

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



N° Réf :.....

Centre Universitaire de Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master
en: - Filière mathématiques fondamentales
- Spécialité mathématiques fondamentales et appliquées

Stabilité d'un système d'ordre fractionnaire

Préparé par : Djelama Soumia
Bouhali Manal

Soutenue devant le jury :

Président **Mr. Nasr-Eddine Hamri**

Grade PROFESSEUR

Examineur **Mr. Rabeh Boueden**

Grade M. A. A

Promoteur **Mr. Abdelouahab Mohamed Salah**

Grade DOCTEUR

Année universitaire : 2013/2014

REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier dieu le tout puissant de nous avoir donnée la foi et le courage.

Nous remercions nos parents, pour tous les sacrifices qu'ils ont consentis pour nous permettre de suivre nos études dans les meilleures conditions et de nous avoir encouragée tout au long de ces années.

*Nous remercions infiniment notre encadreur **Mr Mohammed-Salah Abdelouahab** qui nous a encouragés en nous faisant part d'observations constructives et pour ses précieux conseils. Nous remercions le professeur **Nasr-eddine Hamri** d'avoir accepté de présider le Jury de ce travail. Nous remercions aussi le **Mr Rabah Bouden** pour avoir accepté d'examiner ce travail.*

Nous remercions toutes les personnes de l'institut de sciences et de la technologie qui nous ont enseigné durant toutes ces années d'étude.

Enfin nous remercions toutes les personnes qui ont aidé de près ou de loin à réaliser ce modeste travail.

Djelama Soumia

Bouhali Manal

Stabilités d'un système d'ordre fractionnaires

Djelama Soumia et Bouhali Manal

Mai 2014

Table des matières

Introduction générale	4
1 Dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire	6
1.1 Les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville . . .	6
1.1.1 Intégrale d'ordre arbitraire	6
1.1.2 Dérivée d'ordre arbitraire	8
1.1.3 Exemples	8
1.1.4 Propriétés	9
1.2 Les dérivées fractionnaires au sens de Grunwald-Letnikov . . .	10
1.2.1 La dérivation d'ordre entier relatif	10
1.2.2 Intégrale d'ordre arbitraire	14
1.2.3 Dérivée d'ordre arbitraire	16
1.2.4 Exemples	18
1.2.5 Propriétés	19
1.3 Les dérivées fractionnaires au sens de Caputo	21
1.3.1 Introduction et définition	21
1.3.2 Propriétés	22
1.4 Propriétés générales des dérivées fractionnaires	25
1.4.1 Linéarité	25
1.4.2 La règle de Leibniz pour les dérivés fractionnaires . . .	25
1.4.3 Transformée de Laplace des dérivées fractionnaires . . .	26
2 Equations différentielles d'ordre fractionnaire	30
2.1 Théorème d'existence et unicité	30
2.2 Résolution des équations différentielles linéaires d'ordre frac- tionnaire	33
2.3 Résolution numérique des équations différentielles d'ordre frac- tionnaire	39

3	Stabilité d'un système d'ordre fractionnaire	43
3.1	Stabilité d'un système linéaire fractionnaire	44
3.2	Stabilité des systèmes fractionnaires dans une région GLMI . .	46
3.2.1	<i>D</i> -stabilité et inégalités matricielles linéaires générali- sées GLMI	46
3.2.2	Application à la <i>D</i> -stabilité dans une union de sous régions convexes	47
3.2.3	Stabilité	50
3.3	Stabilité des systèmes singuliers linéaires fractionnaires	53
3.3.1	Définition d'un système singulier linéaire fractionnaire .	53
3.3.2	Stabilité	55
3.4	Stabilité d'un système non linéaire d'ordre fractionnaire	58
3.4.1	Méthode indirecte (la linéarisation)	58
3.4.2	Méthode directe (la fonction de Lyapunov)	59
4	Application	63
	Conclusion	70
	Bibliographie	71

Table des figures

2.1	Représentation de la fonction Mittag-Leffler pour quelques valeurs de α	35
3.1	Domaine de stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire avec $0 < \alpha < 1$	45
3.2	Domaine de stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire avec $1 < \alpha < 2$	45
3.3	Région de stabilité pour $0 < \alpha < 1$ considérés comme l'union de 2 régions convexes	50
4.1	Trajectoire du système (4.1) avec $\alpha = 0.8, k = \sqrt{2}$	64
4.2	Le circuit électrique.	65
4.3	Trajectoire du système (4.5) avec $q = 0.9, a = 0.6$ et $b = 0.3$	68
4.4	Trajectoire du système (4.5) avec $q = 0.9, a = 0.9$ et $b = 1.1$	69

Introduction générale

Les problèmes de la stabilité sont apparus pour la première fois en mécanique. Un critère pour la stabilité des corps rigides sous l'effet de forces gravitationnelles a été formulé par E. Torricelli en 1644 [29], en 1788, G-Lagrange a démontré un théorème qui donne les conditions nécessaires pour la stabilité des systèmes conservatifs [14]. Le développement de la technologie et les problèmes de fonctionnement des engins ont poussé les scientifiques à chercher des méthodes pour l'étude de la stabilité du mouvement, les travaux de Routh [25] et Hurwitz [12] restant des grandes références jusqu'à nos jours. Toutefois, on commence à utiliser les systèmes linéarisés pour l'étude des systèmes non linéaire sans aucune justification. En 1892, A.M. Lyapunov [15] a publié sa thèse (Problème général de la stabilité du mouvement) où il a introduit une définition très rigoureuse du problème de la stabilité du mouvement, l'absence d'une telle définition ayant causé un grand malentendu. Après Lyapunov, le développement de la théorie de la stabilité s'est orienté dans plusieurs directions, en précisant les résultats déjà élaborés. Durant ces dernières décennies, on s'intéresse plus à la stabilité des systèmes mécaniques symétriques ainsi qu'à la théorie des catastrophes (qui traite la stabilité du mouvement d'une manière plus exacte en considérant l'instabilité d'un point de vue mathématique). Dans ce contexte, on peut citer J. E. Marsden [16], V.I. Arnold [4], [5].

Beaucoup de systèmes dynamiques sont mieux caractérisés par un modèle dynamique d'ordre non entier, basé en général sur la notion de différentiation ou d'intégration de l'ordre non entier. L'étude de la stabilité des systèmes

d'ordre non entier est plus délicate que pour leurs homologues, les systèmes d'ordre entier. En effet, les systèmes fractionnaires sont, d'une part, considérés comme des systèmes à mémoire, notamment pour la prise en compte des conditions initiales.

L'idée du calcul fractionnaire consiste à généraliser les opérateurs d'intégration et de différentiation en utilisant un seul opérateur fondamental ${}_a D_t^\alpha$ où a et t sont les bornes de l'opérateur, et on a :

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^{-\alpha} & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ est l'ordre de l'opérateur.

Ce mémoire est constitué de quatre chapitres et est organisé de la manière suivante :

Dans le premier chapitre : on rappelle les notions de dérivation et intégration fractionnaire au sens de Riemman-Liouville, Grünwald-Letnikov et Caputo avec leurs propriétés.

Dans le deuxième chapitre : On présentera l'étude des équations différentielles d'ordre fractionnaire analytiquement et numériquement.

Dans le troisième chapitre : On donne les critères de la stabilité d'un système linéaire et d'un système non linéaire d'ordre fractionnaire.

Le quatrième chapitre : Est consacré à l'application des notions présentées dans les trois chapitres sur deux systèmes différentiels d'ordre fractionnaire le premier est système linéaire de dimension 2 et le deuxième est système non linéaire de dimension 3 modélisant un système hybride optique.

Chapitre 1

Dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire

Dans ce chapitre nous allons étudier quelques approches qui généralisent les notions de différentiation et intégration à l'ordre arbitraire, ces approches sont les définitions de Riemman-Liouville, Grünwald-Letnikov et Caputo, et donné quelques propriétés générales des dérivée fractionnaires à la fin du chapitre.

1.1 Les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

1.1.1 Intégrale d'ordre arbitraire

Soit f une fonction continue sur tout intervalle finie $[a, b]$ on d'éfinit la formule de Cauchy de l'intégral répété n fois de f comme suit :

$$I^n f(t) = D^{-n} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \quad (1.1)$$

tel que $\Gamma(\cdot)$ est la fonction Gamma définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} y^{x-1} \exp(-y) dy, x > 0$$

Pour étendre la notion n -uple intégration aux valeurs non entières n , on peut démarrer de la formule de Cauchy (1.1), et remplacer l'entier $(-n)$ par le réel $(-p) < 0$

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \quad (1.2)$$

Proposition 1 Soient $f \in c^0([a, b])$, $p > 0$, alors on a :

$$\lim_{p \rightarrow 0} ({}_a D_t^{-p} f(t)) = f(t)$$

et on peut alors poser ${}_a D_t^0 f(t) = f(t)$

Proposition 2 Soient $f \in c^0([a, b])$, $p > 0$, $q > 0$, alors :

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-p} ({}_a D_t^{-q} f(t)) &= {}_a D_t^{-(p+q)} f(t) \\ &= {}_a D_t^{-q} ({}_a D_t^{-p} f(t)) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-p} ({}_a D_t^{-q} f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t - \tau)^{p-1} {}_a D_t^{-q} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_a^t (t - \tau)^{p-1} d\tau \left(\int_a^{\tau} (\tau - x)^{q-1} f(x) dx \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_a^t f(x) dx \int_x^t (t - \tau)^{p-1} (\tau - x)^{q-1} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_a^t (t - x)^{p+q-1} f(x) dx \\ &= {}_a D_t^{-(p+q)} f(t) \end{aligned}$$

1.1.2 Dérivée d'ordre arbitraire

Soit $n - 1 \leq p < n$, f une fonction intégrable sur $[a, b]$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $p > 0$ de la fonction f est :

$$\begin{aligned} {}_a D_t^p f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{d^n}{dt^n} {}_a D_t^{-(n-p)} f(t) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Si $p = n - 1$ alors nous avons une dérivée conventionnelle d'ordre $n - 1$:

$$\begin{aligned} {}_a^{R-L} D_t^{n-1} f(t) &= \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t f(\tau) d\tau \\ &= f^{n-1}(t) \end{aligned} \quad (1.5)$$

1.1.3 Exemples

1. Dérivée fractionnaire de $f(t) = (t - a)^q$

${}_a^{R-L} D_t^p f(t) = \frac{d^n}{dt^n} ({}_a D_t^{-(n-p)} f(t))$, tel que $(n - 1) \leq p < n$

on a

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-(n-p)} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (\tau-a)^q d\tau \end{aligned}$$

Pour calculer cette intégrale nous avons utilisé le changement de variable $\tau = x + (t - a)$ donc $t - \tau = (t - a)(1 - x)$ alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (\tau-a)^q d\tau &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_0^1 ((t-a)(1-x))^{n-p-1} x^q (t-a)^{q+1} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_0^1 (t-a)^{n-p-1} (1-x)^{n-p-1} x^q (t-a)^{q+1} dx \\ &= \frac{(t-a)^{n-p+q}}{\Gamma(n-p)} \int_0^1 (1-x)^{n-p-1} x^q dx \\ &= \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(n+q-p+1)} (t-a)^{n-p+q} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} {}_a^{R-L}D_t^p((t-a)^q) &= \frac{d^n}{dt^n}((t-a)^{n-p+q} \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(n+q-p+1)}) \\ &= \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-p+1)}(t-a)^{q-p} \end{aligned}$$

2. Dérivée fractionnaire de $f(t) = k(\text{Constant})$

$$\begin{aligned} {}_a^{R-L}D_t^p f(t) &= \frac{d^n}{dt^n}({}_a^{R-L}D_t^{-(n-p)}k) \\ &= \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{k}{\Gamma(n-p+1)}(t-a)^{n-p}\right) \\ &= \frac{k}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p} \end{aligned}$$

1.1.4 Propriétés

1. ${}_a^{R-L}D_t^p({}_a^{R-L}D_t^{-p}f(t)) = {}_a^{R-L}D_t^{p-p}f(t) = f(t)$ cette Propriété est peut être la plus important de la dérivée au sens de Riemann-Liouville, pour $p > 0$
2. Si la dérivée fractionnaire ${}_a^{R-L}D_t^p f(t) (k-1 \leq p < k)$ d'une fonction $f(t)$ est intégrable alors

$${}_a^{R-L}D_t^{-p}({}_a^{R-L}D_t^p f(t)) = f(t) - \sum_{j=1}^k [{}_a^{R-L}D_t^{p-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)}$$

Cette propriété est un cas particulier de la propriété plus générale

$${}_a^{R-L}D_t^{-p}({}_a^{R-L}D_t^q f(t)) = {}_a^{R-L}D_t^{q-p} f(t) - \sum_{j=1}^k [{}_a^{R-L}D_t^{q-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)}$$

où $(0 \leq k-1 \leq q < k)$

1.2 Les dérivées fractionnaires au sens de Grunwald-Letnikov

1.2.1 La dérivation d'ordre entier relatif

Soit $f(t)$ une fonction continue sur $[a, b]$ on a :

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad (1.6)$$

L'application de cette définition deux fois nous donne la dérivée seconde :

$$\begin{aligned} f''(t) &= \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h} \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} \end{aligned} \quad (1.7)$$

et par récurrence on peut généraliser cette formule pour tout entier n on a

$$f^n(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh) \quad (1.8)$$

où

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

est la notion habituelle des coefficients de binôme.

