

.. ○ · ○ · ○ ○ · ○
République Algérienne Démocratique et Populaire
○ · ○ ○ ○ ○
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



N° Réf :.....

Centre Universitaire de Mila

Institut des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

**Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de licence
en: -Filière: Mathématiques Fondamentales**

Approximation de problèmes hyperboliques

**Préparé par : Kolti Kenza
Hadj khelouf wassila
Hennous Souad
Cheraa Rokia**

Encadre par: SEKHANE CHAFIKA

Grade :B

Année universitaire : 2013/2014



Remerciements

Nous remercierons dieu tout puissant pour nous avoir offert la force et la patience durant toutes ces années.

Nous tenons d'abord à remercier très chaleureusement Mme :*Sekhane chafika* . qui nous a permis de bénéficier de son encadrement. Pour avoir dirigé ce travail de recherche.

Nous remercions, aussi, *Mr :N.Hamri*, du département de mathématique et informatique de centre université de Mila, pour son aide et pour ses encouragement pour finaliser une partie de cette mémoire.

Nous tenons à exprimer, nos sincères

Table des matières

Introduction Générale	2
1 L'équation des onde	3
1.1 position du problème	4
1.2 Etude mathématique de l'équation monodimensionnelle	5
1.2.1 le modèle de la corde infinie	5
1.2.2 propriétés fondamentales de la solution	6
1.2.3 le modèle de la corde vibrante finie	8
1.3 E'tude des schémas de différences finies dans le cas monodimensionnel . .	11
1.3.1 première approche : discétisation directe de l'équation du second ordre	11
1.3.2 Etude de la stabilité par l'analyse de Fourier	12
1.3.3 Application au schéma explicite	13
1.3.4 un schéma implicite centré	15
1.4 Seconde approche : système du premier ordre équivalent	16
1.4.1 Un premier la schéma explicite centré instable	17
1.4.2 Schémas implicites centrés stables	18
1.4.3 Schémas explicites stables	18
2 L'équation de transport	20
2.1 Position du problèm	20
2.2 Discrétisation de l'équation de transport	22
2.3 Schémas centrés	22
2.3.1 Un premier schéma explicite centré instable	23
2.3.2 Schémas implicites centrés stables	23
2.3.3 Schémas explicites centrés stables	25
2.4 Décentrage	28

2.4.1	Décentrage par la dérivation	29
2.4.2	Décentrage de la variable en volumes finis	33
2.4.3	Décentrage par la fonction de base en éléments finis	34
2.4.4	Décentrage par les caractéristiques	36

Bibliographie		37
----------------------	--	-----------

Introduction Générale

Les fonctions hyperbolique on été inventées par le jésuite Vincenzo Riccati dans les années 1760 alors qu'il cherchait, avec son collègue Saladini et autre grand mathématicien ayant étudié les fonctions hyperboliques est Jean-Henri Lambert, qui en fit une étude complète en 1770. Cette quasi simultanéité fait que l'on attribue par fois à Lambert la paternité des fonctions hyperboliques

Parmi des exemples de l'équation hyperbolique :

on considère comme suit l'équation :

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L \text{ et } t > 0 \quad (1.1)$$

c'est un solution utilisé propagates dans domaine ouverture. Tel que, C est un vitesse de propagation d'onde sur frontière. Si $\Delta = B^2 - 4AC > 0$ alors l'équation (1.1) est une hyperbolique. Et comme développée équivalente finie différence approximation (1.1) on pouvoir l'équation

$$c^2 \left(\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} \right) = \left(\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{k^2} \right), \quad h = \frac{L}{n} \text{ et } k = t$$

Dans ce travail on va essayer d'étudier de deux types des équations de hyperbolique et aussi l'influence de la variation des ordres.

L'objectif de notre mémoire est d'étudier de quelques équations de hyperbolique et aussi l'influence de la variation des ordres.

Afin d'aborder ce but, on divisée la mémoire en deux chapitre :

le premier chapitre, est consacré aux l'équation des ondes, nous consacrons dans notre étude sur l'équation dans le cas monodimensionnelle et nous utilisons des schémas dans le cas enfin parlons sur le système du premier ordre équivalente.

En suite, dans le deuxième chapitre, on parlons les éléments nécessaire pour une compréhension de l'équation de transport. On s'intéresse sur des principes et notions comme (schémas centrés, d'écarter).

Enfin, dans les chapitres précédents, nous avons décrit diverses techniques pour résoudre des équations différentielles et l'ordre, on une expression spécifique, par l'erreur de troncature à chaque étage était donné.

Processus se déroule, pour certains problèmes de l'effet de cas solutions parasites

peuvent être submerger la vraie solutions. Dans ce conditions, le pocédé est considéré comme instable.

Il clair que nous cherchons des méthodes stable ou l'erreur ne se dévellope pas dans un monde imprévisible et façon illimitée.

Chapitre 1

L'équation des onde

Définition 1.0.1 l'équation générale qui décrit la propagation d'une onde \vec{E} dans l'espace libre, dans un milieu homogène, linéaire et isotrope est : $\nabla^2 \vec{E} = \Delta \vec{E} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial t^2}$ (étallement de l'équation de propagation à partir des équations de Maxwell) \vec{E} décrit à la fois l'amplitude de l'onde, et sa polarisation (par son caractère vectoriel). C'est assimilable à la vitesse de propagation de l'onde, comme nous le verrons plus bas. Si l'on s'intéresse à ce qui se passe pour chacune des composantes de \vec{E} (en projetant la relation dans chacune des directions de l'espace), nous obtenons une équation portant sur un scalaire, appelée équation de d'Alembert :

$$\Delta U = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

Intéressons nous à la propagation selon la seule direction z :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

Pour une onde plane, la solution générale de cette équation est la somme de deux fonctions :

$$U(z, t) = f(z - ct) + g(z + ct)$$

En effet, on peut écrire :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial Z^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) U(z, t) = 0$$

soit :

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial t}\right) U(z, t) = 0$$

Et si l'on pose $a = z - ct$ et $b = z + ct$, on obtient :

$$\left(\frac{\partial}{\partial a}\right) \left(\frac{\partial}{\partial b}\right) U(a, b) = 0$$

Qui se résout en : $U(a, b) = f(a) + g(b)$ soit $U(z, t) = f(z - ct) + g(z + ct)$

Le premier terme est une onde se propageant dans le sens des z croissants (appelée onde progressive), et le deuxième terme dans le sens des z décroissants (appelée onde régressive).

1.1 position du problème

Considérons une membrane élastique de surface Ω , plane au repos et fixée sur son bord Γ . Lors de petites vibrations transversales, le déplacement normal au plan d'équilibre en tout point χ, y de Ω et à chaque instant t est une fonction $u : \chi, y, t \longrightarrow u(\chi, y, t)$ qui vérifie l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u + f \quad \forall (\chi, y) \in \Omega \text{ et } \forall t \in [0, T]$$

Où c désigne la vitesse des ondes. Ce problème du second ordre en temps est un modèle de problème hyperbolique. La détermination de la solution nécessite de fixer deux conditions initiales en temps. En fixant les valeurs du déplacement transversal u et de sa dérivée partielle en temps, au temps 0 :

$$\begin{cases} u(\chi, y, 0) = u^0(\chi, y) \\ \frac{\partial}{\partial t} u(\chi, y, 0) = u^1(\chi, y) \end{cases}$$

on obtient un problème à valeur initiale ou problème de Cauchy :

les conditions aux limites choisies, pour la membrane fixée sur son bord, sont des conditions de Dirichlet homogènes mais on pourrait choisir d'autres types de conditions aux limites comme dans les cas stationnaires ou paraboliques.

Remarque 1.1.1 (*solution stationnaire*) lorsque la solution ne dépend plus du temps (*régime permanent ou stationnaire*) on retrouve une équation déjà étudiée de forme :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \forall (x, y) \in \Omega \\ + \text{conditions aux limites sur } \Gamma \end{cases}$$

l'équation des ondes et l'équation de la chaleur ont les memes expression dans le cas stationnaire. C'est pourquoi les solutions du problème de poisson ci-dessus peuvent s'interpréter physiquement, à la fois comme des déplacements d'une membrane élastique ou des températures.

1.2 Etude mathématique de l'équation monodimensionnelle

nous allons maintenant donner les principales propriétés caractéristiques des problèmes de type hyperboliques en nous appuyant, pour simplifier, sur le cas de l'équation des ondes monodimensionnelle ou équation de la corde vibrante.

1.2.1 le modèle de la corde infinie

considérons tout d'abord le modèle de la corde infinie, libre de toute sollicitation. on se donne la position et la vitesse initiale au temps zéro. écrivons l'équation du modèle :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u(\chi, t) \longrightarrow u(\chi, t) \text{ telle que :} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(\chi, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} u(\chi, t) \quad \forall \chi \in \mathbb{R} \text{ et } t \in [0, T] \\ u(\chi, 0) = u(\chi) \text{ donnée} \\ \frac{\partial}{\partial t} u(\chi, 0) = u^1(\chi) \text{ donnée.} \end{cases}$$

Posons :

$$y = \chi + ct \quad , \quad z = \chi - ct.$$

En remplaçant dans l'équation les dérivées partielles par rapport à t et x par leurs expressions en fonctions des dérivées partielles par rapport aux nouvelles variables y et z , on obtient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0.$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = g_1(z)$$

soit :

$$u = g(z) + f(y).$$

Ce qui donne en définitive l'expression remarquable suivante :

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$$

prenant en compte les conditions initiales :

$$u(x, 0) = f(x) + g(x) = u^0(x) \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = cf'(x) + g'(x) = u^1(x).$$

on obtient :

$$f(x) = \frac{1}{2}u^0(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x u^1(s) ds.$$

et

$$g(x) = \frac{1}{2}u^0(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x u^1(s) ds.$$

