الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Nº Réf :……………

Centre Universitaire de Mila

Institut des Sciences et de la Technologie **Département de Mathématiques et Informatique**

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de licence

en : - Filière mathématiques fondamentales

Théorème de Riesz

Préparé par : Boudis Radouane
Boumekred Khelifa
Merabet ali Djamel addine

En cadré par : Benhabiles Hanane

Année universitaire : 2013/2014

Remerciements

Nous tenons à remercier tout d'abord Dieu, le tout puissant pour la volonté et le courage qu'il m'a donné pour mener à terme ce travail.

Nous tenons à remercier notre encadreur madame « Hanane Benhabiles », qui nous encouragé en nous faisant part d'observations constructives et pour ses précieux conseils.

Nous remercions nos parents, pour tous les sacrifices qu'ils ont consentis pour nous permettre de suivre nos études dans les meilleures conditions et de nous avoir en courage tout au long de ces années.

En fin, Nous tenons à remercier tous les amis au département de mathématiques et informatique, et ailleurs, pour leur disponibilité et leur soutien.

***Radouane, Djamel addine

ET Khalifa***

Table des matières

Introduction Générale **3**

1 Rappelles et théorèmes généraux **6**
1.1 Espaces topologiques 6
1.1.1 Quelques propriétés des espaces topologiques 7
1.2 Espaces métriques 7
1.2.1 Définition d'un espace métrique 7
1.2.2 Suites de Cauchy 7
1.2.3 Espace métrique complet 8
1.3 Les espaces vectoriels normés 8
1.3.1 Normes sur un espace vectoriel 8
1.3.2 La topologie associée à une norme 9
1.3.3 Les normes équivalentes 9
1.3.4 Cas de dimension finie 10
1.4 Espace de Banach 12
1.4.1 Définition de l'espace de Banach 12
1.4.2 Quelques exemples 12
1.4.3 Quelques propriétés des espaces de Banach 12
1.5 Espaces de Hilbert 12
1.5.1 Produit scalaire 12
1.5.2 Espace de Hilbert 13
1.5.3 Quelque Propositions sur l'espace de Hilbert 13
1.5.4 Quelques exemples d'espace de Hilbert 14

2 Le Théoréme de Riesz **15**
2.1 Application linéaire 15
2.2 Application isométrique linéaire 16
2.2.1 Isométries linéaires dans un espace vectoriel euclidienne 16
2.2.2 Propriétés des isométries linéaires 16

2.3 Application dualité 16
2.3.1 Dual d'un espace de Hilbert 17
2.4 Théorème de Riesz 18
2.5 Théorème de représentation de Riesz 19
2.5.1 Commentaires 20
2.5.2 Conséquences du théorème de Riesz 21

3 Opérateur Bornés **23**
3.1 Espace préhilbertien 23
3.2 L'espace des opérateurs 23
3.3 Spectre des opérateurs bornés 24
3.3.1 Spectre, Résolvante et Rayon spectral 24
3.3.2 Spectre des opérateurs compacts 24
3.3.3 Spectre des opérateurs continus 24
3.4 Opérateur Adjoint 25
3.4.1 Propriétés des adjoints 26
3.4.2 Quelques formules des adjoints 28
3.5 Opérateurs continus 30
3.6 Opérateurs compacts 30
3.7 Opérateurs auto-adjoints 31
3.7.1 Adjoint d'un opérateur continu 32
3.7.2 Propriétés élémentaires des opérateurs auto-adjoints 35

Introduction Générale

La naissance de l'analyse fonctionnelle moderne peut être daté à 1907, entre la Hongrie, Göttingen et Paris, par les travaux quasi-simultanément publiés, complémentaires et se faisant écho de Frigyes Riesz (qui est hongrois), Ernst Sigismund Fischer, (de Göttingen), et Maurice Fréchet (qui est français).

En 1907, à l'aide des séries de Fourier, Riesz démontre « l'équivalence » entre un espace de suites (donc discret) et un espace de fonctions (donc continu) : ces espaces seront notés, par la suite, ℓ^2 pour l'espace de suites et L^2 pour l'espace de fonctions. de plus, dans ce travail, Riesz précise la structure géométrique de l'espace $L^2([0, 2\pi])$par le biais des relations d'orthogonalité et de base orthonormale.le théorème s'appellera par la suite théorème de Riesz-Fischer car Fischer en avait donné une démonstration indépendamment et quasi-simultanément.

L'outil principal utilisé par Fréchet est l'équivalence de Riesz, le théorème principal démontré est celui que l'on nomme aujourd'hui le théorème de représentation de Riesz dans le cas de l'espace $L^2([0, 2\pi])$ Fréchet démontre aussi, de manière très analytique, un critère nécessaire et suffisant pour qu'un sous-ensemble de $L^2([0, 2\pi])$ soit complet, en utilisant un vocabulaire puisé de la géométrie euclidienne (il parle d'espace « borné » de fonctions) et de l'analyse.

En 1916, dans une publication, Riesz redéfinit l'ensemble des structures de manière abstraite et générale sur l'espace des fonctions continues sur un segment, la norme d'une fonction étant définie par$\| f \| = \sup \mid f(x) \mid$ et la continuité d'un opérateur linéaire U est définie par l'existence d'une constante M positive telle que $\forall f : \| U(f) \| \leq U \| f \|$ et la plus petite de ces constantes étant par définition, la norme$\| U \|$ car elle vérifie les propriétés habituelles des normes.

Dans ce mémoire, notre objectif est auteur de théoréme de riesz, nous avons organisé notre rapport en trois chapitres :

- Le premier chapitre propose quleques rappelles sur les théorèmes généraux de topologies.
- Le deuxiéme chapitre traite le théoréme de F.Riesz et la théorème de représentation de Riesz.
- Dans le dernier chapitre, nous présentons une étude générale de les opérateur adjoint et auto-adjoints d'un opérateur.

Notation

$\mathbb{N}$	: L'ensemble des nombres naturels.
$\mathbb{R}$	: L'ensemble des nombres réelles.
$\mathbb{Q}$	: L'ensemble des nombres rationnelles.
$\mathbb{C}$	: L'ensemble des nombres complexes.
$\langle ., . \rangle$,$(./.)$	: Le produit scalaire.
$\mathbb{R}^+$	: $[0; +\infty[$.
$\mathbb{R}^n$	: Espace euclidienne réel de dimension n.
(E,τ)	: Espace topologie.
$P(E)$	: Topologie grossière.
(E, d)	: Espace métrique.
$(E, \parallel . \parallel)$	: Espace vectoriel normé.
$(E, \langle ., . \rangle)$	: Espace de Hilbert ou préhilbertien.
$B(x_0, r)$	: Boole unité.
$A^\perp$	: L'ortogonale de A.
H^*	: Le duale de l'espace de Hilbert H.
$\pounds(E, F)$	: L'ensembles des applications linéaires.
Id_E	: L'identité de E.
f^{-1}	: L'application réciproque de f.
$Sp(u)$	: Spectre de l'opérateur u.

Chapitre 1

Rappelles et théorèmes généraux

L'objectif de ce chapitre nous rappelons quelques généralités sur les espaces :
les espaces topologiques, les espaces métriques, Les espaces vectoriels normés, espace de Banach et espace de Hilbert.

1.1 Espaces topologiques

Définition 1.1.1 *Soit E ensemble, une topologie sur E est une famille appelées ouverts τ de parties de E telle que :*

(1)Φ *et E sont des ouverts* $\in \tau$,
(2) *Tout réunion des ouverts quelconque appartient τ* $(\cup A_i \in \tau)$,
(3) *Tout intersection des ouverts quelconque appartient τ* $(\cap A_i \in \tau)$.

Un espace topologique est un ensemble E muni d'une topologie τ sur E. Le couple (E, τ) est appelé espace topologique.

Exemple

- Soit $E = \{a, b, c\}$ et $\tau = \{\Phi, E, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, on remarque que Φ et E $\in \tau$, et l'intersection vide de parties d'un ensemble E et égal à la partie vide, et une union vide de partie de E est égale à E. donc τ est une topologie sur E.
- $\tau = \{x, \Phi\}$ cette topologie et appelé topologie grossière $p(E)$.

Contre-exemple

- Soit $E = \{a, b, c, d\}$ et $\tau = \{\Phi, E, \{a\}, \{d\}, \{a, d\}, \{a, c\}, \{c, d\}\}$, E et Φ appartienne à τ, $\{a, c\} \cap \{c, d\} = c \notin \tau$.Donc τ n'est pas un topologie.