Considérons maintenant l'expression suivante généralisant (1.8)

$$f_h^p(t) = \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{p}{k} f(t - kh) \quad (1.9)$$

où p est un entier positive, n est aussi un entier

Pour $p \leq n$ on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h^p(t) = f^p(t) = \frac{d^p f(t)}{dt^p}. \quad (1.10)$$

Car tout les coefficients du numérateur après $\binom{p}{k}$ sont nuls
Maintenant on remplace p dans (1.9) par $(-p)$ on peut écrire

$$f_h^{-p}(t) = \frac{1}{h^{-p}} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{-p}{k} f(t - kh) \quad (1.11)$$

Si on considère :

$$\left[\begin{matrix} p \\ k \end{matrix} \right] = \frac{p(p+1) \dots (p+k-1)}{k!}$$

pour les valeur négative de p . On remarque que

$$\binom{-p}{k} = \frac{-p(-p-1) \dots (-p-k+1)}{k!} = (-1)^{-k} \left[\begin{matrix} p \\ k \end{matrix} \right]$$

Alors la formule (1.11) prend la forme suivante

$$f_h^{(-p)} = \frac{1}{h^{-p}} \sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} -p \\ k \end{matrix} \right] f(t - kh) \quad (1.12)$$

Si n est fixé alors $f_h^{-p}(t)$ tend vers une limite (0) quand h tend vers (0)

Supposons que $n \rightarrow \infty$ quand $h \rightarrow 0$, on peut prendre $h = \frac{t-a}{x}$ où $a \in \mathbf{R}$,
notons

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ xh=t-a}} f_h^{-p} = {}_a D_t^{-p} f(t) \quad (1.13)$$

Donc

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{-p}} \sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} -p \\ k \end{matrix} \right] f(t - kh). \quad (1.14)$$

Considérons maintenant quelques cas particuliers :

Pour $p = 1$ on a

$$f_h^{-1} = h \sum_{k=0}^n f(t - kh)$$

En tenant compte de $t - xh = a$ et f est continue alors

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} f_h^{-1}(t) &= {}_a D_t^{-1} f(t) \\ &= \int_0^{t-a} f(t-z) dz \\ &= \int_a^t f(\tau) d\tau\end{aligned}$$

Pour $p = 2$ on a

$$\begin{bmatrix} 2 \\ k \end{bmatrix} = \frac{2(2+1)\dots(2+k-1)}{k!} = k+1,$$

donc

$$f_h^{-2}(t) = h \sum_{k=0}^n (k+1) h f(t - kh)$$

et posons $y = t + h$ on peut écrire

$$f_h^{-2}(t) = h \sum_{k=1}^{n+1} (kh) f(y - kh).$$

Si en faisant tendre $h \rightarrow 0$, nous aurons

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} f_h^{-2}(t) &= {}_a D_t^{-2} f(t) \\ &= \int_a^{t-a} z f(t-z) dz \\ &= \int_a^t (t-\tau) f(\tau) d\tau\end{aligned}$$

Car $y \rightarrow t$ quand $h \rightarrow 0$

Les relations précédentes donnent l'expression générale suivante

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^p \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix} f(t - kh) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \quad (1.15)$$

Montrons maintenant que la formule (1.9) est une représentation d'une intégrale répétée n fois.

En intégrant la relation

$$\frac{d}{dt}({}_aD_t^{-p}f(t)) = \frac{1}{(p-2)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-2} f(\tau) d\tau = {}_aD_t^{-p+1}f(t) \quad (1.16)$$

de à t on obtient

$${}_aD_t^{-p}f(t) = \int_a^t {}_aD_t^{-p+1}f(\tau) d\tau, \quad {}_aD_t^{-p+1} = \int_a^t {}_aD_t^{-p+2}f(\tau) d\tau$$

et aussi :

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{-p}f(t) &= \int_a^t dt \int_a^t ({}_aD_t^{-p+2}f(t)) dt \\ &= \int_a^t dt \int_a^t dt \int_a^t ({}_aD_t^{-p+3}f(t)) dt \\ &= \underbrace{\int_a^t dt \int_a^t \dots \int_a^t f(t) dt}_{p \text{ fois}} \end{aligned}$$

On voit que la dérivée d'ordre entier n (1.8) et l'intégrale répétée p fois (1.15) d'une fonction continue $f(t)$ sont des cas particuliers de l'expression :

$${}_aD_t^p f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-p} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{p}{k} f(t - kh) \quad (1.17)$$

qui représente

1. La dérivée d'ordre entier n si $p = m$ c'est-à-dire

$${}_aD_t^m f(t) = f^{(m)}(t) = \frac{d^m f(t)}{dt^m} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^m} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{m}{k} f(t - kh) \quad (1.18)$$

2. L'intégrale répétée m -fois si $p = -m$

$$\begin{aligned}
 {}_a D_t^{-p} f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} h^m \sum_{k=0}^n \binom{m}{k} f(t - kh) \\
 &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t - \tau)^{m-1} f(\tau) d\tau \\
 &= \underbrace{\int_a^t d\tau \int_a^t \dots \int_a^t f(\tau) d\tau}_{m \text{ fois}}
 \end{aligned}$$

1.2.2 Intégrale d'ordre arbitraire

Considérons le cas $p < 0$, remplaçons par $(-p)$ dans l'expression (1.17). Alors (1.17) prend la forme :

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^p \sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} p \\ k \end{matrix} \right] f(t - kh) \quad (1.19)$$

avec $nh = t - a$. Pour prouver l'existence de la limite dans (1.19) et évaluer cette limite on a besoin du théorème suivant

Théorème 1 : Prenons une suite $(\beta_k), (a_{n,k}), k = 1, 2, \dots$ et supposons que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = 1, \quad (1.20)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,k} = 0, \quad \text{pour tout } k \quad (1.21)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_{n,k} = A, \quad \text{pour tout } k \quad (1.22)$$

$$\sum_{k=1}^n |a_{n,k}| < K, \quad \text{pour tout } n \quad (1.23)$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_{n,k} \beta_k = A \quad (1.24)$$

Ce théorème a une conséquence simple á savoir, si on prend

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \beta_k = B \quad \text{alors} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_{n,k} \beta_k = AB$$

Pour appliquer ce théorème afin d'évaluer la limite (1.19) on écrit :

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-p} f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} h^p \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix} f(t - kh) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^{p-1}} \begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix} h (kh)^{p-1} f(t - kh) \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(p)}{k^{p-1}} \begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix} h (kh)^{p-1} f(t - kh) \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(p)}{k^{p-1}} \begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix} \frac{t-a}{n} \left(\frac{t-a}{n} \right)^{p-1} f \left(t - k \frac{t-a}{n} \right) \end{aligned}$$

On prend

$$\begin{aligned} \beta_k &= \frac{\Gamma(p)}{k^{p-1}} \begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix}; \\ a_{n,k} &= \frac{t-a}{n} \left(k \frac{t-a}{n} \right)^{p-1} f \left(t - k \frac{t-a}{n} \right) \end{aligned}$$

En utilisant l'identité

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)};$$

On aura

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(p)}{k^{p-1}} \begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix} = 1. \quad (1.25)$$

Evidemment, si la fonction $f(t)$ est continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ alors

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_{n,k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{t-a}{n} \left(k \frac{t-a}{n} \right)^{p-1} f \left(t - k \frac{t-a}{n} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n h(kh)^{p-1} f(t - kh) \\
&= \int_a^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau
\end{aligned} \tag{1.26}$$

En tenant compte de (1.25) et (1.26) et on applique le théorème 1, on conclut que

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^{-p} f(t) &= \lim_{n \rightarrow 0} h^p \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} f(t - kh) \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau.
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Si la fonction $f(t)$ est de classe $C^{m+1}([a, b])$, alors en intégrant par parties, on peut écrire (1.27) sous la forme :

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \tag{1.28}$$

où $(m-1) \leq p \leq m$

1.2.3 Dérivée d'ordre arbitraire

Dans ce cas on prend p positive

$$\begin{aligned}
{}_a^{G-L} D_t^p f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} h^{-p} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{p}{k} f(t - kh) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(p)}(t).
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Afin de calculer la limite (1.29), nous commençons par transformer tout d'abord l'expression de $f_h^{(p)}(t)$ comme suit :

En utilisant la propriété connue des coefficients de binômes :

$$\binom{p}{k} = \binom{p-1}{k} + \binom{p-1}{k-1} \quad (1.30)$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} f_h^{(p)}(t) &= \frac{1}{h^p} \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{p-1}{k} f(t-kh) + \frac{1}{h^p} \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{p-1}{k-1} f(t-kh) \\ &= \frac{1}{h^p} \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{p-1}{k} f(t-kh) + \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{p-1}{k} f(t-(k+1)h) \\ &= (-1)^n \binom{p-1}{n} h^{-1} f(a) + h^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{p-1}{k} \nabla f(t-kh) \end{aligned}$$

où

$$\nabla f(t-kh) = f(t-kh) - f(t-(k+1)h)$$

En applique la formule (1.30) des coefficient de binôme répétée m -fois alors :

$$f_h^p(t) = \sum_{k=0}^m (-1)^{n-r} \binom{p-r-1}{n-r} f^{-p} \nabla^r f(a+rh) + h^{-p} \sum_{k=0}^{n-m-1} (-1)^k \binom{p-m-1}{k} \nabla^{m+1} f(t-kh) \quad (1.31)$$

En appliquant le théorème précédent, on arrive finalement à l'expression suivante

$${}^G\!D_t^p f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} f_h^p(t) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \quad (1.32)$$

Où $f^{(k)}(t)$ sont continuées dans $[a, b]$ et que m est entier $m > p-1$. La petite valeur de m est déterminée par l'inégalité

$$m < p < m+1$$

1.2.4 Exemples

1. Dérivée fractionnaire de $f(t) = (t - a)^v$

Où v est un nombre réel

premier cas (l'ordre négatif)

On a

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau$$

tel que p est un réel positif

Supposons que $v > -1$ (pour la convergence de l'intégrale) et en appliquant la formule précédent pour la fonction $(t - a)^v$ alors :

$${}_a D_t^{-p} (t - a)^v = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t - \tau)^{p-1} (\tau - a)^v d\tau \quad (1.33)$$

En faisant le changement de variable suivant :

$$\tau = a + x(t - a)$$

L'expression (1.32) devient

$${}_a D_t^{-p} (t - a)^v = \frac{1}{\Gamma(p)} (t - a)^{v+p} \int_a^t x^v (1 - x)^{p-1} dx \quad (1.34)$$

Rappelons la fonction Beta est définie comme suite :

$$\beta(p, v) = \int_0^1 \tau^{p-1} (1 - \tau)^{v-1} d\tau \quad (1.35)$$

avec $(\text{Re}(p) > 0, \text{Re}(v) > 0)$

Alors le résultat (1.34) devient

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-p} (t - a)^v &= \frac{1}{\Gamma(p)} \beta(v + 1, p) (t - a)^{v+p} \\ &= \frac{\Gamma(v + 1)}{\Gamma(v + p + 1)} (t - a)^{v+p} \end{aligned} \quad (1.36)$$

Deuxième cas (l'ordre positif)

Considérons maintenant le cas $0 \leq m - 1 \leq p \leq m$ et appliquons la formule (1.32) avec $v > m - 1$

$${}_a^{G-L}D_t^p(t-a)^v = \frac{1}{\Gamma(-p+m)} \int_a^t (t-\tau)^{m-1-p} \frac{d^m(\tau-a)^v}{d\tau^m} d\tau. \quad (1.37)$$

En tenant compte de

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{d\tau^m} &= v(v-1)\dots(v-m)(\tau-a)^{v-m} \\ &= \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-m-1)}(\tau-a)^{v-m-2}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Posons $\tau = a + x(t-a)$ on aura

$$\begin{aligned} {}_a^{G-L}D_t^p(t-a)^v &= \frac{v+1}{\Gamma(v-m-1)\Gamma(-p+m)} \int_a^t (t-\tau)^{m-1-p}(t-a)^{v-m-2} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(v+1)\beta(-p+m, v-m-1)}{\Gamma(v-m-1)\Gamma(-p+m)}(t-a)^{v-p} \\ &= \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-m-1)\Gamma(v-p+1)}(t-a)^{v-p} \end{aligned} \quad (1.39)$$

2. Dérivée fractionnaire de $f(t) = C$ (Constante)

$$\begin{aligned} {}_a^{G-L}D_t^p &= \frac{1}{\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-(p+1)} C d\tau \\ &= \frac{C}{\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-(p+1)} d\tau \\ &= \frac{C}{\Gamma(-p+1)}(t-a)^{-p} \end{aligned} \quad (1.40)$$

1.2.5 Propriétés

Considérons maintenant la dérivée fractionnaire d'ordre q d'une dérivée d'ordre p (composition avec des dérivées fractionnaires) ${}_a^{G-L}D_t^q({}_a^{G-L}D_t^p f(t))$: Deux cas seront considéré séparément $p < 0$ et $q > 0$

Premier cas ($p < 0$ et $q < 0$) on a :

$$\begin{aligned}
{}_a^{G-L}D_t^q({}_a^{G-L}D_t^p f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-q-1} ({}_a^{G-L}D_t^p f(\tau)) d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(-q)\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-q-1} d\tau \int_a^\tau (\tau-x)^{-p-1} f(x) dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(-q)\Gamma(-p)} \int_a^t f(x) dx \int_x^\tau (t-\tau)^{-q-1} (\tau-x)^{-p-1} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(-q-p)} \int_a^t (t-x)^{-p-q-1} f(x) dx \\
&= {}_a^{G-L}D_t^{p+q} f(t)
\end{aligned} \tag{1.41}$$

Supposons maintenant que $0 < q < n+1$, on remarque que $q = (n+1) + (q-n-1)$ où $q-n-1 < 0$ et on utilisant les formules (1.32) et (1.41)

$$\begin{aligned}
{}_a^{G-L}D_t^q({}_a^{G-L}D_t^p f(t)) &= \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} ({}_a D_t^{q-n-1} ({}_a^{G-L}D_t^p f(t))) \\
&= \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} ({}_a^{G-L}D_t^{p+q-n-1} f(t)) \\
&= {}_a^{G-L}D_t^{p+q} f(t)
\end{aligned} \tag{1.42}$$

De (1.41) et (1.42) on conclut que si $p < 0$, alors pour tout réel arbitraire q on a :

$${}_a^{G-L}D_t^q({}_a^{G-L}D_t^p f(t)) = {}_a^{G-L}D_t^{p+q}$$

Deuxième cas ($p > 0$)

Supposons que $0 \leq m < p < m+1$ alors la formule (1.32) prenons $q < 0$, on voit que l'intégrale d'ordre $(-q)$ de ${}_a^{G-L}D_t^p f(t)$ existe si et seulement si :

$$f^{(k)}(a) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, m-1). \tag{1.43}$$

Donc sous les conditions (1.43), on arrive à

$${}_a D_t^q ({}_a^{G-L}D_t^p f(t)) = 0 \quad {}_a^{G-L}D_t^{p+q} f(t). \tag{1.44}$$

Prenons maintenant $0 \leq n < q < n + 1$, on suppose que $f(t)$ satisfait les conditions (1.43) et en tenant compte du fait que $q - n - 1 < 0$, la formule (1.44) peut ainsi être utilisée, on obtient :

$$\begin{aligned}
 {}_a^{G-L}D_t^q({}_a^{G-L}D_t^p f(t)) &= \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}({}_a^{G-L}D_t^{q-n-1}({}_a^{G-L}D_t^p f(t))) \\
 &= \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}({}_a^{G-L}D_t^{q-n+p-1} f(t)) \\
 &= {}_a^{G-L}D_t^{p+q} f(t)
 \end{aligned} \tag{1.45}$$

De (1.44) et (1.45) on conclut que si $0 \leq m < p < m + 1$, alors (1.45) à lieu pour tout réel arbitraire q , si la fonction $f(t)$ satisfait les conditions (1.43).