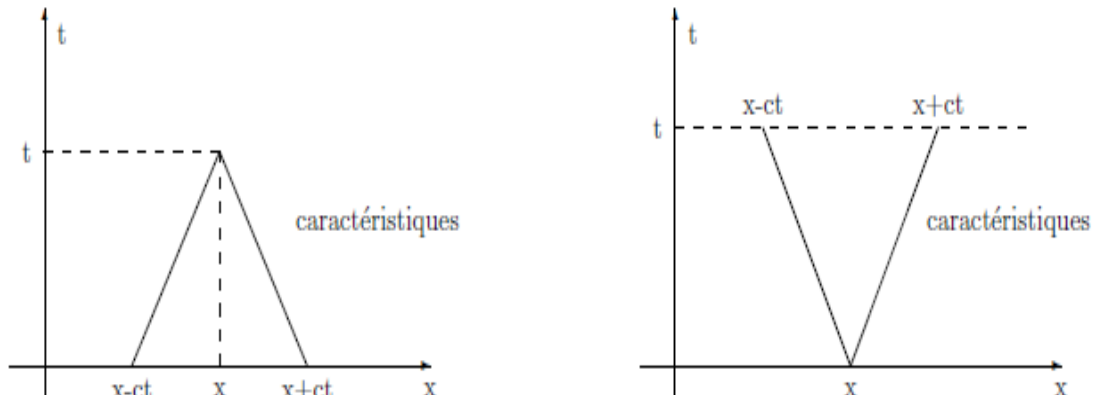
d'où :

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct) = \frac{1}{2} [u^0(x + ct) + u^0(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u^1(s) ds.$$

1.2.2 propriétés fondamentales de la solution

1_ l'expression $f(x + ct)$ prend au point x et à l'instant t la même valeur qu'au point $x + ct$ au temps zéro. De même $g(x - ct)$ prend au point x et à l'instant t la valeur qu'elle prenait au point $x - ct$ au temps zéro. la solution u au point x et au temps t apparaît comme la somme de deux ondes, l'une f se propageant avec une vitesse c , donc de droite à gauche, l'autre g se propageant avec une vitesse c donc de gauche à droite. c apparaît comme une vitesse de propagation d'onde (mais non comme la vitesse des points de la corde).

2_ domaine de dépendance : la solution au point x et au temps t ne dépend que des valeurs des conditions initiales u^0 et u^1 aux points de l'intervalle $[x - ct, x + ct]$ inversement les conditions initiales au temps zéro en un point ε n'influenceront la solution aux instants t que pour les seules abscisses x comprises entre $\varepsilon - ct$ et $\varepsilon + ct$ la figure (1-1) ci-dessous illustre simplement cette notion fondamentale de domaine de dépendance. les droites $x - ct = cste$ et $x + ct = cste$ s'appellent les droite caractéristiques.

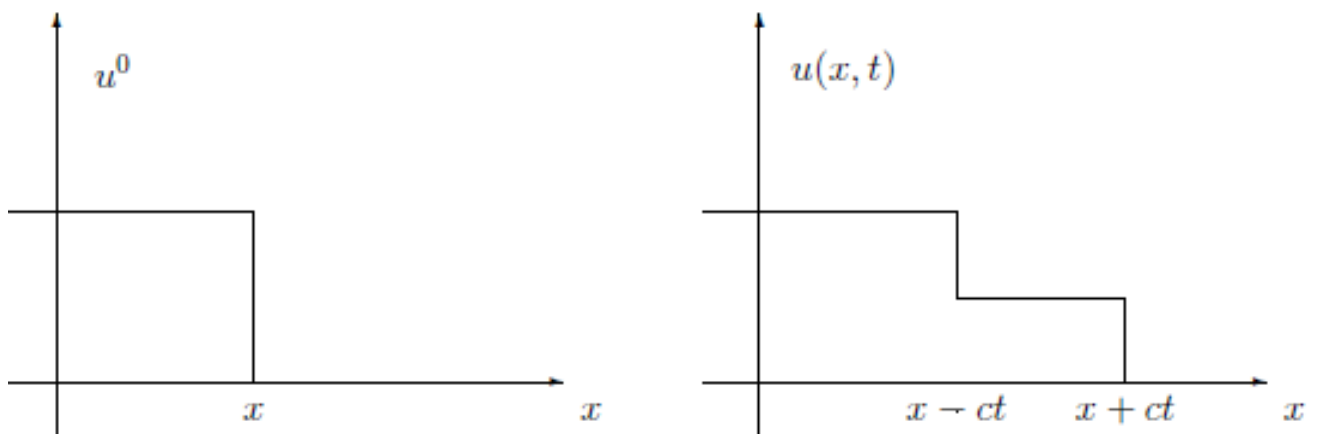


FIG_1_1 Domaine de dependance et droites caracteristiques

3_ Si $u^1 = 0$ la solution ne dépend que des valeurs de u^0 aux point $x - ct$ et $x + ct$ une perturbation en un point quelconque de la solution initiale se transmet pour moitié vers la droite avec une vitesse c et pour moitié vers la gauche avec la même vitesse absolue c car dans ce cas

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u^0(x - ct) + u^0(x + ct)]$$

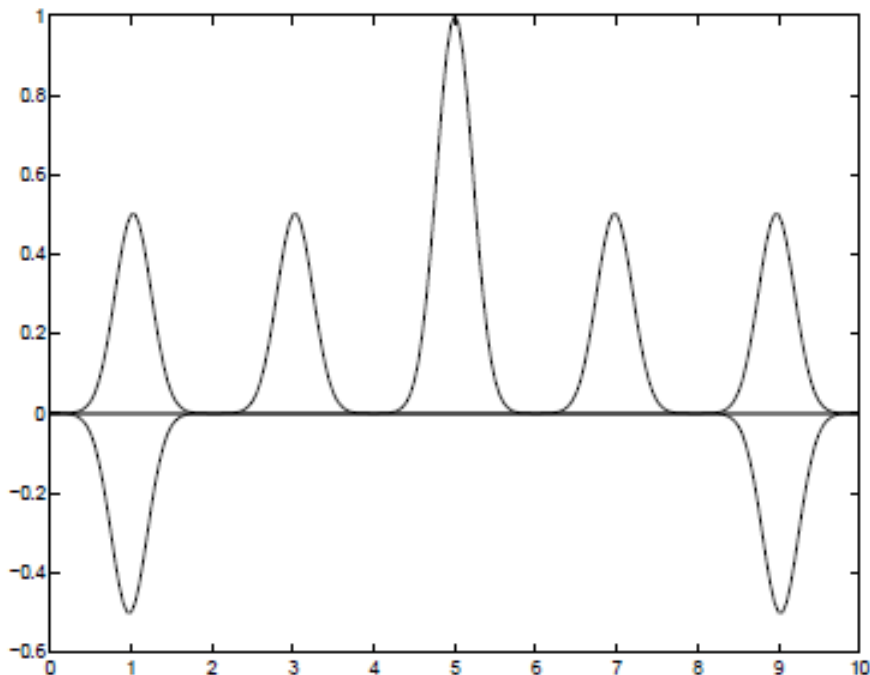
Il est alors facile d'obtenir une solution à partir de conditions initiales simples par transport et en particulier d'observer l'évolution de solutions initiales discontinues de type échelon.



FIG_1_2 Evolution d'une solution initiale de type échelon.

4_ t peut être positif ou négatif. le phénomène est réversible, on peut remonter le

temps et retrouver, par résolution de problèmes rétrogrades, la solution à un instant précédent.



FIG_1_3 Evolution au cours du temps de la solution de l'équation de la corde vibrante avec une initialisation en forme de gaussienne.

1.2.3 le modèle de la corde vibrante finie

on considère une corde de longueur L fixée aux extrémités, l'équation du déplacement transversal au cours du temps s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad \forall x \in [0, L] \text{ et } t \in [0, T] \\ u(x,0) = u^0(x) \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u^1(x) \quad \text{données : conditions initiales} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad \text{conditions aux limites de dirichlet homogènes} \end{cases}$$

symétrie, périodicité et réflexion aux bornes

Reprenons la forme générale abstraite de la solution générale

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct) = \frac{1}{2} [u^0(x + ct) + u^0(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u^1(s) ds.$$

Au point $x = 0$, on a donc :

$$f(ct) + g(-ct) = 0.$$

pour tout t , les fonctions f et g doivent donc vérifier la condition générale

$$g(s) = -f(-s) \forall s \in \mathbb{R}$$

on en déduit simplement que la solution u doit être une fonction impaire de x .

En effet :

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct) = f(x + ct) - f(-x + ct)$$

$$u(-x, t) = f(-x + ct) + g(-x - ct) = f(-x + ct) - f(x + ct)$$

d'où

$$u(-x, t) = -u(x, t) \quad \forall x \text{ et } t$$

ceci entraîne la réflexion avec changement de signe des ondes lorsque elle atteint une extrémité fixe de la corde. signalons que cette propriété de réflexion sur une frontière dirichlet introduit une difficulté importante dans la modélisation numérique de propagation d'ondes en milieu infini, En effet on est, dans la pratique, obligé de se limiter à des domaines bornés. si l'on impose sur les frontières à "l'infini" des conditions de dirichlet, la réflexion sur ces frontières va entraîner l'apparition d'ondes réfléchies parasites qui vont gravement perturber la solution. De nombreux travaux de recherches sur des conditions aux limites "transparentes" ou "absorbantes" ont été développés pour surmonter cette difficulté. citons également la méthode PML (perfectly matched layer) qui consiste à ajouter une couche de matériau absorbant à l'infini, ce qui évite le développement de conditions aux limites particulières.

Au point $x = l$ on a :

$$f(l + ct) + g(l - ct) = 0.$$

pour tout t . la fonction f doit donc vérifier la condition générale :

$$f(l + s) = f(-l + s) \forall s \in \mathbb{R}.$$

f est donc une fonction périodique de période $2l$. On en déduit que la solution u doit être une fonction périodique en x de période $2l$ et en t de période $\frac{2l}{c}$.

En effet :

$$u(x + 2l, t) = f(x + 2l + ct) - f(-x + ct + 2l) = f(x + ct) - f(-x + ct) = u(x, t)$$

$$u\left(x, t + \frac{2l}{c}\right) = f(x + ct + 2l) - f(-x - 2l + ct) = f(x + ct) - f(-x + ct) = u(x, t).$$

En conséquence, on peut très simplement obtenir la valeur de la solution en un point x et un instant t à partir de la solution initiale au temps zéro complétée par symétrie et périodicité.

