightarrow{pq}), \forall p, q \in A_1.$$

Notation 3.3.3

$$\Phi = \overrightarrow{f}.$$

Sous-espace affine

Définition 3.3.4 *:*
Soit A un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$, et soit B une partie de A non vide.
B est un sous-espace affine de A s'il existe $p \in B$ et il existe un sous-espace vectoriel $\overrightarrow{F}$ de $\overrightarrow{E}$ tel que :

$$\begin{aligned} B &= p + F, \\ &= \{p + \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \in F\}. \end{aligned}$$

Point fixe

Définition 3.3.5 *:*
Soit $f : A \to A$ une application affine.

Un point fixe de f est un point $p \in A$ tel que :

$$f(p) = p.$$

On pose :

$$Fix(f) = \{p \in A / f(p) = p\}.$$

L'ensemble des points fixes de f.
$Fix\ f$ peut être vide.

Point fixe d'une application affine

Soient $\overrightarrow{E}$ un espace vectoriel et E un espace affine de dimension finie et de direction $\overrightarrow{E}$.
Soient $\overrightarrow{f}$ une application linéaire et $f : E \to E$ une application affine.

Proposition 3.3.6 *:*
Soit f une application affine de E dans E, l'ensemble des points fixes de f est le sous-espace affine passant par un point fixe et de direction $\ker\left(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}\right)$.
Remarquons d'abord que $\ker\left(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}\right)$ *est le sous-espace vectoriel des vecteurs fixes par $\overrightarrow{f}$, c'est donc le sous-espace propre de $\overrightarrow{f}$ associé à la valeur propre 1 si 1 est valeur propre de $\overrightarrow{f}$ et il est réduit au vecteur nul sinon.*

Preuve. :
S'il existe un point C de E fixe par f ; montrons que l'ensemble X des points fixes de f est égal $A = C + \ker\left(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}\right)$.Soit q un point de A, Alors on a l'égalité

$$f(a) = c + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{ca}).$$

or, puisque les points c et a sont dans A, le vecteur $\overrightarrow{ca}$ appartient à la direction de A, soit $\ker\left(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}\right)$, donc le vecteur $\overrightarrow{ca}$ est fixe par $\overrightarrow{f}$ et $f(a)$ vaut a, c'est -à -dire que le point a appartient à x .Soit b un point de x, on a l'égalité

$$\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{cb}\right) = \overrightarrow{f(c)\,f(b)} = \overrightarrow{cb}.$$

donc le vecteur $\overrightarrow{cb}$ est dans $\ker\left(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}\right)$ et le point $b = c + \overrightarrow{cb}$ appartient à A.

Théorème 3.3.7 *:*
Soit f une application affine de E dans E (de dimension finie toujours) et soit $\overrightarrow{f}$ l'ap-

plication linéaire associée à f, Alors l'application f admet un unique point fixe si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$.

■

Preuve. :

Si f admet un unique point fixe. Alors, l'ensemble des ses points fixes est un sous-espace affine de direction $\ker\left(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}\right) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ donc 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$. Réciproquement, si 1 n'est pas valeur propre de f, nous avons à démontrer un résultat d'existence et d'unicité

Existence :

Fisons un point a de E et cherchons à déterminer un point fixe c, on a les équivalences suivantes :

$$f(c) = c \Longleftrightarrow f(a) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{ac}) = a + \overrightarrow{ac} \Longleftrightarrow \overrightarrow{f(a)\,a} = \left(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}\right)(\overrightarrow{ac}).$$

Comme E est de dimension finie et que $\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}$ est injective $\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}$ est surjective, le vecteur $\overrightarrow{f(a)\,a}$ a donc un antécédent $\overrightarrow{v}$ par $\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}$, posons $c = a + \overrightarrow{v}$, il vous reste à vérifier que ce point c défini à partir du point a est un point fixe.

L'existence résulte donc de la surjectivité de l'application $\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}$.

Unicité :

Puisque f admet un point fixe, l'ensemble de ses points fixes est un sous-espace affine de direction

$$\ker\left(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{E}}\right) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}.$$

(Injective), donc le point fixe est unique. ■

Chapitre 4

Quelques théorèmes du point fixe

Résumé :

Dans ce chapitre, on étudie quelques théorèmes du point fixe, étant donnés un ensemble E et une application $f : E \to E$, ces théorèmes donnent certaines conditions sous lesquelles f admet un point fixe dans E ces théorèmes sont importants dans les mathématiques car il y a plusieurs applications.

4.1 Théorème de Kakutani

Théorème 4.1.1 *:*
Soit E un espace vectoriel normé, K un compact convexe de E et $T_i : K \to K$ une famille quelconque d'applications affines continues qui commutent deux à deux. Alors il existe un point fixe commun à tous les T_i.

4.2 Théorème de Brower

Théorème 4.2.1 *:*
$S \neq \phi$ désignant une partie convexe et compacte d'un espace vectoriel normé de dimension finie, toute application continue $f : S \to S$ admet au moins un point fixe.

4.3 Théorème de Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach.

Théorème 4.3.1 *:*
Soient E un espace de Banach et $K \subset E$ convexe et compact. Alors toute application continue $f : K \to K$ possède un point fixe.

4.4 Théorème de Banach

Théorème 4.4.1 *:*
Soit (E, d) un espace métrique complet et f une application de E dans E, si f est contractante alors f admet un unique point fixe, de plus quelque soit l'élément a de E, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

Converge vers ce point fixe.

4.5 Théorème de Picard

Théorème 4.5.1 *:*
Soit (E, d) un espace métrique complet et $f : E \to E$ une application contractante

($Lipschitzienne$ *de rapport* $k < 1$) *Alors* f *possède un unique point fixe* $a \in E$ *et pour tout point initial* $x_0 \in X$, *la suite itérée* $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *avec* $x_0 \in E$ *quelconque et* $x_{p+1} = f(x_p)$ *convergente vers* a.

4.6 Théorème de Caristi

Théorème 4.6.1 *:*
Soit $\Phi : X \to]-\infty, +\infty[$ *une fonction propre semi-continue inférieurement bornée inférieurement. Soit* $F : X \to X$ *une fonction multivoque telle que pour tout* $x \in X$ *il existe* $y \in F(x)$ *tel que :*

$$d(x, y) \leq \Phi(x) - \Phi(y).$$

4.7 Théorème de Krasnoselskii

Théorème 4.7.1 *:*
Soit X *un espace de Banach et* D *un ensemble non vide de* X *fermé borné et convexe.* U,C *deux applications de* D *dans* X *telles que* U *est une contraction et* C *est compact et continue tel que :*

$$Ux + Cy \in D, \forall x, y \in D.$$

Alors : $\exists x \in D$ *tel que :*

$$Ux + Cx = x.$$

Bibliographie

[1] Introduction à la topologie générale [Fidele Ayissi-Etémé] .

[2] Mathématique topologie et analyse.[Guy Auliac-Jean-Yves caby] .

[3] Topologie calcul différentiel et variable complexe [Jean Saint Raymond] .

[4] Topologie et analyse fonctionelle [Y.sonntag] .

[5] http ://mémoire(1).pdf-Adobe Reader.

[6] http ://point-fixe-TNS 21.

[7] http ://Univérsité de Nice-Sophia Antipolis mémoire de master 1 de mathématique 2006-2007 [Clémence Minazzo-Kelsey Rider] .