1.1.1 Quelques propriétés des espaces topologiques

1. La topologie τ définie sur X est dite sépare si :

$$\forall \alpha, \beta \in X, \alpha \neq \beta \Rightarrow \exists u \in v(\alpha), \exists v \in v(\beta) : u \cap v = \phi$$

   Une topologie sépare est une topologie qui suffisamment d'un ouvert pour distinguer les points de X.

2. Soit (X, τ) un espace topologique, une partie ß de τ est appelée une base de la topologie.

1.2 Espaces métriques

1.2.1 Définition d'un espace métrique

Définition 1.2.1 *Soit E un ensemble non vide, une distance sur E est une application*

$$d : E \times E \to [0; +\infty[$$

telle que pour x, y, z dans E :

$$\begin{aligned}
&(1)\ d(x,x) = 0 \ \textit{(annulation sur la diagonale)},\\
&(2)\ d(x,y) = 0 \ \textit{alors } x = y \ \textit{(séparation)},\\
&(3)\ d(x,y) = d(x,y) \ \textit{(symétrie)},\\
&(4)\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \ \textit{(inégalité triangulaire)}.
\end{aligned}$$

Dans ce cas le couple (X, d) est appelée un espace métrique.

1.2.2 Suites de Cauchy

Définition 1.2.2 *Soit (X, d) espace métrique $(X_n)_n \subset X$, on dit que $(X_n)_n$ est une suite de Cauchy si est seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N} : n_0 \leq q \leq p, d(X_q, X_p) < \varepsilon$$

1. Toute suite convergente dans un espace métrique est une suite de Cauchy.
2. Si $(X_n)_n$ est une suite de cauchy qui converge dans un espace métrique alors sa limite est unique.
3. L'ensemble des valeurs d'une suite de Cauchy est bornée.

1.2.3 Espace métrique complet

Définition 1.2.3 *On dit que l'espace métrique* (X, d) *est complet si toute suites de Cauchy* $(X_n)_n \in E$ *converge dans* E.

1. Un espace métrique (E, d) est complet si et seulement si les suites de Cauchy convergent.
2. Soit (E, d) un espace métrique complet et $F \subset E$ alors les (F, d) est complet si et seulement si F est fermée dans E.
3. Soit (E, d) un espace métrique complet alors tout fermé de X est complet.

Exemple 1.2.4

$$\begin{array}{l} d_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty[\\ (x, y) \mapsto d_i(x, y) \quad i = [1, \ldots, 3] \end{array}$$

telle que :

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= \sum_{j=1}^{j=n} \mid x_j - y_j \mid, \\ d_2(x, y) &= [\sum_{j=1}^{j=n} \mid x_j - y_j \mid^2]^{1/2} \textit{(la distance euclidienne)}, \\ d_3(x, y) &= \sup_{j=1\ldots n} \mid x_j - y_j \mid \textit{(la distance de la converge uniformément)}. \end{aligned}$$

1.3 Les espaces vectoriels normés

1.3.1 Normes sur un espace vectoriel

Définition 1.3.1 *On appelle norme sur E tout application* ϕ *définie de* E *dans* $\mathbb{R}^+$ *et qui vérifie les conditions suivantes :*

$$\begin{array}{l} (1) \forall x \in E,\ \phi(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \ \textit{(séparation)}, \\ (2) \forall x \in E,\ \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \phi(\lambda x) = \lambda \phi(x) \ \textit{(homogénéité)}, \\ (3) \forall (x, y) \in E \times E,\ \phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y) \ \textit{(inégalité triangulaire)}. \end{array}$$

Définition 1.3.2 *Dans ce cas on appelle espace vectoriel normé, toute couple* $(E, \| . \|)$, $\| . \|$ *est une norme sur* E.

1.3.2 La topologie associée à une norme

1. Tout espace normé est un espace métrique, la distance associe est définie comme suit :
$$d : E \times E \to [0; +\infty[$$
$$(x, y) \mapsto d(x, y) = \| x - y \|$$

2. La norme est une application uniformément continué.

   Preuve. Soit :
$$\Psi : E \longrightarrow [0; +\infty[$$
$$x \mapsto \Psi(x) = \| x \|$$

   On a :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x.y \in E : \| x - y \| < \delta \Rightarrow |\Psi(x) - \Psi(y)| < \varepsilon$$

$$|\Psi(x) - \Psi(y)| \leq \Psi(x - y) = \| x - y \| < \varepsilon = \delta$$

Il suffit de prendre $\delta = \varepsilon$. ■

3. Dans un espace vectoriel normé $(E, \| \cdot \|)$ de dimension finie tous les normes sont équivalentes.

1.3.3 Les normes équivalentes

Définition 1.3.3 *Deux normes ϕ_1 et ϕ_2 sur E dites équivalentes si :*

$$\forall \alpha, \beta \in > 0, \forall x \in E : \alpha_1.\phi_1(x) \leq \phi_2(x) \leq \alpha_2.\phi_1(x)$$

Quelques exemples

Exemple
Sur $\mathbb{R}^n$, les normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes : $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \| \cdot \|_\infty &\leq \| \cdot \|_1 \\ \| x \|_\infty &\leq \| x \|_\infty \\ &\leq \sqrt{n} \| x \|_\infty \end{aligned}$$

Contre-exemple

$$\begin{array}{ll} \| f \|_1 & = \int_0^1 \mid f(t) \mid \\ \| f \|_\infty & = \underset{(x \in [0,1])}{sup} \mid f(t) \mid \end{array} \; et$$

$$f_n(x) = \begin{cases} -n^2x + n \text{ si } x \in [1/n, 1] \\ 0 \qquad\qquad \text{si } x \notin [1/n, 1] \end{cases}$$

On a : $\| f \|_\infty = \underset{x \in ([0,1])}{sup} = \mid f(t) \mid = n$ et $\| f \|_1 = \int_0^1 \mid f(t) \mid dt = 1/2$
d'où : $\frac{\|f_n\|}{\|f_n\|_1} \longrightarrow +\infty$ pour $n \longrightarrow \infty$
Alors $\nexists$ un réel M telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\| f_n \|_\infty \leq M \| f_n \|_1$
donc $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

1.3.4 Cas de dimension finie

Théorème de Reisz :
Soit $(E, \mathbb{N})$ espaces vectoriel normé alors :
E de dimension finie $\Leftrightarrow$ La boule fermée unité $B(0.1)$ est compacte.

Remarque 1.3.4 *La réciproque de ce théorème est vraie et fait l'objet du théorème de Riesz qui suit plus loin.*

Preuve.
$\Rightarrow$?
Supposons E de dimension finie, on a alors $B(0, 1)$ compacte car c'est un fermé et borné(claire) de E.
$\Leftarrow$?
Montrons que $B(0, 1)_E$ de dimension finie.
On montre par l'absurde
On suppose E de dimension infinie.
On a :

$$B(0, 1) \subset \cup_{i=1}^n B(x, 1)$$

pour $x \in B(0, 1)$
$B(0, 1)$ est un compact donc d'après le théorème de « Borel-Lebesgue » :

$$\exists (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in B(0, 1) \text{ avec } B(0, 1) \subset \cup_{i=1}^n B(x_i, 1)$$

Pour $F \subset E$, telle que F sous espace vectoriel de dimension finie c'est un fermé.

$\exists\ x \in E$ telle que $x \notin F$
d'où $\exists y \in F$ telle que

$$\parallel x - y \parallel \quad = d(x, F)$$

On note

$$x_0 \quad = \frac{(x-y)}{(||x-y||)}, x_0 \in B(0,1)$$

On a $0 \in F$, donc :

$$d(x_0, F) = inf \parallel x_0 - z \parallel \leq \parallel x_0 - 0 \parallel = 1$$

On pose $z \in F$
On a :

$$\begin{aligned}
\parallel x_0 - z \parallel \quad &= \parallel \frac{(x-y)}{(||x-y||)} - z \parallel \\
&= \frac{1}{(||x-y||)} ||x - (y + z||x-y||)|| \\
&\geq \frac{d(x,F)}{||x-y \parallel} \\
&= \frac{||x-y||}{||x-y||} \\
&= 1
\end{aligned}$$

On déduit que :

$$\forall z \in F, \parallel x_0 - z \parallel = 1$$

Or on avait déjà

$$d(x_0, F) = 1$$

Donc

$$1 \leq i \leq n, \parallel x_0 - x_i \parallel \geq 1$$

Alors

$$x_0 \notin \cup_{i=1}^{n} B(x_i, 1)$$

et on a :

$$B(0,1) \subset \cup_{i=1}^{n} B(x_i, 1)$$

Donc

$$x_0 \notin \cup_{i=1}^{n} B(0,1)$$

Ce qui est une contradiction.

