الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليــم العالــي والبحــث العلمــي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :...............

Centre Universitaire de Mila

Institut des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques & Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de licence

en :-Filière Mathématiques Fondamentales

Thème

Quelques Méthodes de régularisation de problèmes mal posés

Dirigé par : AHMED YAHIA Rakia

Préparé par : AZZOUNE Ramadan
BENHAMMADA Lokmane
BOUDRAA Abderrahim
HEMAMDA Nadjib

Année universitaire : 2013/2014

Remerciements

Nous tenons à remercier tout d'abord Dieu, le tout puissant pour la volonté et le courage qu'il mons donné pour mener à terme ce travail.

Nous tenons à remercier notre encadreur AHMED YAHIA Rakia, qui nous a encouragé en nous faisant part d'observations constructives et pour ses précieux conseils.

Nous remercions nos parents, pour tous les sacrifices qu'ils ont consentis pour nous permettre de suivre nos études dans les meilleures conditions et de nous avoir encouragé tout au long de ces années.

En fin, Nous tenons à remercier tous les amis au Département de mathématiques et informatique, et ailleurs, pour leur disponibilité et leur soutien.

Table des matières

Introduction Générale

La notion d'un problème mathématique mal-posé est apparut dans les discussions du mathématicien français J. Hadamard [2] dans son ouvrage "Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations", après avoir introduit, une vingtaine d'années avant, la notion d'un problème bien-posé qui doit satisfaire, d'après lui, à trois propriétés : l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution.

La perte d'une des propriétés définit un problème dit mal-posé. C'était une étape pour la classification des models mathématiques de problèmes de physique associés à des équations différentielles.

Les méthodes générales de l'analyse mathématique ont bien était adaptées pour la résolution des problèmes bien-posés, cependant, il n'était pas clair dans quel sens les problèmes mal-posés pouvaient avoir solution. Plusieurs mathématiciens comme Tikhonov, John, Ivanov et d'autres ont travaillé sur la théorie et les méthodes de résolution des problèmes mal-posés.

Ils ont pu donner une définition mathématique précise "des solutions approchées" pour des classes générales de ces problèmes. Aujourd'hui, ces problèmes sont un cadre de recherche très riche.

Dans la littérature mathématique, plusieurs méthodes ont était proposées pour résoudre les problèmes mal-posé, on cite "la méthode de quasi-solution" de Tikhonov, "la méthode de quasi-réversibilité" par lattès et Lions en 1967, "la méthode de la convexité logarithmique" développée par John (1960) et autres méthodes.

Ce mémoire, classe de problèmes mal posés, est consacré à la définition d'un problème mal-posé avec beaucoup d'exemples, et quelques méthodes de régularisation. On présente en particulier le principe de : la méthode de Tikhonov, le "discrepancy principle" de Morozov, la méthode de Landweber et la méthode de quasi-réversibilité.

Chapitre 1

Définition et Exemples de problèmes mal-posés :

1.1 Définition d'un problème mal-posé :

Avant de parler de problème mal-posé, il faut tout d'abord définir ce qu'est un problème bien posé. :

On a :

$$Au = f,\ A \in L\ (\mathbf{H},\ \mathbf{F}) \tag{1.1}$$

H et F sont des espaces de HILBERT.

Le mathématicien français Jaques Hadamard [2] a définit le concept d'un problème bien-posé.

Définition 1.1.1 *: Un problème est dit bien posé ($Au = f$), si les trois conditions ci-dessous sont satisfaites :*

1. *pour tout $f \in F$ il existe une solution $u_* \in \mathbf{H}$.*
2. *pour tout $f \in F$ la solution $u_* \in \mathbf{H}$ est unique.*
3. *la solution u_* dépend de manière continue des données.*

Si l'une des 3 conditions n'est pas satisfait alors ce problème est dit mal posé.(ill-posed en anglais).

* Bien entendu, ces notions doivent être bien précisées par le choix des espaces, ou les Topologies, dans lesquelles les données et la solution évoluent.

* Un modèle physique étant fixé, mais en réalité les données expérimentales sont en générale bruitées, et rien ne garantit que de telles données proviennent de ce modèle, même pour un autre jeu de paramètres.

* Si une solution existe, il est parfaitement concevable que des paramètres différents conduisent aux mêmes observations.

* Le fait que la solution d'un problème puisse ne pas exister, n'est pas une difficulté sérieuse. Il est habituellement possible de rétablir l'existence en relaxant la notion de solution (procédé classique en mathématiques).

* Si un problème a plusieurs solutions (non-unicité) c'est une chose plus sérieuse, il faut un moyen de choisir entre elles. Dans ce cas, il faut ajouter des informations supplémentaires pour minimiser le nombre des solutions (une information a priori).

* Le manque de continuité est sans doute le plus problématique, en particulier, en vue d'une résolution approchée ou numérique. Cela veut dire qu'il n'est pas possible (indépendamment de la méthode numérique choisie) d'approcher de façon satisfaisante la solution du problème mal posé, puisque les données disponibles seront bruitées donc proches mais différentes des données "réelles".

