Filière Mathématiques fondamentales

الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……………

Centre Universitaire de Mila

Institut des Sciences et de la Technologie **Département de Mathématiques et Informatique**

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

en : - Filière Filière Mathématiques fondamentales

- Spécialité Mathématiques fondamentales et appliquées

Problème de Positivité d'une Suite Récurrente Linéaire d'ordre Inférieur ou égale à quatre

Préparé par :Benaouissa Soumya Daas Nawal

Soutenue devant le jury :

- Président :Mr.M.S abdelwahab **Grade :M.C.B**

- Examinateur :Mr. Mohamed Kecies **Grade :M.A.B**

- Promoteur : Mr. Kouache Smail **Grade :M.A.A**

Année universitaire : 2013/2014

Remerciement

Nous tenons à remercier toujours et par cette occasion, en premier et avant tout <<ALLAH>>, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce Modeste travail.

Nous n'oublions pas nos parents pour leur contribution, soutien et leur patience.

En second lieu, nous tenons à remercier notre encadreur Mr : Kouache Smail pour Ses précieux conseils et son aide durant toute la période du travail.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury le président Mr : M.S Abdelwahab l'éxaminateure Mr : Mouhamed kacies pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Enfin, nous adressons nos plus sincères remerciements à tous nos proches et amis, qui nous ont toujours soutenus et encouragés au cours de la réalisation de ce mémoire

soumya Nawal

Table des matières

Introduction Générale

Les suites linéaires récurrentes constituent une partie fondamentale de la théorie des nombres pour plusieurs années. En outre, ces suites apparaissent partout en mathématiques et en informatique. Par exemple la théorie des séries entières représentant les fonctions rationnelles ; les nombres générateurs pseudo-aléatoires, les suites automatiques et les automates cellulaires. Les solutions de certaines classes d'équations diophantiennes et de quelques problèmes combinatoires forment des suites linéaires récurrentes. Une grande variétés de séries de puissances, par exemple les fonctions Zeta de variétés algébriques sur des corps finis, les fonctions Zeta dynamiques, les fonctions génératrices provenant de la théorie des groupes, les séries de Hilbert dans une algèbre commutative et les séries de Poincaré sont toutes connues d'être rationnelles dans de nombreux cas. Les coefficients de la série représentante ces fonctions sont des suites linéaires récurrentes, et donc tant de puissants résultats de la présente étude peuvent être appliqués.

Ce mémoire comporte deux chapitres. Il est structuré de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, on introduit les éléments nécessaires pour une bonne compréhension du problème qui sera étudié. Nous rappelons quelques principes et résultats fondamentaux de la théorie des suites récurrentes linéaires, notamment le théorème d'existence concernant la solution des suites récurrentes linéaires.

Le deuxième chapitre vise à donner une méthode simple qui permet de résoudre notre problème de positivité.

Signalons en fin que la deuxième partie de ce travail est des articles universitaires de P. Tangsupphathawat, N. Punnim et V. Laohakosol, de l'université de Kasetsart (Nakhonpathom, Thailand).

Chapitre 1

Introduction à la théorie des suites récurrentes linéaires(SRL)

Dans ce chapitre, on introduit les éléments nécessaires pour une bonne compréhension du problème qui sera étudié. Nous rappelons quelques principes et résultats fondamentaux de la théorie des suites récurrentes linéaires. Pour plus de détails sure ces notions, nous indiquons par exemple le travail (Halava, V., T. Harju, M. Hirvensalo and J. Karhumaki. 2005)

Définition 1.0.1 *On appelle suite récurrente linéaire toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui satisfait la relation suivante*

$$u_n = c_{k-1}u_{n-1} + c_{k-2}u_{n-2} + ... + c_0u_{n-k} \tag{1.1}$$

pour tout $n \geq k$, avec les coefficients fixés $c_j \in \mathbb{R}$ pour tout $j = 0, ..., k-1$.

On sait que la relation (1.1) est une relation récurrente de dégré k.
Ici on suppose que dans (1.1), $c_0 \neq 0$, car si $c_0 = 0$ implique que la relation linéaire (1.1) est de degré $k-1$.
Les éléments $u_0, u_1, ..., u_{k-1}$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont appelés des conditions initiales.

Exemple 1.0.2 *La suite de Fibonacci $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, n \geq 2, \text{ avec } u_0 = u_1 = 1 \tag{1.2}$$

est l'une des suites récurrentes linéaires les plus connues.

Dans ce mémoire, on s'intéresse au Prblème de Positivité suivant :

Problème de Positivité : Etant donnée une suite récurrente linéaire(u_n), existe-il un entier naturel n, tel que (u_n) soit positive ?

1.1 Solution d'une suite récurrente linéaire

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire définie par la relation (1.1)
Le polynôme

$$P(x) = x^k - c_{k-1}x^{k-1} - c_{k-2}x^{k-2} - ... - c_0$$

s'appel le polynôme caractéristique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Le résultat suivant est essentiel pour l'étude de notre problème.

Théorème 1.1.1 *Supposons que la relation de récurrence (1.1) a lieu et que $P(x)$ le polynôme caractéristique de cette relation.*
Si

$$P(x) = \prod_{i=1}^{r} (x - \alpha_i)^{n_i}. \tag{1.3}$$

Alors, il existe des polynômes uniques $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_n(x)$, avec $\deg(p_i) \leq n_i - 1$, tels que

$$u_n = \sum_{i=1}^{r} P_i(n)\,\alpha_i^n. \tag{1.4}$$

Réciproquement, toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme (1.4)satisfait la relation de récurrence (1.1).

Pour démontrer ce théorème, on va utiliser les lemmes suivants

Lemme 1.1.2 *Soit $P(x)$ un polynôme défini par (1.3) qui admet α comme un zéros d'ordre $m \geq 1$.*
On définit :

$$\begin{cases} P_0(x) = P(x) \\ P_{i+1}(x) = xP_i'(x), \forall i \geq 1 \end{cases} \tag{1.5}$$

Alors il existe des pôlynomes $Q_i(x)$ tels que

$$P_i(x) = (x-\alpha)^{m-i} Q_i(x) \ , \forall i \in \{0, 1, ..., m-1\} \tag{1.6}$$

Réciproquement
Si $\alpha \neq 0$ et $P_i(\alpha) = 0$; $\forall i = \overline{0, m-1}$, alors

$$P_0(x) = (x-\alpha)^m Q_0(x), \tag{1.7}$$

où $Q_0(x)$ est un polynôme.

Preuve. Tout d'abord, on va montrer par récurrence que pour tout $i \geq 1$, $P_i(x)$ peut se représenter par

$$P_i(x) = \sum_{j=1}^{i} C_j^{(i)} x^j P^{(j)}(x) \tag{1.8}$$

Le cas $i = 1$ est evident (puisque $P_1(x) = xP'(x)$) .
Supposons maintenant que (1.8) est vraie jusqu'à l'ordre i . Alors

$$\begin{aligned} P_i'(x) &= \sum_{j=1}^{i} C_j^{(i)} \left(j x^{j-1} P^{(j)}(x) + x^j P^{(j+1)}(x) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{i} C_j^{(i)} j x^{j-1} P^{(j)}(x) + \sum_{j=2}^{i+1} C_{j-1}^{(i)} x^{j-1} P^{(j)}(x) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} P_{i+1}(x) &= x P_i'(x) \\ &= x P'(x) + \sum_{j=2}^{i} \left(j C_j^{(i)} + C_{j-1}^{(i)} \right) x^j P^{(j)}(x) + x^{i+1} P^{(i+1)}(x) . \end{aligned}$$