Donc on a $B(0,1)$ non compacte. ■

1.4 Espace de Banach

1.4.1 Définition de l'espace de Banach

Définition 1.4.1 *On appele espace de Banach tout espace normé complet.*

1.4.2 Quelques exemples

- $(\mathbb{R}, |\ .\ |)$ et $(\mathbb{C}, |\ .\ |)$ sont des espaces de Banach.
- $(\varsigma[a,b]_{\mathbb{R}}, \|\ .\ \|_\infty)$ est un espace de Banach avec $\| f \|_\infty = \underset{x\in[a,b]}{sup} \mid f(x) \mid$

1.4.3 Quelques propriétés des espaces de Banach

1. Tout espace normé de dimension finie est de Banach.
2. Soit $(E, \|\ .\ \|_E)$ un espace vectoriel normé et $(F, \|\ .\ \|_F)$ un sous espace vectoriel normé de E si $\dim F < +\infty$, alors F est fermé.

Preuve. F est fermé $\Leftrightarrow$ F contient les limites de tout ses suites qui convergent soit $(X_n)_n$ une suite de F avec $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in F$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : \| x_n - x \|_F < \varepsilon$$

Puisque F est de dimension finie. ■

1.5 Espaces de Hilbert

1.5.1 Produit scalaire

Définition 1.5.1 *On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel E définie sur le corps $\Bbbk = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ une application φ de $E \times E$ qui possède les propriétés suivantes :*

1.$\varphi(u+v,w) = \varphi(u,w) + \varphi(v,w)$,
2.$\varphi(\lambda u, v) = \lambda\varphi(u,v)$,
3.$\varphi(u,v) = \varphi(v,u)$,
4.$\varphi(u,u) \geq 0$,
5.$\varphi(u,u) = 0$ si et seulement si $u = 0$.

On déduit immédiatement de cette définition les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\varphi(u, v+w) &= \varphi(u,v)+\varphi(u,w),\\ \varphi(u,\lambda v) &= \lambda\varphi(u,v).\end{aligned}$$

- Si $\Bbbk = \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique.
- Si $\Bbbk = \mathbb{C}$ est une forme semi-linéaire en v et linéaire en u on dit alors que φ est sesquilinéare.

1. $\varphi(u,v)$ qu'on appelle produit scalaire de u et v sera $< u, v >$ L'application

$u \to \sqrt{< u, u >}$ satisfait on appelée la norme associe à u et donc

$$\|u\| \quad = \sqrt{< u, u >}$$

2. Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et de la norme associe à ce produit scalaire est dit préhilbertien.
3. On dit que deux vecteurs u, v d'un espace préhilbertien E sont orthogonales si :

$$< u, v > \quad = 0$$

4. L'orthogonale d'une partie non vide A de E et l'ensemble $A^{\perp}$ des éléments de E qui sont orthogonaux a tous les éléments de A.

$$A^{\perp} = \{u \in E, < u, v >= 0, \forall v \in A\}$$

1.5.2 Espace de Hilbert

Définition 1.5.2 *On appelle espace de Hilbert ou espace Hilbertien tout espaces préhilbertien complet.*

1.5.3 Quelque Propositions sur l'espace de Hilbert

1. Théorème de Pythagore : H espace préhilbertien $u, v \in H$

$$< u, v >= 0 \Rightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

2. Règle de parallélogramme : H espace préhilbertien $u, v \in H$

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

3. Théorème de Reisz : H espace de Hilbert, le duale H^* de H est isométrique. isomorphe à H par l'identification

$$\{u^* \to u, \forall v \in H, < v, u^* > \; = (v/u)\}$$

4. Continuité du produit scalaire : H espace préhilbertien, l'application

$$\{H \times H \to \mathbb{C} \;, (u, v) \to < u, v >\} \text{ et continue.}$$

5. Critère d'orthogonalité : H espace préhilbertien

$$| < u, v > | \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{C}, \|v\| \leq \|\lambda u + v\|$$

1.5.4 Quelques exemples d'espace de Hilbert

1. $\omega \in \mathbb{R}^n$ un ouvert, $l^2(\omega)$ muni du produit scalaire si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$

$$< u, v >= \omega \int v(x)u(x)dx$$

et un espace de Hilbert si $\mathbb{k} = \mathbb{C}$

$$< u, v >= \omega \int \overline{u}(x)v(x)dx$$

2. L'espace L^2 des suites numériques $(x_n)_n$ telle que$\sum_{n \in N} x_n < \infty$ est un espace de Hilbert muni de produit scalaire définie par :

$$< x, y >= \sum x_n y_n$$

Ou x et y désignant réspectivement les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ l'espace l^2 joue un rôle important car tout espace de Hilbert réparable est isométrique à L^2.

Chapitre 2

Le Théoréme de Riesz

Dans ce chapitre on explique l'application linéaire, application isométrique linéaire, l'application dualité et on présente la notion générale de théorème de Riesz.

2.1 Application linéaire

Définition 2.1.1 *Soit E et F deux espaces vectoriel sur $\mathbb{k}$, une application f de E vers F est linéaire si :*

$$\forall (x,y)\in E^2 : f(x+y)=f(x)+f(y),$$
$$\forall (\lambda,x)\in \mathbb{k}\times E : f(\lambda x)=\lambda f(x).$$

L'ensembles des applications linéaires de E vers F est note $\pounds(E,F)$.

Exemple 2.1.2 *On définie :*

$$\begin{aligned} T: \quad l^2(\mathbb{N},\mathbb{C}) &\to \mathbb{C}, \\ (x_n) &\to \sum_{k=0}^{N} x_k \end{aligned}$$

T linéaire $\Leftrightarrow \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{k}, \forall(x,y)\in\mathbb{N}^2,\ T(\alpha x+\beta y)=\alpha T(x)+\beta T(y)$

$$\begin{aligned} T(\alpha x+\beta y) &= \sum_{k=0}^{N}(\alpha x_k+\beta y_k) \\ &= \sum_{k=0}^{N}\alpha x_k+\sum_{k=0}^{N}\beta y_k \\ &= \alpha\sum_{k=0}^{N}x_k+\beta\sum_{k=0}^{N}y_k \\ &= \alpha T(x)+\beta T(y) \end{aligned}$$

Donc T est linéaire.

2.2 Application isométrique linéaire

2.2.1 Isométries linéaires dans un espace vectoriel euclidienne

Définition 2.2.1 *Soit E un espace vectoriel euclidienne, une application linéaire f dans E est appelée isométrie linéaire si et seulement si : quelque soit l'élément m de E , on a $||f(m)|| = ||m||$, autrement dit, si et seulement si f conserve la norme dans E.*
L'identité Id_E dans E et l'application $S : m \to -m$ sont des isométries linéaires de E. En effet ces deux applications sont linéaires, de plus on a :

$$\|Id_E(m)\| = \|m\| \text{ et } \|s(m)\| = \|-m\| = \|m\|$$

2.2.2 Propriétés des isométries linéaires

1. Une application linéaire f de E est une isométrie ssi elle conserve le produit scalaire.
2. Une application linéaire f de E est une isométrie ssi elle conserve la distance.
3. Une application linéaire f de E est une isométrie ssi elle conserve la norme.
4. Une isométrie linéaire f de E conserve l'orthogonalité.
5. Une isométrie linéaire f de E est une bijection dans E .
6. La composée de deux isométries linéaires est une isométrie linéaire.
7. Toute isométrie linéaire f possède une application réciproque f^{-1}, qui est elle-même une isométrie linéaire.
8. Une application linéaire est une isométrie ssi elle transforme une base orthonormée a une base orthonormée.

2.3 Application dualité

Définition 2.3.1 *Soit $(E, < .,. >)$ un espace préhilbertien réel, il existe une application $J : E \to E'$ définie par :*

$$\forall u \in E, \forall v \in E : [J(u)](v) = < v, u >$$

qui est linéaire et isométrique, J est appelée l'application de dualité de E (Ou l'isométrie de Reisz de E).