1.2 Exemples de problèmes mal posés :

Exemple 1.2.1 *:* [13] *(Systeme matrice linéaire d'équations mal conditionneé)*

$$A * X = B \tag{1.2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 100.1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11+\alpha \\ 110.1 \end{pmatrix}$$

Transformé en un système linéaire d'équations :

$X_1 + 10X_2 = 11 + \alpha$

$10X_1 + 100.1X_2 = 110.1$

$\alpha = 0 \implies X_1 = 1,\ X_2 = 1$

$\alpha = 0.1 \implies X_1 = 100.1,\ X_2 = -9$

** Une faible variation de la valeur de α conduitent à des résultats très éloignées.*

Exemple 1.2.2 *: (Racines réelles du polynôme)*

$$Q(X) = X^2 + 2X + S \tag{1.3}$$

Donc on a deux racine réel si $S \leq 1$ *et aucune racine si* $S > 1$.

$$\Delta = 4 - 4S$$

Si $S > 1$ *; pas de racines.*

Si $S \leq 1$ *; deux racines distinctes.*

Si $S = 1$ *; une racine double.*

** Au voisinage de la valeur* S*, nous trouvons différentes solutions à équation* $Q\,(X)$ *malgré que le changement de la valeur de* S *est trop petit.*

Exemple 1.2.3 *: (Différentiation d'une fonction)*

Soit $f \in C^1\,[0,1]$

Si $f_n(t) = f\,(t) + \dfrac{1}{n}\sin(n^2\,t)$ *, pour* $n \to \infty$

$$\parallel f_n - f \parallel_\infty \to 0, \parallel f_n' - f' \parallel_\infty \to \infty$$

Pour plus de détail on va observer un exemple de Calcul de la dérivée :

Supposons qu'on cherche a calculer la dérivée $f\,'(x)$ *d'une fonction* $f\,(x)$ *a partir d'une observation bruitée* $f^{\,\alpha}(x)$*, telle que*

$$|f\,(x) - f^{\,\alpha}(x)| < \alpha \textit{ pour tout } x.$$

La fonction f *est supposée différentiable mais sur l'observation bruitée aucune hypothèse n'est imposée.*

Pour calculer la dérivée on pourrait utiliser l'approximation suivante :

$$f\,'(x) \approx \frac{f^{\,\alpha}(x+h) - f^{\,\alpha}(x-h)}{2h}$$

** Pour approcher la dérivée avec une grande précision, on devrait prendre* $h \to 0$.

Cependant, si h *est trop petit, les erreurs de données seront amplifiées :*

$$\frac{f\,(x+h) - f\,(x-h)}{2h} - \frac{f^{\,\alpha}(x+h) - f^{\,\alpha}(x-h)}{2h} \sim O\,(\frac{\alpha}{h})$$

Ceci est une indication que le problème de différentiation est un problème mal posé.

Exemple 1.2.4 *: (Le problème de Cauchy pour l'équation de Laplace)*

On considère le problème :

$$\begin{cases} \mathbf{\Delta} \quad \mathbf{U} = \mathbf{0}\,; \quad \mathbf{Y} > \mathbf{0} \\ \mathbf{U}\,|_{\mathbf{y=o}} = 0 \\ \mathbf{U}_y \;\; |_{\mathbf{y=o}} = \mathbf{V}_n\,(X) = \dfrac{\sin(n\;x)}{n} \\ \mathbf{U} = \mathbf{U}\;\;(x,\;y)\,,\;\; x \in R, \;\; y > 0 \end{cases}$$

C'est clair que :

$$\mathbf{U}(x,\ y) = \frac{\sin\ (n\ x)}{2n^2}(\exp(ny) - \exp(-ny)) \qquad (N)$$

(N) est une solution du problème et elle est unique (par l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour les équations elliptiques) .

** Cet exemple appartient à J. Hadamard, et il montre que la condition de Cauchy peut être arbitrairement petite lorsque la solution tend vers l'infini quand $n \to \infty$, pour tout point $(x,\ y)$, $y > 0$, $x \neq\ n^*\pi$. Donc ce problème est mal-posé.*

Exemple 1.2.5 *: Le problème de Neumann pour une fonction $u(x)$ définie sur un intervalle $[a,\ b]$:*

$$\begin{cases} u''(x) = 0 \\ u'(a) = u_0 \\ u'(b) = v_0 \end{cases}$$

Si $u_0 \neq v_0 \Rightarrow \nexists u(x)$ (la solution n'existe pas).

Si $u_0 = v_0; u\ (x) = u_0 x + c\ /\quad c$ une constante arbitraire $\Rightarrow$ la solution est infinie.

** Le problème n'admet pas de solution unique Donc le problème est mal-posé.*

Exemple 1.2.6 *: (Le problème de Cauchy)*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x\ , 0) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x; 0) = \frac{1}{n}\exp(-n^2\ x) \end{cases}$$

Admet une solution de la forme :

$$u(x,\ t) = \frac{1}{n^2}\frac{\exp(nt) - \exp(-nt)}{2}\exp\left(-n^2\ x\right)$$

Si $n \to \infty$, en $t = 0$, u tend uniformément vers 0 ainsi que sa dérivée partielle en temps, alors que $u\ (x,\ t)$ diverge dans chaque région pour $t > 0$.

Donc le problème est instable au sens de Hadamard.

** Le manque de stabilité transformé ce problème a un mal posé.*

Exemple 1.2.7 *: (problème de programmation linéaire)*

La fonction $J\ (u) = u_2$ *il faut minimiser :*

$$\begin{cases} 0 \ \leq \ u_1 \leq \ \ 2,\ 0 \ \leq \ \ u_2 \ \leq \ \ 2 \\ g_1(u) = u_1 + u_2 - 1 \ \ \leq \ \ 0 \\ g_2(u) = -u_1 - u_2 + 1 \ \leq \ \ 0 \end{cases}$$

On voit clairement que le problème admet une seule et unique solution $u^* = (1, 0)$. *Maintenant, on considère l'indépendance de la solution* $u \in U = R^2$.

On a $g_2^\sigma \in Z = C\ [0, 2]$ *approximer a la fonction donnée* g_2.