Donc

$$P_{i+1}(x) = \sum_{j=1}^{i+1} C_j^{(i+1)} x^j P^{(j)}(x) .$$

D'autre part, si α est une racine d'ordre m du $P(x)$, alors α est une racine d'ordre $m - j$ du $P^{(j)}(x)$.
Ceci implique que

$$P^{(j)}(x) = (x - \alpha)^{m-j} \; R_j(x) ,$$

où $R_j(x)$ est un polynôme.
Réciproquement : Supposons maintenant que $P_i(\alpha) = 0$; $\forall i = \overline{0, m-1}$, et montrons par récurrence que

$$P_0(x) = (x - \alpha)^m Q_0(x), \text{où } Q_0(x) \text{ est un polynôme}$$

En effet . Si $m = 1$, on aura

$$\begin{aligned} P_0(\alpha) &= P(\alpha) \\ &\Longrightarrow (x - \alpha) / P(x) \\ &\Longrightarrow P(x) = (x - \alpha) . Q_0(x) \end{aligned}$$

Supposons maintenant, que la propriété est vraie pour tout nombre strictement inférieur à m , alors :
Si $P_{m-1}(\alpha) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^{m-1} C_j^{(m-1)} \alpha^j P^{(j)}(\alpha) = 0 + ...0 + \alpha^{m-1} P^{(m-1)}(\alpha) \text{ pour tout } \alpha \neq 0 \\ &\Longrightarrow P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \Longrightarrow (x-\alpha)^m / P(x) \\ &\Longrightarrow P(x) = (x-\alpha)^m Q_0(x) \end{aligned}$$

■

Lemme 1.1.3 *Sous les conditions du lemme précédent, on a*

$$i) \sum_{p=0}^{k-1} p^i c_p \alpha^p = k^i . \alpha^k ; \forall i = \overline{0,\ m-1}\ . \tag{1.9}$$

$$ii) \sum_{p=1}^{k} c_{k-p} p^i \alpha^{k-p} = 0 ; \forall i. = \overline{1,\ m-1} \tag{1.10}$$

$$iii) \sum_{p=1}^{k} c_{k-p} (n-p)^j \alpha^{k-p} = n^j \alpha^k ; \forall j = \overline{0, m-1}. \tag{1.11}$$

Preuve. $i)$ On va montrer par récurrence que

$$P_i(x) = k^i x^k - \sum_{p=0}^{k-1} p^i c_p x^p \ ;\ \forall i = \overline{0,\ m-1}\ .$$

En effet . Pour $i = 0$, on obtient

$$k^0 x^k - \sum_{p=0}^{k-1} p^0 c_p x^p = x^k - \sum_{p=0}^{k-1} c_p x^p = P_0(x).$$

Supposons maintenant que la relation est vraie jusqu'à l'ordre i . On a

$$\begin{aligned} P_{i+1}(x) &= x P_i'(x) = x \left[k k^i x^{k-1} - \sum_{p=0}^{k-1} p p^i c_p x^{p-1} \right] \\ &= k^{i+1} x^k - \sum_{p=0}^{k-1} p^{i+1} c_p x^p \end{aligned}$$

Mais d'après le lemme précédent, on a

$$P_i(\alpha) = 0; \forall i = \overline{0,\ m-1}\ .$$

Ce qui implique

$$\sum_{p=0}^{k-1} p^i c_p \alpha^p = k^i \alpha^k.$$

ii) Un calcul direct donne

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{k} c_{k-p} p^i \alpha^{k-p} &= \sum_{p'=0}^{k-1} c_{p'} \left(k-p'\right)^i \alpha^{p'} \text{ (en posant } p' = k-p) \\
&= \sum_{t=0}^{i} \left(-1\right)^t C_i^t k^{i-t} \sum_{p'=0}^{k-1} c_{p'} p'^t \alpha^{p'}.
\end{aligned}$$

En utilisant le résultat précédent, on trouve

$$\sum_{p'=0}^{k-1} c_{p'} p'^t \alpha^{p'} = k^t \alpha^k$$

Alors

$$\sum_{p=1}^{k} c_{k-p} p^i \alpha^{k-p} = \sum_{t=0}^{i} \left(-1\right)^t C_i^t k^{i-t} k^t \alpha^k = k^i \alpha^k \sum_{t=0}^{i} \left(-1\right)^t C_i^t = 0$$

$iii)$ Nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{k} c_{k-p} (n-p)^j \alpha^{k-p} &= \sum_{p=1}^{k} c_{k-p} \sum_{t=0}^{j} C_j^t n^{j-t} (-p)^t \alpha^{k-p} \\
&= \sum_{t=0}^{j} C_j^t n^{j-t} (-1)^t \sum_{p=1}^{k} c_{k-p} p^t \alpha^{k-p} \\
&= \sum_{t=0}^{j} C_j^t n^{j-t} (-1)^t \sum_{p'=0}^{k-1} c_{p'} (k-p')^t \alpha^{p'} \\
&= \sum_{t=0}^{j} C_j^t n^{j-t} (-1)^t \sum_{i=0}^{t} (-1)^i C_t^i k^{t-i} \sum_{p'=0}^{k-1} c_{p'} p'^i \alpha^{p'} \\
&= \sum_{t=0}^{j} C_j^t n^{j-t} (-1)^t \sum_{i=0}^{t} (-1)^i C_t^i k^{t-i} k^i \alpha^k \\
&= n^j \alpha^k + \sum_{t=1}^{j} C_j^t n^{j-t} (-1)^t k^t \alpha^k \sum_{i=0}^{t} (-1)^i C_t^i \\
&= n^j \alpha^k
\end{aligned}$$

■

Preuve du théorème (1.1.1)

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite définie par (1.1).

Et soit

$$P(x) = \prod_{i=1}^{r} (x-\alpha_i)^{n_i}$$

le polynôme caractéristique de la relation (1.1).

On considère la fonction génératrice suivante

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \tag{1.12}$$

Alors, pour tout $n \geq k$, on a

$$x^n u_n = c_{k-1} u_{n-1} x^n + c_{k-2} u_{n-2} x^n + \dots + c_0 u_{n-k}\, x^n$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{+\infty} x^n u_n &= \sum_{n=k}^{+\infty} (c_{k-1}u_{n-1}x^n + c_{k-2}u_{n-2}x^n + ... + c_0 u_{n-k}\ x^n) \\
&= c_{k-1}x \sum_{n=k}^{+\infty} u_{n-1}x^{n-1} + c_{k-2}x^2 \sum_{n=k}^{+\infty} u_{n-2}x^{n-2} + ... + c_0 x^k \sum_{n=k}^{+\infty} u_{n-k}\ x^{n-k} \\
&= c_{k-1}x \sum_{n=k}^{+\infty} u_{n-1}x^{n-1} + c_{k-2}x^2 \sum_{n=k}^{+\infty} u_{n-2}x^{n-2} + ... + c_0 x^k \sum_{n=k}^{+\infty} u_{n-k}\ x^{n-k}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
F(x) - \sum_{m=1}^{k} u_{k-m}x^{k-m} &= c_{k-1}x \left(F(x) - \sum_{m=2}^{k} u_{n-m}x^{k-m} \right) + \\
&\quad ... + c_1 x^{k-1} \left(F(x) - u_0\right) + c_0 x^k F(x)
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{\sum_{m=1}^{k} u_{k-m}x^{k-m} - c_{k-1}x \left(\sum_{m=2}^{k} u_{k-m}x^{k-m} \right) - ... - c_1 x^{k-1} u_0}{1 - \sum_{m=1}^{k} c_{k-m}x^m} \\
&= \frac{\sum_{m=1}^{k} u_{k-m}x^{k-m} - c_{k-1} \sum_{m=2}^{k} u_{k-m}x^{k-(m-1)} - ... - c_1 x^{k-1} u_0}{1 - \sum_{m=1}^{k} c_{k-m}x^m}
\end{aligned}$$

Posons

$$R(x) = \sum_{m=1}^{k} u_{k-m}x^{k-m} - c_{k-1} \sum_{m=2}^{k} u_{k-m}x^{k-(m-1)} - ... - c_1 x^{k-1} u_0$$

Et

$$Q(x) = 1 - \sum_{m=1}^{k} c_{k-m}x^m,$$

où $\deg R \leq k-1$, et $\deg Q = k$ (car $c_0 \neq 0$).