Analyse de Fourier

Reprenons les fonctions ϕ_k définies par

$$\phi_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \text{ pour } k = 1, 2, \dots, n, \dots$$

fonctions propres de l'opérateur $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ avec condition de Dirichlet homogènes associées aux valeurs propres $\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{l^2}$.

Exprimons la solution u comme combinaison linéaire des ϕ_k

$$u(x, t) = \sum_k \tilde{u}_k(t) \phi_k(x)$$

En reportant cette expression de u dans l'équation aux dérivées partielles, on obtient un ensemble d'équations différentielles du second ordre en temps indépendantes pour chaque k .

$$\frac{d^2 \tilde{u}_k}{dt^2} + \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \tilde{u}_k = 0$$

Dans ce cas sans second membre, la solution s'écrit sous la forme générale :

$$\tilde{u}_k(t) = A_k \cos\left(\frac{k\pi}{l}ct\right) + B_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}ct\right).$$

On trouve donc :

$$u(x, t) = \sum \left[A_k \cos \left(\frac{k\pi}{l} ct \right) + B_k \sin \left(\frac{k\pi}{l} ct \right) \right] \sin \left(\frac{k\pi}{l} x \right)$$

Remarquons que l'on retrouve ainsi le caractère impair en x et périodique en x et t de la solution.

1.3 E'tude des schémas de différences finies dans le cas monodimensionnel

1.3.1 première approche : discétisation directe de l'équation du second ordre

une première méthode pour résoudre numériquement ce problème d'évolution consiste à discrétiser l'équation du second ordre par différences finies. Plaçons nous dans le cas monodimensionnel d'une corde de longueur L pour simplifier.

On choisit une discrétisation régulière de $[0, L]$ en intervalles de longueur Δx tels que $L = M\Delta x$ et une discrétisation de l'intervalle de temps $[0, T]$ en pas de temps de longueur Δt tels que $T = N\Delta t$. Notons x_j le point $j \Delta x$ et t_n le temps $n\Delta t$. Notons u_j^n la valeur de la solution approchée au point x_j et au temps t_n .

Considérons le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad \forall x \in [0, L] \text{ et } t \in [0, T] \\ u(x, 0) = u^0(x) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u^1(x) \text{ données : condition initiale} \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \text{ condition aux limites de Dirichlet homogènes} \end{cases}$$

et choisissons les approximations classiques suivantes des dérivées secondes par différences finies

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_n) \approx \frac{u(x_j, t_{n+1}) - 2u(x_j, t_n) + u(x_j, t_{n-1}))}{\Delta t^2} \quad (\text{à } O(\Delta t^2) \text{ près})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) \approx \frac{u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j-1}, t_n))}{\Delta x^2} \quad (\text{à } O(\Delta x^2) \text{ près}).$$

Replaçons les dérivées partielles par leurs approximations en différences finies ci-dessus et la fonction inconnue u par une collection de valeurs discrètes u_j^n pour $j = 0, \dots, M$ et $n = 0, \dots, N$. Nous obtenons un premier exemple de schéma d'approximation en

différenos finies de l'équation des ondes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \\ u_j^0 = u^0(x_j) \text{ et } u_j^1 = u^0(x_j) + \Delta t u^1(x_j) \text{ déduit des condition initiales} \\ u_0^n = u_m^n = 0 \quad \forall n : \text{conditions aux limites de dirichlet homogène} \end{array} \right.$$

Ce schéma est un schéma explicite car il donne une formule explicite de calcul de la solution au temps t_{n+1} en fonction des valeurs de la solution au temps précédent . Il n'ya pas d'équation à résoudre pour obtenir la valeur au nouvel instant t_{n+1} .

ordre

Ce schéma explicite est d'ordre deux en temps et en espace (par développement de Taylor).

stabilité

Dans le cas de schémas numériques appliqués à des problèmes hyperboliques nous choisirons, comme condition de stabilité, d'imposer au vecteur des solutions approchées d'être conservé ou de décroître en norme au cours du temps.

1.3.2 Etude de la stabilité par l'analyse de Fourier

Reprons la technique de calcul de la stabilité des schémas par l'analyse de Fourier. Injections dans le schema numerique une suite de solutions de la forme :

$$u_j^n = \tilde{u}_k^{n+1} e^{ikj\Delta x}$$

obtenues à partir des conditions initiales

$$u_j^0 = \tilde{u}_k^0 e^{ikj\Delta x}$$

et correspondant chacune à une composante harmonique. L'étude de la stabilité se ramène à l'étude de l'évolution au cours de pas de temps n des suites \tilde{u}_k^n quand n augmente. La condition minimale de stabilité numérique nécessite que les nombres \tilde{u}_k^n restent bornés $\forall k$ et $\forall n = 0; \dots; N$. Nous imposerons ici que les nombres \tilde{u}_k^n soient conservés ou décroissantes en module quand n augmenté. Dans les schémas à p pas, on obtient les \tilde{u}_k^{n+1} par multiplication par une matrice d'amplification $G(\Delta t, k)$ selon :

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_k^{n+1} \\ \tilde{u}_k^n \\ \vdots \\ \tilde{u}_k^{n-p+2} \end{pmatrix} = G(t, k) \begin{pmatrix} \tilde{u}_k^n \\ \tilde{u}_k^{n-1} \\ \vdots \\ \tilde{u}_k^{n-p+1} \end{pmatrix}$$

Nous choisirons alors les conditions de stabilité suivantes :

Condition de stabilité

pour que le schéma soit stable il faut qu'il existe $T > 0$ tel que les valeurs propres λ_i de la matrice d'amplification $G(\Delta t, k)$ soient toutes majorées en module par 1 selon :

$$|\lambda_i| \leq 1 \forall i = 1, \dots, P \quad (1, 1)$$

quel que soit k pour tout $0 < \Delta t < T$

Conditions suffisantes de stabilité

1- si la matrice d'amplification est normale, c'est à dire : Elle commute avec son adjointe (ou transposée dans le cas réel)

$$GG^* = G^*G$$

on bien, ce qui est équivalent, si elle admet une base de vecteurs propres orthonormés, alors la condition précédente (1, 1) est suffisante

2- la condition de normalité n'étant pas toujours vérifiée, on peut utiliser la condition suffisante suivante : le schéma est stable si les coefficients de la matrice $G(\Delta t, k)$ sont bornés et si ses valeurs propres sont toutes de module strictement inférieur à 1.

sauf éventuellement une de module égal à 1.

Dans certains cas, comme par exemple le cas du schéma aux différences finies explicite, on est obligé, pour conclure, de faire un calcul complet des vecteurs propres et valeurs propres de la matrice d'amplification $G(\Delta t, k)$.

1.3.3 Application au schéma explicite

Reprenons le schéma explicite :

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} = C^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

Posons :

$$u_j^n = \tilde{u}_k^n \exp(ijk\Delta x)$$

on obtient :

$$\frac{\tilde{u}_k^{n+1} - 2\tilde{u}_k^n + \tilde{u}_k^{n-1}}{\Delta t^2} = C^2 \frac{\exp(ikj\Delta x) - 2 + \exp(-ijk\Delta x)}{\Delta x^2} \tilde{u}_k^n$$

soit :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_k^{n+1} &= \left[2 + C^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (2 \cos(k\Delta x) - 2) \right] \tilde{u}_k^n - \tilde{u}_k^{n-1} \\ &= \left[2 - 4C^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{k}{2}\Delta x\right) \right] \tilde{u}_k^n - \tilde{u}_k^{n-1} \end{aligned}$$

notons $\alpha^2 = 4 \sin^2\left(\frac{k}{2}\Delta x\right)$, on obtient l'écriture suivante de la matrice d'amplification :

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_k^{n+1} \\ \tilde{u}_k^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \alpha^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_k^n \\ \tilde{u}_k^{n-1} \end{pmatrix}$$

cette matrice n'est pas une matrice normale.

Les valeurs propres de la matrice 2*2 d'amplification ci-dessus sont racines de

$$\lambda^2 - (2 - \alpha^2)\lambda + 1 = 0$$

On trouve le discriminant $\Delta = \alpha^2(\alpha^2 - 4)$.

si $\alpha^2 \succ 4$ le discriminant est positif et le trinome a deux racines réelles distinctes dont le produit vaut 1. L'une des deux est donc forcément de module strictement supérieur à 1 et dans ce cas le schéma est instable.

si $\alpha^2 \prec 4$ le trinome a deux racines complexes conjuguées de module 1 et dans ce cas on ne peut conclure directement car la matrice d'amplification n'est pas normale et qu'alors la condition suffisante est stabilité n'autorise qu'une seule sont valeurs propres de G, les vecteurs

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont vecteurs propres de G. On obtient ainsi

$$G = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$G^n = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

G^n reste donc bornée quel que soit n dans le cas de deux racines complexes conjuguées distinctes, donc à la condition que Δ soit strictement négatif. Une autre manière de montrer la stabilité dans ce cas consiste à remarquer que si l'on dispose de deux vecteurs propres indépendants on peut exprimer les vecteurs

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_k^{n+1} \\ \tilde{u}_k^n \end{pmatrix}$$

dans la base des vecteurs propres. L'action de la matrice d'itération G se ramène dans cette base à la multiplication des composantes des vecteurs par les valeurs propres λ_1 et λ_2 .

Comme ces valeurs propres sont de module 1, le vecteur des itérés est borné en module. Dans le cas $\Delta = 0$ la racine double est -1 . Les deux vecteurs propres

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont alors confondus. Les sous-espaces propres relatifs à la valeur propre -1 est de dimension 1. La matrice G n'est pas diagonalisable, mais seulement jordanisable sous la forme :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les puissances nièmes de G tendent vers l'infini avec n . Donc dans ce limite le schéma est également instable.