On remplace $g_2(u)\ \leq\ 0$ *par :*

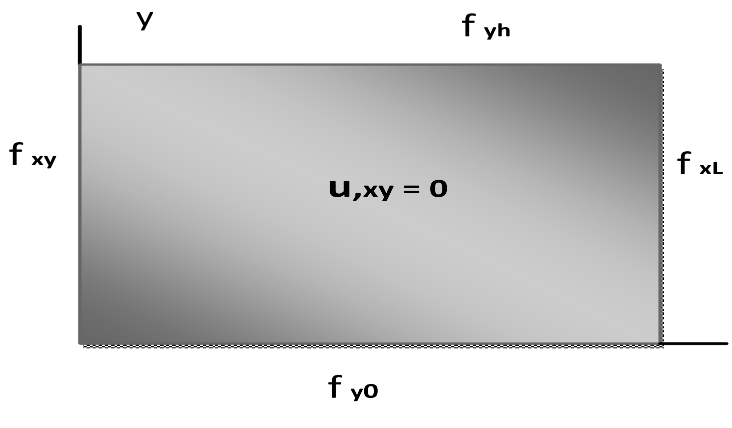
$$g_2^\sigma(u) = -(1+\sigma)u_1 - u_2 + 1 \quad \leq \quad 0$$

Et on a :

$$p_z(g_2, g_2^\sigma) = 2 \mid \sigma \mid \rightarrow 0 \ pour \ \ \sigma \ \rightarrow 0$$

* *Quelque soit, pour* $\sigma\ \in (-1, 0)$, *le problème perturbée admet une solution unique* $u_\sigma^* = (0, 1)$, *et* $P_u(u^*, u_\sigma^*) = \sqrt{2}$.

Exemple 1.2.8 *:* [10] *On considère un domaine rectangulaire* $]\ 0,\ L[X\ [\ 0,\ h]$, *sur lequel on cherche un champ scalaire* u *connu sur les bords du domaine et satisfaisant l'équation suivante :*



$$\begin{cases} u_{x\ y} = 0 \quad dans \quad]0, L[X\ ]0, h[\\ u\ (x, 0) = f_{y0}(x) \\ u\ (x, h) = f_{yh}(x) \\ u(0,\ y) = f_{x0}(y) \\ u\ (L,\ y) = f_{x\ L}(y) \end{cases}$$

Les solutions de l'équation aux dérivées partielles sont nécessairement de la forme :

$$u\ (x,\ y) = U(x) + V(y)$$

Si bien qu'aucune solution n'existe au problème posé si la donnée $f = (f_{x0}, f_{x_L}, f_{y0,} f_{y\ h})$ *ne satisfait pas les conditions suivantes :*

$$f_{y0}(x) - f_{yh}(x) = C_y = cste \quad et \;\; f_{x0}(x) - f_{xL}(x) = C_x = cste.$$

Il sagit ici d'un problème hyperbolique de « propagation » dans lequel on tente d'imposer la valeur du champ sur tout le bord du domaine. En effet, en effectuant le changement de variables :

$$X = \frac{y + x}{2}, t = \frac{y - x}{2}$$

L'équation devient l'équation des ondes : $U_{xx} - U_{\ tt} = 0$

Physiquement, on conçoit que l'on ne peut imposer une valeur quelconque à l'amplitude de l'onde à un instant donné si l'on se donne son amplitude à l'instant initial. C'est le sens de la condition sur la donnée f*.*

Exemple 1.2.9 *: Cette mise au point montre l'intérêt de l'utilisation d'une méthode de régularisation.*

Considérons par exemple le problème simplifié suivant. Soit ϕ *la solution du problème de la chaleur unidimensionnel :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \;\; ; \, sur \; [0, L] X \; [0, T] \\ \phi \; (0) = \; \phi(L) = 0 \, ; \, sur \; [0, T] \\ \phi \; (x, \; T) = f(x) \, ; \, x \in [0, L] \end{cases}$$

On connaît la condition finale $\phi(x, T) = f(x)$ *et on cherche à déterminer le champ à l'instant initial :*

$$g(x) = \phi(x,\ 0)$$

Si on note $\{\mu_{\ k}, \psi_k\}$ *l'ensemble des solutions du problème de valeurs propres :*

$$\begin{cases} -\dfrac{d^{\ 2}\psi}{dx^2} = \mu\ \psi\ \ dans\ [0, L] \\ \psi\ (0)\ =\ \psi(L) = 0 \end{cases}$$

Avec $\int_{0k}^{L\psi 2} dx = 1$*, alors la température peut être écrite comme combinaison linéaire* *des fonctions propres $\mu_{\ k}$:*

$$\phi(x,\ t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_{\ k}(t)\psi_k(x).$$

La fonction inconnue $g(x)$ peut également être décomposée sur la même base :

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(x)$$

Avec :

$$c_k = \int_0^L g(x)\psi_k(x)d\ x$$

En remplaçant l'expression de $\phi(x,t)$ dans le problème initial, on obtient le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d\ v_k\ (t)}{d\ t} + \mu_k v_k(t) = 0\ dans\ [0, L] \\ v_k(0) = c_k \end{cases}$$

Pour tout k. La résolution de ce système d'équations permet alors d'écrire la température sous la forme :

$$\phi(x,\ t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(x) dx \exp(-\mu_k t)$$

En utilisant cette expression, le champ final $f(x)$ s'écrit :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(x) \exp(-\mu_k T)$$

$$= \int_0^L g(x) K(x,\ \varrho) d\ \varrho$$

Avec :

$$K(\varrho) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\mu_k T)\psi_k(x)\psi_k(\varrho).$$

Le théorème de Picard (Engl et al, 1994) précise alors que le problème inverse admet une solution si et seulement si :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_k|^2}{(\exp(-\mu_k T))^2} < \infty$$

Où $f_k = \int_0^L f(x)\psi_k(x)\ dx$ *La solution* $g(x)$ *est dans ce cas donnée par :*

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k \psi_k(x)}{\exp(-\mu_k T)}$$