Alors

$$\begin{aligned}
Q(\frac{1}{x}) &= 1-\sum_{m=1}^{k} c_{k-m}x^{-m} \\
&\Rightarrow\ x^kQ(\frac{1}{x}) = x^k-\sum_{m=1}^{k} c_{k-m}x^{k-m} \\
&= P(x)=\prod_{i=1}^{r}(x-\alpha_i)^{n_i}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^k}Q(x) &= \prod_{i=1}^{r}\left(\frac{1}{x}-\alpha_i\right)^{n_i} \\
&= \prod_{i=1}^{r}\left(\frac{1}{x}\right)^{n_i}\prod_{i=1}^{r}(1-\alpha_ix)^{n_i} \\
&= \frac{1}{x^k}\prod_{i=1}^{r}(1-\alpha_ix)^{n_i}\ \ (\text{ car } \sum_{i=1}^{r}n_i=k\ )
\end{aligned}$$

Alors

$$Q(x)=\prod_{i=1}^{r}(1-\alpha_ix)^{n_i}$$

En utilisant la division Euclidienne, on peut décomposer la fonction F comme suit

$$F(x)=\frac{R(x)}{\prod\limits_{i=1}^{r}(1-\alpha_ix)^{n_i}}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{r_{ij}}{(1-\alpha_ix)^j}.$$

Moyennant maintenant de l'expression

$$\left(\frac{1}{1-y}\right)^j=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}y^n\right)^j=\sum_{h=0}^{+\infty}c_{j-1}^{h+j-1}y^h,$$

il s'ensuit

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}r_{ij}\left(\sum_{h=0}^{+\infty}c_{j-1}^{h+j-1}\alpha_i^hx^h\right) \qquad (1.13)\\
&= \sum_{h=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{n_i}r_{ij}c_{j-1}^{h+j-1}\right)\alpha_i^h\right)x^h.
\end{aligned}$$

De (1.12) et (1.13), on déduit que

$$u_h = \sum_{i=1}^{r} P_i(h)\alpha_i^h,$$

où

$$P_i(h) = \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij} c_{j-1}^{h+j-1}.$$

D'autre part, les combinaisons c_{j-1}^{h+j-1} sont des polynômes de degré $j-1$.
Alors, pour tout $i = 1, ...r$, les $P_i(h)$ sont des polynômes de degré inférieur ou égale $n_i - 1$.

Unicité

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de degré k, alors on peut supposer que $c_0 \neq 0$, et dans ce cas, toutes les racines α_i, $i = \overline{1, r}$ sont différentes de zéro.
Posons

$$P_i\left(x\right) = \sum_{j=0}^{n_i-1} p_{ij} x^j \text{ (car } \deg(P_i) \leq n_i - 1).$$

Or les p_{ij}, $1 \leq i \leq r$ et $0 \leq j \leq n_i - 1$ sont les inconnues d'un système de k équations linéaires obtenues à partir de :

$$u_n = \sum_{i=1}^{r} P_i\left(n\right) \alpha_i^n$$

et les conditions initiales $u_0, ..., u_{k-1}$.
La formule précédente peut s'écrire sous la forme

$$u_n = \sum_{i=1}^{r} P_i\left(n\right) \alpha_i^n = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{n_i-1} p_{ij} n^j \alpha_i^n, \tag{1.14}$$

où $n = 0, ..., k-1$.
Le déterminant du système (1.14) est de la forme

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & . & 1 & 0 & . & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & . & \alpha_r & \alpha_r & . & \alpha_r \\ \alpha_1^2 & 2\alpha_1^2 & . & \alpha_r^2 & 2\alpha_r^2 & . & 2^{n_r-1}\alpha_r^2 \\ \alpha_1^3 & 3\alpha_1^3 & . & \alpha_r^3 & 3\alpha_r^3 & . & 3^{n_r-1}\alpha_r^3 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \alpha_1^{k-1} & (k-1)\,\alpha_1^{k-1} & . & \alpha_r^{k-1} & (k-1)\,\alpha_r^{k-1} & . & (k-1)^{n_r-1}\,\alpha_1^{k-1} \end{vmatrix} \tag{1.15}$$

On va démontrer que le déterminant (1.15) n'est pas nul, ce qui signifie que les coéfficients p_{ij} sont uniques.

Pour cela, il suffit de démontrer que les vecteurs colonnes de (1.15) sont linéairements indépendants .
Supposons donc qu'il existe des constantes $a_0, \ldots, a_{k-1}$ tels que

$$\sum_{l=0}^{k-1} a_l l^i \alpha_j^l = 0, \tag{1.16}$$

pour tout $j = \overline{1,\ r}$ et $i = \overline{0,\ n_j - 1}$.
On pose maintenat

$$C(x) = \sum_{l=0}^{k-1} a_l x^l. \tag{1.17}$$

Et on définit

$$\begin{cases} C_0(x) = C(x) \\ C_{i+1}(x) = xC_i'(x)\,; \forall i \geq 0 \end{cases}$$

Moyennant de (1.6), il s'ensuit

$$C_i(\alpha_j) = 0, \text{ pour tout } j = \overline{1,\ r} \text{ et } i = \overline{0,\ n_j\ - 1}$$

Le lemme (1.1.2) implique que $C(x)$ est divisible par $(x-\alpha_1)^{n_1}, (x-\alpha_2)^{n_2}, \ldots, (x-\alpha_r)$.
Dans ce cas, il existe un polynôme $q(x)$ tel que

$$C(x) = (x-\alpha_1)^{n_1}(x-\alpha_2)^{n_2} \ \ldots (x-\alpha_r)^{n_r} q(x).$$

Ce qui implique que

$$\deg(C(x)) \geq n_1 + \ \ldots + n_r = k, \text{ou bien } C(x) = 0.$$

D'après (1.17), la première option n'est pas satisfaite, alors $C(x)$ est identiquement nul, et donc

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_{k-1} = 0.$$

Réciproquement :
Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'écrit sous la forme

$$u_n = \sum_{i=1}^{r} P_i(n)\,\alpha_i^n.$$

On veut montrer que

$$u_n = c_{k-1}u_{n-1} + c_{k-2}u_{n-2} + \ \ . \ . \ . + c_0 u_{n-k}.$$

On étude la différence

$$D = u_n - c_{k-1}u_{n-1} - c_{k-2}u_{n-2} - \ \ . \ . \ . - c_0 u_{n-k}.$$

Alors

$$D = \sum_{i=1}^{r} P_i\left(n\right)\alpha_i^n - \sum_{s=1}^{k} c_{k-s} \sum_{i=1}^{r} P_i\left(n-s\right)\alpha_i^{n-s}.$$