En définitive la stabilité impose $\alpha^2 < 4$ ce qui s'exprime par la condition :

$$c \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$$

dénommée condition de Courant Friedrichs Lewy apparait ici au sens strict

1.3.4 un schéma implicite centré

On considère les schémas implicites suivants directement déduits du schéma explicite précédent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \\ u_j^0 = u^0(x_j) \text{ et } u_j^1 = u^0(x_j) + \Delta t u^1(x_j) \text{ déduits des condition initiales} \\ u_0^n = u_M^n = 0 \forall n : \text{ conditions aux limites de Dirichlet homogène} \end{array} \right.$$

ce schéma n'est plus que d'ordre un en temps. Mais il est inconditionnellement stable, c'est à dire stable quel que soit Δt . Sa matrice d'amplification s'écrit avec les notations précédente :

$$G(k, \Delta t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{1+\alpha^2} & -\frac{1}{1+\alpha^2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on peut augmenter la précision en temps, en utilisant le schema suivant.

1.4 Seconde approche : système du premier ordre équivalent

L'équation du seconde ordre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

sa ramène on posant :

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} \text{ et } w = c \frac{\partial u}{\partial x}$$

au système de deux équations du premier ordre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} = c \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial t} = c \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right.$$

pour lequel on doit se donner les deux conditions initiales suivantes au temps Zéro pour v et w :

$$v(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u^1(x)$$

et

$$w(x, 0) = c \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = c \frac{d}{dx} u^0(x)$$

ceci peut également s'écrite :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

et l'on retrouve sous cette forme la conservation de l'énergie en multipliant scalairement l'équation ci-dessus par le vecteur (v, w) et en intégrant sur $[0, L]$.

Remarque 1.4.1 *Le lien avec l'équation de transport est évident on retrouvera donc naturellement, dans le chapitre suivant, consacré à la résolution de l'équation de transport, les schémas que nous présentons ici pour résoudre le système du premier ordre équivalent à l'équation des ondes.*

1.4.1 Un premier la schéma explicite centré instable

On considère la schéma discret évident suivant :

$$\begin{cases} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} = c \frac{w_{j+1}^n - w_{j-1}^n}{2\Delta x} \\ \frac{w_j^{n+1} - w_j^n}{\Delta t} = c \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta x} \end{cases}$$

ce schéma est clairement d'ordre un en temps et deux en espace. Étudions en la stabilité.

Posons :

$$v = e^{ikj\Delta x} \text{ et } w = \tilde{w}_k^n e^{ikj\Delta x}$$

nous obtenons :

$$\begin{cases} \tilde{v}_k^{n+1} - \tilde{v}_k^n = c \frac{\Delta t}{\Delta x} i \sin(k\Delta x) \tilde{w}_k^n \\ \tilde{w}_k^{n+1} - \tilde{w}_k^n = c \frac{\Delta t}{\Delta x} i \sin(k\Delta x) \tilde{v}_k^n \end{cases}$$

soit :

$$\begin{pmatrix} \tilde{v}_k^{n+1} \\ \tilde{w}_k^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i\alpha \\ i\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{v}_k^n \\ \tilde{w}_k^n \end{pmatrix}$$

avec :

$$\alpha = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x)$$

les valeurs propres de la matrice d'amplification sont égal à :

$\lambda = 1 \pm i\alpha$ donc sont de module $\sqrt{1 + \alpha^2} > 1$.

On en déduit l'instabilité de ce schéma quel que soit Δt . Ce resultat négatif que l'on retrouvera dans le cas de l'équation de transport , a fait coulé beaucoup d'encre et a sustité de mombreuses des schémas stables par modifications de ce schéma naturel.

1.4.2 Schémas implicites centrés stables

On obtient evidemment des schémas stables en prenant des schémas implicites en temps . Par exemple on peut considérer le schéma de type Euler implicite suivant :

$$\begin{cases} \frac{v_j^{n+1}-v_j^n}{\Delta t} = c \frac{w_{j+1}^{n+1}-w_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \\ \frac{w_j^{n+1}-w_j^n}{\Delta t} = c \frac{v_{j+1}^{n+1}-v_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \end{cases}$$

On montrera en exercice que ce schéma d'ordre un en temps et deux en espace est inconditionnellement stable . On peut également concidère le schéma de type Crank Nicolson suivant

$$\begin{cases} \frac{v_j^{n+1}-v_j^n}{\Delta t} = \frac{C}{2} \left[\frac{w_{j+1}^n-w_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{w_{j+1}^{n+1}-w_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right] \\ \frac{w_j^{n+1}-w_j^n}{\Delta t} = \frac{C}{2} \left[\frac{v_{j+1}^n-v_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{v_{j+1}^{n+1}-v_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right] \end{cases}$$

schéma d'ordre deux en temps et en espace inconditionnellement stable et conservatif (les valeurs propres de la matrice d'amplification sont deux complexe conjugués de module un).

1.4.3 Schémas explicites stables

Schéma de Lax

On remplace au premier membre des équationsdu schéma explicite centré instable u_j^n par $\frac{v_{j+1}^n+v_{j-1}^n}{2}$ et de même w_j^n par $\frac{w_{j+1}^n+w_{j-1}^n}{2}$. Ceci peut instable s'interpréter comme un lissage en x on comme l'ajout d'un terme disipatif $\frac{v_{j+1}^n-2v_j^n+v_{j-1}^n}{2}$ approximation $\frac{\Delta x^2 \partial^2 v}{2\Delta t \partial x^2}$ de même pour w .

On obtient alors le schéma de Lax suivant

$$\begin{cases} \frac{v_j^{n+1}-\frac{v_{j+1}^n+v_{j-1}^n}{2}}{\Delta t} = c \frac{w_{j+1}^n-w_{j-1}^n}{2\Delta x} \\ \frac{w_j^{n+1}-\frac{w_{j+1}^n+w_{j-1}^n}{2}}{\Delta t} = c \frac{v_{j-1}^n-v_{j+1}^n}{2\Delta x} \end{cases}$$

On montre que ce schéma est d'ordre un en temps et stable sous la condition de Courant Friedrichs Lewy dite condition CFL .

$$c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

Remarque 1.4.2 Voir également, dans le chapitre suivant consacré à la résolution de l'équation de transport, l'interprétation du schéma de Lax comme schéma de caractéristique

Chapitre 2

L'équation de transport

Définition 2.0.3 On appelle équation de transport avec vitesse c l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (E)$$

où la fonction inconnue $u = u(x, t)$ est une fonction à valeurs réelles des deux variables réelles : $x \in \mathbb{R}$: la variable d'espace $t \succ 0$: le temps

On appelle problème de Cauchy associé à l'équation de transport, le problème

$$(P) \begin{cases} \text{Trouver } u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \succ 0 \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{où } u^0(x) \text{ est la donnée initiale} \end{cases}$$

Théorème 2.0.4 Pour toute donnée initiale $u^0 \in C^1(\mathbb{R})$ le problème de Cauchy (P) admet une unique solution classique $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ donnée par

$$u(x, t) = u^0(x - ct).$$

2.1 Position du problème

Considérons un champ de vitesses $V(x, t)$ donné et une grandeur scalaire $u(x, t)$ transportée au cours du temps par le champ V à travers un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de bord Γ . À chaque instant t , u vérifie l'équation de transport (dite aussi, de convection ou d'advection) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \cdot \text{grad } u = 0 \quad \forall x \in \Omega \quad \text{et} \quad \forall t \in [0, T]$$

Si le champ V est à divergence nulle (i.e. $\operatorname{div}(V) = \nabla \cdot V = 0$), on peut écrire cette équation sous forme conservative :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(Vu) = 0 \quad \forall x \in \Omega \quad \text{et} \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.1)$$

L'équation de transport est un exemple de problème conservatif. En effet, l'utilisation de la formule de Stokes, ou formule de la divergence, nous donne :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u dx = - \int (V \cdot \vec{n}) u d\gamma. \quad (2.2)$$

avec \vec{n} vecteur normal unitaire à Γ orienté vers l'extérieur de Ω .

Si u est une mesure de densité, cette formule lie la variation de la masse contenue dans à l'apport, par le champ V , de u à travers la frontière.

La détermination de la solution de ce problème du premier ordre en temps nécessite de fixer une condition initiale pour u :

$$u(x, 0) = u^0(x).$$

On obtient ainsi un problème à valeur initiale ou problème de Cauchy.

Les conditions aux limites choisies sur la frontière Γ doivent être cohérentes avec l'équation de transport qui est du premier ordre en espace. Plus précisément, il convient de laisser libre soit, les valeurs de u sur la frontière où le champ est sortant, soit sur celle où il est entrant. Ce choix dépend des mesures dont on dispose. Notons Γ^- la partie de la frontière où le champ est entrant ($\vec{V} \cdot \vec{n}(x) < 0$) et Γ^+ celle où il est sortant ($\vec{V} \cdot \vec{n}(x) > 0$). Si nous imposons u sur la frontière où le champ V est entrant :

$$u(x, t) = u_{\Gamma}(x, t), \quad \text{si} \quad V \cdot \vec{n}(x) < 0.$$

on obtient après une semi-discrétisation par Euler implicite en temps de (2.2) :

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} u^{p+1} dx \right) - \left(\int_{\Omega} u^p dx \right) &= -\Delta t \left(\int_{\Gamma} (V \cdot \vec{n}) u^{p+1} d\gamma \right) \\ &= -\Delta t \left(\int_{\Gamma^+} (V \cdot \vec{n}) u^{p+1} d\gamma + \int_{\Gamma^-} (V \cdot \vec{n}) u^{p+1} d\gamma \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ceci implique une contrainte pour $\int_{\Omega} u^{p+1} dx$. Le système est donc sur-déterminé la solution de l'équation (2.1) devra vérifier cette contrainte. On choisira les schémas numériques qui la vérifient.