** Cette dernière expression donne un éclairage sur la nature mal posée du problème. Si une petite perturbation est ajoutée aux données, telle que* $f^{\,\rho} = f + \rho\ \psi_k$*, on obtient la solution perturbée* $g^{\rho} = g + \rho\ \psi_k \exp(\mu_k T)$*. Or, pour tout opérateur auto-adjoint d'inverse compact (tel que le Laplacien), les valeurs propres* μ_k *tendent vers l'infini :*

$$\underset{k \to +\infty}{lim} \mu_k = +\infty.$$

Exemple 1.2.10 *: Considérons l'équation différentielle :*

$$\begin{cases} u\,'(x) & = u\ \ (x) \ \ -1 \\ & u\ (0) = 0 \end{cases}$$

Cette équation admet comme solution :

$$u\,(x) = \exp(x) - 1$$

Si la condition initiale est donnée par $u(0) = \varrho$
La solution est alors :

$$v\,(x) = (1 + \varrho)\exp(x) - 1$$

De sorte que la différence s'écrit :

$$v\,(x) - u\,(x) = \varrho \exp(x)$$

Si x varie dans l'intervalle $[0; 30]$*, on a :*

$$v\,(30) - u\,(30) = \varrho \exp(30) \simeq 10^{13}$$

Si la précision des calculs est de 10^{-10}*, le problème est numériquement mal posé.*

** La perturbation de la précision des calculs cause des erreurs dans les résultats, ce qui rend le problème mal posé.*

Exemple 1.2.11 *Soit le problème suivant :*

$$Au = f$$

$A \in L\,(H,\,F), H, F$ des espaces de Hilbert.

** Si A est compact et $R(A)$ est non fermé $\Longrightarrow A^{-1}$ est non borné $\Longrightarrow$ la troisième (la continuité) n'est pas vérifiée.*

Alors Le problème reste mal posé.

Chapitre 2

Quelques Méthodes de régularisation de problèmes mal posés :

2.1 Méthode de Tikhonov :

Théorème 2.1.1 *: Considérons le problème :*

$$A\ x = y \qquad (1)$$

Pour trouver la solution de l'équation $A\ x = y$, l'idée était de faire la régularisation (c-à-d : pour trouver la solution de l'équation (1)*, on trouve la solution d'une autre équation avec paramètre α (α trés petit) telle que la limite de la deuxième solution soit une solution de l'équation* (1) *).*

On note que : $U\ (X)$ est un ensemble de tous les sous-espaces fermés dans X.

R est un opérateur continu en y si :

$$\| y^{\,0} - \ y \| \longrightarrow 0 \quad \Longrightarrow d(Ry^0,\ R\ y) \longrightarrow 0$$

La famille des opérateurs continus R_α est dans le voisinage de AX_M :

$$R_\alpha \ :\ AX_M \ \longrightarrow U\ (X)$$

R_α : la régularisation de l'équation (1) *dans X_M alors :*

$$\lim_{\alpha \to 0} R_\alpha \; A \; x = x \qquad pour \quad x \in \; X_M \tag{2}$$

Où : α est un paramètre positif.

***Définition 2.1.2** :*

On choisit un sous-ensemble $X_M \subset \; X$. X_M s'appelle " classe correctrice" s'il y a les deux conditions suivantes :

1) La solution est unique dans X_M. C-à-d :

$$Ax = Ax^0 \Longrightarrow x = x^0$$

2) La solution $x \in X_M$ est stable. C-à-d :

$$\| \quad Ax - Ax^0 \| \longrightarrow 0 \Longrightarrow \| \; x \; - x^0 \; \| \longrightarrow 0$$

ω est une fonction telle que :

$$\| \; x - x^0 \; \| \leq \; \omega \; \| \; Ax - Ax^0 \; \|_Y$$

Cette relation s'appelle "estimation de stabilité" :
Si :

$$\| \; Ax - Ax^0 \; \|_X \longrightarrow 0 \Longrightarrow \omega \; \| \; Ax - Ax^0 \; \|_Y \longrightarrow 0 \Longrightarrow \| \; x - x^0 \; \| \longrightarrow 0$$

Donc : on a la stabilité.

Proposition 2.1.3 *: X_M est compact et la solution est unique alors : la solution est stable.*

Construction de la régularisation :

Nous décrivons en général la méthode qui s'appelle "la stabilisation fonctionnelle" définie par Tikhonov. On considère que μ est la stabilisation fonctionnelle pour la classe correctrice X_M s'il y a les deux conditions suivantes :

1- μ semi-continu inférieurement sur X.

2- La partie $X_{M,\,\tau} = \{x \in X_M \;, \mu(x) \leq \tau \; \}$ est bornée dans X , $\forall \tau$.

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} min \; (\|Av - y\|_Y^2) + \alpha \; \mu(v)) \\ \qquad\qquad v \; \in X_M \end{cases} \qquad (s)$$

Lemme 2.1.4 *: Si $X_{M,\ \tau}$ est compact dans X , $\forall\tau$. Alors $R_\alpha(y)$ solution du problème (s) existe et R_α est la régularisation .*

Proposition 2.1.5 *: Soit :*

$$\phi(v,y) = \| Av - y \|_Y^2 + \alpha\mu(v)$$

Est semi-continu inférieurement.

La régularisation de Tikhonov devient un problème d'optimisation donc la solution est un point minimal. On a d'après le lemme précédant :

Si $X_{M,\ \tau}$ est compact dans X , $\forall\tau$, alors : $R_\alpha(y)$ la solution du problème existe et R_α est la régularisation. Et Si X ,Y sont deux espaces de Hilbert, $x^{\,0} \in X$ et $M\ (v) = \| v - x^0 \|_X^2$, donc le problème :

$$(\min \| Av - y \|_Y^2 + \alpha M(v))$$

Admet un minimum unique $R_\alpha(y)$ qui est une solution unique de ces problèmes tel que $R_\alpha$est la régularisation.

Dans la régularisation de Tikhonov [13] *en transforme l'équation de deuxième ordre en un problème d'optimisation.*

On trouve la solution exacte u par la transformation de Fourier telle que :

$$u\ (x,\ t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\ \xi t) \frac{v\ (x,\ \xi)}{v\ (1,\ \xi)} \hat{g}(\xi) d\ \xi$$

Et la solution approchée est un point minimal du problème d'optimisation.