1.3 Les dérivées fractionnaires au sens de Caputo

1.3.1 Introduction et définition

La définition de la différentiation fractionnaire de type Riemann-Liouville a joué un rôle important dans le développement de la théorie des dérivées et intégrales fractionnaires et pour son application dans les mathématiques pures (solutions des équations différentielles d'ordre entier, définition de nouvelles classes de fonction, sommation des séries....). Cependant, la technologie moderne demande une certaine révision de l'approche mathématique pure bien connue, De nombreux travaux ont apparus, spécialement dans la théorie de visco-élasticité et des mécaniques du solide, où les dérivées fractionnaires sont utilisées pour une bonne description des propriétés des matériaux. Les problèmes, appliqués demandent des définitions de dérivées fractionnaires autorisant l'utilisation des conditions initiales interprétables physiquement, lesquelles contiennent $f(a)$, $f'(a)$, etc... Malgré le fait que des problèmes aux valeurs initiales avec de telles conditions initiales peuvent être résolus mathématiquement, La solution de ce problème a été proposée par M.Caputo (dans les années soixante).

Donc on introduit une dérivée fractionnaire qui est plus restrictive que celle de Riemann-Liouville.

Définition 1 Soient $f \in C^n([a, b])$, $p > 0$ la dérivée fractionnaire de la fonction f au sens de Caputo est défini par :

$$\begin{aligned} {}_a^C D_t^p f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{p-n+1}} d\tau \\ &= {}_a^C D_t^{-(n-p)} \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right). \end{aligned} \quad (1.46)$$

Où $n-1 < p < n$ et $t > a$.

Remarque :

Soit $p > 0$, on a

1. Si $f(x) \in C([a, b])$ alors

$${}_a^C D_t^p ({}_a D_t^{-p} f(t)) = f(t)$$

2. Si $f(x) \in C^n([a, b])$ alors

$${}_a D_t^{-p} ({}_a^C D_t^p f(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k.$$

En particulier, si $0 < p \leq 1$ et $f(x) \in C([a, b])$ alors

$${}_a D_t^{-p} ({}_a^C D_t^p f(t)) = f(t) - f(a).$$

1.3.2 Propriétés

Soit $f \in C^{n+1}([a, b])$

1. La dérivée au sens de Caputo d'une fonction constante est nulle par contre la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction constante n'est pas nulle.

2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $n - 1 < p < n$ on a

$${}_a^C D_t^p ({}_a^C D_t^m f(t)) = {}_a^C D_t^{p+m} f(t)$$

mais :

$${}_a^C D_t^m ({}_a^C D_t^p f(t)) = {}_a^C D_t^{m+p} f(t)$$

si et seulement si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = n, n + 1, \dots, m$

3. La relation entre la dérivée au sens de Caputo et la dérivée au sens de Riemann-Liouville est donnée par :

$${}_a^C D_t^p f(t) = {}_a^{R-L} D_t^p f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-p+1)} (t-a)^{k-p}$$

Démonstrations :

1. Si $f(t) = K$ (*constant*) alors $f^{(k)}(t) = 0$ pour $k = 1, \dots, n$ donc

$${}_a^C D_t^p K = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t \frac{f^{(k)}(a)}{(t-\tau)^{n-p}} d\tau = 0$$

par contre

$${}_a^{R-L} D_t^p K = \frac{K t^{-p}}{\Gamma(1-p)}$$

2. Montrons que : ${}_a^C D_t^p ({}_a^C D_t^m f(t)) = {}_a^C D_t^{p+m} f(t)$

On a

$$\begin{aligned} {}_a^C D_t^p ({}_a^C D_t^m f(t)) &= {}_a D_t^{-(n-p)} {}_a D_t^n ({}_a^C D_t^m f(t)) \\ &= {}_a D_t^{-(n-p)} {}_a D_t^{n+m} f(t) \\ &= {}_a D_t^{-(n+m-(p+m))} {}_a D_t^{n+m} f(t) \\ &= {}_a^C D_t^{p+m} f(t) \end{aligned}$$

Montrons que ${}_a^C D_t^m ({}_a^C D_t^p f(t)) = {}_a^C D_t^{m+p} f(t)$ si et seulement si

$$f^{(k)}(a) = 0 \quad \text{pour } k = n, n + 1, \dots, m$$

$$\begin{aligned}
D_t^m({}^C D_t^p f(t)) &= D_t^m(D_t^p f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-p+1)}(t-a)^{k-p}) \\
&= D_t^m(D_t^p f(t)) - D_t^m\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-p+1)}(t-a)^{k-p}\right) \\
&= D_t^{p+m} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-p+1)} D_t^m(t-a)^{k-p} \\
&= D_t^{p+m} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(p+m)+1)}(t-a)^{k-(p+m)} \\
&= D_t^{p+m} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(p+m)+1)}(t-a)^{k-(p+m)} \\
&\quad - \sum_{k=n}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(p+m)+1)}(t-a)^{k-(p+m)} \\
&\quad + \sum_{k=n}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(p+m)+1)}(t-a)^{k-(p+m)} \\
&= D_t^{p+m} f(t) - \sum_{k=0}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(p+m)+1)}(t-a)^{k-(p+m)} \\
&\quad + \sum_{k=n}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(p+m)+1)} \\
&= {}^C D_t^{p+m} f(t) + \sum_{k=n}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(p+m)+1)}(t-a)^{k-(p+m)}
\end{aligned}$$

Donc

$${}^C D_t^m({}^C D_t^p f(t)) = {}^C D_t^{m+p} f(t)$$

seulement si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = n, n+1, \dots, m$

1.4 Propriétés générales des dérivées fractionnaires

1.4.1 Linéarité

Similairement à la différentiation d'ordre entier, la différentiation fractionnaire est une application linéaire

$$D^p(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^p f(t) + \mu D^p g(t),$$

où D^p désigne n'importe quelle mutation de la différentiation fractionnaire. Par exemple pour la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre p on a :

$$\begin{aligned} D^p(\lambda f(t) + \mu g(t)) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (\lambda f(\tau) + \mu g(\tau)) d\tau \\ &= \frac{\lambda}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau \\ &\quad + \frac{\mu}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} g(\tau) d\tau \\ &= \lambda D^p f(t) + \mu D^p g(t) \end{aligned}$$

1.4.2 La règle de Leibniz pour les dérivés fractionnaires

La règle de Leibniz pour la dérivée fractionnaire est la suivante :

Si f est continue dans $[a, b]$ $\varphi(t)$ admet $(n+1)$ dérivée continue dans $[a, b]$, alors la dérivée fractionnaire du produit $\varphi(t)f(t)$ est donnée par :

$${}_a D_t^p (\varphi(t)f(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \varphi^{(k)}(t) {}_a D_t^{p-k} f(t) - R_n^p(t)$$

où

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!} \quad n \geq p+1$$

et

$$R_n^p(t) = \frac{1}{n!\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} f(\tau) d\tau \int_\tau^t \varphi^{(n+1)}(x)(\tau-x)^n dx$$

avec

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^p(t) = 0$$

Si $f(t)$ et $\varphi(t)$ avec toutes ses dérivées sont continues dans $[a, b]$, alors la règle de Leibniz pour la dérivation fractionnaire est donnée par :

$${}_a D_t^p (\varphi(t) f(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} \varphi^{(k)}(t) {}_a D_t^{p-k} f(t)$$

${}_a D_t^p$ est la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov .

1.4.3 Transformée de Laplace des dérivées fractionnaires

Rappelons que la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ est la fonction $F(s)$ définie par :

$$F(s) = L \{f(t), s\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1.47)$$

$f(t)$ est appelée originale qui peut être obtenue par la transformée de Laplace inverse :

$$f(t) = L^{-1} \{F(s), t\} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds, \quad c = \text{Re}(s) > 0 \quad (1.48)$$

le produit de convolution des deux fonctions f et g est donnée par :

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau \quad (1.49)$$

La transformée de Laplace du produit de convolution de deux fonctions f et g , qui sont égales à 0 pour $t < 0$, est égale au produit de leurs transformées de Laplace :

$$L \{f(t) * g(t), s\} = F(s)G(s) \quad (1.50)$$

sous l'hypothèse que $F(s)$ et $G(s)$ existent.

La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre entier n de $f(t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} L \{f^{(n)}, s\} &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \\ &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) \end{aligned} \quad (1.51)$$

Dans ce qui suit, on suppose que $a = 0$.

Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville :

La transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire d'ordre $p > 0$ de Riemann-Liouville peut notamment s'écrire comme le produit de convolution de la fonction $g(t) = t^{p-1}$ et $f(t)$ on a :

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{-p} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} (g(t) * f(t)) \end{aligned} \quad (1.52)$$

et comme la transformée de Laplace de la fonction $g(t) = t^{p-1}$ est donnée par :

$$G(s) = L \{t^{p-1}, s\} = \Gamma(p)s^{-p}$$

pour la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, qui peut s'écrire sous la forme :

$${}^R\!-\!L D_t^p f(t) = g^{(n)}(t)$$

avec

$$g(t) = {}_0D_t^{-(n-p)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_0^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau, \quad (n-1 \leq p < n)$$

On utilise (1.52) alors :

$$L \{ {}_0^{R-L} D_t^p f(t), s \} = s^n G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0) \quad (1.53)$$

Où

$$G(s) = s^{-(n-p)} F(s) \quad (1.54)$$

et d'après la définition de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville il vient :

$$g(n-k-1)(t) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} {}_0D_t^{-(n-p)} f(t) = {}_0D_t^{p-k-1} f(t) \quad (1.55)$$

On arrive à l'expression finale de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville :

$$L \{ {}_0^{R-L} D_t^p f(t), s \} = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[{}_0D_t^{p-k-1} f(t) \right]_{t=0} \quad (n-1 \leq p < n) \quad (1.56)$$

Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo

Ecrivons la dérivée de Caputo sous la forme :

$${}_a^C D_t^p f(t) = {}_a D_t^{-(n-p)} g(t), \quad g(t) = f^{(n)}(t), \quad (n-1 < p \leq n)$$

En utilisant la formule $L \{ {}_a D_t^{-p} f(t) = s^{-p} F(s) \}$ on aura :

$$L \{ {}_a^C D_t^p f(t), s \} = s^{-(n-p)} G(s)$$

Où grâce à (1.51) :

$$\begin{aligned} G(s) &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) \\ &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \end{aligned}$$

alors :

$$L \{ {}_a^C D_t^p f(t), s \} = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{p-k-1} f^{(k)}(0) \quad (n-1 < p \leq n) \quad (1.57)$$

Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Grunwald-Letnikov

Dans le premier cas où $0 < p < 1$, on a vu que la dérivée fractionnaire de Grunwald-Letnikov peut s'écrire sous la forme :

$${}_a^{G-L} D_t^p f(t) = \frac{f(0)t^{-p}}{\Gamma(1-p)} + \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_0^t (t-\tau)^{-p} f'(\tau) d\tau$$

En utilisant la transformée de Laplace de la fonction t^{p-1} et cette de convolution on obtient :

$$\begin{aligned} L \{ {}_a^{G-L} D_t^p, s \} &= \frac{f(0)}{s^{1-p}} + \frac{1}{s^{1-p}} (sF(s) - f(0)) \\ &= s^p F(s) \end{aligned} \quad (1.58)$$

Si $p > 1$ la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Grunwald-Letnikov n'existe pas dans le sens classique, car dans un tel cas on a des fonctions non intégrales dans la somme de la formule (1.32).

Chapitre 2

Equations différentielles d'ordre fractionnaire

On commence, dans ce chapitre l'étude proprement dite équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire. Dans la première section, on donne le théorème d'existence et unicité de la solution. Dans la seconde section, on présente la solution analytique des équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire. Dans la troisième section, on donne la solution numérique des équations différentielles d'ordre fractionnaire et quelques exemples.

2.1 Théorème d'existence et unicité

Soit α un réel positif vérifiant : $n - 1 < \alpha \leq n$, ${}^c D^\alpha$ désigne l'opérateur de dérivation de Caputo.

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha y(t) &= f(t, y(t)), \\ y^{(k)}(0) &= y_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

Théorème 2 Soient $y_0^{(0)}, \dots, y_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}$, $K > 0$, $h^* > 0$, définissons

$$G = \left\{ (t, y) \in [0, h^*] \times \mathbb{R}, \left| y - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} \right| \leq K \right\}$$

soit $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue Lipschitzienne par rapport à y c'est-à-dire : il existe un constant $L > 0$ indépendant de t , y_1 et y_2 tel que :

$$\forall (t, y_1), (t, y_2) \in G : |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

Alors il existe une unique solution y du problème (2.1) tel que $y \in C[0, h^*]$

Lemme

La fonction $y \in C[0, h]$ est une solution du problème (2.1) si et seulement si y est solution de l'équation intégrale non linéaire de Volterra

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau. \quad (2.2)$$

Démonstration

Premièrement supposons que y est une solution de (2.2), on peut écrire cette équation sous la forme réduite

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + D^{-\alpha} f(t, y(t))$$

En applique l'opérateur de différentiation ${}^C D^\alpha$ sur les deux cotés de cette relation on aura immédiatement que y est solution de l'équation différentielle (2.1). Appliquons maintenant l'opérateur $D^k : 0 \leq k \leq n - 1$ sur l'équation de Volterra (2.2), on obtient :

$$D^k y(t) = \sum_{j=0}^{n-1} D^k \frac{t^k}{j!} y_0^{(j)} + D^k D^{-k} D^{-(\alpha-k)} f(t, y(t))$$

$D^k t^j = 0$ pour $j < k$, alors si $t=0$ on a :

$$D^k y(0) = D^k \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} \Big|_{t=0} + D^{-(\alpha-k)} f(t, y(t)) \Big|_{t=0}$$

et comme : $\alpha - k \geq 1$, l'intégration est nul (ie : $D^{-(\alpha-k)} f(t, y(t)) \Big|_{t=0} = 0$),
par suite $D^k y(0) = y_0^{(k)}$

D'autre part on définit :

$Z(t) = f(t, y(t))$ alors $Z \in C[0, h]$ on récrit l'équation de la forme :

$$\begin{aligned} Z(t) = f(t, y(t)) &= {}^C D^\alpha y(t) \\ &= D^\alpha (y - T_{n-1}[y, 0])(t) \\ &= D^n {}^C D^{-(n-\alpha)} (y - T_{n-1}[y, 0])(t) \end{aligned}$$

tel que $T_{n-1}[y, 0] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)}$ est le polynôme de Taylor de degré $(n - 1)$
pour la fonction f autour de 0.