2.2 Discrétisation de l'équation de transport

Plaçons nous dans le cas monodimensionnel d'un tube de longueur L . On choisit une discrétisation régulière de $[0,L]$ en intervalles de longueur Δx tels que $L = M\Delta x$ et une discrétisation de l'intervalle de temps $[0,T]$ en pas de temps de longueur Δt tels que $T = N\Delta t$. Notons x_j le point $j\Delta x$ et t_n le temps t_n . Notons u la valeur de la solution approchée au point x_j et au temps t_n . Considérons le problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + c\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) & \forall x \in [0,L] \text{ et } t \in [0,T] \\ u(x,0) = u^0(x) & \text{données: condition initiale} \\ u(0,t) = a, \quad c \succ 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

La condition aux limites est imposée à la frontière gauche (le point $x = 0$) où le flot est entrant.

La discrétisation de cette équation simple, dont la solution exacte est donnée par

$$u(x,t) = u^0(x - ct).$$

demande quelques précautions car la dérivée première en espace a une structure non symétrique. Physiquement, on modélise un phénomène où le sens de parcours est imposé (penser à l'amont et l'aval dans une rivière). Nous verrons quatre types

de discrétisations possibles :

- les schémas centrés.
- les schémas décentrés, dans lesquels le décentrage est introduit soit par l'approximation des dérivées en différences finies, soit par la définition des variables aval et amont en volumes finis, soit par le choix des fonctions de base en éléments finis.
- Les schémas distributifs, qui sont une formulation compacte de schémas éléments finis décentrés.
- Les schémas de caractéristiques.

2.3 Schémas centrés

Les schémas explicites centrés de discrétisation directe de l'équation de transport sont instables. Le choix d'écritures implicites en temps ou l'ajout de termes de viscosité sont absolument nécessaires à la stabilité des discrétisations centrées en espace de l'équation originale. Nous allons illustrer cela en étudiant en particulier :

- Le schéma d'Euler explicite centré instable.
- Les schémas d'Euler implicite et de Crank-Nicolson qui sont inconditionnellement stables.

- Les schémas centrés explicites de Lax et de Lax-Wendroff qui sont stables, sous condition CFL , par l'ajout de viscosité numérique.

2.3.1 Un premier schéma explicite centré instable

On considère le schéma discret suivant :

$$\frac{u^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0. \quad (2.5)$$

Ce schéma est clairement d'ordre un en temps et deux en espace. Étudions en la stabilité par la méthode de Fourier. Posons

$$u_j^n = \bar{u}_k^n \exp(ikj\Delta x)$$

nous obtenons :

$$\bar{u}_J^{n+1} - \bar{u}_k^n + c \frac{\Delta t}{\Delta x} i \sin(k\Delta x) \bar{u}_k^n = 0.$$

soit :

$$\bar{u}_J^{n+1} = (1 - i\alpha) \bar{u}_k^n,$$

avec :

$$\alpha = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x).$$

Les coefficients d'amplification G_k sont donc tous de module $\succ 1$.

On en déduit l'instabilité de ce schéma quel que soit t . On dit que le schéma est inconditionnellement instable. Nous allons rechercher des schémas stables par modification de ce schéma naturel.

2.3.2 Schémas implicites centrés stables

On obtient évidemment des schémas stables en prenant des schémas implicites en temps. Par exemple on peut considérer le schéma de type Euler implicite suivant :

$$\frac{u_J^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0. \quad (2.6)$$

La technique de Fourier permet de montrer simplement que son facteur d'amplification est :

$$G_K = \frac{1}{1 + ic \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x)}$$

et donc que ce schéma, d'ordre un en temps et deux en espace, est inconditionnellement stable. Ce schéma est dissipatif car $|G_K| < 1 \forall k$.

On peut également considérer le schéma, de type Crank-Nicolson, suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \left[\frac{c}{2} \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right] = 0. \quad (2.7)$$

Ce schéma, d'ordre deux en temps et en espace, est inconditionnellement stable et conservatif en norme L^2 car les coefficients d'amplification

$$G_k = \frac{1 - ic \frac{\Delta t}{2\Delta x} \sin(k\Delta x)}{1 + ic \frac{\Delta t}{2\Delta x} \sin(k\Delta x)}$$

sont des complexes de module un.

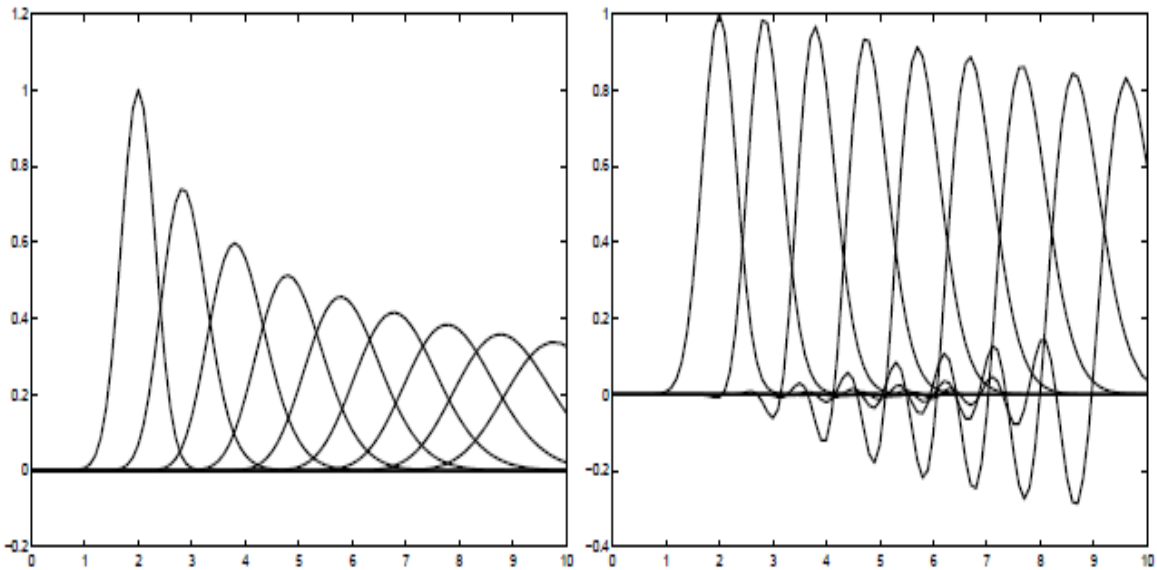


FIG2.1-Transport d'une gaussienne en utilisant les schémas d'Euler implicite et de Crank_Nicolson avec les memes pas d'espace et de temps

Remarque 2.3.1 *Ainsi, on voit que l'utilisation d'une discrétisation en temps implicite permet d'obtenir des schémas centrés stables pour l'équation d'advection. Cependant, il est parfois coûteux d'utiliser des schémas purement implicites, en particulier dans les cas non-linéaires, les systèmes d'équations et les configurations couplées que nous rencontrerons*

plus loin. La résolution du schéma implicite est difficile, par exemple, lorsque le système discret est trop grand pour une résolution directe et qu'une résolution itérative s'avère inefficace.

2.3.3 Schémas explicites centrés stables

Schéma de Lax

On remplace au premier membre du schéma explicite centré instable(2.5) , le terme u_j^n par $\frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}$. On obtient alors le schéma de Lax suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0. \quad (2.8)$$

On peut réécrire le schéma de Lax sous la forme :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2\Delta t} = 0.$$

Ceci peut s'interpréter comme un lissage en x ou comme l'ajout d'un terme dissipatif $-\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2\Delta t}$ approximant $-\frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. L'équation équivalente continue, au deuxième ordre près, est alors une équation d'advection-diffusion :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad \text{avec} \quad v = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t}. \quad (2.9).$$

Ainsi, la stabilisation du schéma se fait au prix de l'introduction d'une erreur de consistance. Ce schéma est d'ordre un en temps et stable sous la condition de Courant Friedrichs Levy dite condition *CFL* :

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \quad (2.10)$$

On voit que la viscosité numérique v est uniquement fonction des pas de discrétisation. La viscosité numérique est liée à la vitesse par une expression de la forme : $v \sim c\Delta x/2$.

Le schéma de Lax peut également s'interpréter comme le résultat de l'interpolation

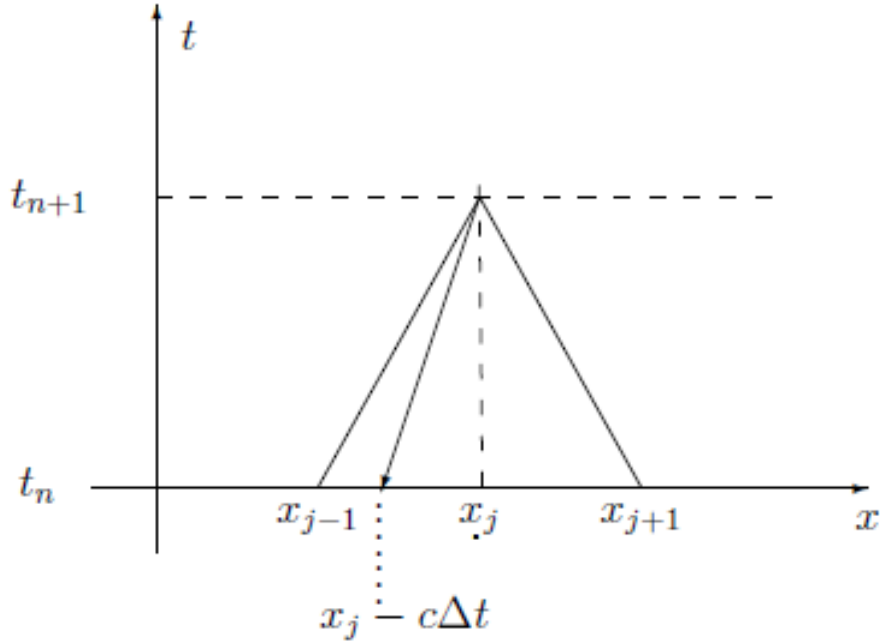


FIG.2.2 LeschémadeLaxestunschémadecaractéristiques

sur la grille d'une méthode de caractéristiques. En effet, la méthode des caractéristiques consiste à utiliser l'égalité de la valeur u_j^{n+1} (au point x_j et au temps t_{n+1}) et de la valeur au temps précédent t_n au point $x_j - c\Delta t$. Ce point n'est en général pas un point de la grille (sauf si $\frac{c\Delta t}{\Delta x}$ est un entier). On interpole donc cette valeur linéairement selon

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) u_{j-1}^n + \left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) u_{j+1}^n \right]$$

ce qui redonne(2.8)

Remarque 2.3.2 Nous retrouverons cette relation entre interpolation et introduction de dissipation dans l'équation en maillage adaptatif alors de l'interpolation d'un champ d'un maillage sur un autre après adaptation.