En posant $c_k = -1$ et $P_i\left(x\right) = \sum\limits_{j=0}^{n_i-1} p_{ij}\ x^j$ dans l'égalité précédente, on obtient

$$\begin{aligned} D &= -\sum_{s=0}^{k} c_{k-s} \sum_{i=1}^{r} P_i\left(n-s\right)\alpha_i^{n-s} \\ &= -\sum_{i=1}^{r}\sum_{s=0}^{k}\sum_{j=0}^{n_i-1} p_{ij}\left(n-s\right)^j c_{k-s}\alpha_i^{n-k}\alpha_i^{k-s} \\ &= -\sum_{i=1}^{r}\alpha_i^{n-k}\sum_{j=0}^{n_i-1} p_{ij}\sum_{s=0}^{k} c_{k-s}\left(n-s\right)^j\alpha_i^{k-s}. \end{aligned}$$

Moyennant maintenant du lemme (1.2.3), il s'ensuit

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{k} c_{k-s}\left(n-s\right)^j\alpha_i^{k-s} &= -n^j\alpha_i^k + \sum_{s=1}^{k} c_{k-s}\left(n-s\right)^j\alpha_i^{k-s} \\ &= -n^j\alpha_i^k + n^j\alpha_i^k = 0. \end{aligned}$$

Par suite

$$u_n = c_{k-1}u_{n-1} + c_{k-2}u_{n-2} + ... + c_0 u_{n-k} \ , \text{ pour tout } n \geq k.$$

Résumée

Nous donnons une preuve élémentaire pour le problème de positivité pour la deuxième commander des suites récurrentes :

on peut décider si oui ou non une récidive suite définition

$$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}$$

ne dispose que des termes non négatifs.

Chapitre 2

Positivité d'une SRL de l'ordre inférieur ou égale Quatre

2.1 Positivité d'une SRL de l'ordre deux

Dans la suite, nous somme principalement intéresssés par les SRL de l'ordre deux; c'est-à-dire, celles qui sont définies par la relation suivante :

$$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}, \tag{2.1}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$.

Théorème 2.1.1 *Le problème de positivité pour les SRL de l'ordre deux est décidable.*

Afin de démontrer ce théorème, on va donner le résultat bien connu concernant les solutions d'une SRL de l'ordre deux. Nous avons donc

Lemme 2.1.2 *Soit*

$$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}, \tag{2.2}$$

une SRL de l'ordre deux , où $a, b \neq 0 \in \mathbb{R}$, et soit

$$p(x) = x^2 - ax - b,$$

son polynôme caractéristique de discriminant

$$D = a^2 + 4b.$$

1 . Si $D > 0$, on a alors

$$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n,$$

où $\lambda_1 \neq \lambda_2$ *sont les racines réelles de* $p(x)$

$$A = \frac{u_1 - u_0\lambda_2}{\sqrt{D}}, \text{ et } B = \frac{u_0\lambda_1 - u_1}{\sqrt{D}}.$$

2 . Si $D = 0$, *alors*

$$u_n = (A + Bn)\lambda^n,$$

où $\lambda = \frac{a}{2}$ *est la racine double de* $p(x)$ *et*

$$A = u_0, \ B = \frac{2u_1 - u_0 a}{a}.$$

3 . Si $D < 0$, *alors*

$$u_n = A\lambda^n + \overline{A\lambda}^n ,$$

où λ *et* $\overline{\lambda}$ *sont les racines complexe de* $p(x)$, *et* A *est tel que dans le cas 1 .*

Preuve. 1) Puisque $-\sqrt{D}$ est différent de zéro, le système d'équations

$$\begin{cases} u_0 = A + B \\ u_1 = A\lambda_1 + B\lambda_2 \end{cases},$$

peut être résolut par la règle de Cramer.
3) Même conclusion vaut pour le cas 3, où, en plus , $\overline{A} = B$, car dans ce cas $\sqrt{D}$ est un nombre imaginaire pur .
2) Nous avons $b = \frac{-a^2}{4}$, et le système d'équations devient

$$\begin{cases} u_0 = A \\ u_1 = A\lambda + B\lambda \end{cases}$$

Comme $a \neq 0$, le déterminant (qui est maintenant égale à λ) est encore différent de zéro et la règle de Cramer s'applique. ■

Preuve de théorème (2.1.1)

Nous commençons avec le cas le plus simple qui n'est pas couvrir par le lemme (2.1.2) , et qui , en fait , correspond au problème de positivité du premier ordre.
En effet. Soit

$$u_n = a^n u_0, \text{ pour tout } n \geq 0.$$

La suit $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ est positif si et seulement si $a \geq 0$ et $u_0 \geq 0$.
Si $b = 0$, Alors

$$u_n = a^{n-1} u_1 \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Ainsi la suite est non négatif si et seulement si $u_1 \geq 0$ et $a \geq 0$.

Si $a = 0$.i.e

$$u_n = bu_{n-2} = \begin{cases} b^m u_0 \ , & \text{si } n = 2m \\ b^m u_1, & \text{si } n = 2m+1 \end{cases} .$$

Par conséquent, la suite est positif si et seulement si $u_0 \ , u_1 \geq 0$ et $b \geq 0$.
Nous passons maintenant aux affaires du lemme (2.1.2) : Nous supposons que $a \neq 0$ et $b \neq 0$.
Envisageons trois cas, selon les solutions des SRL de l'ordre deux.

Lemme 2.1.3 *Supposons que, pour tout $n \geq 0$*

$$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n,$$

où $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sont des réels non nulles, et $A \ ,B \in \mathbb{R}$. Alors le problème de positivité de $(u_n)_{n=0}^{\infty}$, peut être efficacement décidable .

Preuve. Puisque $a \neq 0$, alors $|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$. Sans perte la généralité, supposons par exemple que $|\lambda_1| > |\lambda_2|$.
Nous avons

$$u_n = \lambda_1^n \left(A + B \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \right). \tag{2.3}$$

* Si $A = 0 = B$, alors le problème est trivial .
* Supposons maintenant que $AB \neq 0$. Nous avons alors deux cas selon le signe de λ_1.
1) Si $\lambda_1 < 0$, alors la suite (u_n) est positive si et seulement si , pour tout $n \geq 0$,

$$sign(A + B \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n = sign\left(\lambda_1^n\right).$$

Comme

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n = 0,$$

la suite (2.3) est positive si et seulement si $A = 0$, $\lambda_2 > 0$ et $B > 0$.
2) Si $\lambda_1 > 0$, la suite $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ est positif si et seulement si $\left(A + B \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \right) \geq 0$, pour tout $n \geq 0$.
*Si $B = 0$, alors $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ est positif lorsque $A \geq 0$, sinon $A + B \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \geq 0$ est équivalent à

$$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \geq \frac{-A}{B}, \text{ pour tout } n \geq 0. \tag{2.4}$$

Nous avons deux cas selon le signe de λ_2.
Tout d'abord :
** Si $\lambda_2 > 0$: puisque $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n$ tend vers zéro, alors la relation (2.2.2) est satisfaite si et

seulement si $\frac{-A}{B} \leq 0$.
** Si $\lambda_2 < 0$, toujours comme $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n$ tend vers zéro, mais avec en alternance signes, il est facile de voir que $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ est positif pour tout $n \geq 0$ si et seulement si (2.2.2) a lieu pour $n = 1$.
En effet, dans ce cas $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n \geq \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)$ pour tout $n \geq 0$.
Par conséquent, chacun des cas ci-dessus fournit un procédé pour déterminer la positivité de la suite $(u_n)_{n=0}^{\infty}$. ■

Lemme 2.1.4 *Supposons maintenant que*

$$u_n = (A + Bn)\lambda^n, n \geq 0$$

En suite, la Positivité Problème de la suite $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ peuvent être éfficacement décidable .