En appliquant l'opérateur D^{-n} sur les deux membres de la relation on aura :

$$D^{-n} Z(t) = D^{-(n-\alpha)} (y - T_{n-1}[y, 0])(t) + q(t)$$

Avec q un polynôme de degré ne dépassant pas $(n - 1)$.

Comme Z est continue, la fonction ${}^C D^{-n} Z$ a un zéro d'ordre au moins n à l'origine.

En outre la différence $y - T_{n-1}[y, 0]$ a la même propriété par construction.

Et donc la fonction $D^{-(n-\alpha)} (y - T_{n-1}[y, 0])$ doit avoir un zéro d'ordre n aussi.

Par suite le polynôme q à la même propriété mais comme il est de degré ne dépassant pas $(n - 1)$, il en résulte que $q = 0$, par conséquent :

$$D^{-n} z(t) = D^{-(n-\alpha)} (y - T_{n-1}[y, 0])(t)$$

En appliquant l'opérateur de dérivation de Caputo ${}^C D^{n-\alpha}$ sur les deux membres de cette équation on obtient :

$$y(t) - T_{n-1}[y, 0](t) = D^{-\alpha}Z(t)$$

En substituant $Z(t)$ et $y - T_{n-1}[y, 0](t)$ on retrouve l'équation de Volterra :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau$$

2.2 Résolution des équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire

Dans cette section nous présentons la résolution des équations différentielles linéaires dans le cas unidimensionnelle et multidimensionnelle.

Première cas (Cas unidimensionnelle) :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$, n un entier tel que $n-1 < \alpha < n$. La solution générale du problème aux valeurs initiales suivant :

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha y(t) = \lambda y(t) + q(t) \\ y^{(k)}(0) = 0, \quad \forall k = 0, \dots, n-1 \end{cases}$$

où $q \in C[0, h]$, est sous la forme donnée par :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} u_k(t) + \tilde{y}(t)$$

avec

$$\tilde{y} = \begin{cases} D^{-\alpha} q(t) & \text{si } \lambda = 0 \\ \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(t-\tau) u_0'(\tau) d\tau & \text{si } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

et

$$u_k(t) = D^{-k}e_\alpha(t) \quad \forall k = 0, \dots, n-1$$

et

$$e_\alpha(t) = E_\alpha(\lambda t^\alpha)$$

Tel que $E_\alpha(t)$ est la fonction de Mittag-Leffler à un paramètre définie par :

$$E_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0,$$

et la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres est définie par :

$$E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0$$

En particulier, si $\alpha = 1$, on trouve la fonction exponentielle :

$$E_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = \exp(t)$$

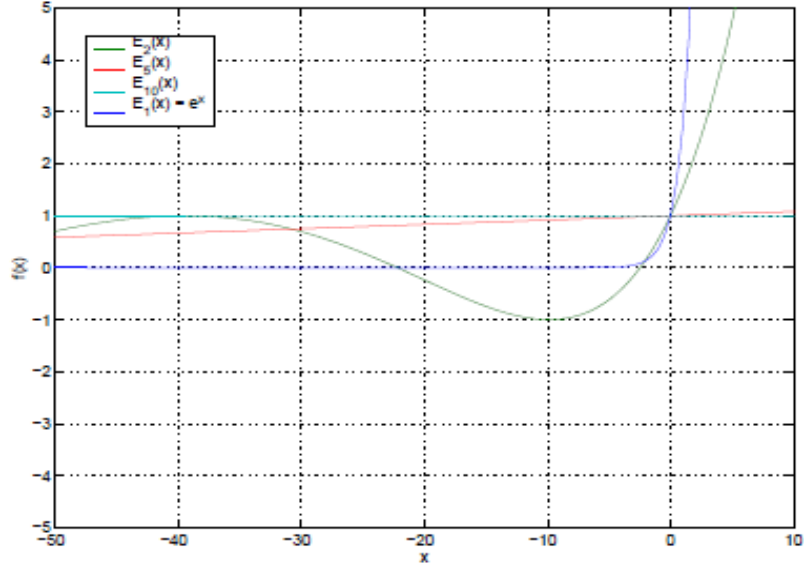


FIGURE 2.1 – Représentation de la fonction Mittag-Leffler pour quelques valeurs de α

Exemple 2.1 :

Considérons le problème (P)

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha y(t) = 2y(t) - 1 \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases} \quad 1 < \alpha < 2$$

On a $\lambda = 2$ et $q(t) = -1$ alors

$$y(t) = \sum_{k=0}^1 y_0^{(k)} u_k(t) + \tilde{y}(t)$$

tel que

$$\begin{aligned}\tilde{y}(t) &= \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(t-\tau) u_0'(\tau) d\tau \quad (\text{car } \lambda \neq 0) \\ &= \frac{-1}{2} \int_0^t u_0'(\tau) d\tau \\ &= \frac{-1}{2} [u_0(\tau)]_0^t\end{aligned}$$

tel que

$$u_0(t) = D_t^0 e_\alpha(t) = e_\alpha(t) = E_\alpha(2t^\alpha)$$

Alors

$$\tilde{y}(t) = \frac{-1}{2} [E_\alpha(2\tau^\alpha)]_0^t = \frac{1}{2} (E_\alpha(2t^\alpha) - 1)$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^1 y_0^{(k)} u_k(t) &= y_0^{(0)} u_0(t) + y_0^{(1)} u_1(t) \\ &= y(0) E_\alpha(2t^\alpha) + y'(0) D^{(-1)} e(t) \\ &= y(0) E_\alpha(2t^\alpha) + y'(0) \int_0^t E_\alpha(2\tau^\alpha) d\tau \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc la solution générale de (P) est :

$$y(t) = \frac{-1}{2} (E_\alpha(2t^\alpha) - 1)$$

Deuxième cas (cas multidimensionnelle) :

Considérons l'équation différentielle fractionnaire linéaire :

$$D^\alpha y(t) = Ay(t) + q(t), \quad (2.3)$$

avec $0 < \alpha < 1$, $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$, $y \in \mathbb{R}^n$, $q : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Pour résoudre le problème (2.5) on commence avec le problème homogène correspondant (i.e $q(t) = 0$ pour tout $t \in [0, h]$). Alors

$${}^c D^\alpha y(t) = Ay(t) \quad (2.4)$$

1. Si A admet des valeurs propres simples

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A et v_1, \dots, v_n les vecteurs propres associée. Alors la solution générale de (2.6) est de la forme :

$$y(t) = \sum_{k=0}^n c_k v_k E_\alpha(\lambda_k t^\alpha) \quad (2.5)$$

où $c_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$.

2. Si A admet des valeurs propres multiple, par exemple λ de degré de multiplicité k donc on a deux possibilités, Si le nombre de vecteurs propres linéairement indépendants associé à λ est égale à k , la solution de (2.4) est de la forme (2.5). Où bien il existe m vecteurs propres linéairement indépendants associé à λ tel que ($m < k$), alors les autres ($k - m$) solutions qui sont linéairement indépendantes sont données par :

$$y^{(i)} = \sum_{j=m}^i v^{(j)} t^{(i-j)\alpha} E_\alpha^{i-j}(\lambda t^\alpha) \quad \text{pour } i = m, \dots, k$$

tel que $(A - \lambda I)v^{(j+1)} = v^j$

Exemple 2.2 :

Considérons le problème suivant :

$${}^c D^\alpha y(t) = Ay(t)$$

tel que $y(t) \in \mathbb{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Les valeurs propres de A sont : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 3$, et Les vecteurs propres de A sont : $v_1 = (-2, 0, 1)^T$ associé à $\lambda_1 = 0$, $v_2 = (-1, 1, 1)^T$ associé à $\lambda_2 = 1$ et $v_3 = (1, 0, 1)^T$ associé à $\lambda_3 = 3$.

Donc la solution générale est :

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1(-2, 0, 1)^T E_\alpha(0) + c_2(-1, 1, 0)^T E_\alpha(t^\alpha) + c_3(1, 0, 1)^T E_\alpha(3t^\alpha) \\ &= c_1(-2, 0, 1)^T + c_2(-1, 1, 0)^T E_\alpha(t^\alpha) + c_3(1, 0, 1)^T E_\alpha(3t^\alpha) \end{aligned}$$

pour $y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors $c_1 = \frac{-2}{3}$ et $c_2 = 1$ et $c_3 = \frac{4}{3}$ donc

$$y(t) = \frac{-2}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} E_\alpha(t^\alpha) + \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} E_\alpha(3t^\alpha)$$

Exemple 2.2 :

Considérons le problème suivant :

$${}^c D^\alpha y(t) = Ay(t)$$

tel que $y(t) \in \mathbb{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Les valeurs propres de A sont : $\lambda_1 = 1$ (double) et $\lambda_2 = 4$, et les vecteurs propres de A sont : $v_1 = (1, -1, 0)^T$ associé à $\lambda_1 = 1$ et $v_3 = (1, 2, 0)^T$ associé à $\lambda_2 = 4$.

Donc la solution générale est :

$$y(t) = c_1(1, -1, 0)^T E_\alpha(t^\alpha) + c_2(1, 2, 0)^T E_\alpha(4t^\alpha) + Y^3(t)$$

tel que :

$$Y^3(t) = v_{(2)} t^\alpha E'_\alpha(t^\alpha) + v_{(3)} E_\alpha$$

et

$$(A - \lambda I)v_{(3)} = v^{(2)}$$

alors

$$v_{(3)} = \left(\frac{-3}{2}, 1, \frac{-1}{2}\right)^T$$

donc

$$y(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} E_\alpha(t^\alpha) + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} E_\alpha(4t^\alpha) + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} t^\alpha E'_\alpha(t^\alpha) + c_3 \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ 1 \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix} E_\alpha(t^\alpha)$$

Remarque :

Soient $(y_1(t), \dots, y_n(t))^T$ la solution du problème homogène (2.6), alors la solution du problème non homogène (2.5) avec la condition initiale $y(0) = y_0$ est $(X_1(t), \dots, X_n(t))^T$ tel que :

$$X_i(t) = y_i(t) + \int_0^t y_i(\tau - t) q_i(\tau) d\tau \quad , \forall i = 1, \dots, n$$

2.3 Résolution numérique des équations différentielles d'ordre fractionnaire

La résolution analytique des équations différentielle non linéaire d'ordre fractionnaire est impossible dans le cas général, alors on a recouru à des méthodes numériques. Il existe deux classes de méthodes numériques pour la résolution d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire : les méthodes fréquentiel, et les méthodes temporel, par exemple la méthode de Diethelm, la méthode d'Adams-Basheforth-Moulton et la méthode de décomposition d'Adomian Dans notre travail nous allons utiliser la méthode d'Adams-Basheforth-Moulton

La méthode d'Adams-Basheforth-Moulton généralisée La méthode d'Adams-Basheforth-Moulton est une méthode numérique introduite par Die-

thelm et Freed, basée sur l'équation de Volterra (2.4). On suppose que y_j est l'approximation de $y(t_j)$ pour $j = 1, \dots, k$ dans l'intervalle $[0, T]$. Pour obtenir y_{k+1} on remplace l'intégrale dans l'équation de Volterra (2.4), en utilisant la formule de produit de quadrature des trapèzes où les nœuds t_j pour $j = 1, \dots, k + 1$ s'en prennent respectivement à la fonction $(t_{k+1} - \cdot)^{\alpha-1}$.

Premièrement on obtient l'approximation :

$$\begin{aligned} \int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1} - \tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau &\simeq \int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1} - \tau)^{\alpha-1} \tilde{g}_{k+1}(\tau) d\tau \\ &= \sum_{j=0}^{k+1} a_{j,k+1} g(t_j) \end{aligned}$$

Où \tilde{g}_{k+1} est une interpolation de g (avec $g(t) = f(t, y(t))$),

$$a_{j,k+1} = \int_0^{k+1} (t_{k+1} - \tau)^{\alpha-1} \Phi_{j,k+1}(\tau) d\tau \quad (2.6)$$

et

$$\Phi_{j,k+1}(\tau) = \begin{cases} \frac{\tau - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} & \text{si } t_{j-1} < \tau \leq t_j \\ \frac{t_{j+1} - \tau}{t_{j+1} - t_j} & \text{si } t_j < \tau < t_{j+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Et comme $t_j = jh$ pour $j = 0, 1, \dots, N$, alors :

$$a_{j,k+1} = \begin{cases} \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} (k^{\alpha+1} - (k - \alpha)(k + 1)^\alpha) & \text{si } j = 0 \\ \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} ((k - j + 2)^{\alpha+1} + (k - j)^{\alpha+1} - 2(k - j + 1)^{\alpha+1}) & \text{si } 1 \leq j \leq k \\ \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} & \text{si } j = k + 1 \end{cases}$$

Donc, on obtient la formule de correction (la méthode d'Adams-Moulton fractionnaire à un pas)

$$y_{k+1} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t_{k+1}^j}{j!} y_0^{(j)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{j=0}^k \alpha_{j,k+1} f(t_j, y_j) + a_{k+1,k+1} f(t_{k+1}, y_{k+1}^p) \right); \quad (2.7)$$

Où y_{k+1}^p le terme de prédication.

Pour déterminer y_{k+1}^p on utilise la méthode d'Adams-Bashforth à un pas (de la même manière pour la formule de correction), mais on remplace l'intégrale par la règle de produit des rectangles.

$$\int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1} - \tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau \simeq \sum_{j=0}^{k+1} b_{j,k+1} g(t_j)$$

où

$$b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} (k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha \quad (2.8)$$

$$y_{k+1}^p = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t_{k+1}^j}{j} y_0^{(j)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^k b_{j,k+1} f(t_j, y_j) \quad (2.9)$$

Finalement, les expressions (2.6) et (2.8) avec $a_{j,k+1}$ et $b_{j,k+1}$ qui sont calculées à partir de (2.5) et (2.7) respectivement forment la méthode d'Adams-Bashforth- Moulton fractionnaire.