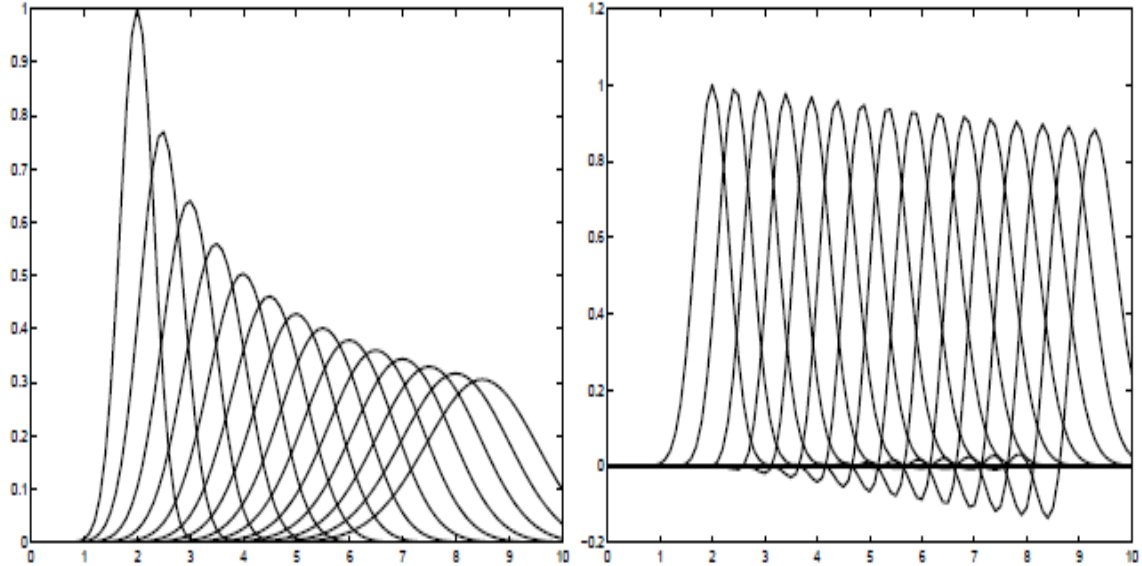


FIG.2.3 Même problème de transport d'une gaussienne que **FIG.2.1** avec les schémas de Lax et de Lax – Wendroff

Schéma de Lax-Wendroff

De même, on peut utiliser l'approche Lax-Wendroff comme pour l'équation des ondes au chapitre précédent. Cela revient à ajouter au schéma explicite instable un terme dissipatif en $O(\Delta t)$ correspondant à une discrétisation de $\frac{c^2 \Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Une interprétation classique de cette modification consiste à remarquer que le développement de Taylor :

$$u(x_j, t_{n+1}) = u(x_j, t_n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\Delta t^3). \quad (2.11)$$

devient : en utilisant $\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -c \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$:

$$u(x_j, t_{n+1}) = u(x_j, t_n) - c \Delta t \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c^2 \Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta t^3). \quad (2.12)$$

L'ajout du terme

$$-\frac{c^2 \Delta t^2}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2\Delta x^2}.$$

donnera le second ordre en temps au schéma et assurera sa stabilité. On construit

ainsi le schéma de Lax-Wendroff :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{c^2 \Delta t^2}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0. \quad (2.13)$$

La technique de Fourier permet d'obtenir la stabilité de ce schéma sous la condition $CFL \frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$.

Remarque 2.3.3 *Bien que les schémas de Lax et de Lax-Wendroff produisent tous deux à $CFL = 1$, la solution exacte, ils ne donnent pas la même solution lors d'une utilisation sur des maillages à pas variables ou bien avec des vitesses variables en temps et en espace. Leurs extensions aux dimensions supérieures accentuent cet écart. Ceci est dû aux expressions différentes de la viscosité numérique dans ces deux schémas.*

Remarque 2.3.4 *La viscosité numérique a la même dimension qu'une viscosité cinématique physique (vitesse fois longueur). Le concept de viscosité numérique s'étend bien aux dimensions supérieures lors de la résolution d'une équation scalaire, par contre son extension n'est pas aisée dans le cas des systèmes d'équations couplées (comme le système d'Euler pour la dynamique des gaz).*

:/Users/ezzamil/AppData/Local/Temp/graphics/N53GTJ03₇.pdf

FIG.2.4 Aadvection d'une front de gauche à droite par un champ de vitesse uniform sur un maillage uniforme

2.4 Décentrage

L'idée du décentrage est naturelle pour l'équation de transport où, comme nous l'avons dit, existe un amont et un aval. Le flot donc l'information proviennent de l'amont. On peut d'ailleurs physiquement expliquer l'instabilité des schémas centrés par le fait qu'ils recherchent de l'information en aval.

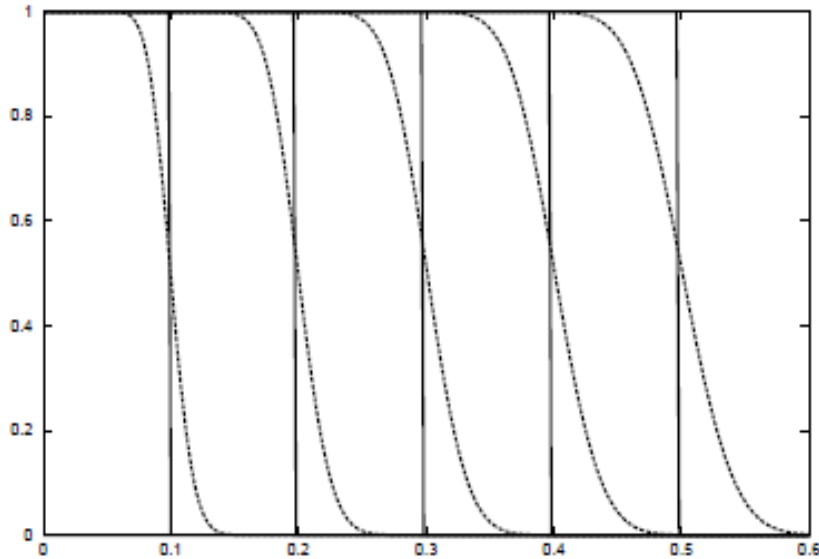


FIG.2.5 Même problème d'advection de front que figure 2.4

Les schémas décentrés vont permettre l'utilisation de discrétisations explicites en temps. On retrouvera des discrétisations équivalentes à celle des schémas explicites centrés stabilisés ci-dessus. On parlera de viscosité numérique cachée.

Considérons donc de nouveau l'équation (2.4)(11.4), où l'on suppose cette fois c variable en espace :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + c(x) \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \quad \text{sur }]0, L[\quad \text{avec } u(t, x) = u^0(x) \quad (2.14) \\ u(t, 0) &= \begin{cases} a & \text{si } c(0) > 0 \\ b & \text{si } c(0) < 0 \end{cases} \quad \text{et } u(t, L) = \begin{cases} a & \text{si } c(L) < 0 \\ b & \text{si } c(L) > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Nous introduirons le décentrage à trois niveaux qui sont équivalents pour ce problème simple :

- soit à travers des formules de dérivation numérique décentrées.
- soit à travers une formulation volumes finis et l'utilisation du signe des flux entrant et sortant des cellules.
- soit par une modification des fonctions de base dans la formulation variationnelle du problème.

2.4.1 Décentrage par la dérivation

Pour stabiliser le schéma centré (2.5), on remplace l'approximation centrée d'ordre 2 de la dérivée première par une approximation décentrée conditionnelle d'ordre 1. Plus

exactement, on utilise

$$\begin{aligned} c(x) \frac{\partial u}{\partial x} &\approx c_j \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x}, \text{ si } c_j \succ 0 \text{ et} \\ &\approx c_j \frac{u_j^{n+1} - u_j}{\Delta x}, \text{ si } c_j \prec 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

On obtient le schéma explicite décentré :

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c_j \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} &= 0 \text{ si } c_j \succ 0 \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c_j \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} &= 0 \text{ si } c_j \prec 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

qui est d'ordre un en temps et en espace et dont on peut montrer la stabilité sous condition $CFL \leq 1$ par l'analyse de Fourier habituelle. Au niveau de l'écriture matricielle du schéma, nous avons maintenant un terme non nul sur la diagonale au contraire d'un schéma centré. Le schéma décentré peut, comme le schéma de Lax, s'interpréter comme un schéma de caractéristiques. Mais cette fois l'interpolation du pied de la caractéristique, est faite, selon le signe de c_j entre x_{j-1} et x_j ou entre x_j et x_{j+1} . En recherchant une équation équivalente de la forme advection-diffusion (2.9), on constate que cette opération revient à introduire une viscosité numérique de type $\nu \sim |c(x)|\Delta x/2$.