Preuve. Si $B = 0$, alors $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ est positive si et seulement si $A \geq 0$ et $\lambda \geq 0$.
* Si $\lambda < 0$, alors $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ ne peut pas être négatifs.
*Si $\lambda > 0$, alors $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ est positif si et seulement si $A + Bn \geq 0$, pour tout $n \geq 0$.
Ce qui est équivalent à la condition $n \geq \frac{-A}{B}$, i.e $\frac{-A}{B} \leq 0$. ■

Lemme 2.1.5 *Si*

$$u_n = A\lambda^n + \overline{A}\ \overline{\lambda}^n, n \geq 0,$$

alors la suite $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ ayant des éléments négatifs.

Preuve. On pose $\lambda = |\lambda| e^{i\theta}$ et $A = |A| e^{i\phi}$ où θ , $\phi \in [-\pi, \pi)$.
Nous avons donc

$$\begin{aligned} u_n &= |A| e^{i\phi} \left(|\lambda| e^{i\theta}\right)^n + |A| e^{-i\phi} \left(|\lambda| e^{-i\theta}\right)^n \\ &= |A| |\lambda|^n \left(e^{i(\phi+n\theta)}\right) + e^{-i(\phi+n\theta)} \\ &= 2|A| |\lambda|^n \cos(\phi + n\theta). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Afin de résoudre la Positivité Problème, il suffit d'étudier le signe de $\cos(\phi + n\theta)$.
Rappelons tout d'abord, que dans ce cas, la racine $\lambda \in \mathbb{C}$, et donc $\theta \notin \{-\pi, 0\}$.
Supposons le contraire, i.e $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 0$.
C'est-à- dire

$$\cos(\phi + n\theta) \geq 0, \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Ce qui implique

$$\phi + n\theta \in \left[\frac{-\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}.$$

Cependant, nous devons $\phi \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, puis $|\theta| < \pi$ implique que aussi $\phi + \theta \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
Par conséquent, on obtient par récurrence que $\phi + n\theta \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, pour tout $n \geq 0$.
Mais $\theta \neq 0$ implique

$$\lim_{n\to\infty} |\phi + n\theta| = \infty$$

Contradiction.
Par conséquent, nous devons avoir $u_n < 0$, pour un certain n. ■

2.2 Positivité d'une SRL de l'ordre trois

Considérons une suite récurrente linéaire du troisième ordre

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + a_3 u_{n-3}, \quad \text{pour tout } n \geq 3, \tag{2.6}$$

où $a_1, a_2, a_3 \neq 0$ sont des nombres réels donnés.
Le polynôme caractréstique associe à la réccurrence (2.6) est donné par

$$P(x) = x^3 - a_1 x^2 - a_2 x - a_3 \in \mathbb{R}[x]. \tag{2.7}$$

Posons $x = x + \frac{a_1}{3}$. Alors, l'expression (2.7) devient

$$P\left(x + \frac{a_1}{3}\right) = x^3 + \alpha x + \beta,$$

où $\alpha = \frac{-a_1^2 - 3a_2}{3}$ et $\beta = \frac{-2a_1^3 - 9a_2 a_1 - 27a_3}{27}$.
Soit x_1, x_2 et x_3 sont les trois racines de $P\left(x + \frac{a_1}{3}\right)$.
Le discriminant de $P\left(x + \frac{a_1}{3}\right)$ est :

$$\begin{aligned} D &= -4\alpha^3 - 27\beta^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 . \end{aligned}$$

Nous avons donc

Proposition 2.2.1 *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres entiers satisfaisant (2.6), avec des entiers $a_1, a_2, a_3 (\neq 0)$, u_0, u_1, u_2.*
Soit $P(x)$ le polynôme caractréstique de (2.6) dont les racines sont $\lambda_i\,(i = 1, 2, 3)$ et

$$D = -4\alpha^3 - 27\beta^2,$$

où :

$$\alpha = \left(-a_1^2 - 3a_2\right) \diagup 3 \textit{ et } \beta = \left(-2a_1^3 - 9a_2 a_3 - 27a_3\right) \diagup 27.$$

1. Si $D > 0$, alors λ_1, λ_2, λ_3 sont des racines distinctes non nuls. De plus

$$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n + C\lambda_3^n, \text{ pour tout } n \geq 0,$$

où

$$\left\{ \begin{array}{c} A = \frac{\lambda_2\lambda_3 u_0 - (\lambda_3+\lambda_2)u_1 + u_2}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)} \in \mathbb{R} \\ B = \frac{-\lambda_1\lambda_3 u_0 + (\lambda_3+\lambda_1)u_1 - u_2}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} \in \mathbb{R} \\ C = \frac{\lambda_1\lambda_2 u_0 - (\lambda_2+\lambda_1)u_1 + u_2}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} \in \mathbb{R} \end{array} \right. .$$

2. Si $D = 0$ et $\alpha = 0$, alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda \in \mathbb{R} \diagdown \{0\}$ et

$$u_n = \left(A + Bn + Cn^2\right)\lambda^n, \text{ pour tout } n \geq 0,$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = u_0 \in \mathbb{R} \\ B = \frac{-3u_0}{2} + \frac{2u_1}{\lambda} - \frac{u_2}{2\lambda_2} \in \mathbb{R} \\ C = \frac{u_0}{2} - \frac{u_1}{\lambda} + \frac{u_2}{2\lambda^2} \in \mathbb{R}. \end{array} \right. .$$

3. Si $D = 0$ et $\alpha \neq 0$, alors $P(x)$ a deux racines réelles distinctes : $\lambda_1 (\neq 0)$ de multiplicité 1 et $\lambda_2 = \lambda_3 (\neq 0)$ de multiplicité 2. De plus

$$u_n = A\lambda_1^n + (B + Cn)\lambda_2^n, \text{ pour tout } n \geq 0,$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{\lambda_2^2 u_0 - 2\lambda_2 u_1 + u_2}{(\lambda_2-\lambda_1)^2} \in \mathbb{R} \\ B = \frac{-\lambda_1(2\lambda_2-\lambda_1)u_0 + 2\lambda_2 u_1 - u_2}{(\lambda_2-\lambda_1)^2} \in \mathbb{R} \\ C = \frac{\lambda_1\lambda_2 u_0 - (\lambda_2+\lambda_1)u_1 + u_2}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)} \in \mathbb{R}. \end{array} \right. .$$

4. Si $D < 0$, alors $P(x)$ a une racine réelle $\lambda_1 (\neq 0)$ et deux racines complexes conjuguées λ_2, $\lambda_3 = \bar{\lambda}_2 \in \mathbb{C} \diagdown \mathbb{R}$. De plus

$$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n + \bar{B}\bar{\lambda}_2^n, \quad n \geq 0,$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{\lambda_2\bar{\lambda}_2 u_0 - \left(\bar{\lambda}_2+\lambda_2\right)u_1 + u_2}{(\lambda_2-\lambda_1)\left(\bar{\lambda}_2-\lambda_1\right)} \in \mathbb{R} \\ B = \frac{-\lambda_1\bar{\lambda}_2 u_0 + \left(\bar{\lambda}_2+\lambda_1\right)u_1 - u_2}{(\lambda_2-\lambda_1)\left(\bar{\lambda}_2-\lambda_1\right)} \in \mathbb{C}. \end{array} \right. .$$

Preuve. Soit λ_1, λ_2 et λ_3 sont les racines de $P(x)$.