2.3.1 Dual d'un espace de Hilbert

Si E est un espace vectoriel complexe, nous appelons $\overline{E}$ espace vectoriel conjugué de E, la multiplication par un scalaire est remplacée par :

$$(\lambda, x) \to \overline{\lambda} x$$

Remarquons que toute norme de E est une norme de $\overline{E}$, et que tout sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de $\overline{E}$ (la réciproque est vraie).

Une forme sesquilinéaire a : $E \times E \to \mathbb{C}$ est une forme bilinéaire a : $E \times \overline{E} \to \mathbb{C}$.

En particulier, si E est muni d'une norme, une forme sesquilinéaire a sur E est continue si et seulement si :

$$\| a \| = \sup_{x,y \in H - \{0\}} \frac{| a(x, y) |}{\| x \| \| y \|} \text{ est fini.}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz dit que si E est un espace préhilbertien, la norme de son produit scalaire est égale à 1.

Si E est muni d'une norme, il est facile de vérifier que l'application de $\overline{E}^*$ dans $(\overline{E})^*$, qui à la forme linéaire continue ℓ sur E associe la forme linéaire $\overline{\ell} : x \to \overline{\ell(x)}$ sur $\overline{E}$, est bien définie et qu'elle est un isomorphisme linéaire de l'espace vectoriel (conjugué du dual topologique)$\overline{E}^*$ dans l'espace vectoriel (dual topologique du conjugué)$\overline{(E)}^*$, par lequel ces deux espaces vectoriels sont identifiés, le résultat suivant dit que le dual topologique d'un espace de Hilbert H est son espace vectoriel normé conjugué $\overline{H}$.

1. $\forall u \in E$:

$$< u, Ju >= [J(u)] (u) =< u.u >=\| u \|^2$$

2. Symétrie : $\forall u \in E, \forall v \in E$

$$< v, Ju >= [J(u)] (v) =< u, v >=< v, u >= [J(v)] (u) =< u, Jv >$$

3. Monotonie : $\forall u \in E, \forall v \in E$

$$< u - v, Ju - Jv >=< u - v, J(u - v) >=\| u - v \|^2 \geq 0$$

4. Posons pour $u \in E$

$$Q(u) = 1/2 \| u \|^2$$

Preuve. $\forall u \in E, \forall h \in E$

$$\begin{aligned} Q(u+h) &= 1/2 \parallel u+h \parallel^2 \\ &= 1/2 \parallel u \parallel^2 + < u, h > + 1/2 \parallel h \parallel^2 \\ &= Q(u) + < h, Ju > + 1/2 \parallel h \parallel^2 \end{aligned}$$

Soit

$$Q(u+h) - Q(u) =< h, Ju > + \parallel h \parallel \varepsilon(h)$$

Telle que

$$\varepsilon(h) = 1/2 \parallel h \parallel$$

vérifie $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ cela signifie que Q est différentiable au sens de Fréchet sur E et qu'on a :

$$DQ(u) = Ju$$

Pour tout $u \in E$, soit $DQ = J$

■

5. Si E est complexe, on peut aussi envisager J, mais J est antilinéaire

$$\left[J(\lambda.u) = \overline{\lambda}.\ J(u)\right]$$

Si l'on veut avoir J linéaire, il faut remplacer le dual par l'antidual $E_a^{'}$ constitué des formes antilinéaires. La situation est plus compliquée, mais pas plus difficile.

2.4 Théorème de Riesz

Théorème 2.4.1 *L'application de dualité J est surjective si et seulement si $(E, < .,. >)$ est complet, c'est-à-dire est un espace de Hilbert.*

Preuve.

$\Rightarrow$?

Supposons que J est surjective (donc bijective) : $\forall u \in E^{'}$, $\exists! u \in E$ telle que $J(u) = \varphi$ comme J est une isométrie +bijective et comme $E^{'} = \pounds(E, \mathbb{R})$($E^{'}$est donc complet) donc E est complet.

$\Leftarrow$?

Supposons que $(E, < .,. >)$ est complet (de Hilbert). On doit démontrer que J est surjective, c'est-à-dire : $\forall \varphi \in E^{'}$: φ s'écrit :

$$\varphi = J(u)(u \in E^{'})$$

(u sera nécéssairement unique)

Soit $\varphi \in E^{'}$et $F = ker\varphi$

Donc F est un sous espace vectoriel fermé.

Si $F = E$ c'est-à-dire $\varphi = 0$ on conclut on prenant $u = 0$

Si $F \neq E$ on peut appliquer le théorème de projection orthogonale : $E = F \oplus F^{\perp}$

Donc tout $V \in E$ admet une décomposition de la forme

$$V = v_1 + v_2$$

Avec $v_1 \in F = \ker\varphi$, $v_2 \in F^{\perp}$ c'est-à-dire :

$$\varphi(v_2) \neq 0$$

On a : $\forall\ V \in E$

$$< V - \frac{\varphi(V)}{\varphi(v_1)}.v_2, v_2 >= 0$$

$\forall v_2 \in F^{\perp}$

$$\varphi(V - \frac{\varphi(V)}{\varphi(v_1)}.v_2) = \varphi(V) - \varphi(V) = 0)$$

Alors

$$< V, v_2 > - \frac{\varphi(V)}{\varphi(v_2)} \parallel u \parallel^2 = 0$$

$$\varphi(V) =< V, u >$$

Avec

$$u = \frac{\varphi(v_2)}{\parallel v_2 \parallel^2} v_2$$

Donc $\forall\varphi \in E^{'}, \exists u \in E$ telle que

$$\varphi = \varphi_u = J(u)$$

Avec

$$\varphi_u(V) =< V, u >$$

J est donc surjective $\Rightarrow$ bijective. ■

2.5 Théorème de représentation de Riesz

Théorème 2.5.1 *Soit* $(H, < .,. >)$ *un espace de Hilbert* $\forall\varphi \in H^{'}, \exists! f \in H$ *telle que*

$$< \varphi, v >= (f, v) \forall v \in H$$

de plus

$$\| f \|_H = \| \varphi \|_{H'}$$

Preuve.

Soit $M = \varphi^{-1}(0), M$ est un sous espace fermé de H .

Si $M = H$ c'est-à-dire, $\varphi = 0$,on conclut en prenant $f = 0$.

Supposons que $M \neq H$, Montrons qu'il existe un élément $g \in H$ telle que :

$$g \notin M, \mid g \mid = 1 \text{ et } (g, w) = 0 \ \forall v \in M$$

En effet, soit $g_0 \in H$ avec $g_0 \notin M$, et soit $g_1 = p_M g_0$

On prend en suite $g = \dfrac{g_0 - g_1}{\mid g_0 - g_1 \mid}$

Tout $v \in H$ admet une décomposition de la forme

$$v = \lambda g + w$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $w \in M$: il suffit de poser :

$$\lambda = \frac{< \varphi, v >}{< \varphi, g >}$$

et $w = v - \lambda g$ il vient alors

$$(g, w) = (g, v - \lambda g) = 0$$

c$'$est-à-dir :

$$(g, v) = \lambda = \frac{< \varphi, v >}{< \varphi, g >}$$

On conclut que $\forall v \in H$

$$< \varphi, v >= (f, v)$$

ou f est définie par :

$$f =< \varphi, g > g.$$

■

2.5.1 Commentaires

1. Ce théorème montrer que toute terme linéaire continue sur H peut se représenter à l'aid du produit scalaire.
2. L'intérêt de ce théorème est que : quand $(H, < ., . >)$ est un espace de Hilbert.