En effet le schéma décentré 2.16 peut se réécrire sous la forme :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c_j \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - |c_j| \frac{\Delta x}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0. \quad (2.17)$$

qui correspond à la discrétisation d'une équation d'advection-diffusion

Remarque 2.4.1 *Il existe cependant un cas particulier où la diffusion numérique peut être complètement éliminée. En considérant le schéma décentré 2.16 dans le cas $c \succ 0$ constant, le choix d'un $cfl = c\Delta t/\Delta x = 1$ conduit à la solution exacte*

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n) = u_{j-1}^n$$

On montre *figure* (2.5) le comportement de notre front dans ce cas particulier. Cependant, cette situation ne se produit qu'en dimension un avec une vitesse c constante et un pas d'espace uniforme. Il est possible de compenser la perte de précision en utilisant une

approximation d'ordre plus élevé, basée sur un nombre plus important de points de discrétisation. La question de savoir quel est le schéma le plus précis que l'on peut construire en utilisant u_j, u_{j+1} et u_{j+2} si $c_j < 0$ et en utilisant u_j, u_{j-1} et u_{j-2} si $c_j > 0$

se résout par application de la formule de Taylor. Dans ce dernier cas par exemple, par application de la formule de Taylor aux termes u_{j-2} et u_{j-1} on a :

$$\begin{cases} a_0 u_j = a_0 u_j. \\ a_1 u_{j-1} = a_1 (u_j - \Delta x (\frac{\partial u}{\partial x})_j + \frac{\Delta x^2}{2} (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})_j + \Delta x^2 o(1)). \\ a_2 u_{j-2} = a_2 (u_j - 2\Delta x (\frac{\partial u}{\partial x})_j + 4\frac{\Delta x^2}{2} (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})_j + \Delta x^2 o(1)). \end{cases}$$

Après sommation, on cherche à annuler le plus grand nombre de termes possible. On obtient ainsi le système algébrique 3×3 suivant :

$$a_0 + a_1 + a_2 = 0, \quad a_1 + 4a_2 = 0 \quad (a_1 + 2a_2 = 1).$$

Ce qui permet d'obtenir l'approximation d'ordre deux :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j \approx \frac{3u_j - 4u_{j-1} + u_{j-2}}{2\Delta x} \quad \text{si } c_j > 0. \quad (2.18)$$

avec une erreur de troncature de $\Delta x^2 u_{xxx}/3$ qui est le double de celle d'une discrétisation centrée ($\Delta x^2 u_{xxx}/6$). Bien entendu, pour appliquer ce schéma, on doit disposer de deux points en aval et amont. Le traitement des frontières est donc une des difficultés majeures lors de la mise en oeuvre des schémas d'ordre élevé. En pratique, pour les points frontières, on utilisera un schéma d'ordre inférieur, nécessitant qu'un seul point.

En expérimentant ce schéma pour l'advection d'un front (figure (2.6)), on constate qu'il fait apparaître des oscillations à l'aval. On ajoute un point de discrétisation en aval pour les supprimer. On utilise alors, à nouveau, la méthode, d'identification par développement de Taylor pour les variables u_{j+1} , u_j , u_{j-1} et u_{j-2} si $c_j > 0$, et on obtient le schéma d'ordre 3 :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j \approx \frac{2u_{j+1} + 3u_{j-1} - u_{j-1} + u_{j-2}}{6\Delta x}. \quad (2.19)$$

1 Schémas compacts ou de Padé

On peut améliorer encore la précision des schémas en considérant les dérivées comme des variables indépendantes. Voici, par exemple, la combinaison suivante, appelée construction de Padé :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = a_0 u_j + a_1 u_{j+1} + a_2 u_{j+2} + a_3 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{j+1} + a_4 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{j+2} + \Delta x^3 o(1).$$

On constate que la construction est implicite. On doit résoudre un système pour déter-

miner les dérivées $(\frac{\partial u}{\partial x})_j$. Ayant introduit deux nouveaux paramètres, on peut aboutir à un schéma d'ordre 4 en annulant deux autres termes par substitution dans le développement de Taylor. On trouve en particulier.

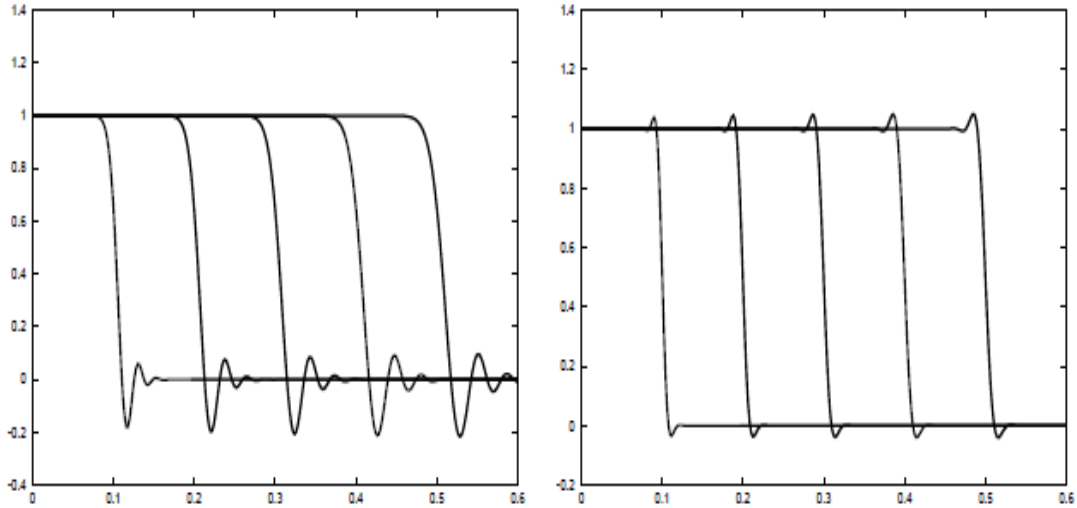


FIG. 2.6 Même problème d'advection de front de gauche à droite en utilisant les schémas (2.18) et (2.19).

$$a_0 = 0, a_1 = \frac{-3}{4\Delta x}, a_2 = \frac{3}{4\Delta x}, a_3 = a_4 = \frac{1}{4}.$$

avec une erreur de troncature de la forme $\frac{\Delta x^4}{30}(\partial^5 u / \partial x^5)_j$. Ainsi, après résolution du système algébrique suivant :

$$4\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{j+1} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{j+2} = \frac{3}{\Delta x}(u_{j+1} - u_{j+1}). \quad (2.20)$$

on aboutit directement aux dérivées. On peut alors combiner (2.20), avec l'intégration en temps de (2.4). Ici aussi nous sommes confrontés à la difficulté du traitement des points frontières où l'on est amené à utiliser une discrétisation moins précise.

Remarque 2.4.2 Une précaution, utile lors de la mise au point des discrétisations par ces méthodes : il faut toujours vérifier que la somme des coefficients s'annule.

On constate de nombreuses difficultés de résolution pour cette équation si simple. Il faut penser que des discrétisations de types (2.19) sont presque impossibles à mettre en oeuvre, en dimension deux et trois, sur des maillages nonstructurés. L'adaptation de maillage sera alors une aide précieuse, pour aboutir à des solutions précises en utilisant des schémas d'ordre faible.

Remarque 2.4.3 *On est amené, en pratique, à utiliser des discrétisations et des maillages différents selon les quantités à calculer dans les modèles physiques complexes. Par exemple, en aéro-acoustique, le maillage du calcul aérodynamique devra être raffiné dans les couches limites, alors que le maillage sera régulier pour le calcul acoustique.*

2.4.2 Décentrage de la variable en volumes finis

Le principe de la méthode des volumes finis réside dans l'utilisation de la formule de la divergence sur la forme conservative de l'équation de transport. En considérant le domaine discrétisé $\Omega_h = \cup_j C_j$ comme réunion de cellules (volumes finis), ceci nous amène à :

$$\int_{\Omega_h} \frac{\partial u}{\partial t} dx + \int_{\Omega_h} \frac{\partial u \vec{V}}{\partial x} dx = \sum_j \int_{C_j} \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_j \int_{\partial C_j} (u \vec{V}) \cdot n d\sigma = 0.$$

où n est la normale unitaire aux bords ∂C_j orientée vers l'extérieur des cellules. L'utilisation de la condensation des masses sur les intégrales de la dérivée temporelle nous donne, en dimension un, avec $\vec{V} = c c$, les équations algébriques suivantes pour les noeuds du maillage :

$$|C_j| \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_j + ((cu)|_{j+1/2} - (cu)|_{j-1/2}) = 0.$$

où les C_j sont les cellules formées par les intervalles délimités par les milieux des éléments notés $j + 1/2$ et $j - 1/2$. Dans le cas d'un maillage uniforme et l'utilisation d'un schéma d'intégration explicite en temps on obtient :

$$u_j^{n+1} - u_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} ((cu)|_{j+1/2}^n - (cu)|_{j-1/2}^n) = 0. \quad (2.21)$$

Le décentrage se fait alors par le choix de l'approximation en $j + 1/2$ et $j - 1/2$ pour les termes cu . En particulier, l'utilisation de la moyenne correspond à une discrétisation centrée. De même, l'approximation suivante pour $(cu)|_{j+1/2}$ aboutit à un schéma d'ordre un en espace et introduit le décentrage adéquat suivant le signe de la vitesse en $j + 1/2$:

$$\begin{cases} (cu)|_{j-1/2}^n = \max(0, c_{j+1/2}) u_j^n + \min(0, c_{j+1/2}) u_{j+1}^n, \text{ avec } c_{j+1/2} = \frac{c_{j+1} + c_j}{2} \\ (cu)|_{j-1/2}^n = \max(0, c_{j-1/2}) u_{j-1}^n + \min(0, c_{j-1/2}) u_j^n, \text{ avec } c_{j-1/2} = \frac{c_{j-1} + c_j}{2} \end{cases} \quad (2.22)$$

Les schémas d'ordre un introduisent trop de diffusion numérique (figure (2.4)). On peut réduire le niveau de décentrage pour améliorer la précision du schéma, en considérant par exemple pour $(cu)|_{j-1/2}$ une construction de la forme :

$$(cu)|_{j-1/2}^n = \max(0, c_{j+1/2})(\alpha u_j^n + (1 - \alpha)u_{j+1}^n) + \min(0, c_{j+1/2})((1 - \alpha)u_{j+1}^n + \alpha u_j^n). \quad (2.23)$$

avec $0.5 \leq \alpha \leq 1$. Le choix $\alpha = 0.5$ correspond à un schéma centré, mais avec une erreur de consistance car $c_{j+1/2}u_{j+1/2}^n \neq (cu)|_{j-1/2}^n$. De même, avec $\alpha = 1$ on retrouve le schéma totalement décentré ci-dessus. On présente, figure 2.7, le résultat de l'advection de notre front pour trois valeurs de α .