1. Supposons que $D > 0$, alors λ_1, λ_2 et λ_3 sont des réels distincts, et :

$$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n + C\lambda_3^n, \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Ainsi :

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix},$$

et

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2).$$

Par conséquent :

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_2\lambda_3 u_0 - (\lambda_3+\lambda_2)u_1 + u_2}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)} \\ \frac{-\lambda_1\lambda_3 u_0 + (\lambda_3+\lambda_1)u_1 - u_2}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} \\ \frac{\lambda_1\lambda_2 u_0 - (\lambda_2+\lambda_1)u_1 + u_2}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} \end{bmatrix}.$$

2. Supposons que $D = 0$ et $\alpha = 0$, alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda \in \mathbb{R} \diagdown \{0\}$
Et

$$u_n = \left(A + Bn + Cn^2\right)\lambda^n, \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Ainsi :

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda^2 & 2\lambda^2 & 4\lambda^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}.$$

Et :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda^2 & 2\lambda^2 & 4\lambda^2 \end{vmatrix} = 2\lambda^3.$$

Par conséquent :

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ \frac{-3u_0}{2} + \frac{2u_1}{\lambda} - \frac{u_2}{2\lambda^2} \\ \frac{u_0}{2} - \frac{u_1}{\lambda} + \frac{u_2}{2\lambda^2} \end{bmatrix}.$$

3. Supposons que $D = 0$ et $\alpha \neq 0$, alors $P(x)$ a deux racines réelles distinctes $\lambda_1 (\neq 0)$ de multiplicité 1, $\lambda_2 = \lambda_3 (\neq 0)$ de multiplicité 2.
Et

$$u_n = A\lambda_1^n + (B + Cn)\lambda_2^n, \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Ainsi

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda^2 & \lambda_2^2 & 2\lambda_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$$

Et :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda^2 & \lambda_2^2 & 2\lambda_2^2 \end{vmatrix} = \lambda_2 \left(\lambda_2 - \lambda_1\right)^2.$$

Par conséquent :

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_2^2 u_0 - 2\lambda_2 u_1 + u_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} \\ \frac{-\lambda_1 (2\lambda_2 - \lambda_1) u_0 + 2\lambda_2 u_1 - u_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} \\ \frac{\lambda_1 \lambda_2 u_0 - (\lambda_2 + \lambda_1) u_1 + u_2}{\lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)} \end{bmatrix}.$$

4. Supposons que $D < 0$, alors $P(x)$ a une racine réelle $\lambda_1 \ (\neq 0)$ et deux racines complexes conjuguées $\lambda_2, \lambda_3 = \bar{\lambda}_2 \in \mathbb{C} / \mathbb{R}$.

$$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n + C\bar{\lambda}_2^n \ (n \geq 0).$$

Ainsi :

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \bar{\lambda}_2 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \bar{\lambda}_2^2 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}.$$

Et

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \bar{\lambda}_2 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \bar{\lambda}_2^2 \end{vmatrix} = \left(\lambda_2 - \lambda_1\right)\left(\bar{\lambda}_2 - \lambda_1\right)\left(\bar{\lambda}_2 - \lambda_2\right).$$

Par conséquent :

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_2 \bar{\lambda}_2 u_0 - \left(\bar{\lambda}_2 + \lambda_2\right) u_1 + u_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)\left(\bar{\lambda}_2 - \lambda_1\right)} \\ \frac{-\lambda_1 \bar{\lambda}_2 u_0 + \left(\bar{\lambda}_2 + \lambda_1\right) u_1 - u_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)\left(\bar{\lambda}_2 - \lambda_2\right)} \\ \frac{\lambda_1 \lambda_2 u_0 - (\lambda_2 + \lambda_1) u_1 + u_2}{\left(\bar{\lambda}_2 - \lambda_1\right)\left(\bar{\lambda}_2 - \lambda_2\right)} \end{bmatrix}.$$

Donc :

$$B = \bar{C}.$$

■

Lemme 2.2.2 *Soit a, b deux nombres réels positifs appartenant à l'intervalle $(0, 1)$ et soit*

B et C deux nombres réels positifs.Considérons les trois polynômes exponentielles suivants

$$P(n) = a^n (B - Cb^n), Q(n) = a^n (B + Cb^n), R(n) = a^n (-B + Cb^n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\cup\{0\},$$

les conclusions suivantes sont vérifiets :
($Type\ F - Z$) : Il existe des entiers explicitement calculables $N_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ et $N_1 \in \mathbb{N}$, de telle sorte que :

$$\sup\{P(n);\ n \geq 0\} = \max\{P(n);\ N_0 \leq n \leq N_1\}.$$

($Type\ F + Z$) :

$$\sup\{Q(n);\ n \geq 0\} = Q(0).$$

($Type\ -F + Z$) : Il existe un entier explicitement calculable $N_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tel que :

$$\sup\{R(n);\ n \geq 0\} = \max\{0,\ R(n);\ 0 \leq n \leq N_2\}.$$

Preuve. ($Type\ F - Z$) : Puisque $b^n \downarrow 0$ $(n \to \infty)$, il existe $N_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tel que :

$$B - Cb^i \leq 0 < B - Cb^n, \text{ pour tout } n \geq N_0, 0 \leq i < N_0.$$

Alors

$$p(n) > 0, \text{ pour tout } n \geq N_0 \text{ et } p(n) \leq 0, \text{ pour } 0 \leq n < N_0.$$

Puisque $p(n) \to 0$,quand $n \to \infty$, il existe un entier positif $N_1 > N_0$, tel que :

$$P(n) < p(N_0) \quad \text{pour tout } n > N_1,$$

et le résultat souhaite suit.
($Type\ F + Z$) : Dans ce cas, la conclusion est immédiate, car

$$Q(n) > 0 \text{ et } Q(n) \downarrow 0, \text{ quand } n \to \infty.$$

($Type\ -F + Z$) : Puisque $b^n \downarrow 0$ $(n \to \infty)$, il existe $N_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tel que :

$$-B + Cb^n < 0, \text{ pour tout } n > N_2,$$

et le résultat désire decoule directement. ■

Lemme 2.2.3 *Soit $\varphi, \theta \in [-\pi, \pi)$ avec $\theta \notin \{-\pi,\ 0\}$*
1- *Si θ est un rationnel multiple de π, alors la suite $(\cos(\varphi + n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique et ne*

prend que un nombre fini de valeurs explicitement calculable pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2- *Si* θ *n'est pas un rationnel multiple de* π, *alors* $\{\cos(\varphi + n\theta)\,;\ n \in \mathbb{N}\}$ *est dense dans* $[-1,\ 1]$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Preuve. 1. Supposons que θ est un rationnel multiple de π.
Posons
$$\theta = \frac{s\pi}{t}, \text{ pour tous } (s, t > 0) \in \mathbb{Z} \diagdown \{0\} \times \mathbb{Z} \diagdown \{0\} \text{ et } (s,\ t) = 1.$$
Comme la fonction cos est périodique de période 2π, il est facile de vérifie que le

$$\cos(\varphi + n\theta) = \cos(\varphi + ns\pi \diagup t)\,,$$

prend $2t$ valeurs explicitement calculable correspondant à $n = 0,\ 1,\ 2, ...,\ 2t - 1$.
2. Supposons maintenant que θ n'est pas un rationel multiple de π .
Pour cela , on suppose que
$$\theta = \vartheta\pi, \text{ où } \vartheta \in \mathbb{R} \diagdown \mathbb{Q}$$
Soit
$$\vartheta = [\vartheta] + \xi,$$
où $[\vartheta]$ désigne sa partie entière, et $\xi = \{\vartheta\} \in (0,\ 1)$ désigne sa partie fractionnaire qui doit être irrationnelle.
Alors, pour $n = 2k\ (k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$, nous avons

$$\cos(\varphi + n\theta) = \cos(\varphi + 2k\vartheta\pi) = \cos(\varphi + 2k\xi\pi) = \cos(\varphi + \{k\xi\}\, 2\pi)\,.$$

Comme ξ est irrationnelle, alors l'ensemble $\{k\xi; k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ est dense dans $[0,\ 1]$.
Par conséquent, l'ensemble $\{2\pi \{k\xi\}\,;\ k \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0,\ 2\pi]$.
Ce qui implique que la gamme des valeurs de

$$\cos(\varphi + \{k\vartheta\}\, 2\pi)\ \ ; k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,,$$

est dense dans $[-1,\ 1]$. ∎

2.2.1 Traitement de problème de Positivité

Lemme 2.2.4 *Supposons que*

$$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n + C\lambda_3^n; \qquad (n \geq 0)\,,$$

où $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ sont des réels distincts, alors le problème de positivité de la suite $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ peut être éfficacement résolu.