3. Les espaces H et $H^{'}$ sont isométrique +bijection on tant que espace de Banach et donc identfiables.

2.5.2 Conséquences du théorème de Riesz

1. Dans le cas ou $(H, < ., . >)$ est un espace de Hilbert réel on peut muni d'une façon naturelle l'espace de Banach $(H^{'}, \|, \|_{H'})$ d'un produit scalaire $< ., . >$ qui enffet : $\varphi, \psi \in H^{'}$et J l'application de dualité de

$$H : H \to H^{'}$$

$u \in H$ unique telle que

$$\varphi = J(u)$$

et $v \in H$ unique telle que

$$\psi = J(v)$$

$$u = J^{-1}(\varphi), v = J^{-1}(\psi).$$

On pose

$$< \varphi, \psi >_{H'} =< J^{-1}(\varphi), J^{-1}(\psi) >$$

il est facile de vérifier que $< ., . >_{H'}$ est un produit scalaire sur $H^{'}$ et que

$$< \varphi, \varphi >_{H'} =\| \varphi \|^2_{H'}$$

donc le dual topologique $H^{'}$est un espace de Hilbert H . On a le jeu de formules suivant qui permet de passer de H à $H^{'}$des produit scalaire à la dualité :

$$J(u) = \varphi, J(v) = \psi, u = J^{-1}(\varphi), v = J^{-1}(\psi)$$

On a :

$$\begin{array}{llll} \varphi(v) & =< v, \varphi > & =< v, Ju > & = [J(u)]\,(v) \\ & =< u, v > & =< v, u > & = [J(v)]\,(u) \\ & = \psi(u) & =< u, \psi > & =< u, Jv > =< \varphi, \psi > \\ & =< J(u), J(v) & =< J^{-1}(\varphi), J^{-1}(\psi) > & \end{array}$$

2. Si $(E, < ., . >)$ n'est pas complet, considérons le sous-espace vectoriel : $G = adh(J(E))$ de l'espace de Banach $(E^{'}, \| \;.\; \|^{'})$. G complet car c'est un fermé dans un complet, et

$J(E)$ isométrique à E est partout dense dans G. Donc $(G, \| \, . \, \|_G^{'})$ est une réalisation du complété $\hat{E}$ de E, on sait que $\hat{E}^{'}$ est isométrique à $E^{'}$, et d'aprés le théorème de Riesz : $\hat{E}$ est isométrique à $\hat{E}$. Donc à $E^{'}$, par coséquent $adh\,[J(E)]$ est isométrique à $E^{'}, et$ donc $J(E)$ est une partie partout dense de $E^{'}$.On peut munir $J(E)$ d'un produit scalaire comme dans "1" et prolonger ce produit scalaire à $E^{'}$, ce qui revient à prendre : $\varphi \in E^{'}, \psi \in E^{'}$

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} J(u_n) \text{ et } \psi = \lim_{n\to\infty} J(v_n)$$

Donc

$$< \varphi, \psi >^{'} = \lim_{n\to\infty} < u_n, v_n >$$

et à faire les vérifications nécessaires.

3. Prenons $E = l^2(\mathbb{R})$, $u = (\varepsilon_n)$, $v = (\eta_n), n \in \mathbb{N}^*$:

$$< u, v > = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \eta_n$$

Toute forme linéaire continue $\varphi \in E^{'}$s'ecrit

$$\varphi(u) = < a, u >$$

pour toute $u \in E$, pour un $a \in E$, $a = (\alpha_n)$, soit :

$$\varphi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \eta_n$$

d'aprés le théorème de Riesz.

4. Le résultat serait faut avec le sous- espace F de $E = l^2$ suivant :

$$F = \left\{ u = (\varepsilon_n) \in l^2 / \exists N = N(u) \in N^*, \forall n \in N^* : n \geq N \Rightarrow \varepsilon_n = 0 \right\}$$

Qui n'est pas complet (il n'est pas fermé dans l^2), en effet la forme linéaire continue sur F :

$$\varphi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$$

(la somme est finie) ne s'écrit pas $\varphi(u) = < a, u >$ ou $a \in F$, car il foudrait que

$$a = (1, 1/2, ..., \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, ...) \notin F.$$

Chapitre 3

Opérateur Bornés

Le but de ce chapitre est donnez une étude générale sur l'espace des opérateurs, la spectre des opérateurs borné, les opérateurs adjoint et auto-adjoints d'un opérateur, on parler aussi sur les opérateurs compacts.

3.1 Espace préhilbertien

Définition 3.1.1 *Un espace préhilbertien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.*

1. $\mathbb{R}^d$ muni du produit scaliare canonique

$$< u, v >= \sum_{1 \leq j \leq d} u_j v_j$$

   $\mathbb{R}^d$ est un espace perihilbertien.

2. $\zeta\,[0,1]$ l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, on pose :

$< u, v >= \int_0^1 u(t)\overline{v}(t)dt$ on définit aussi un produit scalaire sur $\zeta\,[0,1]$.

3.2 L'espace des opérateurs

Définition 3.2.1 *Si $(E, \| \,.\, \|_E)$ et $(F, \| \,.\, \|_F)$ sont des espaces vectoriels normés, un opérateur borné de E dans F est une application linéaire continue $T : E \to F$, telle que :*

$$\exists c > 0, \forall u \in E \parallel T_u \parallel_F \leq c \parallel u \parallel_E$$

Proposition 3.2.2 *Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert.*
Soit $T : H_1 \rightarrow H_2$ un opérateur borné alors :

$$T_{\|L(H_1H_2)\|} = \sup\{| (T_u/v)_{H_2} | \| u \|_{H_1} \leq 1 \ et \ \| v \|_{H_2} \leq 1\}$$

3.3 Spectre des opérateurs bornés

3.3.1 Spectre, Résolvante et Rayon spectral

Définition 3.3.1 *Soit $T \in L(E)$ le spectre de T est la partie de $\mathbb{C}$ définie par :*

$$\delta(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}/T - \lambda \ n\text{'}est\ pas\ inversible\ dans\ L(E)\ \}$$

les éléments de $\delta(T)$ sont appelés valeurs spectrales. On remarque par le théorème de l'isomorphisme, T est inversible dans $L(E)$ si et seulement si T est bijectif, en effet, si T est borné et bijectif, son application réciproque est automatiquement continue, on déduit la caractérisation suivante du spectre d'un opérateur borné.

Proposition 3.3.2 *Soit $T \in L(E)$ alors :*

$$\delta(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}/T - \lambda \ n\text{'}est\ pas\ bijectif\ \}$$

3.3.2 Spectre des opérateurs compacts

Nous allons commencer en donnant un résultat général de structure du spectre des opérateurs compacts.

Théorème 3.3.3 *(Reisz-Schauder) Soient H un espace de Hilbert et $T \in ß_\infty(H)$ alors $\delta(T)/\{0\}$ est un ensemble discret de $\mathbb{C}$, forme de valeurs propres de T de multiplicites finies, de plus, si H est de dimension infinie $0 \in \delta(T)$, remarquons que lorsque $0 \in \delta(T)$, 0 ne peut pas être une valeur propre de T. Par ailleurs, 0 peut être un point d'acumulation de $\delta(T)$.*

3.3.3 Spectre des opérateurs continus

Soient E un espace vectoriel normé complexe et u un opérateur continu de E, une valeur régulière de u est un élément $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $u - \lambda\ Id$ soit inversible dans $L(E)$. L'ensemble des valeurs régulières de u est appelé l'ensemble résolvant de u. Un élément de $\mathbb{C}$ qui n'est pas une valeur régulière de u est appelé une valeur spectrale de u. L'ensemble des valeurs spectrales est appelé le spectre de u, et noté $Sp(u)$. L'application $\mathbb{R}_u : \mathbb{C} - Sp(u) \to L(E)$ définie par $\lambda \to (u - \lambda Id)^{-1}$ s'appelle l'application résolvante de u. Le rayon spectral de u est :

$$\rho(u) = sup_{\lambda \in Sp(u)} \mid \lambda \mid$$

Une valeur propre de u est un élément $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que le noyau de $u - \lambda Id$ soit non nul, (ou de manière équivalente, tel que l'application linéaire $u - \lambda Id$ ne soit pas injective). Le sous-espace vectoriel $Ker(u - \lambda Id)$ est alors appelé l'espace propre de u associé à λ. La dimension de cet espace propre (qui peut être infinie) est appelée la multiplicité de λ. Un élément non nul de $Ker(u - \lambda Id)$ est appelé un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ. L'ensemble des valeurs propres est noté $Vp(u)$, et aussi appelé le spectre ponctuel de u. Le spectre résiduel de u est l'ensemble, noté $Spres(u)$, des $\lambda \in \mathbb{C}$ non valeurs propres tels que l'image de $u - \lambda Id$ ne soit pas dense dans E.

Si $E \neq \{0\}$ et si u est l'opérateur nul, alors :

$$Sp(u) = Vp(u) = \{0\} \text{ et } Sp_{res}(u) = \phi$$

Si $E \neq \{0\}$ et si u est l'opérateur identité :

$$Sp(u) = Vp(u) = \{1\} \text{ et } Sp_{res}(u) = \phi$$

3.4 Opérateur Adjoint

Définition 3.4.1 *Soient E, F deux espaces de Hilbert et T un opérateur linéaire E de F, on appelle adjoint de T, l'opérateur (noté T^*) défini de $\mathbb{R}$ dans E*

$$< T_x, y >_F = < x, T^*_y >_E, \forall x \in E, y \in F$$

Définition 3.4.2 *Soit $((E, (. \mid .)$ et $(F, (. \mid .))$ des espaces préhilbertiens reéls, et soit $A \in L(E, F)$. On dit que A possède un adjoint s'il existe une application $B : F \to E$ telle que :*

$$\forall u \in E, \forall v \in F : [A(u) \mid v] = (u \mid B(v))$$

1. Prenons $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^m$ euclidienne. $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ s'exprime dans les bases canoniques par sa matrice $(a_{i,j})$, ou $1 \leq i \leq m$ (lignes) et $1 \leq j \leq n$ (colonnes). A possède un adjoint B dont la matrice dans les bases canoniques est $(b_{k,l})$, $1 \leq l \leq n$, $1 \leq k \leq m$, avac $b_{k,l} = a_{l,k}$. La matrice de B est la matrice transposée de la matrice A.