(ii) On trouve la solution exacte u par la transformation de Fourier telle que :

$$u\ (x,\ t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\ \xi t) \frac{v\ (x,\ \xi)}{v\ (1,\ \xi)} \hat{g}(\xi) d\ \xi$$

Du problème :

$$\begin{cases} a\ (x)u_{xx} + b\ (x)u_x + c\ (x)u & x > 0,\ t > 0 \\ et & u\ (0,t) = f\ (t)\ ,\ L^2(\mathbb{R})\ ,\ t \geq 0 \\ et & u\ (x,0)\ ;\ x \geq 0 \end{cases}$$

Mais la solution approchée de ces problèmes par régularisation de Tikhonov est une fonction $h\ (x,\ t)$ *telle que :*

$$h\ (x,\ t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\ \xi\ t)\ \frac{\dfrac{v\ (x,\xi)}{v\ (1,\xi)}}{1+\alpha^2 \left| \dfrac{v\ (x,\ \xi)}{v\ (1,\xi)} \right|^2}\ \hat{g}_\delta(\xi)\ d\xi \quad \textit{tel que } \alpha = \frac{\delta}{E}$$

$$h(x,\ t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\ \xi\ t)\ \frac{\dfrac{v\ (x,\ \xi)}{v\ (1,\xi)}}{1+\alpha^2 \left| \dfrac{v\ (x,\ \xi)}{v\ (1,\xi)} \right|^2}\ d\xi$$

C'est une solution approchée par la méthode de Tikhonov. L'estimation da stabilité est du type Hölder :

$$\| u(x,.) - u_\delta(x,.) \| \quad \leq C\ \delta^{\frac{A(x)}{A(1)}} E^{(1-\frac{A(x)}{A(1)})} \qquad ; 0 < x < 1$$

2.2 Méthode de quasi-réversibilité :

La méthode de quasi-réversibilité (Q.R.) à été introduite par R. Lattès et J.-L. Lions [5].

L'idée générale de la méthode est de remplacer le problème original mal posé par un problème approché bien posé (Exemple : l'appliquer de différentes façons à l'équation de la chaleur, puis au système de Lorenz...), et ensuite d'utiliser les solutions de ce nouveau problème pour construire des solutions approchées du problème de départ (les solutions sont petites et dégénérent aux bords, "les solutions sont les opérateurs").

Ces opérateurs ainsi modifiés, sont généralement d'ordre different de l'opérateur initial et de même nature ou non.

Condition de Régularisation :

Définition 2.2.1 *: Soit* A *un opérateur auto-ajoint* ($A > 0$) *sur un espace de Hilbert* H.

Et soient V *et* H *deux espaces de Hilbert avec* $V \subset H$ *tel que* V *dense dans* H.

Soit V' *dual de* V *tel que* $V \subset H \subset V'$

Soit :

$$D(A(t)) = \{u/u \in V \quad ,\ A(t)u \in H\ \}$$

Donc $A(t)$ de l'opérateur dans H muni de la norme :

$$| u |_{D(A(t))} = (\| u \|^2 + | A(t)u |^2)^{\frac{1}{2}}$$

Est un espace de Hilbert.
Donc

$$D(A(t)) \subset H \quad \subset \ D(A(t))'$$

$\forall \ u \in H, \ t \longrightarrow A(t) \ u$ *on déduit :*

$$\| \ A(t) \ u \| \leq M \| \ u \|$$

Soit $A(t) \in L \ (V \ , V \ ')$:

$$\exists \lambda, \alpha > 0 \ ; \ A(t)u + \lambda \ | \ u \ |^2 \geq \alpha \ \| \ u \ \|^2 \ , \ \forall u \in V$$

Nous considérons le problème de trouver une $u : [0, T] \longrightarrow H$ telle que :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0 \ , \ 0 < t < T \\ u \ (T) = f \end{cases} \qquad (P)$$

Pour certains f prescrit de la valeur finale en H. Ce problème est mal-posé, c'est-à-dire même si la solution unique existe sur $[0, T]$, elle ne dépend pas en continuité de la valeur finale f.

Théorème 2.2.2 *: Soient F et I :*

$$\begin{cases} F \in L_2 \ ([0, T] \ , V \ ') \\ I \in H \ , \ I \quad \text{la valeur initiale} \end{cases}$$

Il existe unique u vérifiant : $u \in L_2 \ ([0, \ T] \ , \ V)$ $\quad u' = \dfrac{\partial u}{\partial t} \in L_2 \ ([0, \ T] \ , \ V \ ')$

Donc :

$$\begin{cases} u'(t) + A(t)u \ = \ F \\ u(0) = I \end{cases}$$

D'après le théorème 1 : si $F = 0$ *donc :*

$$\begin{cases} u'(t) + A(t)\ u = 0 \\ u\ (0) = I \end{cases}$$

Avec $u \in L_2\,([0,\ T]\,,\ V)$ $\quad u\prime \in\ L_2\,([0,\ T]\,,\ V\,')$ $\quad$ *alors* $f\ \in H$
On pose

$$J(I) = \mid u(T, I)\ - f\ \mid^2$$

D'après le théorème 1 on a :

$$\inf_{I \in H} J(I) = 0$$

Dans la méthode originale de quasi- réversibilité [5] *Lattes et Lions approximatif (P)*

On remplace le problème original par le problème $(P\,')$ *:*

$$\begin{cases} u'_\alpha(t) + A\ u_\alpha(t) - \alpha A^2 u_\alpha(t) = 0 \quad ,\ 0 < t < T \\ u_\alpha(T) = f \end{cases} \qquad (P\,')$$

Pour chaque $\alpha > 0$ *et :*

$$\begin{cases} u_\alpha \in\ L_2\,(\ [0,\ T]\,,\ D\,(\ A\,(t))) \\ u'_\alpha \in\ L_2\left(\ [0,\ T]\,,\ D\,(\ A\,(t))'\right) \end{cases}$$

Où l'operateur A *est remplacée par une perturbation, dans ce cas par* $A - \alpha A^2$.