Exemple 2.3 :

On considère le système d'ordre fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D^\alpha x &= z + (y - a)x \\ D^\beta y &= 1 - by - x \\ D^\gamma z &= -x - cz \end{cases}$$

tel que : $0 < \alpha, \beta, \gamma \leq 1$ et $a, b, c > 0$

L'application de la méthode d'Adams-Bashforth-Moulton sur le système pré-

cédent, donne le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = x_0 + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)}(z_{k+1}^p + (y_{k+1}^p - a)x_{k+1}^p) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^k a_{1,j,k+1}(z_j + (y_j - a)x_j) \\ y_{k+1} = y_0 + \frac{h^\beta}{\Gamma(\beta+2)}(1 - by_{k+1}^p - x_{k+1}^p) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{j=0}^k a_{2,j,k+1}(1 - by_j - x_j) \\ z_{k+1} = z_0 + \frac{h^\gamma}{\Gamma(\gamma+2)}(-x_{k+1}^p - cz_{k+1}^p) + \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sum_{j=0}^k a_{3,j,k+1}(-x_j - cz_j) \end{array} \right.$$

Où

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{k+1}^p = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^k b_{1,j,k+1}(z_j + (y_j - a)x_j) \\ y_{k+1}^p = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{j=0}^k b_{2,j,k+1}(1 - by_j - x_j) \\ z_{k+1}^p = z_0 + \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sum_{j=0}^k b_{3,j,k+1}(-x_j - cz_j) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{1,jk+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha}((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha) \\ b_{2,jk+1} = \frac{h^\beta}{\beta}((k+1-j)^\beta - (k-j)^\beta) \\ b_{3,jk+1} = \frac{h^\gamma}{\gamma}((k+1-j)^\gamma - (k-j)^\gamma) \end{array} \right.$$

$$a_{1,j,k+1} = \begin{cases} \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)}(k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha) & \text{si } j = 0 \\ \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)}((k-j+1)^{\alpha+1} + (k-j)(k+1)^{\alpha+1} - 2(k-j+1)^{\alpha+1}) & \text{si } 1 \leq j \leq k \end{cases}$$

et

$$a_{2,j,k+1} = \begin{cases} \frac{h^\beta}{\beta(\beta+1)}(k^{\beta+1} - (k-\beta)(k+1)^\beta) & \text{si } j = 0 \\ \frac{h^\beta}{\beta(\beta+1)}((k-j+1)^{\beta+1} + (k-j)(k+1)^{\beta+1} - 2(k-j+1)^{\beta+1}) & \text{si } 1 \leq j \leq k \end{cases}$$

et

$$a_{3,j,k+1} = \begin{cases} \frac{h^\gamma}{\gamma(\gamma+1)}(k^{\gamma+1} - (k-\gamma)(k+1)^\gamma) & \text{si } j = 0 \\ \frac{h^\gamma}{\gamma(\gamma+1)}((k-j+1)^{\gamma+1} + (k-j)(k+1)^{\gamma+1} - 2(k-j+1)^{\gamma+1}) & \text{si } 1 \leq j \leq k \end{cases}$$

Chapitre 3

Stabilité d'un système d'ordre fractionnaire

Dans la théorie de la stabilité des systèmes linéaires à temps invariant et à dérivée d'ordre entier, nous savons bien qu'un système est stable si les racines du polynôme caractéristique sont à parties réelles strictement négatives, donc situées sur la moitié gauche du plan complexe. Par ailleurs, dans le cas des systèmes fractionnaires linéaires à temps invariant, la définition de la stabilité est différente des systèmes d'ordre entier.

En effet, les systèmes fractionnaires ou d'ordre non entier peuvent bel et bien avoir des racines dans la moitié droite du plan complexe et être stables.

Le plan de ce chapitre est le suivant : dans la première section, on présentera brièvement la stabilité d'un système linéaire d'ordre fractionnaire. Dans la deuxième section, on donnera la stabilité d'un système fractionnaire dans une région GLMI. la stabilité des systèmes singuliers linéaires fractionnaires (premièrement on définit le système singulière et régulière et finalement la stabilité de ces systèmes) sera donné dans la troisième section. Enfin dans ce chapitre on étudiera rapidement la stabilité d'un système non linéaire d'ordre fractionnaire pour deux méthode (méthode directe et méthode indirecte).

3.1 Stabilité d'un système linéaire fractionnaire

La stabilité des systèmes fractionnaires a été étudiée dans [17] et [18] où des conditions nécessaires et suffisantes ont été obtenues donnant lieu au théorème suivant.

Théorème 3 *Considérons le système linéaire autonome d'ordre fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} D^\alpha x = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 2 \quad (3.1)$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$. Soit $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, le système (3.1) est asymptotiquement stable si et seulement si

$$|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}, \quad \lambda_i \in \sigma(A), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

Le système (3.1) est stable si et seulement si

$$|\arg(\lambda_i)| \geq \frac{\alpha\pi}{2}, \quad \lambda_i \in \sigma(A), \quad i = 1, \dots, n$$

et les valeurs propres critiques satisfaisant à $|\arg(\lambda_i)| = \frac{\alpha\pi}{2}$ ont une multiplicité géométrique égale à leur multiplicité algébrique.

D'après ce théorème sur la stabilité, il découle les différentes régions stables et instables, voir figures 3.1 et 3.2.

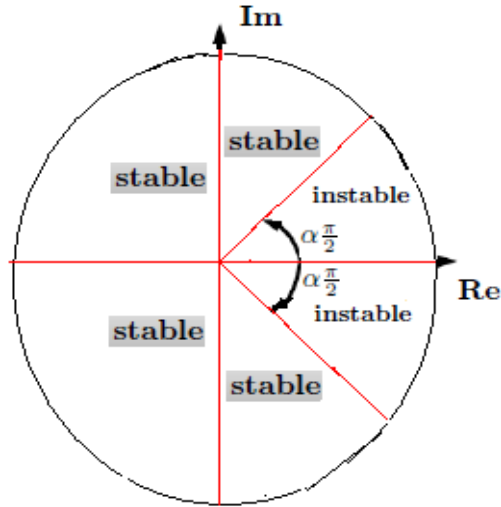


FIGURE 3.1 – Domaine de stabilité des systèmes d’ordre fractionnaire avec $0 < \alpha < 1$

Dans le cas où $1 < \alpha < 2$.

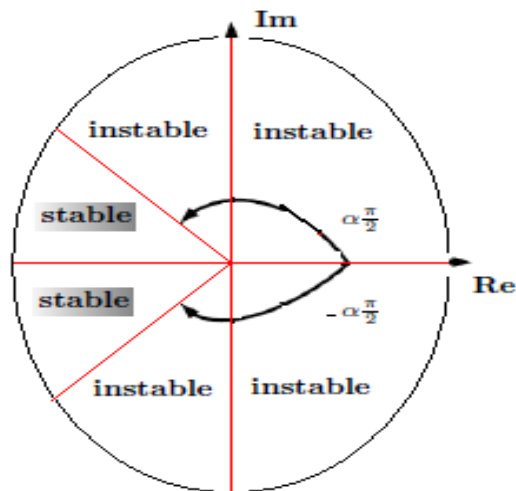


FIGURE 3.2 – Domaine de stabilité des systèmes d’ordre fractionnaire avec $1 < \alpha < 2$

Si $1 < \alpha < 2$, alors la relation (3.2) décrit une région convexe du plan complexe comme le montre la figure 3.2. Une solution de problème passe par l'utilisation des régions LMI [7]. Une condition nécessaire et suffisante de stabilité du système fractionnaire (3.1) sous forme LMI est donnée par le lemme suivant.

Lemme 3.1

Le système d'ordre fractionnaire (3.1) avec $1 < \alpha < 2$ est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une matrice $P = P^T > 0$ telle que

$$\begin{bmatrix} (AP + PA^T) \sin \theta & (AP - PA^T) \cos \theta \\ (PA^T - AP) \cos \theta & (AP + PA^T) \sin \theta \end{bmatrix} < 0 \quad (3.3)$$

Où $\theta = \pi - \frac{\alpha\pi}{2}$

3.2 Stabilité des systèmes fractionnaires dans une région GLMI

3.2.1 D -stabilité et inégalités matricielles linéaires généralisées GLMI

Définition d'une région GLMI

Un sous ensemble D du plan complexe est appelé région GLMI d'ordre non entier (pour "Généraliser LMI") s'il existe $\theta_k \in \mathbb{C}^{l \times l}$, $\psi_k \in \mathbb{C}^{l \times l}$, $H_k \in \mathbb{C}^{l \times l}$ et $J_k \in \mathbb{C}^{l \times l}$ tels que :

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists w = [w_1, \dots, w_m]^T \in \mathbb{C}^n, f_D(z, w) < 0, g_D(w) = 0_{l \times l}\}, \quad \forall k \in \{1, \dots, m\} \quad (3.4)$$

où

$$f_D(z, w) = \sum_{i=1}^m (\theta_k w_k + \theta_k^* \bar{w}_k + \psi_k z w_k + \psi_k^* \bar{w}_k \bar{z}) \quad (3.5)$$

et

$$g_D(w) = \sum_{i=1}^m (H_k w_k + J_k \bar{w}_k) \quad (3.6)$$

Condition nécessaire et suffisante de stabilité dans une région GLMI

Définition 2 Une matrice A est dite D -stable si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement localisées dans cette région D du plan complexe.

Dans le cas où cette région D est une région GLMI de la forme (3.4), le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante de D -stabilité pour la matrice A .

Théorème 4 Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ une matrice et D une région GLMI définie par (3.4), (3.5) et (3.6). A est D -stable si et seulement s'il existe un ensemble de m matrices $X_k \in \mathbb{C}^{n \times n}, \forall k = \{1, \dots, m\}$, tel que

$$M_D(A, \{X_k\}) = \sum_{i=1}^m (\theta_k \otimes X_k + \theta_k^* \otimes X_k^* + \psi_k \otimes (AX_k) + \psi_k^* \otimes (AX_k)^*) < 0$$

$$N_D(\{X_k\}) = \sum_{i=1}^m (H_k \otimes X_k + J_k \otimes X_k^*) = 0_{l \times l} \quad (3.7)$$

Remarque 3.1

Les matrices $M_D(A, \{X_k\})$ et $N_D(\{X_k\})$ dans le théorème 3 peuvent être immédiatement déduites de l'écriture de $f_D(z, w)$ et $g_D(w)$ dans la définition 2 en effectuant les substitutions suivantes :

$$(w_k, \bar{w}_k, z w_k, \bar{w}_k, \bar{z}) \longleftrightarrow (\otimes X_k, \otimes X_k^*, \otimes (AX_k), \otimes (QX_k)^*) \quad (3.8)$$

3.2.2 Application à la D -stabilité dans une union de sous régions convexes

Nous décrivons ici des régions polynomiales, souvent utilisées dans les problèmes de placement de pôles, et qui peuvent être également décrites par

une formulation GLMI.

Régions de premier ordre

Les régions de premier ordre sont décrites de manière cartésienne

$$D = \{(z = x + jy) \in \mathbb{C} \mid d_0 + d_1x + d_2y < 0\} \quad (3.9)$$

Puisque l'on a

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2j} \quad (3.10)$$

On peut décrire

$$D = \left\{ (z = x + jy) \in \mathbb{C} \mid d_0 + d_1\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right) + d_2\left(\frac{z - \bar{z}}{2j}\right) < 0 \right\} \quad (3.11)$$

Ce qui est équivalent à

$$D = \left\{ (z = x + jy) \in \mathbb{C} \mid d_0 + \frac{d_1 - jd_2}{2}z + \frac{d_1 + jd_2}{2}\bar{z} < 0 \right\} \quad (3.12)$$

Cette formulation est identifiable avec la formulation polynomiale d'une région de premier ordre

$$D = \{(z = x + jy) \in \mathbb{C} \mid \beta_0 + \beta_1z + \beta_2\bar{z} < 0\} \quad (3.13)$$

En posant

$$\beta_0 = d_0, \quad \beta_1 = \frac{d_1 - jd_2}{2}, \quad \beta_2 = \frac{d_1 + jd_2}{2} = \beta_1^* \quad (3.14)$$

Formulation GLMI de l'union de sous-régions convexes du premier ordre :

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à l'étude de la stabilité d'une matrice lorsque D est une union de certaines sous-régions convexes. Nous montrons que de nombreuses régions de ce type peuvent être décrites par une formulation GLMI

Soit C l'ensemble des régions D pouvant être décrites par

$$D = \bigcup_{i=1}^m D_k$$

où les sous-régions D_k peuvent être définies de la manière suivante (avec $l = m$ car on se limite aux régions du premier ordre)

$$D_k \in C_1 \quad \forall k \in \{1, \dots, m\} \quad (3.15)$$

et où C_1 est l'ensemble des régions du premier ordre, c'est-à-dire

$$D_k = \{z \in \mathbb{C} \mid f_k(z) = \alpha_k + \beta_k z + \beta_k^* \bar{z} < 0\} \quad \forall k \in \{1, \dots, m\} \quad (3.16)$$

En réalité, la région D peut être exprimée comme en (3.4), (3.5) et (3.6) avec $l = m + 1$ et

$$\theta_k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Theta_k & 0_{1,m} \\ 0_{m,1} & -\varepsilon_k^m \end{bmatrix}, \quad \psi_k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Psi_k & 0_{1,m} \\ 0_{m,1} & 0_{m,m} \end{bmatrix}, \quad H_k = -J_k = \varepsilon_{k+1}^{m+1} \quad (3.17)$$

Où les matrices $\varepsilon_j^i \in \mathbb{R}^{j \times j}$ ont toutes leurs composantes nulles à l'exception d'un "1" à la position (i, i) , avec

$$\Theta_k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \alpha_k & 0_{1,m} \\ 0_{m,1} & 0_{m,m} \end{bmatrix}, \quad \Psi_k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \beta_k & 0_{1,m} \\ 0_{m,1} & 0_{m,m} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Dans ce qui suit, on se limitera uniquement à l'ensemble C_1 des régions polynomiales du premier ordre.