2. Soit E un espace préhilbertien réel, on prend $F = \mathbb{R}$, et on considère une forme linéaire φ continue ($\varphi \in E'$). Si φ possède un adjoint B, on doit avoir :

$$\forall u \in E, \forall \lambda \in F = \mathbb{R} : (\varphi(u) \mid \lambda)_{\mathbb{R}} = \varphi(u).\lambda = (u \mid B(\lambda))_E$$

En particulier, pour $\lambda = 1$, on doit avoir, $\forall u \in E$:

$$\begin{aligned} \varphi(u) = (u \backslash B(1)) \quad & \Leftrightarrow < u, \varphi > = < u, J\left[B(1)\right] > \\ & \Rightarrow \varphi = J\left[B(1)\right] \\ & \Rightarrow B(1) = J^{-1}(\varphi).P \end{aligned}$$

par conséquent φ possède un adjoint si seulement si $J^{-1}(\varphi)$ existe. Quand il existe, c'est l'application linéaire continue $\mathbb{R} \to E, \lambda \to \lambda, J^{-1}(\varphi)$, qu'on identifie parfois à $J^{-1}(\varphi)$

3.4.1 Propriétés des adjoints

1. S'il existe un adjoint est unique. En effet, supposons que $\forall u \in E, \forall v \in F$:

$$[A(u)\backslash u] = (u\backslash B_1(v)) = (u\backslash B_2(v))$$

On en deduit :$\forall u \in E, \forall v \in F$:

$$(u\backslash B_1(v)) - B_2(v)) = 0$$

Soit en faisant :

$$u = B_1(v) - B_2(v) : \| B_1(v) - B_2(v) \|^2 = 0$$

Pour tout $v \in F$, d'ou :

$$\forall v \in F : B_1(v) = B_2(v), \text{soit} : B_1 = B_2$$

2. Si A^*existe : $A^* \in L(F, E)$. En effet, $\forall u, v' \in F, \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \left[Au \mid \lambda v + \lambda' v'\right] \quad & = (u\backslash A^*(\lambda v + \lambda' v')) \\ & = [Au\backslash \lambda v] + \left[Au\backslash \lambda' v'\right] \\ & = \lambda \left[Au\backslash v\right] + \lambda' \left[Au\backslash v'\right] \\ & = \lambda(u\backslash A^* v) + (u\backslash A^* v') \\ & = (u\backslash \lambda A^* v + \lambda' A^* v') \end{aligned}$$

d'ou :

$$(u\backslash A^*(\lambda u+\lambda^{'}v^{'})-\lambda A^*v-\lambda^{'}A^*v')=0$$

et cela $\forall u, v^{'}, \forall\lambda, \lambda^{'}$ d'ou le résultat en faisant

$$u=A^*(\lambda u+\lambda'v^{'})-\lambda A^*v-\lambda^{'}A^*v'$$

3. Si A^*existe : $(A^*)^*$ existe aussi, et $(A^*)^*=A$ en effet, si $B=(A^*)^*$ existe on doit avoir : $\forall u\in E, \forall v\in F$:
$$(A^*v\backslash u)=[v\backslash Bu]$$
mais :
$$(A^*v\backslash u)=(u\backslash A^*v)=[Au\backslash u]=[v\backslash Au]$$
et donc $B=A$
4. Si $A\in L(E,F)$ et $B\in L(F,E)$ sont tels que A^* et B^* existent, on a $(A+B)^*$existe et $(A+B)^*=A^*+B^*$. Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$:
$$(\lambda A)^*=\lambda A^*$$
5. Si $A\in L(E,F)$ et $B\in L(F,G)$ possédent un adjoint, il est en de méme $B\circ A$ et on la formule :
$$(B\circ A)^*=A^*\circ B^*$$
6. Soit Si $A\in L(E,F)$ une application linéaire bijective : $A^{-1}\in L(E,F)$. A et A^{-1} possédent un adjoint : A^*est inversible et on a : $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$ en effet :
$$\left[A\circ A^{-1}(v)\backslash u^{'}\right]=\left[Id_F\; v\backslash v^{'}\right]=(A^{-1}v\mid A^*v^{'})=\left[v\backslash(A^{-1)^*}\circ A^*v^{'}\right]$$
pour tous $u,u^{'}\in E$, $v,v^{'}\in F$. On a donc : $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$

A propos de la propriété (6), on appelle que $A\in L(E,F)$ et A^{-1}existe, impliquent $A^{-1}\in L(F,E)$, mais pas $A^{-1}\in L(F,E)$.

Proposition 3.4.3 *Si $A\in L(E,F)$ et si A^* existe : $A^*\in L(E,F)$, et on a :*

$$\| A^* \|_{L(E,F)}=\| A \|_{L(E,F)}$$

Preuve.
$\forall u\in E, \forall v\in F$:

$$[Au\backslash v]=[u\backslash A^*v]$$

et donc, par l'inégalité de Cauchy-Shwarz :

$$[u\backslash A^*v] \leq\parallel Au \parallel . \parallel v \parallel\leq\parallel A \parallel\parallel u \parallel . \parallel v \parallel$$

On fait $u = A^*v$:

$$\parallel A^*v \parallel^2\leq\parallel A \parallel . \parallel A^*v \parallel . \parallel v \parallel$$

d'ou pour tout v tel que A^*, $v \neq 0$, $v \neq \ker(A^*)$, mais les éléments de $ker(A^*)$ nous importent peu pour calculer la norme de A^* :

$$\parallel A^*v \parallel\leq\parallel A \parallel . \parallel v \parallel$$

et donc A^* et continu de norme $\parallel A^* \parallel_{L(E,F)}\leq\parallel A \parallel_{L(E,F)}$, si l'on change A en A^*dans la démonstration, on obtient :

$$\parallel A \parallel\leq\parallel A^* \parallel$$

d'ou l'égalité cherchée. ■

3.4.2 Quelques formules des adjoints

Soient E, F et G des espaces de Hilberte réels , $A, B \in L(E,F)$, $\lambda \in \mathbb{R}$: A^*, B^* existe et sont dans $L(E,F)$, et on a :

1.$A^{**} = (A^*)^* = A$

2.$(A+B)^* = A^* + B^*$

3.$(\lambda A)^* = \lambda A^*$

4.$(Id_E)^* = Id_E$

5. Si $C \in L(E,G) : (C \circ A)^* = A^* \circ C^*$

6. Si A^{-1} *existe et continu*, $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

Proposition 3.4.4 *Soient* $(E, (. \mid .))$ *et* $(F, (. \mid .))$ *des espaces de Hilbert réels, et soit* $A \in L(E,F)$, *on a les formules suivantes :*

1. $\ker(A) = [\mathrm{Im}(A^*)]^\perp$
2. $\ker(A^*) = [\mathrm{Im}(A)]^\perp$
3. $adh\,[\mathrm{Im}(A)] = [\ker(A^*)]^\perp$
4. $adh\,[\mathrm{Im}(A^*)] = [\ker(A)]^\perp$

Preuve.

1. $u \in \ker(A) \Rightarrow Au = 0 \Rightarrow \forall v \in F$

$$[Au\backslash v] = 0$$

$\Rightarrow \forall v \in F$

$$(u \backslash A^* v) = 0$$

d'ou : $\forall w \in \mathrm{Im}(A^*)$:

$$(u \backslash w) = 0 \Rightarrow u \in \mathrm{Im}(A^*)^{\perp}$$

réciproquement si $u \in [\mathrm{Im}(A^*)]^{\perp}$: $\forall v \in \mathrm{Im}(A^*)$:

$$(u \backslash v) = 0$$

$\Rightarrow \forall w \in F$:

$$(u \backslash A^* w) = 0$$

$\Rightarrow \forall w \in F$:

$$[Au \backslash w] = 0$$

d'ou

$$Au = 0$$

et u $\in \ker(A)$.