Remarque 2.2.3 (fondamentale) *: Ils montrent que :*

$V_\alpha(t)$ *converge vers* f *lorsque* $\alpha \longrightarrow 0$ *, pour* $t < T$
En effet, on a :

$$\begin{cases} u'_\alpha + Au_\alpha - \alpha A^2 u_\alpha = 0 \\ u'_\alpha(T) = f \end{cases} \qquad (P)$$

Et :

$$\begin{cases} V_\alpha{}'(t) + AV_\alpha(t) = 0 \quad , 0 < t < T \\ V_\alpha(0) = u_\alpha(0) \end{cases} \qquad (P\,')$$

Ils utilisent la valeur initiale $V_\alpha(0) = u_\alpha(0)$ *dans* (p')

Et trouvent :

$$u_\alpha(A,t) = \exp(-(\alpha A^2 - A)(T-t)) \ \ f\ (A)$$

D'où

$$u_\alpha(A,0) = \exp(-(\alpha A^2 - A)T) \ \ f\ (A)$$

Alors

$$V_\alpha(A,t) = \exp(-\alpha A^2 T)\exp(A(T-t)) \ \ f\ (A)$$

Donc

$$V_\alpha(T) = \exp(-\alpha A^2 T) \ \ f\ (A)$$

Or , *lorsque* $\alpha \longrightarrow 0,$ $\exp(-\alpha A^2 T)\ \ f\ (A) \longrightarrow \ \ f\ (A)$ *dans* H.
Dans le cas générale nous prouvons que $V_\alpha(T) \longrightarrow f$ *lorsque* $\alpha \longrightarrow 0$.

Définition 2.2.4 *: Miller [7] traite ce problème de grande norme par trouver les perturbations optimales de l'operateur A.*

Il affirme qu'il devrait être possible de faire la norme de l'ordre de $-\alpha A^2 T$ *plutôt que* $\exp(-\alpha A^2 T)$ *et dérive des conditions sur la perturbation* $f\ (A)$ *pour obtenir les meilleurs résultats possibles.*

Comme dans les procédés ci-dessus, il approche (P) avec :

$$\begin{cases} v\,'(t) + f\ (A) v\ (t\ ) = 0,\ \ 0 < t < T \\ v\ (T\ ) = f \end{cases}$$

Et résout encore le problème en utilisant $v(0)$ *comme condition initiale. Miller appelle cette stabilité la quasi-réversibilité.*

Il approche le problème :

$$\begin{cases} u'(t\ ) + Au\ (t\ ) - Bu\ (t\ ) = 0\ \ , 0 < t < T \\ u\ (0) = f \end{cases}$$

Avec :

$$\begin{cases} u'(t\ ) + Au\ (t\ ) \ - Bu\ (t\ ) = 0\ \ , 0 < t < T \\ u\ (0) + \alpha\ u\ (T\ ) = f \end{cases}$$

Où B est une famille d'opérateurs équivalents à A, au sens :

$$\begin{cases} D\ (B(t)) = D\ (A(t)) \\ \mid B(\ t\ )u\ \mid \geq\ C\ \mid A(\ t\ )u\ \mid\ \ , \forall\ u \in\ D(A(t)) \end{cases}$$

Exemple 2.2.5 *: (Problème de Neumann)*

Soit le problème de Neumann : comme ci-dessus pour tout $\alpha > 0$, On utilise la valeur initiale $u_0 = v_\alpha(0)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + Au\ (\ t\ ) = 0 \\ u\ (x,\ 0) = I \\ \dfrac{\partial u(x,\ t)}{\partial V_A} = \sum_{i,j\ \ >1}^{n} A_{i\ j}\ \dfrac{\partial u}{\partial x_j} \cos(V_A, x_i) = 0\ sur\ \ \Omega \end{cases}$$

Dans ce cas, $D(A(t))$ dépend (en générale) de t ,on prendra comme problème QR :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\alpha}{\partial t} - \alpha A^2 u'_\alpha(t) + A\ u_\alpha(t) = 0 \\ u_\alpha(x,\ T) = f\ \ (x) \\ \dfrac{\partial u_\alpha}{\partial V_A} = 0\ sur\ \ \Omega,\ \dfrac{\partial}{\partial V_A} A\ u_\alpha(t) = 0\ \ sur\ \Omega \end{cases}$$

Exemple 2.2.6 *: (Ordre supérieur)*

Nous considérons u définie par :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + A^2\ u\ (t\ ) = 0\ \ x \in \Omega\ ,\ t > 0 \\ u\ (x,\ 0) = I(x)\ \ \ x \in \Omega \\ u\ |_\psi = 0 \qquad \dfrac{\partial u}{\partial V}\ |_\psi = 0 \end{cases}$$

Ce problème entre dans le cadre d'ordre supérieur, de la façon suivante, on rappelle que :

$$H^2(\Omega) = \{u/u,\ \frac{\partial u}{\partial x_i},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L_2(\Omega), \forall i,\ j\}$$

Espace de Hilbert pour la norme :

$$(\mid u \mid^2 + \sum_{i=1}^{n} \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \mid^2 + \sum_{i;j=1}^{n} \mid \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \mid^2)^{\frac{1}{2}}$$

Soit $H_0^2(\Omega)$ adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^2(\Omega)$.
On prend, avec les notation du Ordre supérieur : $V = H_0^2(\Omega)$
Le problème noter pour cela que :

$$H_0^2(\Omega) = \{u/u \in H^2(\Omega),\ u \ |_{\psi} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial V} \ |_{\psi} = 0\}$$

La méthode Q.R, donne alors :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\alpha}{\partial t} - \alpha A^4 u'_\alpha(t) + A^2 u_\alpha(t) = 0 \\ u_\alpha(T) = f \\ \mathbf{u} \ |_{\psi} = 0 \qquad \dfrac{\partial u}{\partial V} \ |_{\psi} = 0 \\ A^2 u_\alpha \ |_{\psi} = 0 \qquad \dfrac{\partial}{\partial V} A^2 u_\alpha \ |_{\psi} = 0 \end{cases}$$

2.3 Méthode de Landweber :

Les méthodes itératives sont des méthodes qui construisent une suite de solutions approchées qui (dans le cas non bruité) convergent vers la solution désirée.