Approche GLMI pour l'analyse de la stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire si $0 < \alpha < 1$:

Le résultat de stabilité des systèmes linéaires fractionnaires établi dans [27] dans le cas où $0 < \alpha < 1$ donné par le théorème 5 est basé sur une analyse par décomposition de domaine de stabilité. Cette analyse est basée sur l'union

de deux sous-régions convexes de premier ordre D_{s_1} et D_{s_2} et ces régions résultent d'une rotation de la moitié gauche des angles $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_2 = -\varphi$ où $\varphi = (1 - \alpha)\frac{\pi}{2}$ (figure 3.3)

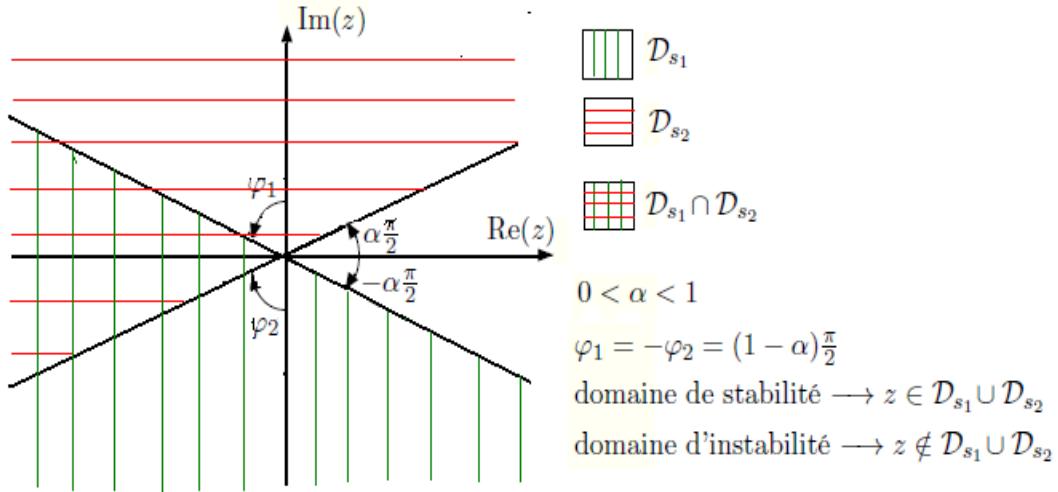


FIGURE 3.3 – Région de stabilité pour $0 < \alpha < 1$ considérés comme l'union de 2 régions convexes

Le domaine de stabilité D_s est défini par

$$D_s = D_{s_1} \cup D_{s_2} \quad (3.19)$$

avec

$$D_{s_k} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(ze^{-j\varphi_k}) < 0\} \quad k \in \{1, 2\} \quad (3.20)$$

où D_{s_1} est la région située au-dessous de la droite ayant une pente négative et D_{s_2} est la région située au-dessus de la droite ayant une pente positive.

3.2.3 Stabilité

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'étude de la stabilité des systèmes fractionnaires dans une région GLMI. La figure 3.1 montre que le do-

maine de stabilité D_s d'un système fractionnaire est non convexe lorsqu'on a $0 < \alpha < 1$ dans la relation (3.2). Le formalisme introduit par [7] et développée par [6] permet de traiter ce cas particulier en utilisant le concept de régions GLMI. Afin de ne pas trop alourdir cette partie, la présentation de la région GLMI, l'application de la D -stabilité dans une union de sous-régions convexes et la mise en œuvre l'approche GLMI pour l'analyse de la stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire si $0 < \alpha < 1$ ont été développées dans la notion de GLMI.

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire dans le cas où $0 < \alpha < 1$.

Théorème 5 [26],[27],[10] *Le système d'ordre fractionnaire (3.1) avec $0 < \alpha < 1$ est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe deux matrices*

$X_1 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et $X_2 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ vérifiant

$$X_1 = X_1^* > 0 \text{ et } X_2 = X_2^* > 0 \text{ et } rX_1A^T + \bar{r}AX_1 + rAX_2\bar{r}X_2A^T < 0 \quad (3.21)$$

Où $r = e^{j(1-\alpha)\frac{\pi}{2}} = \sin(\frac{\alpha\pi}{2}) + j \cos(\frac{\alpha\pi}{2})$ et $\bar{r} = e^{-j(1-\alpha)\frac{\pi}{2}}$.

Lemme 3.2

Soit $A=B+jC$ avec $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, et $R = \begin{bmatrix} B & -C \\ C & B \end{bmatrix}$

on a les propriétés suivantes :

1. Si la matrice A est normale, alors la matrice R est normale.
2. Si la matrice A est hermitienne, alors la matrice R est symétrique.
3. Si la matrice A est définie positive, alors la matrice R est définie positive.
4. Si la matrice A est unitaire, alors la matrice R est orthogonale.

En utilisant le lemme (3.2), on réécrit le théorème 3 afin de remplacer la LMI complexe (3.4) par une LMI réelle.

Lemme 3.3

Le système d'ordre fractionnaire avec $0 < \alpha < 1$ est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe quatre matrices $X_{R_1} = X_{R_1}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_{I_1} = -X_{I_1}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_{R_2} = X_{R_2}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $X_{I_2} = -X_{I_2}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vérifiant :

$$\begin{bmatrix} X_{R_1} & -X_{I_1} \\ X_{I_1} & X_{R_1} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.22)$$

$$\begin{bmatrix} X_{R_2} & -X_{I_2} \\ X_{I_2} & X_{R_2} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.23)$$

$$\left[\begin{array}{l} (X_{R_1}A^T + AX_{R_1} + AX_{R_2} + X_{R_2}A^T) \sin(\frac{\alpha\pi}{2}) + (AX_{I_1} - X_{I_1}A^T - AX_{I_2} + X_{I_2}A^T) \cos \frac{\alpha\pi}{2} \\ (X_{I_1}A^T + AX_{I_1} + X_{I_2}A^T + AX_{I_1}) \sin \frac{\alpha\pi}{2} + (X_{R_1}A^T - AX_{R_1} - X_{R_2}A^T + AX_{R_2}) \cos \frac{\alpha\pi}{2} \\ (AX_{R_1} - X_{R_1}A^T - AX_{R_2} + X_{R_2}A^T) \cos \frac{\alpha\pi}{2} - (X_{I_1}A^T + AX_{I_2} + X_{I_2}A^T + AX_{I_1}) \sin \frac{\alpha\pi}{2} \\ (X_{R_1}A^T + AX_{R_1} + AX_{R_2} + X_{R_2}A^T) \sin \frac{\alpha\pi}{2} + (AX_{I_1} - X_{I_1}A^T - AX_{I_2} + X_{I_2}A^T) \cos \frac{\alpha\pi}{2} \end{array} \right] < 0 \quad (3.24)$$

Démonstration

Si $X_{R_1} = X_{R_1}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_{I_1} = -X_{I_1}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_{R_2} = X_{R_2}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $X_{I_2} = -X_{I_2}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, alors $X_1 = X_{R_1} + jX_{I_1}$ et $X_2 = X_{R_2} + jX_{I_2}$ vérifiant $X_1 = X_1^*$ et $X_2 = X_2^*$. En utilisant le lemme (3.2), $X_1 = X_1^* > 0$ et $X_2 = X_2^* > 0$ si et seulement si les LMI (3.5) et (3.6) sont satisfaites

En remplaçant dans l'inégalité (3.4) du théorème (3), les expressions de $X_1 = X_{R_1} + jX_{I_1}$, $X_2 = X_{R_2} + jX_{I_2}$ et $r = \sin(\frac{\alpha\pi}{2}) + j \cos(\frac{\alpha\pi}{2})$, on obtient la relation suivante

$$\begin{aligned} & \left(\sin(\frac{\alpha\pi}{2}) + j \cos(\frac{\alpha\pi}{2}) \right) (X_{R_1} + jX_{I_1})A^T + \left(\sin(\frac{\alpha\pi}{2}) - j \cos(\frac{\alpha\pi}{2}) \right) A(X_{R_1} + jX_{I_1}) + \\ & \left(\sin(\frac{\alpha\pi}{2}) + j \cos(\frac{\alpha\pi}{2}) \right) A(X_{R_2} + jX_{I_2}) + \left(\sin(\frac{\alpha\pi}{2}) - j \cos(\frac{\alpha\pi}{2}) \right) A^T(X_{R_2} + jX_{I_2}) < 0 \end{aligned}$$

qui peut s'écrire sous cette forme

$$\begin{aligned} & \left(\sin(\frac{\alpha\pi}{2})X_{R_1}A^T - \cos(\frac{\alpha\pi}{2})X_{I_1}A^T \right) + j \left(\cos(\frac{\alpha\pi}{2})X_{R_1}A^T + \sin(\frac{\alpha\pi}{2})X_{I_1}A^T \right) \\ & + \left(\sin(\frac{\alpha\pi}{2})AX_{R_1} + \cos(\frac{\alpha\pi}{2})AX_{I_1} \right) + j \left(\sin(\frac{\alpha\pi}{2})AX_{I_1} - \cos(\frac{\alpha\pi}{2})AX_{R_1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)AX_{R_2} - \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)AX_{I_1} \right) + j \left(\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)AX_{I_2} - \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)AX_{R_2} \right) \\
& + \left(\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)X_{R_2}A^T + \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)X_{I_2}A^T \right) + j \left(\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)X_{I_2}A^T - \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)X_{R_2}A^T \right) < 0
\end{aligned}$$

En regroupant la partie réelle et la partie imaginaire, on obtient

$$\begin{aligned}
& \left((X_{R_1} + AX_{R_1} + AX_{R_2} + X_{R_2}A^T) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + (AX_{I_1} - X_{I_1}A^T - AX_{I_2} + X_{I_2}) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right) \\
& + j \left((X_{I_1} + AX_{I_2} + X_{I_2}A^T + AX_{I_1}) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + (X_{R_1}A^T - AX_{R_1} + AX_{R_2} - X_{R_2}) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right) < 0
\end{aligned}$$

3.3 Stabilité des systèmes singuliers linéaires fractionnaires

3.3.1 Définition d'un système singulier linéaire fractionnaire

Nous considérons dans cette section une nouvelle famille des systèmes dits systèmes singuliers à dérivée non entier ou systèmes singuliers fractionnaire. Ces systèmes sont décrits par une équation différentielle à dérivées fractionnaire de la forme suivante

$$ED^\alpha x(t) = Ax(t), \quad 0 < \alpha < 2 \quad (3.25)$$

où : $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est singulier avec $\text{rang}(E) = \bar{r} < n$.

Régularité

Définition 3 *Le système singulier fractionnaire (3.1) est régulier s'il existe une solution unique $x(t)$ pour des conditions initiales données.*

Comme dans [9] nous donnons les deux lemmes suivants qui généralisent les résultats bien connus sur les systèmes linéaires singuliers à dérivées d'ordre entier aux systèmes singuliers à dérivées d'ordre non entier.

Lemme 3.1 [24]

La paire (E, A) est régulière si et seulement si $\det(\lambda^\alpha - A)$ est non identiquement nul où qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\det(\lambda^\alpha - A) \neq 0$

Démonstration

En appliquant la transformée de Laplace sur l'équation (3.1) nous on obtient :

$$(s^\alpha E - A)X(s) = s^{\alpha-1}Ex_0$$

où $X(s)$ est la transformée de Laplace de $x(t)$, alors la solution $x(t)$ existe et unique si et seulement si $\det(\lambda^\alpha - A) \neq 0$

Lemme 3.2 [24]

Supposons que le lemme (3.1) soit satisfait, alors :

1. Il existe deux matrices P, Q (avec $\det(P) \neq 0$ et $\det(Q) \neq 0$) telles qu'on ait :

$$PEQ = \text{diag}(I_r, N), \quad PAQ = \text{diag}(A_1, I_{n-r})$$

Où $A_1 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ est une matrice nilpotente

2. Si $\deg(\det(\beta E - A)) = \text{rang}(E)$, $\forall \beta \in \mathbb{C}$, alors il existe deux matrices P, Q satisfaisant :

$$PEQ = \text{diag}(I_r, 0), \quad PAQ = \text{diag}(A_1, I_{n-r})$$

Où $A_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$ et $\text{rang}(E) = r$.

Démonstration :

Supposons que $\text{rang}(E) = r < n$, si le lemme (3.1) est satisfait, alors $\det(\beta E - A) \neq 0, \forall \beta \in \mathbb{C}$.

On a il existe deux matrices P, Q (avec $\det(P) \neq 0$ et $\det(Q) \neq 0$) telles que

l'équation (3.1) s'écrit comme suite :

$$PEQQ^{-1}D^\alpha x = PAQQ^{-1}x \Leftrightarrow \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^\alpha x_1 \\ D^\alpha x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

De plus, à partir de [9] nous avons $N = 0$ dans (3.26) si

$$\deg(\det(\beta E - A)) = \text{rang}(E)$$

L'équation (3.26) donne la forme canonique de Weierstrass du système (3.25).

Dans l'équation (3.26) le sous-système fractionnaire lent est donné par

$$D^\alpha x_1 = A_1 x_1$$

Tandis que, le sous- système fractionnaire rapide est donné par

$$ND^\alpha x_2 = x_2$$

Où $N \in \mathbb{R}^{(n-r)(n-r)}$ est une matrice nilpotente,

$$PEQ = \text{diag}(I_r, N); PAQ = \text{diag}(A_1, I_{n-r}); \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Q^{-1}x$$

$$x_1 \in \mathbb{R}^r, x_2 \in \mathbb{R}^{(n-r)}$$

3.3.2 Stabilité

Pour les systèmes singuliers à dérivées entiers, la stabilité est définie comme suite [19]

a) La pair (E, A) est régulière, c'est-à-dire :

$$\det(\lambda E - A) \neq 0$$

b) La pair (E, A) est causale "pas de modes impolonnels", c'est-à-dire

$$\deg(\det(\lambda E - A)) = \text{rang}E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

c) Les modes finit de la paire (E, A) sont strictement à partis réelles négatives.

Notons bien que les modes finis de la paire (E, A) correspondant aux valeurs propres de la matrices A_1 dans (3.26)

Si $0 < \alpha < 2$, la définition c) doit être remplacé par $| \arg(\lambda_i) | > \frac{\alpha\pi}{2}$, $i = 1, \dots, r$, où λ_i sont les valeurs propres de la matrice A_1 .

Lemme 3.3 :

Le système singulier fractionnaire (3.25) est asymptotiquement stable si :

1. La paire $(E.A)$ est régulière c'est-à-dire : $\det(\lambda^\alpha - A) \neq 0, \lambda \in \mathbb{C}$
2. La paire $(E.A)$ est causale c'est-à-dire : $\det(\lambda^\beta - A) = \text{rang}E, \beta \in \mathbb{C}$
3. Les modes finis de la paire $(E.A)$ qui sont les valeurs propres (λ_i) du système (3.25) satisfait $| \arg(\lambda_i) | > \frac{\alpha\pi}{2}, i = 1, \dots, r$.