2.

$$ker(A) = [\mathrm{Im}(A^*)]^{\perp} \Rightarrow [\ker(A)]^{\perp} = [\mathrm{Im}(A^*)]^{\perp\perp} = adh\,[\mathrm{Im}(A^*)]$$

soit

$$adh\,[\mathrm{Im}(A^*)] = [\ker(A)]^{\perp}$$

appliquant

$$ker(A) = [\mathrm{Im}(A^*)]^{\perp}$$

et

$$adh\,[\mathrm{Im}(A^*)] = [\ker(A)]^{\perp}$$

à $B = A^*$, on obtient

$$ker(A^*) = [\mathrm{Im}(A)]^{\perp}$$

et

$$adh\,[\mathrm{Im}(A)] = [\ker(A^*)]^{\perp}$$

■

3.5 Opérateurs continus

Définition 3.5.1 *Soit* $(E, (.\backslash.))$ *un espace de Hilbert réel, et soit* $(F, (.\backslash.))$ *un epace pré-hilbertien réel. Toute application linéaire continue* $A \in L(E, F)$ *possède un adjoint* A^*.

Preuve. Pour tout $v \in F$ fixé, considérons la fonction $E \Rightarrow \mathbb{R}$ définie par :$\forall u \in E$:

$$\Psi_v(u) = [Au\backslash v]$$

Ψ_v est linéaire, c'est évident, et continue :

$$\mid \Psi_v(u) \mid = \mid [Au\backslash v] \mid \leq \parallel Au \parallel . \parallel v \parallel \leq \parallel A \parallel . \parallel u \parallel . \parallel v \parallel$$

$\Psi_v(u)$ est donc un élément de $E^{'}$, *et* comme E est complet on peut appliquer le théoreme de Riesz il existe $a_v \in E$ tel que pour tout u $\in E$:

$$\Psi_v(u) = (u\backslash a_v)$$

Considérons ensuite, pour tout $v \in F$: $B(v) = a_v \in E$. En égard à l'unicité de a_v, on définit ainsi une application $B : F \to E, v \to a_v$ et on a :

$$\forall u \in E, \forall v \in F : \Psi_v(u) = [A_{u|v}] = (u \mid Bv)$$

d'ou le résultat : $B = A^*$ existe. ■

3.6 Opérateurs compacts

Définition 3.6.1 *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels normés complexes,* $T \in L(E, F)$, *on dit que* T *est de rang fini si son image* (ImT) *est de dimension finie donc si* F*est de dimension finie, alors tout opérateurs de* $L(E, F)$ *est de rang fini.*

$$\overline{B}_E = \{x \in E : \parallel x \parallel \leq 1\}$$

La boule unité fermée de E. Un élément u de $L(E, F)$ est dit compact s'il vérifie l'une des trois conditions équivalentes suivantes :

- $u(\overline{B}_E)$ est d'adhérence compacte dans F (pour la topologie forte),
- L'image par u de tout borné de E est d'adhérence compacte dans F,
- Pour tout suite $(x_n)n \in \mathbb{N}$ dans E telle que $\parallel x_n \parallel \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(u(x_n))_n \in \mathbb{N}$ admet une sous-suite convergente dans F.

Ces trois conditions sont bien sûr équivalentes à demander que l'image par u de toute suite bornée dans E admet une sous-suite convergente dans F.

Exemple 3.6.2 *Un élément u de $L(E, F)$ est dit de rang fini si son image est de dimension finie.*

par le théorème de Riesz (et le fait que l'image de $u(\overline{B}_E)$ soit contenue dans $\overline{B}_F(0, \| u \|)$) un élément de $L(E, F)$ de rang fini est compact. En particulier, si F est de dimension finie, alors tout élément de $L(E, F)$ est compact. De nouveau par le théorème de Riesz , si E est de dimension infinie, alors l'identité de E dans E n'est pas un opérateur compact.

3.7 Opérateurs auto-adjoints

Définition 3.7.1 *L'opérateur $A \in L(H)$ s'appelle auto-adjoint (Ou hermitien) si $A^* = A$ i,e Si A se confond avec son adjoint, conformément à cette définition, A est un opérateur auto-adjoint si pour deux éléments quelconques $x, y \in H$ on a :*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$$

la possibilité d'envoyer A d'un facteur à l'autre permet d'étudier en détail la classe des opérateurs auto-adjoints. Cette possibilité est d'autant plus précieuse que les opérateurs auto-adjoints se trouvent des emplois très nombreux, notamment en mécanique quantique.

Théorème 3.7.2 *Soient A et B deux opérateurs auto-adjoints dans H et soient α, β deux nombres réels, alors $\alpha A + \beta B$ est un opérateur auto-adjoint dans H.Puisque le produit scalaire est linéaire et que A, B sont auto-adjoints , on obtient conformément à la définition de l'opérateur $\alpha A + \beta B$*

$$\begin{aligned} \langle (\alpha A + \beta B)x, y \rangle &= \langle \alpha Ax + \beta Bx, y \rangle \\ &= \langle (\alpha A + \beta B)x, y \rangle & &= \langle \alpha Ax + \beta Bx, y \rangle \\ &= \alpha \langle Ax, y \rangle + \beta \langle Bx, y \rangle & &= \alpha \langle x, Ay \rangle + \beta \langle x, By \rangle \\ &= \langle x, \alpha Ay + \beta By \rangle & &= \langle (x, \alpha A + \beta B)y \rangle \end{aligned}$$

Théorème 3.7.3 *Soient A, B deux opérateurs auto- adjoints, l'opérateur AB est auto-adjoint si et seulement si A et B sont permutables.*

Théorème 3.7.4 *Si A est auto-adjoint, le nombre $\langle Ar, x \rangle$ reste réel pour tout $x \in H$.*

$$\langle A, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle}$$

le nombre complexe. $\langle A, x\rangle$ *se confond avec son conjugué complexe, ce qui veut dire qu'il est réel. Si* A *est un opérateur auto -adjoint, on a :*

$$\| A \| = \sup_{\|x\|\leq 1} | \langle Ax, x\rangle |$$

3.7.1 Adjoint d'un opérateur continu

Soient E, F et G des espaces de Hilbert complexes (mais tous les énoncés de cette partie sont valables pour les espaces de Hilbert réels)

Proposition 3.7.5 *Pour tout* $u \in L(E, F)$*, il existe une unique application* $u^* \in L(F, E)$ *telle que*

$$< u^*(y), x >_E = < y, u(x) >_F$$

Pour tous les $x \in E$ *et* $y \in F$*. L'application* $u \to u^*$ *est involutive (i.e qu'elle vérifie* $(u^*)^* = u$ *pour tout* $u \in L(E, F)$*), anti-linéaire, c'est-à-dire qu'elle vérifie*

$$(u + \lambda v)^* = u^* + \overline{\lambda} v^*$$

pour tous les $\lambda \in \mathbb{C}$ *et* $u, v \in L(E, F)$*), isométrique (c'est-à-dire qu'elle vérifie* $\| u^* \| = \| u \|$ *pour tout* $u \in L(E, F)$*) et vérifie* $Id^* = Id$ *et*

$$(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$$

pour tous les $u \in L(E, F)$ *et* $v \in L(G, E)$*. L'opérateur continu* u^* *est inversible si et seulement si :*

$$(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$$

de plus

$$\| u \circ u^* \| = \| u^* \circ u \| = \| u \|^2$$

L'application u^* *est appelée l'adjoint de* u *pour les produits scalaires de* E *et de* F*, lorsque l'on identifie un espace de Hilbert et le dual topologique de son conjugué par la dualité de Riesz-Fréchet.*

Preuve.