Dans le contexte des problèmes inverses la situation est plus compliquée : en présence de bruit, la suite construite par la méthode itérative ne converge pas, en général, vers une solution du problème de départ.

Il est, encore une fois, nécessaire de régulariser le processus itératif, et c'est l'indice d'itération lui-même qui joue le rôle de paramètre de régularisation.

En d'autres termes, il convient d'arrêter les itérations plus tôt qu'on ne le ferait dans un cas non bruité.

Définition 2.3.1 *: Landweber* [4] *écrit l'équation $K\ x = y$ sous la forme :*

$$x = (I - \alpha\ K^*K)x + \alpha\ K^*y$$

Pour $\alpha > 0$ Le schéma itératif de cette équation est le suivant :

$x^0 = 0$ *et* $x^m = (I - \alpha\ K^*K)x^{m-1} + \alpha\ K^*y$ *(1)*

Pour $m = 1, 2, ...$

Lemme 2.3.2 *: Soit la suite (x^m) définie par (1)*

Et on définit la fonctionnelle $\Psi : X \longrightarrow R$ par :

$$\Psi(x) = \frac{1}{2} \parallel K\ x - y \parallel^2, x \in\ X.$$

Alors Ψ est différentiable au sens de Fréchet pour tout $z \in X$ et :

$$\Psi\ '(x)x = Re\ (K\ z - y, K\ x) = Re\ (K\,^*(K\ z - y), x)\ ,\ x \in\ X \tag{2}$$

La fonctionnelle linéaire $\Psi'(x)$ peut être identifié avec $K\,^*(K\ z - y) \in X$ sur l'espace de Hilbert X.

Il est facile de voir la forme explicite $x^m = R_m y$, où l'opérateur $R_m : Y \longrightarrow X$ est défini par :

$$R_m = \alpha \sum_{k=0}^{m-1} (I - \alpha K\,^*K)^K K\,^*,\ m = 1, 2, ... \tag{3}$$

Théorème 2.3.3 *:*

a) Soit $K : Y \longrightarrow X$ un opérateur compact et soit $0 < \alpha < \dfrac{1}{\parallel K \parallel^2}$, on définit les opérateurs linéaires et bornés $R_m : Y \longrightarrow X$ par (3).

Ces opérateurs définissent une stratégie de régularisation de paramètre :

$$\alpha = \frac{1}{m},\ m \in\ N\ et \parallel R_m \parallel \leq\ \sqrt{a\ m}$$

.

La suite $x^{m,\,\delta} = R_m y^\delta$ est calculée par les itérations suivantes :

$$x^{0,\,\delta} = 0\ et\ x^{m,\,\delta} = (I - a\ K\,^*K)x^{m-1,\,\delta} + \alpha\ K\,^*y^\delta$$

Pour $m = 1, 2, ...$ Toute stratégie $m\ (\delta) \longrightarrow \infty(\delta \longrightarrow 0)$ avec $\delta^2 m(\delta) \longrightarrow 0(\delta \longrightarrow 0)$ est admissible.

b) Soit $x = K*\ z \in\ Im\ (K*)$ avec $\|z\ \| \leq E$ et $0 < c_1 < c_2$, pour chaque choix $m\ (\ \delta\ )$ avec $c_1 \frac{E}{\delta} \leq m(\delta) \leq c_2 \frac{E}{\delta}$, l'estimation suivante est vérifiée :

$$\parallel x^{m,\,\delta} - x \parallel \leq c_3 \sqrt{\delta\ E}$$

Pour c_3 qui dépend de c_1, c_2 et α. Alors l'itération de Landweber est optimale pour $\parallel (K\,^*)^{-1}x \parallel \leq E$.

c) Maintenant, soit $x = K * K\ z \in Im(K^*K)$, $\| z \| \leq E$ *et* $0 < c_1 < c_2$, *pour chaque choix* $m(\delta)$ *avec* $c_1(\frac{E}{\delta})^{\frac{2}{3}} \leq\ m(\delta)\ \leq c_2(\frac{E}{\delta})^{\frac{2}{3}}$, *on a :*

$$\| x^{m,\, \delta} - x \| \leq c_3 E^{\frac{1}{3}} \delta^{\frac{2}{3}}$$

Pour c_3 *qui dépend de* c_1 , c_2 *et* α. *Pour cela, l'itération de Landweber est aussi optimale pour*

$$\| (K * K)^{-1} x \| \leq E$$

**) Pour cette méthode, on observe qu'une haute précision demande un nombre large* m *d'itérations mais la stabilité nous force à garde le plus petit possible.*

2.4 Principe de Morozov :

On donne ici un exemple de méthode de choix a posteriori du paramètre de régularisation. On expose la plus classique de celles-ci, "the discrepancy principle" de Morozov [8], ou le principe de décalage de Morozov. On présente un principe base sur la méthode de régularisation Tikhonov.

Définition 2.4.1 *: On assume que* $K : X \longrightarrow Y$ *est un opérateur compact et injectif défini entre les deux espaces de Hilbert* X *et* Y *avec une image dense* $Im(K) \subset Y$.