Exemple 3.1

Considérons le système singulier fractionnaire

$$ED^\alpha x(t) = Ax(t) \tag{3.27}$$

avec les valeurs numériques suivantes

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

tel que A et E deux matrices singulière

Le système (3.27) est Régulier et Causal, mais il n'est pas asymptotiquement

stable car il un mode fini à $\lambda = 0$, en effet

$$\det(\lambda^\alpha E - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda^\alpha + 1 & 0 \end{pmatrix} = \lambda^\alpha(\lambda^\alpha + 1) \neq 0$$

En utilisant les deux matrices non singulières P et Q suivantes

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tel que $\det(P) \neq 0$ et $\det(Q) \neq 0$

nous obtenons

$$PEQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, PAQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et le système (3.27) est équivalent à

$$\begin{aligned} D^\alpha x_1(t) &= A_1 x_1(t) \\ 0 &= x_2(t) \end{aligned}$$

La matrice A_1 a une valeur propre négative $\lambda_1 = -1$ et une valeur propre nul $\lambda_2 = 0$, donc la troisième condition dans le lemme 3.3 ne pas satisfait pour tout $0 < \alpha < 2$. Ceci entraîne donc que le système singulier fractionnaire (3.27) n'est pas asymptotiquement stable pour tout $0 < \alpha < 2$.

3.4 Stabilité d'un système non linéaire d'ordre fractionnaire

3.4.1 Méthode indirecte (la linéarisation)

Dans le cas du système non linéaire d'ordre fractionnaire

$$D^\alpha x = f(x), \quad 0 < \alpha < 2 \quad (3.28)$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$

pour évaluer les points d'équilibre du système (3.1), il suffit de résoudre l'équation

$$D^\alpha x = 0.$$

Si a est une solution de l'équation, alors

$$f(a) = 0.$$

Pour

$$x(t) = a + \epsilon(t).$$

Alors

$$D^\alpha(a + \epsilon) = f(a + \epsilon).$$

Avec la linéarité de dérivation fractionnaire, le résultat précédent peut s'écrire

$$D^\alpha(\epsilon(t)) = f(a + \epsilon).$$

On utilise le développement de Taylor de la fonction f , on arrive

$$f(a + \epsilon) \simeq Df(a)\epsilon$$

car $f(a) = 0$, et puis

$$D^\alpha \epsilon(t) \simeq Df(a)\epsilon(t)$$

et comme $\epsilon(t) = x(t) - a$ alors

$$D^\alpha x \simeq Df(a)(x - a)$$

donc l'équilibre a du système non linéaire (3.28) est asymptotiquement stable si et seulement

$$|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (3.29)$$

tel que λ_i sont les valeurs propres de la matrice jacobienne $A = Df(a)$.

Si $|\arg(\lambda_i)| = \frac{\alpha\pi}{2}$, alors ne peut pas être jugé.

3.4.2 Méthode directe (la fonction de Lyapunov)

Dans cette section, une extension de la méthode direct de Lyapunov pour l'étude de la stabilité d'un système non linéaire d'ordre fractionnaire en terme de dérivées de Caputo est présentée.

Théorème 6 *Soit $x = 0$ est un point d'équilibre pour ${}^C D^\alpha x(t) = f(t, x)$ et $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine contenant $x = 0$, soit $V(t, x) : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ une permanence fonction différentiable de telle sorte que :*

$$W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x), {}^C D^\alpha V(t, x) \leq -W_3(x), \quad (3.30)$$

$\forall t \neq 0, \forall x \in D, 0 < \alpha < 1$, où $W_1(x)$, $W_2(x)$ et $W_3(x)$ sont des fonctions définies positives et continues sur D .

Alors $x = 0$ est asymptotiquement stable.

Lemme 3.4

Supposons toutes les hypothèse du théorème 6 sont satisfaits

$$W_1(x) \geq K_1 \|x\|^c, W_2 \leq K_2 \|x\|^c, W_3(x) \geq K_3 \|x\|^c \quad (3.31)$$

Pour certains constants positives K_1, K_2, K_3 et c , alors $x = 0$ est exponentiellement stable.

En outre, si les hypothèses sont globalement alors $x = 0$ est globalement exponentiellement stable.

Exemple 3.2

Nous pouvons utiliser le théorème 6, considérons un dérivée fractionnaire de la surface $S(t)$ donné par

$$D^\alpha(S(t)) = -K \operatorname{sgn}(S(t)) \quad 0 < \alpha < 1, \quad K > 0 \quad (3.32)$$

où

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (3.33)$$

Si l'on choisit une fonction de Lyapunov comme

$$V(t) = \frac{1}{2}(S(t))^2$$

de la définition de la dérivée de Caputo quand $0 < \alpha < 1$

$$(x'(t) > 0 \implies {}^C D^\alpha x(t) > 0), \quad \text{et} \quad (x'(t) \geq 0 \implies {}^C D^\alpha x(t) \geq 0).$$

En suite

$$V'(t) = S(t)S'(t).$$

A partir de (3.32) nous avons

$$S'(t) = D^{1-\alpha}(-K \operatorname{sgn}(S(t))) \quad 0 < \alpha < 1$$

Utilisant la définition de signe (3.33) nous avons

$$\operatorname{sgn}(D^{1-\alpha}(-K \operatorname{sgn}(S(t)))) = -\operatorname{sgn}(S(t)), \quad K > 0.$$

Puis

$$\begin{aligned} V'(t) &= S(t)S'(t) \\ &= S(t)D^{1-\alpha}(-K \operatorname{sgn}(S(t))) \end{aligned}$$

Appliquant la fonction de signe

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(V'(t)) &= \operatorname{sgn}(S(t)S'(t)) \\ &= \operatorname{sgn}(S(t))\operatorname{sgn}(D^{1-\alpha}(-K \operatorname{sgn}(S(t)))) . \\ &= -\operatorname{sgn}(S(t))\operatorname{sgn}(S(t)) = -1 \end{aligned}$$

$$\operatorname{sgn}(V'(t)) = -1 \implies V'(t) \leq 0 \implies D^\alpha V(t) \leq 0.$$

En suite en utilisant le théorème 6 nous avons

$$V(t) = \frac{1}{2}(S(t))^2 \geq 0 \quad \text{et} \quad D^\alpha V(t) \leq 0.$$

Donc $x = 0$ est asymptotiquement stable.

Le critère de Routh-Hurwitz du système d'ordre fractionnaire

Considérons le système d'ordre fractionnaire suivant

$$D^q x = f(x) \quad q \in]0, 1] \tag{3.34}$$

avec $x \in \mathbf{R}^3$.

Si $p = (x_{eq}, y_{eq}, z_{eq})$ est le point d'équilibre du système (3.34), alors le polynôme caractéristique $P(\lambda)$ est donné par

$$P(\lambda) = \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3.$$

Et le discriminant $D(P)$ définit par

$$D(p) = 18a_1 a_2 a_3 + (a_1 a_2)^2 - 4a_3 (a_1)^3 - 4(a_2)^3 - 27(a_3)^2.$$

Dans la référence [3] les conditions de Routh-Hurwitz sont donnée par

1. Si $D(P) > 0$, alors tout les racines d'un polynôme caractéristique $P(\lambda) = 0$ sont réels, donc le point d'équilibre P est asymptotiquement stable si et seulement si $a_1 > 0$, $a_3 > 0$, $a_1 a_2 - a_3 > 0$
2. Si $D(P) < 0$, $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$, $a_3 > 0$, alors p est asymptotiquement stable pour $q > \frac{2}{3}$
3. Si $D(P) < 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_1 a_2 - a_3 = 0$, alors p est asymptotiquement stable pour tout $q \in]0, 1[$
4. La condition nécessaire pour que le point d'équilibre p soit asymptotiquement stable si $a_3 > 0$.

Chapitre 4

Application

Dans ce chapitre nous allons étudier deux systèmes d'ordre fractionnaire le premier est un système linéaire et le deuxième est non linéaire.

Les résultats de l'étude théorique de ces deux systèmes sont confirmés par l'étude numérique qui est présentée dans les figures (4.1), (4.3) qui sont obtenus en appliquant l'algorithme d'Adams-Basheforth-Moulton généralisée (PECE).

Un système linéaire

On considère le système linéaire d'ordre fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D^\alpha x &= k \cos(\frac{\alpha\pi}{2})x + k \sin(\frac{\alpha\pi}{2})y \\ D^\alpha y &= -k \sin(\frac{\alpha\pi}{2})x + k \cos(\frac{\alpha\pi}{2})y, \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (4.1)$$

où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $k > 0$, D^α est l'opérateur de dérivation au sens de Caputo qui est défini dans le premier chapitre.

Pour étudier la stabilité du système (4.1) on applique le théorème 3 les valeurs propres de A sont les racines de polynôme caractéristique $P(\lambda)$ donné par

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda_2 I) = \lambda^2 - 2\lambda k \cos(\frac{\alpha\pi}{2}) + k = 0$$

Donc
$$\begin{cases} \lambda_1 = k \cos(\frac{\alpha\pi}{2}) - ik \sin(\frac{\alpha\pi}{2}) \\ \lambda_2 = k \cos(\frac{\alpha\pi}{2}) + ik \sin(\frac{\alpha\pi}{2}) \end{cases}$$

Les vecteurs propres sont : $v_1 = (1 + i)^T$ associe à λ_1 et $v_2 = (1 - i)^T$ associe à λ_2

Donc la solution générale est donnée par :

$$x(t) = \begin{pmatrix} c_1 E_\alpha((k e^{-i\frac{\alpha\pi}{2}})t^\alpha) + c_2 E_\alpha((k e^{i\frac{\alpha\pi}{2}})t^\alpha) \\ ic_1 E_\alpha((k e^{-i\frac{\alpha\pi}{2}})t^\alpha) - ic_2 E_\alpha((k e^{i\frac{\alpha\pi}{2}})t^\alpha) \end{pmatrix}$$

On a

$$|arg(\lambda_1)| = |arg(\lambda_2)| = \frac{\alpha\pi}{2}.$$

De plus la multiplicité algébrique est égale à la multiplicité géométrique de λ_1, λ_2 et égale à 1, donc le système (4.1) est stable.

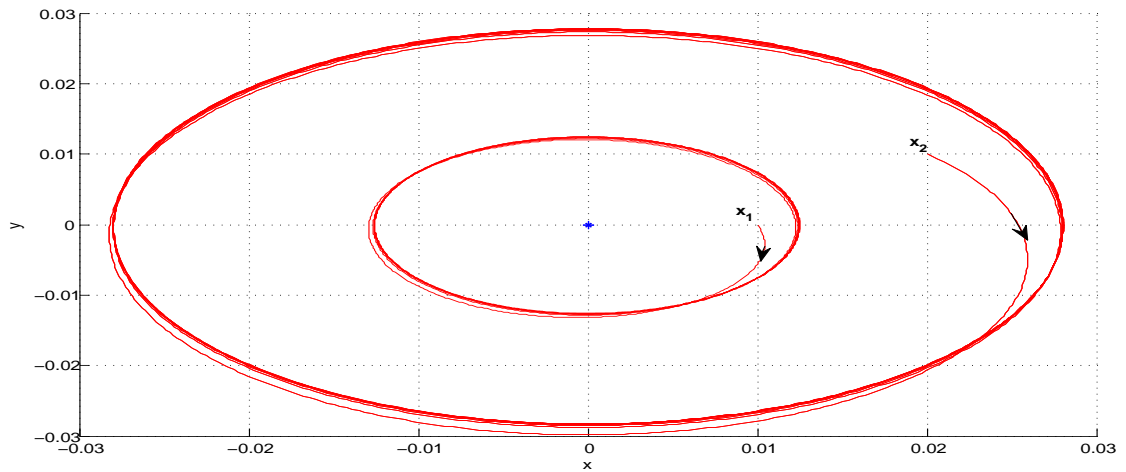


FIGURE 4.1 – Trajectoire du système (4.1) avec $\alpha = 0.8, k = \sqrt{2}$.

La figure (4.1) du système (4.1) avec $\alpha = 0.8, k = \sqrt{2}$ avec deux conditions initiales différentes x_0 et x_1 montre que les deux trajectoires dans le voisinage

de $(0,0)$ mais ne sont pas convergent vers le point $(0,0)$. Donc le système (4.1) est stable.

Un système non linéaire

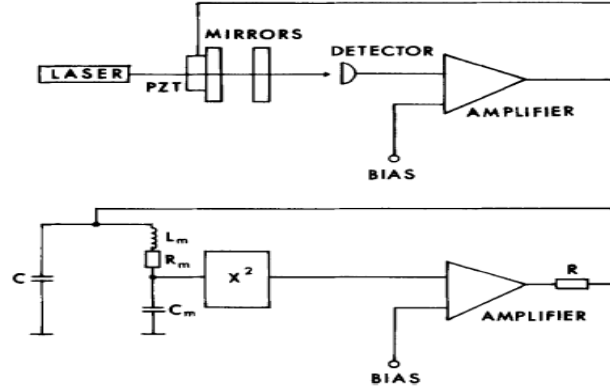


FIGURE 4.2 – Le circuit électrique.

Les références [20] et [13] décrivent un système électronique présentant des comportements chaotiques et donnent sa réalisation sous forme de circuit électrique. La structure simplifiée de ce système est décrite par l'équation différentielle du troisième ordre

$$\ddot{U} = -\ddot{U}\left(\frac{L}{R} + R_m C\right) - \dot{U}\left(\frac{R_m}{R} + \frac{C}{C_m} + 1\right) - \frac{1}{RC_m}U + \frac{V^2}{RC_m}(U - \mu)^2 \quad (4.2)$$

où u est la tension dans le condensateur, R_m la résistance variable, R la résistance, C et C_m sont des condensateurs, L l'inductance, μ biais et V est le gain.

L'équation (4.2) est transformée en un système de trois équations :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -az - y + f(x) \end{cases} \quad (4.3)$$

où $f(x)$ est une fonction logistique et donnée par

$$f(x) = bx(1 - x)$$

a, b deux réelles strictement positives.

le système (4.3) a été modifier dans [20] et [13] en remplaçant la fonction logistique $f(x)$ par la fonction $g(x)$ tel que

$$g(x) = bx(1 - x^2)$$

donc (4.2) devient

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -az - y + bx(1 - x^2) \end{cases} \quad (4.4)$$

Dans notre mémoire nous allons étudier le système précédent dans le cas de la dérivation fractionnaire introduit dans [2], donc le système devient

$$\begin{cases} D^{q_1}x = y \\ D^{q_2}y = z \\ D^{q_3}z = -az - y + bx(1 - x^2) \end{cases} \quad (4.5)$$

où a, b sont deux réelles strictement positives et $q = (q_1, q_2, q_3)$ est l'ordre fractionnaire tel que $0 < q_i < 1$, $i = 1, 2, 3$.