L'unicité de u^* est claire, car un vecteur de E orthogonal à tout vecteur de E est nul, elle implique les propriétés d'involution, d'anti-linéarité et la relation de contravariance

$$(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$$

Pour l'existence, soient $\varphi_E : E \to E^*$ et $\varphi_F : F \to F^*$ les isomorphismes de Riesz-Fréchet et $u^t : \ell \to \ell$ *ou* l'application duale de u , considérée comme une application (linéaire, continue) de $F^* = F^*$ dans $E^* = E^*$. Alors

$$u^* = \varphi_E^{-1} o u^t o \varphi_F$$

En appliquant pour $\varphi = \varphi_E$ puis $\varphi = \varphi_F$ la relation

$$\varphi(a)(b) = < a, b >$$

Pour des a et b dans E puis F bien choisis, nous avons pour tous les x et y dans E

$$\begin{aligned}
\overline{\langle x, \varphi_E^{-1} o u^t o \varphi_F(y) \rangle} &= \langle \varphi_E^{-1} o u^t o \varphi_F(y), x \rangle \\
&= u^t o \varphi_F(y)(x) \\
&= \varphi_F(y)(u(x)) \\
&= \langle y, u(x) \rangle \\
&= \overline{\langle u(x), y \rangle}
\end{aligned}$$

Comme les isomorphismes de Riesz-Fréchet sont des isométries, nous avons

$$\| u^* \| = \| u^t \| = \| u \|$$

On peut aussi utiliser le fait que pour tout $y \in F$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\| u^*(y) \|^2 = \ < u^*(y), u^*(y) >_E = \ < u(u^*(y)), y >_F \leq \| u \| \| u^*(y) \| \| y \|$$

ce qui implique que $\| u^* \| \leq \| u \|$. Comme$(u^*)^* = u$, en remplaçant u par u^* , nous avons donc

$$\| u^* \| = \| u \|$$

$$\| u^* \circ u \| \leq \| u^* \| \| u \| = \| u \|^2$$

de plus, pour tout $x \in E$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\| u(x) \|^2 = < u(x), u(x) >_F = < u^* \circ u(x), x >_E \leq \| u^* \circ u \| \| x \|^2$$

donc

$$\| u \|^2 \leq \| u^* \circ u \|$$

d'où

$$\| u^* \circ u \| = \| u \|^2$$

et en remplaçant u par u^*, nous avons donc $\| u \circ u^* \| = \| u^* \|^2 = \| u \|^2$ ■

Exemple 3.7.6 *Soient (X, A, μ) et (Y, B, v) deux espaces mesurés, et $N \in L^2((X, A, \mu) \times (Y, B, v))$, notons $N^* \in L^2((X, A, \mu) \times (Y, B, v))$ l'application définie par :*

$$N^* : (y, x) \to \overline{N(x, y)}$$

alors l'adjoint de l'opérateur

$$K_N : L^2(v) \to L^2(\mu)$$

de type Hilbert-Schmidt de noyau N est exactement l'opérateur

$$K_{N^*} : L^2(\mu) \to L^2(v)$$

de type Hilbert-Schmidt de noyau N en effet, pour tous les $f \in L^2(v)$ et $g \in L^2(\mu)$, nous avons par le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} < K_N f, g > &= \int_{x \in X} (\int_{y \in Y} N(x, y) f(y) dv(y)) \overline{g(x)} d\mu(x) \\ &= \int_{y \in Y} f(y) \overline{(\int_{x \in X} \overline{N(x, y)}) g(x) d\mu(x))} \; dv(y) \\ &= < f, K_{N*g} > \end{aligned}$$

En particulier, si $(X, A, \mu) = (Y, B, v)$, si N est réel et symétrique, alors l'opérateur de type Hilbert-Schmidt de noyau N est auto-adjoint (c'est-à-dire égal à son adjoint)

Soit H un espace de Hilbert. Un opérateur continu $u \in L(H)$ est dit :
-Auto-adjoint (ou hermitien) si $u = u^*$,
-Positif si $< u(x), x > \geq 0$ pour tout $x \in H$,
-Normal si $uu^* = u^* u$,
-Unitaire si $uu^* = u^* u = Id$,
-Un projecteur si $u^2 = Id$.

Remarques

1. Si H est de dimension finie, si $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base orthonormée, si M est la matrice de $u \in L(H)$ dans cette base, alors la matrice M^* de u^* dans cette base est la matrice transposée de la matrice conjuguée de M :

$$M^* = \overline{M^t}$$

Donc $u \in L(H)$ est auto-adjoint si et seulement si sa matrice M dans cette base est hermitienne (c'est-à-dire vérifie $M = \overline{M^t}$).

En particulier, si M est réelle symétrique, alors u est auto-adjoint.

2. Un opérateur auto-adjoint ou unitaire est normal. De nombreuses propriétés des opérateurs auto-adjoints ci-dessous sont valables pour les opérateurs normaux, mais nous restreignons au cas auto-adjoint dans ce cours.
3. Pour tout $u \in L(H)$, l'application $(x, y) \to < u(x), y >$ est une forme sesquilinéaire, qui est hermitienne si et seulement si u est auto-adjoint, et positive si et seulement si u est positif.
4. Cette remarque est particulière au cas des espaces de Hilbert complexes. Un opérateur continu positif d'un espace de Hilbert complexe est auto-adjoint.
   en posant $a(x, y) =< u(x), y >$ qui est une forme sesquilinéaire, il suffit de montrer que a est hermitienne, c'est-à-dire que pour tous les x et y dans H, nous avons
   $$Re(a(x, y) - a(y, x)) = 0$$
   et
   $$Im(a(x, y) + a(y, x)) = 0$$
   La seconde égalité
   $$a(x, y) + a(y, x) = a(x + y, x + y) - a(x, x) - a(y, y) \in \mathbb{R}$$

et la première égalité dans la seconde égalité en remplacé x par ix.

3.7.2 Propriétés élémentaires des opérateurs auto-adjoints

Les propriétés élémentaires principales des opérateurs auto-adjoints sont résumées dans la proposition suivante. Certaines d'entre elles ont déjà été vues les années précédentes dans les espaces de Hilbert de dimension finie.

Soient H un espace de Hilbert et $u \in L(H)$

1. Le spectre de l'adjoint u^* de u est l'ensemble des conjugués des éléments du spectre de u :
   $$Sp(u^*) = Sp(u)$$

Si u est inversible, alors le spectre de son inverse u^{-1} est l'ensemble des inverses des éléments du spectre de u :
$$Sp(u - 1) = Sp(u)^{-1}$$

2. L'orthogonal de l'image de u est le noyau de son adjoint et le noyau de u est

l'orthogonal de l'image de son adjoint :

$$(u(H))^{\perp} = Ker(u^*) \text{ et } Ker(u) = (u^*(H))^{\perp}$$

En particulier, u^* est injectif si et seulement si u est d'image dense.

3. L'opérateur continu u est compact si et seulement si son adjoint u^*.
4. Si u est auto-adjoint et si F est un sous-espace vectoriel de H invariant par u (c'est-à-dire tel que $u(F) \subset F$), alors $F^{\perp}$ est aussi invariant par u.
5. Supposons que $H \neq \{0\}$. Si u est auto-adjoint, si $M = \sup\limits_{\|x\|=1} < u(x), x >$ et $m = \inf\limits_{\|x\|=1} < u(x), x >$, alors m et M appartiennent au spectre de u, ce spectre $Sp(u)$ est réel, contenu dans l'intervalle $[m, M]$, et

$$\rho(u) = \| u \| = \sup_{\|x\|=1} | < u(x), x > | = max\{M, -m\}$$

En particulier, le rayon spectral de u est égal à sa norme, et si $Sp(u) = \{0\}$, alors $u = 0$.

6. Si u est auto-adjoint, alors son spectre résiduel est vide : $Sp_{res}(u) = \phi$.

Bibliographie

[1] Analyse fonctionnelle.theorie et applications.Haim brezis.university pierre etmarie curie et ecole polytechnique.

[2] Compléments de théorie spectrale et d'analyse harmonique ,Frédéric Paulin, Cours de deuxième année de magistère, Année 2013-2014 ,Version préliminaire.

[3] J. A. Dieudonne. El´éments d'analyse. Tome I. Fondements de l'analyse moderne.3éme édition. - Paris - Gauthier-Villars, 1979.

[4] Jean Dhombres « Analyse fonctionnelle » dans Dominique Lecourt , Dictionnaire d'histoire et philosophie des sciences, PUF, 2006.

[5] Georges Skandalis , Topologie et analyse 3éme année, Dunod coll. « Sciences Sup » 2001, p. 182.

[6] Topologie et analyse fonctionnelle,Claude Wagschal Hermann, coll. « Méthodes » 1995, théorème 3.7.4 p. 268, énoncé et démonstration.

[7] Topologique et analyse fonctionnelle , de l'écrivain Yves Sonntag , Maitre de conférence à l'université de Provence.

[8] Topologie général et espace normés , Nawfal –Elhage Hassan -1-éd 2011-566p ; 24^17.

[9] Walter Hengartner, Marcel Lambert et Corina Reischer, Introduction à l'analyse fonctionnelle, p. 162-163.