En étudie encore l'équation $Kx = y \quad , \quad y \in Y$

On calcule maintenant le paramètre de régularisation $\alpha = \alpha(\delta) > 0$ *; tel que la solution de Tikhonov correspondante est la solution de l'équation :*

$$\alpha\ x^{\alpha,\, \beta} + K^*K\ x^{\alpha,\, \beta} = K^*y$$

Et elle est le minimum de :

$$J_\alpha(x) = \| K\ x - y \|^2 + \alpha \| x \|^2$$

Qui satisfait a l'équation :

$$\| K\ x^{\alpha,\, \delta} - y^\delta \| = \delta$$

On note que le choix de α *par le principe de décalage garantit d'une part que l'erreur* *est δ d'autre part α est très petit.*

Théorème 2.4.2 *: Soit $K : X \to Y$ est un opérateur linéaire compact à image dense dans Y.*

Soit $K\ x = y$, $x \in X$, $y \in Y$, $y^{\delta} \in Y$ tels que :

$$\| y^{\delta} - y \| \leq \delta < \| y^{\delta} \|$$

Soit $x^{\alpha(\delta)}$ la solution de Tikhonov satisfaisant $\| K\ x^{\alpha(\delta),\alpha} - y^{\delta} \| = \delta$, pour tout $\delta \in (0, \delta_0)$ Alors :

a)$x^{\alpha(\delta),\alpha} \to x$ pour $\delta \to 0$. Donc le principe de décalage est admissible.

b) Soit $x = K^*z \in K^*(Y)$ avec $\| z \| \leq E$, alors :

$$\| x^{\alpha(\delta),\alpha} - x \| \leq 2\sqrt{\delta\ E}$$

Pour cela "the discrepancy principle" est une stratégie de régularisation optimale sous la condition $\| (K^*)^{-1}x \| \leq E$.

La détermination de $\alpha(\delta)$ est équivalente au problème de trouver la racine de la fonction monotone :

$$\Phi(\alpha) = \| K\ x^{\alpha(\delta),\alpha} - y^{\delta} \|^2 - \delta^2$$

Pour δ fixé. Ce n'est pas nécessaire de satisfaire l'équation $\| K\ x^{\alpha(\delta),\alpha} - y^{\delta} \| = \delta$, exactement, une inclusion de la forme :

$$c_1 \leq \| K\ x^{\alpha(\delta),\alpha} - y^{\delta} \| \leq c_2 \delta$$

est suffisante pour prouver les assertions du théorème précédent.

Dans le théorème suivant, on prouve que l'ordre de convergence $O\left(\sqrt{\delta}\right)$ est meilleur pour le principe de décalage de Morozov.

Théorème 2.4.3 *: Soit K un opérateur compact et soit $\alpha(\delta)$ choisit par le principe de décalage. On assume que pour tout $x \in Im(K^*K)$, $y = Kx \neq 0$ et pour toute suite $\delta_n \to 0$ et $y^{\delta_n} \in Y$, tel que $\| y - y^{\delta_n} \| \leq \delta_n$ et $\| y^{\delta_n} \| > \delta_n$ pour tout n. La solution de Tikhonov correspondante $x^n = x^{\alpha(\delta_n),\ \delta_n}$, converge vers x plus vite que $\sqrt{\delta_n}$vers zéro, donc :*

$$\frac{1}{\sqrt{\delta_n}} \| x^n - x \|_{n \to \infty} \to 0$$

Alors l'image $Im\ (K)$ est de dimension fini.

Des efforts énormes sont faits pour modifier le principe de décalage original.

Conclusion Générale

Dans ce mémoire, nous examinons les problèmes mal posés, où nous avons introduit la définition de J Hadamard pour le problème bien posé. Ses conditions sont l'existence, l'unicité et la continuité par rapport aux données. L'absence de l'une de ces conditions définit un problème mal posé.

Face à ces problèmes mal posés, nous présontons l'utilisation de quelques méthodes de régularisation telles que : Méthode de Tikhonov, Méthode de Quasi-Réversibilité, Méthode de Landweber, Pricipe de Morozov, L'objectif étant d'obtenir des résultats corrects et convergents avec estimation de l'erreur.

Ces régularisations nous aideront à surmonter les problèmes rencontrés dans le domaine appliqué.

Mots-clés : problème mal posé, opérateur auto-adjoint, opérateur inversible, Méthode de Tikhonov, Méthode de Quasi-Réversibilité, Méthode de Landweber, Principe de Morozov, Les espaces, Les normes, La compacité .

Bibliographie

[1] Franck jedrzejewski, Introduction aux méthode numérique. Paris 2005.

[2] Hadamard.J, Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations. Yale University Press, 1923.

[3] Hamarik, Regularization of ill-posed problems. University of Tartu, Estonia 2010.

[4] Landweber.L, An iteration formula for Fredholm integral equations of the firstkind. Amer. J. Math., 73 :615–624, 1951.

[5] Lattès.R and Lions.J.L, Méthode de Quasi-Réversibilité et Applications. Dunod. Paris, 1967.

[6] Laurent AUTRIQUE et Jean-Pierre LEYRIS et Nacim RAMDANI, Régularisation des problèmes inverses mal posés. Application à la localisation de source thermique mobile. Université Paris XII 2002.

[7] Miller.K, Stabilized quasi-reversibility and other nearly-best-possible methods for non- well-posed problems. Symposium on Non-Well-Posed Problems and Logarithmic Convexity (Heriot-Watt Univ., Edinburgh, 1972).

[8] Morozov.V. A, Methods for Solving Incorrectly Posed problems. Springer-Verlag New-York, 1984.

[9] Sergeib Pereverzev et Shuai Lu, Regularization theory for ill posed problems. Russia 2010.

[10] Stéphane ANDRIEU, INTRODUCTION AUX PROBLEMES INVERSES. Université Paris XII 2010.

[11] TABRHA Ouarda, Sur Quelques Problèmes Inverses Pour des Equations d'Evolution. Université Mentouri-Constantine 2008.

[12] Teniou Nihed ,L'étude d'une classe de problèmes mal posés. Université Mentouri-Constantine 2012.

[13] Tikhonov.A.N and Arsenin.V.Y, Solution of Ill-posed Problems, Winston & Sons Washington. DC, (1977).