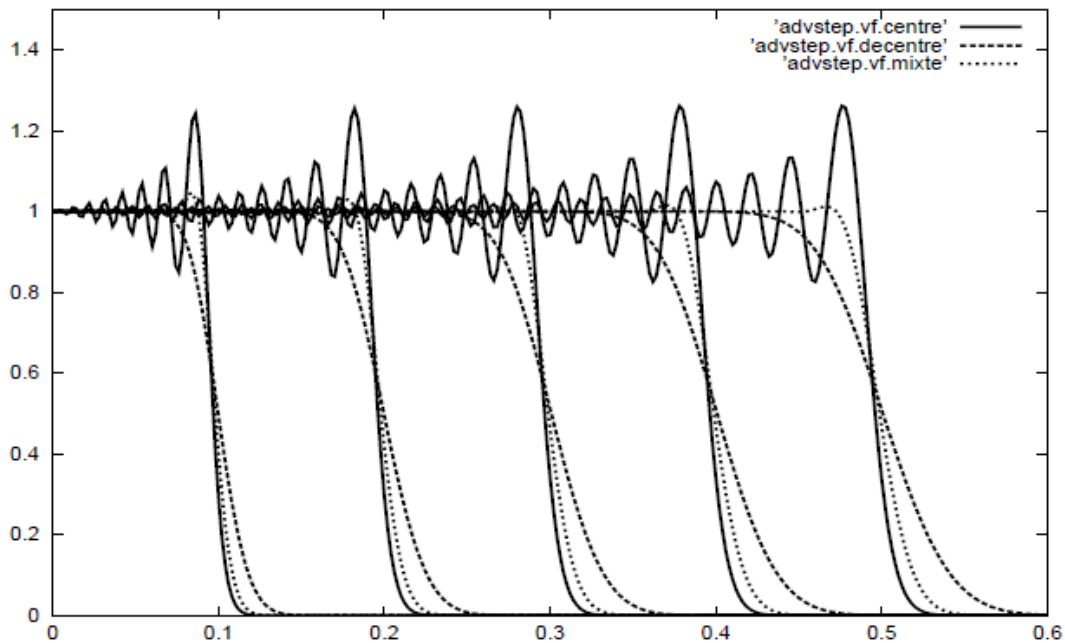


FIG.2.7 *Advection d'un front de gauche à droite en volumes finis*

La précision des schémas peut être améliorée par des constructions géométriques en utilisant des développements de Taylor locaux à partir des noeuds voisins. Cependant, ces constructions sont difficiles, surtout pour des maillages nonstructurés. De plus, elles font perdre au schéma son caractère compact (utilisant uniquement des informations locales). Ces constructions sont appelées MUSCL.

2.4.3 Décentrage par la fonction de base en éléments finis

Pour présenter la technique du décentrage dans une formulation éléments finis, nous allons considérer l'équation continue équivalente (de type advection-diffusion) pour une discrétisation décentrée d'ordre 1, appliquée au schéma d'Euler explicite :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} - c \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

On a vu (équation 2.17) que la discrétisation de cette équation par un schéma centré redonne le schéma de discrétisation décentré d'ordre 1. En multipliant l'équation équivalente par une fonction test ϕ et en intégrant sur le domaine de résolution on a :

$$\int_{\Omega} \phi \left(\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} - c \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx = 0.$$

On choisit l'espace des fonctions tests tel que l'intégrale de bord provenant de l'intégration par parties s'annule :

$$\int_{\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \psi = 0, \text{ avec } \psi = c \frac{\Delta x}{2} \phi_x.$$

Ainsi, on constate que le décentrage peut être introduit par un changement de fonction de base appliquée à la dérivée première en espace. On a naturellement une perte de consistance du schéma numérique dans la mesure où la même fonction test n'a pas été utilisée pour tous les termes de l'équation.

La mise au point de discrétisations d'ordre élevé se ferait alors en augmentant le degré des fonctions de bases dans la formulation éléments finis. Cette approche est très générale, mais à notre connaissance, les solveurs industriels utilisent presque exclusivement des discrétisations d'ordre peu élevé et principalement du $P0$ ou du $P1$ pour la résolution des problèmes hyperboliques d'ordre 1. Ceci est lié au fait que, pour les systèmes notamment et en présence de discontinuités, il existe des résultats fondamentaux qui montrent que la stabilité impose le choix de faibles niveaux de précision pour les schémas. On peut partiellement remédier à ce problème en utilisant les schémas ENO (Essentially non oscillatory) qui permettent d'obtenir une plus grande précision tout en gardant des oscillations bornées.

Schémas distributifs

La généralisation de l'approche précédente a conduit à une nouvelle classe de schémas appelés schémas distributifs. On évalue la contribution de chaque élément et le décentrage se fait par le choix des coefficients de distribution des flux aux noeuds. On obtient :

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{T, j \in T} \beta_j^T \phi_T, \quad (2.24)$$

où la sommation porte sur les éléments T ayant le sommet j en commun. Le flux T est évalué sur l'élément T et β_j^T est le coefficient de distribution de la contribution de cet élément au noeud j . La conservation des flux impose que les coefficients vérifient :

$$\sum_j \beta_j^T = 1, \text{ somme sur les sommets } j \text{ de } T$$

A titre d'exemple, en dimension 1, les éléments ayant le noeud j en commun sont les segments $(j-1, j)$ et $(j, j+1)$ et

$$\Phi_T = -\left(c \frac{\partial u}{\partial x}\right) \phi dx \sim \Delta x \left(c \frac{\partial u}{\partial x}\right)_T.$$

Un schéma centré correspond au choix $\beta_j^T = 1/2$ et un schéma totalement décentré à celui de :

$$\begin{aligned} \beta_j^{(j-1, j)} \phi_{(j-1, j)} &= 0, \text{ et } \beta_j^{(j, j+1)} \phi_{(j, j+1)} = 1 \text{ si } c_{j-1} - c_j \succ 0 \\ \beta_j^{(j-1, j)} \phi_{(j-1, j)} &= 1, \text{ et } \beta_j^{(j, j+1)} \phi_{(j, j+1)} = 0 \text{ si } c_j - c_{j+1} \prec 0 \end{aligned}$$

On obtient ainsi des discrétisations compactes, utilisant des structures de données simples. L'implémentation aisée de ces schémas et leur complexité faible les ont popularisés pour les équations scalaires. Cependant le traitement des systèmes reste difficile. En effet, en général on ne peut pas diagonaliser les systèmes. Ce qui ne permet pas de considérer de façon indépendante les variables et donc de se ramener à des problèmes sur des variables scalaires.

2.4.4 Décentrage par les caractéristiques

La méthode des caractéristiques permet l'introduction naturelle du décentrage. En effet, connaissant la caractéristique rétrograde $X(\tau)$ du champ c passant par x , solution de :

$$\frac{dX}{d\tau} = -c, \quad X(\tau = T) = x. \quad (2.25)$$

on peut résoudre (2.4) de façon exacte, car la solution $u(x, T)$ en un point x après un temps T est donnée par la valeur $u(T(\tau, 0), t = 0)$ de la variable au pied $X(\tau = 0)$ de la caractéristique passant par x . On peut généraliser ceci à tous les points et obtenir :

$$u(x, t) = u(X(0)), \quad X(\tau = T) = x, \quad \forall t, \forall x \quad (2.26)$$

Malheureusement, une implémentation efficace de cette méthode n'est pas aisée. Lorsque l'on discrétise (2.25) et (2.26), on introduit plusieurs approximations. Par exemple, si la discrétisation est linéaire par morceaux, on aboutira à une construction par segments

de la caractéristique et si le maillage n'est pas adapté au champ de vitesse, cette construction introduira une erreur importante. Par ailleurs, pour trouver la valeur au pied de la caractéristique, il faut interpoler en utilisant les valeurs aux noeuds et si localement la qualité du maillage n'est pas bonne, nous transporterons cette erreur loin en aval. Ces deux niveaux d'erreurs font que la méthode des caractéristiques est l'une des rares méthodes à composer les erreurs et donc, souvent, à les amplifier.

On peut atténuer ces deux effets en utilisant l'adaptation de maillages décrite. Mais l'adaptation devra prendre en compte, à la fois, le champ et la quantité advectée. La méthode des caractéristiques est, par contre, largement utilisée pour la discrétisation des conditions aux limites en entrée et en sortie. La bonne information étant naturellement prise en compte par la méthode. De plus, l'application de la méthode dans ce cas étant locale (i.e. à la frontière uniquement), les défauts mentionnés ci-dessus ne sont pas pénalisants. C'est donc une bonne méthode de prise en compte des conditions de sortie sur la frontière "infinie" aval en mécanique des fluides.

Bibliographie

- [1] G.R.Lindfield, J.E.T.penny, Numérical M methods Using Matlab.2012.
- [2] Bijan Mohammadi, Jaceques-Hervé Saiac, cour desimulation numérique pratique-faculté des science de Montpellier & consarvation des artes et metiers.
- [3] WWW.techno-science.net.

Résumé

Le présent travail dans ce mémoire examine l'application des méthodes de différences finies à un large éventail d'équations différentielles ordinaires et partielles du second ordre.

Un problème majeur dans le développement de son exécution est une difficulté de la comptabilité pour la grande variété de conditions aux limites et aux formes limites qui peuvent se produire des logiciels qui ont été développés pour résoudre les équations aux dérivées partielles qui se posent dans la dynamique des fluides, computationnelle et continuum mécanique, en utilisation soit des différences finies ou méthodes d'éléments finis.

Cependant, ils sont à la fois complexes et coûteux ils permettent la liberté totale de l'utilisateur de définir des limites formes et conditions.

Abstract

In this work, we examined the application of finite difference methods to a broad range, of second-order ordinary and partial differential equations. A major problem in the development

of scripts is the difficulty of accounting for the wide variety of boundary conditions and boundary shapes that can occur. Software packages have been developed to solve partial differential equations that arise in computational fluid dynamics and continuum mechanics, using either finite difference or finite element methods; however, they are both complex and expensive because they allow the user total freedom to define boundary shapes and conditions.