Etude théorique

Pour étudier la stabilité du système (4.5) on applique le critère de Routh-Hurwitz dans le cas fractionnaire qui donnée dans la troisième chapitre.

Les points d'équilibres de (4.5) sont

$$p_1 = (0, 0, 0), p_{2,3} = (\mp 1, 0, 0)$$

Nous allons appliquer la première méthode de la stabilité d'un système fractionnaire non linéaire (la méthode indirecte) pour étudier la stabilité aux voisinage des points d'équilibres, en tenant compte du théorème 3 qui donne un critère pour la stabilité des systèmes linéaires.

• Pour $p_1 = (0, 0, 0)$; La matrice Jacobienne associée est

$$J_{p_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b & -1 & -a \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est donné par

$$P_{p_1}(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + \lambda - b$$

on pose $a_1 = a$, $a_2 = 1$, $a_3 = -b$ alors :

$$P_{p_1}(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$$

$a_3 = -b < 0$ la condition nécessaire de la stabilité n'est pas vérifié, alors le point d'équilibre $p_1 = (0, 0, 0)$ est instable.

• Pour $p_{2,3} = (\mp 1, 0, 0)$; La matrice Jacobienne associée est

$$J_{p_{2,3}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2b & -1 & -a \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est donnée par

$$P_{p_{2,3}}(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + \lambda + 2b$$

on pose $a_1 = a$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2b$, alors :

$$P_{p_{2,3}}(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$$

Le discriminant $D(P_{p_{2,3}})$ est donné par

$$D(P_{p_{2,3}}) = -8a^3b + a^2 + 36a - 216b^3 - 4.$$

Pour $0 < a < 0.8$ et $b > 0$, on a $D(P_{p_{2,3}}) < 0$.

Alors d'après le critère de Routh-Hurwitz dans le cas fractionnaire les deux points d'équilibre p_2 et p_3 sont asymptotiquement stables pour tout a, b deux réelles strictement positives vérifiant $a > 2b$ et $0 < a < 0.8$.

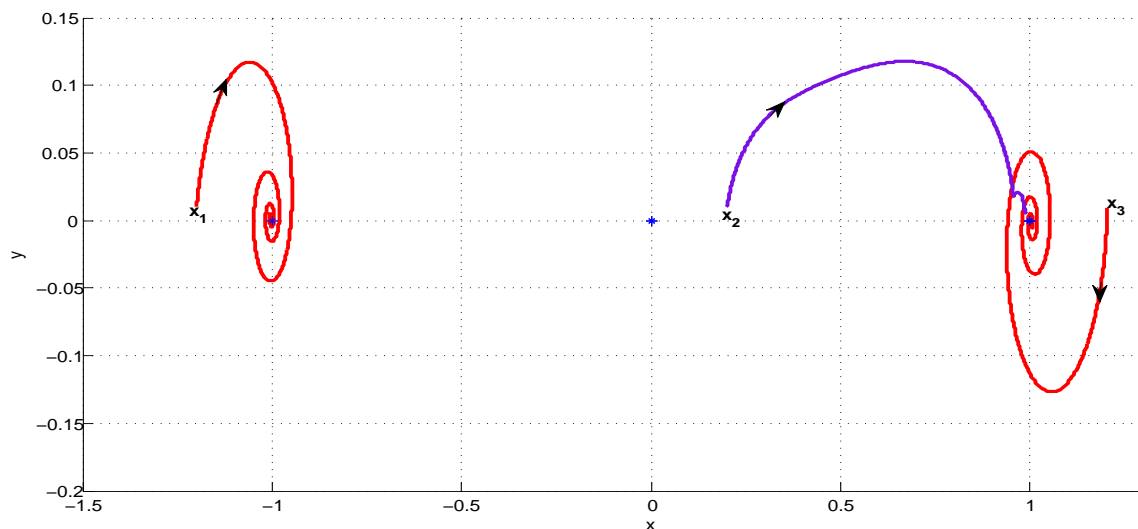


FIGURE 4.3 – Trajectoire du système (4.5) avec $q = 0.9$, $a = 0.6$ et $b = 0.3$.

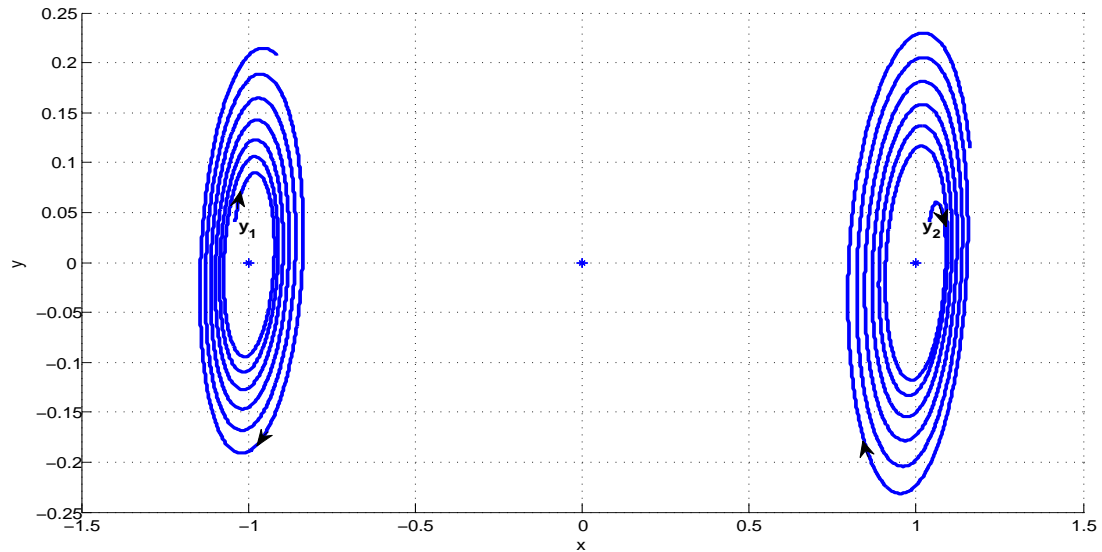


FIGURE 4.4 – Trajectoire du système (4.5) avec $q = 0.9$, $a = 0.9$ et $b = 1.1$.

Etude numérique

1) Si $a = 0.6$ et $b = 0.3$ donc les trois points d'équilibres du système (4.5) sont : $p_1 = (0, 0, 0)$ et $p_{2,3} = (\mp 1, 0, 0)$.

La figure (4.3) pour $q = 0.985$ avec les conditions initiales différentes x_3 dans le voisinage de p_2 , x_1 dans le voisinage de p_3 et x_2 dans le voisinage de p_1 , et on remarque que les trois trajectoires x_1 , x_2 , x_3 est converge vers les points d'équilibres $p_{2,3}$, donc on déduit que les points d'équilibres $p_{2,3}$ sont des points asymptotiquement stables. Mais le point d'équilibre p_1 est instable.

2) Si $a = 0.9$ et $b = 1.1$ donc trois points d'équilibres du système (4.5) sont : $p_1 = (0, 0, 0)$ et $p_{2,3} = (\mp 1, 0, 0)$.

La figure (4.4) pour $q = 0.9$ et les conditions initiales y_1 et y_2 dans le voisinage de $p_{2,3}$, et on remarque que les deux trajectoires y_1 , y_2 est loie des points d'équilibre $p_{2,3}$, donc dans ce cas on déduit que les points d'équilibres sont des points instable.

Conclusion

Ce mémoire a pour but l'étude de la stabilité d'un système d'ordre fractionnaire. Dans les deux premiers chapitres nous avons rassemblé les outils nécessaires pour cette étude (notion de la dérivation fractionnaire, équations différentielles fractionnaire Dans ce mémoire nous avons montré que Le domaine de la stabilité d'un système fractionnaire est typiquement différent de cel d'un système d'ordre fractionnaire.

En effet si $0 < \alpha < 1$ le domaine de la stabilité du système fractionnaire est plus large mais par contre si $1 < \alpha < 2$ le domaine de la stabilité du système fractionnaire est étroit, plus précisément le domaine de la stabilité est en fonction de l'ordre de dérivation et de l'argument des valeurs propres.

Finalement le mémoire est terminé par des applications numérique en utilisant des codes en matlab qui confirment les résultats théoriques des chapitres précédents.

Bibliographie

- [1] Abdelouahab, M. Les systèmes chaotiques à dérivées fractionnaires. Mémoire de magistère, université de Mentouri, Constantine, (2009).
- [2] Abdelouahab, M. Nasr-Eddine, H. Junwei wang. Hopf bifurcation and chaos in fractional-order modified Hybrid optical systeme. *Nonlinear Dyn* (2012).
- [3] Ahmed, E.El-Sayed, A.M.A, El-Saka, H.A.A. : On some Routh–Hurwitz conditions for fractional order differential equations and their applications in Lorenz, Rössler, Chua and Chen systems. *Phys. Lett*, (2006)
- [4] V.I. Arnold ; Matrices Depending on Parameters, *Russian Math.* (1971).
- [5] V.I. Arnold ; Lectures on Bifurcations on Several Families, *Russian Math* , (1972)
- [6] O. Bachelier. Commande des Systèmes Linéaires Incertains : Placement de Pôles Robuste en D-Stabilité. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, (1998).
- [7] M. Chilali. Méthodes LMI pour l'Analyse et la Synthèse Multi-critère. PhD thesis, Université Paris Dauphine, (1996).
- [8] M. Chilali, P. Gahinet, and P. Apkarian. Robust pole placement in LMI regions. *IEEE Trans. Aut. Contr*, (1999).
- [9] L. Dai. Singular Control Systems, volume 118 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, New York, (1989).

- [10] C. Farges, M. Moze, and J. Sabatier. Pseudo-state feedback stabilization of commensurate fractional order systems, (2010).
- [11] D.Hadi,D.B,S.Jalil.Stability analysis of Caputo fractional-ordre non linear systemes science+Business Media B.V, (2011).
- [12] A. Herwitz. On the Conditions Under Which an Equation has only Roots with Negative Real Parts, *Mathematische Annalen*, (1895)
- [13] Korsch, H.J. Jodl, H.-J. Hartmann, T. : *Chaos : A Program Collection for the PC*, 3rd edn., 341 p. Springer, Berlin (2008).
- [14] J. L. Lagrange. *Mécanique Analytique* (2vols), Edition Albert Blanchart, Paris, (1965).
- [15] A. Lyapunov, *Problème Général de la Stabilité de Mouvement*, *Annals of Math. studies*, 17. Princeton University Press (traduction de l'édition originale Russe publiée par Mathematics Society of Kharkov), (1892).
- [16] N. Marsden and M. McCracken. *Hopf Bifurcation and its Applications*, *Applied Mathematical Science*,19. Springer-Verlag, (1976).
- [17] D. Matignon. Recent results in fractional differential systems theory. Technical Report 96C004, École Nationale Supérieure des Télécommunications, France, (1996).
- [18] D. Matignon. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. In *Proc. IEEE-IMACS Syst. Man Cyber. Conf.*, Lille, France, (1996).
- [19] I. Masubuchi, Y. Kamitane, A. Ohara, and N. Suda. H1 control for descriptor systems : a matrix inequality approach. *Automatica*, (1997).
- [20] Mitschke, F., Flüggén, N. : Chaotic behavior of a hybrid optical bistable system without time delay. *Appl. Phys*, (1984).
- [21] M. Moze, J. Sabatier, and A. Oustaloup. LMI tools for stability analysis of fractional systems. In *Proc. ASME IDET/CIE conferences*, Long-Beach, USA, (2005).

- [22] I. Podlubny. Fractional differential equations. Academic press, San Diego, (1999).
- [23] I. N'Doye, M. Zasadzinski, M. Darouach, and N.E. Radhy. Stabilization of singular fractional-order systems : an LMI approach. In Proc. IEEE Mediterranean Conf. Contr. Aut. Marrakesh, Morocco, (2010).
- [24] I. N'Doye, M. Zasadzinski, N.E. Radhy, and A. Bouaziz. Stabilization of a class of nonlinear affine fractional-order systems using generalizations of Bellman-Gronwall lemma. In Proc. IEEE Mediterranean Conf. Contr. Aut., Thessaloniki, Greece, 2009. Aut., Thessaloniki, Greece, (2009).
- [25] E. J. Rhout. A Treatise on the Stability of a Given State of Motion, London : Macmillan, (1877).
- [26] J. Sabatier, M. Moze, and C. Farges. On stability of fractional order systems. In Proc. IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Application, Ankara, Turkey, (2008).
- [27] J. Sabatier, M. Moze, and C. Farges. LMI conditions for fractional order systems. Computers Mathematics with Applications, (2010).
- [28] M.Tidjani. Synchronisation des système dynamiques chaotiques à dérivées fractionnaires.Mémoire de magistère,université de Mentouri,Constantine.
- [29] F. Verhulst. Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, Springer-Verlagn, (1984).

RESUME

Dans ce mémoire, nous avons présenté quelque résultat théorique de la stabilité d'un système d'ordre fractionnaire, et comme application on a étudié deux exemples (un système linéaire fractionnaire et un autre système non linéaire fractionnaire). Ces résultats théoriques ont été confirmés par des test numériques obtenus en appliquent la méthode d'Adams-Bashforth-Moulton(PECE).

MOTS CLES

Dérivée fractionnaire. Les équations différentielles fractionnaires. La stabilité d'un système fractionnaire.

ABSTRACT

In this work, we have presented some theoretical methods for the study of the stability of fractional-order systems, those methods have been successfully applied in the study of two examples (stability of a fractional-order linear system and stability of a fractional-order nonlinear system). The numerical results obtained using the “Adms-Bashforth-Moulton” method (PECE) confirm the justness of the analytical study.

KEY WORDS

Fractional derivatives, fractional differential equations, stability of fractional-order systems

خلاصة

في هذه المذكرة تطرقنا إلى دراسة إستقرار نظام ديناميكي ذو رتبة غير صحيحة وكتطبيق لذلك تطرقنا إلى دراسة مثالين (نظام ديناميكي خطي ذو رتبة غير صحيحة و نظام ديناميكي غير خطي ذو رتبة غير صحيحة) . النتائج النظرية تم تأكيدها بالاستعانة بالدراسة العددية المتحصل عليها بتطبيق الطريقة العددية ل "أدمس-باشفورت-مولتن"

كلمات مفتاحية

المشتقات ذات رتبة غير صحيحة. المعادلات التفاضلية الكسرية. إستقرار نظام ديناميكي ذو رتبة غير صحيحة