Preuve. *Puisque, il ya deux racines ayant la même valeur absolue, nous avons donc deux posibilité :*

1. S'il ya deux racines $\lambda_i,\ \lambda_j\ (i,\ j \in \{1,\ 2,\ 3\},\ i \neq j)$, telle que $|\lambda_i| = |\lambda_j|$.

Sans perte de généralité, soient $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 = -\lambda_1$.

Alors

$$u_n = \{A + (-1)^n B\} \lambda_1^n + C\lambda_3^n \text{ , pour tout } n \geq 0.$$

a) $\lambda_1 > |\lambda_3|$. On peut écrire

$$u_n = \lambda_1^n \{A + (-1)^n B + C (\lambda_3 / \lambda_1)^n\} \text{ , pour tout } n \geq 0$$

Nous considérons deux possibilités correspondant aux signes de λ_3.

a. i. Si $\lambda_3 < 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, nous avons

$$u_n = \left\{ \begin{array}{c} \lambda_1^n (A + B + C (|\lambda_3| / \lambda_1)^n) ;\ n \text{ paire} \\ \lambda_1^n (A - B - C (|\lambda_3| / \lambda_1)^n) ;\ n \text{ impaire} \end{array} \right\}$$

Si $C \geq 0$, alors

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A \geq \max \{-B, B + C |\lambda_3| / \lambda_1\}.$$

Si $C < 0$, alors

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A \geq \max \{B, -B + |C|\}.$$

a. ii. Si $\lambda_3 > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, nous avons :

$$u_n = \left\{ \begin{array}{c} \lambda_1^n (A + B + C (\lambda_3 / \lambda_1)^n) ;\ n \text{ paire} \\ \lambda_1^n (A - B + C (\lambda_3 / \lambda_1)^n) ;\ n \text{ impaire} \end{array} \right\}$$

Si $C \geq 0$, alors

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A \geq |B|.$$

Si $C < 0$, alors

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A \geq \max \{-B + |C|, B + |C| \lambda_3 / \lambda_1\}.$$

b) Si $\lambda_1 < |\lambda_3|$. On peut écrire

$$u_n = \lambda_3^n \{(A + (-1)^n B) (\lambda_1 / \lambda_3)^n + C\} \ (n \geq 0)$$

Nous avons deux choix selon le signe de λ_3.
b. i. Si $\lambda_3 < 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, nous avons

$$u_n = \left\{ \begin{array}{c} |\lambda_3^n| \left((A+B) \left| \lambda_1 / \lambda_3 \right|^n + C \right); \; n \;\; paire \\ -|\lambda_3^n| \left((B-A) \left| \lambda_1 / \lambda_3 \right|^n + C \right); \; n \;\; impaire \end{array} \right\}$$

Alors

$$\begin{aligned} u_n &\geq 0 \Leftrightarrow (A+B) \left| \lambda_1 / \lambda_3 \right|^{2k} \geq -C \;\; et \;\; (B-A) \left| \lambda_1 / \lambda_3 \right|^{2k+1} \leq -C \\ &\Longleftrightarrow C = 0, B < A, A + B > 0, \text{ pour tout } k \geq 0 \end{aligned}$$

b. ii. Si $\lambda_3 > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, nous avons

$$u_n = \left\{ \begin{array}{c} \lambda_3^n \left((A+B) \left(\lambda_1 / \lambda_3^n \right)^n + C \right); \; n \; paire \\ \lambda_3^n \left((A-B) \left(\lambda_1 / \lambda_3^n \right)^n + C \right); \; n \;\; impaire \end{array} \right.$$

Alors

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow C \geq -(A+B) \left(\lambda_1 / \lambda_3 \right)^{2k} \; et \; C \geq -(A-B) \left(\lambda_1 / \lambda_3 \right)^{2k+1}, \quad k \geq 0 \qquad (2.8)$$

Si $A \geq |B|$, alors (2.8) est satisfaite si et seulement si : $C \geq 0$.
Si $A < |B|$, alors (2.8) est satisfaite si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{c} C \geq -(A-B) \left(\lambda_1 / \lambda_3 \right) \;\; , \;\; o\grave{u} \; B > 0 \\ C \geq -(A+B) \;\; , \; o\grave{u} \; B \leq 0. \end{array} \right.$$

2. Si les trois racines λ_1, λ_2 et λ_3 ayant des valeurs absolues différentes..
Sans perte de généralité, Supposons que $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3|$. Alors

$$u_n = \lambda_1^n \left\{ A + B \left(\lambda_2 / \lambda_1 \right)^n + C \left(\lambda_3 / \lambda_1 \right)^n \right\} (n \geq 0).$$

2.1 Si $\lambda_1 < 0$.Puisque λ_1 a des signes alternés, et $\left(\lambda_2 / \lambda_1 \right)^n$ et $\left(\lambda_3 / \lambda_1 \right)^n \to 0$,quand $n \to \infty$; alors

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A = 0$$

Ainsi :

$$u_n = B\lambda_2^n + C\lambda_3^n = \lambda_2^n \left\{ B + C \left(\lambda_3 / \lambda_2 \right)^n \right\}.$$

Ce cas particulier, se réduit donc à une suite linéaire du dexième ordre, et la positivité de ce problème est décidable D'aprés la section 1.
2.2 Si $\lambda_1 > 0$:

** Si $B = C = 0,$ alors*

$$u_n = \lambda_1^n A \geq 0 \Leftrightarrow A \geq 0, \text{ pour tout } n \geq 0$$

** Si $B = 0,$ alors pour $C > 0,$ la suite (u_n) est positive si et seulement si :*

$$\begin{aligned} u_n &\geq 0 \Leftrightarrow A \geq -C\left(\lambda_3 / \lambda_1\right)^n, \text{ pour tout } n \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} A/C \geq 0, \text{ où } \lambda_3 > 0 \\ A/C \geq \left|\lambda_3/\lambda_1\right|, \text{ où } \lambda_3 < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Et pour $C < 0$:

$$\begin{aligned} u_n &\geq 0 \Leftrightarrow A \geq -C\left(\lambda_3/\lambda_1\right)^n, \text{ pour tout } n \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow A \geq |C| \end{aligned}$$

**Si $C = 0,$ alors pour $B > 0$*

$$\begin{aligned} u_n &\geq 0 \Leftrightarrow A \geq -B\left(\lambda_2/\lambda_1\right)^n \text{ pour tout } n \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} A/B \geq 0 \text{ , où } \lambda_2 > 0 \\ A/B \geq \left|\lambda_2/\lambda_1\right|, \text{où } \lambda_2 < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Et pour $B < 0,$

$$\begin{aligned} u_n &\geq 0 \Leftrightarrow A \geq -B\left(\lambda_2/\lambda_1\right)^n, \text{ pour tout } n \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow A \geq |B|. \end{aligned}$$

** Si $B < 0,$ $C < 0,$*

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A \geq |B| + |C|.$$

** Si $B < 0,$ $C > 0,$*

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A \geq |B|\left(\lambda_2/\lambda_1\right)^n - |C|\left(\lambda_3/\lambda_1\right)^n, \text{ pour tout } n \geq 0.$$

*** Pour $\lambda_2 > 0,$ $\lambda_3 > 0,$ considérons le polynôme exponentiel :*

$$P_1(n) = \left(\lambda_2/\lambda_1\right)^n \left\{|B| - |C|\left(\lambda_3/\lambda_2\right)^n\right\}, \text{ pour } n \geq 0.$$

Ce polynôme exponentiel est de type $F - Z$.

D'aprés lemme (2.2.2),

$$\begin{aligned} u_n &\geq 0 \Leftrightarrow A \geq \max\left\{P_1(n)\,;\ N_0 \leq n \leq N_1\right\} \\ &\Longleftrightarrow A \geq \max\left\{|B|\left(\lambda_2/\lambda_1\right)^n - |C|\left(\lambda_3/\lambda_1\right)^n;\ N_0 \leq n \leq N_1\right\} > 0, \text{ Pour tout } N_1 > N_0 \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

*** Pour $\lambda_2 > 0,\ \lambda_3 < 0$, on a :*

$$|B|\left(\lambda_2/\lambda_1\right)^n - |C|\left(\lambda_3/\lambda_1\right)^n = \begin{cases} |B|\left(\lambda_2/\lambda_1\right)^n - |C|\left(\lambda_3/\lambda_1\right)^n;\ n \text{ paire} \\ |B|\left(\lambda_2/\lambda_1\right)^n + |C|\left(\lambda_3/\lambda_1\right)^n;\ n \text{ impaire} \end{cases}$$

Pour $n = 2k$, puisque le polynôme exponentiel :

$$P_2(k) = \left(\lambda_2/\lambda_1\right)^{2k}\left\{|B| - |C|\left(|\lambda_3|/\lambda_2\right)^{2k}\right\},\ k \geq 0$$

est de type $F - Z$. D'aprés le lemme (2.2.2), il existe des entiers calculables :
$K_1 > K_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *tel que :*

$$\sup\left\{P_2(k)\,;\ k \geq 0\right\} = \max\left\{P_2(k)\,;\ K_0 \leq k \leq K_1\ \right\}.$$

Et pour $n = 2k + 1$, le polynôme exponentiel :

$$P_3(k) = \left(\lambda_2/\lambda_1\right)^{2k+1}\left\{|B| + |C|\left(|\lambda_3|/\lambda_2\right)^{2k+1}\right\},\ k \geq 0$$

est de type $F + Z$, ainsi par le lemme (2.2.2) ,

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A \geq \max\left\{P_2(k_1), P_3(0)\ ;\ K_0 \leq k_1 \leq K_1\ \right\}$$

*** Pour $\lambda_2 < 0,\ \lambda_3 > 0$, on a :*

$$|B|\left(\lambda_2/\lambda_1\right)^n - |C|\left(\lambda_3/\lambda_1\right)^n = \begin{cases} |B|\left(|\lambda_2|/\lambda_1\right)^n - |C|\left(\lambda_3/\lambda_1\right)^n;\ n \text{ paire} \\ -|B|\left(|\lambda_2|/\lambda_1\right)^n - |C|\left(\lambda_3/\lambda_1\right)^n;\ n \text{ impaire} \end{cases}.$$

Le cas de n impaire $n = 2k + 1$ peut être ignorée car les termes sont négatifs .
Et pour $n = 2k$, le polynôme exponentiel P_3 est de type $F - Z$.
D'aprés le lemme (2.2.2),il existe des entiers calculables $K_4 > K_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tel que

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A \geq \max\left\{|B|\left(|\lambda_2|/\lambda_1\right)^{2k} - |C|\left(\lambda_3/\lambda_1\right)^{2k}\ ;\ K_3 \leq k \leq K_4\ \right\}.$$

*** Pour* $\lambda_2 < 0,\ \lambda_3 < 0$,*on a :*

$$|B|(\lambda_2/\lambda_1)^n - |C|(\lambda_3/\lambda_1)^n = \begin{cases} |B|(|\lambda_2|/\lambda_1)^n - |C|(|\lambda_3| \diagup \lambda_1)^n\ ;\ n \quad paire \\ -|B|(|\lambda_2|/\lambda_1)^n + |C|(|\lambda_3| \diagup \lambda_1)^n\ ;\ n \quad impaire \end{cases}.$$

Le cas de n *pair* $n = 2k$, *le polynôme exponentiel :*

$$P_4(k) = (|\lambda_2|/\lambda_1)^{2k} \left\{|B| - |C|(|\lambda_3|/|\lambda_2|)^{2k}\right\}(k \geq 0)$$

est de type $F - Z$.

D'aprés le lemme (2.2.2), l existe des entiers calculables $K_6 > K_5 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *de telle sorte que :*

$$\sup\{P_4(k)\ ;\ k \geq 0\} = \max\{P_4(k)\ ;\ K_5 \leq k \leq K_6\ \} > 0.$$

Pour $n = 2k+1$, *le polynôme exponentiel :*

$$P_5(k) = (|\lambda_2|/\lambda_1)^{2k+1} \left\{-|B| + |C|(|\lambda_3|/|\lambda_2|)^{2k+1}\right\}(k \geq 0)$$

est de type $-F + Z$.

D'aprés le lemme (2.2.2), il existe $K_7 \in \mathbb{N}$, *tel que :*

$$\sup\{P_5(k)\ ;\ k \geq 0\} = \max\{0\ ; P_5(k)\ ;\ 0 \leq k \leq K_7\ \}.$$

Ainsi,

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A \geq \max\{P_4(K_1), P_5(K_2)\ \ ;\ K_5 \leq k_1 \leq K_6\ ;\ 0 \leq K_2 \leq K_7\}.$$

** Si* $B > 0,\ C < 0$, *alors*

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A \geq -|B|(\lambda_2/\lambda_1)^n + |C|(\lambda_3/\lambda_1)^n.$$

*** Pour* $\lambda_2 > 0,\ \lambda_3 > 0$, *le polynôme exponentiel :*

$$P_6(k) = (\lambda_2/\lambda_1)^n \{-|B| + |C|(\lambda_3/\lambda_2)^n\}(n \geq 0)$$

est de type $-F + Z$, *et donc d'aprés le lemme (2.2.2), il existe un entier calculable :* $K_8 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *,tel que*

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A \geq \max\{0, P_6(n)\ ;\ 0 \leq n \leq K_8\}.$$

*** Pour $\lambda_2 > 0,\ \lambda_3 < 0,$ on a :*

$$-|B|(\lambda_2/\lambda_1)^n + |C|(\lambda_3/\lambda_1)^n = \begin{cases} -|B|(\lambda_2/\lambda_1)^n + |C|(|\lambda_3|/\lambda_1)^n ;\ n \ \ paire \\ -|B|(\lambda_2/\lambda_1)^n - |C|(|\lambda_3|/\lambda_1)^n ;\ n \ impaire \end{cases}.$$

Le cas de n impaire $n = 2k+1$ peut être ignorée car les termes sont négatifs .
Le cas de n paire $n = 2k$, le polynôme correspondant est de type $-F+Z$, et donc par le lemme (2.2.2),

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A \geq \max\left\{0, -|B|(\lambda_2/\lambda_1)^{2k} + |C|(|\lambda_3|/\lambda_1)^{2k} ;\ 0 \leq k \leq K_9\right\}.$$

où $K_9 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
*** Pour $\lambda_2 < 0,\ \lambda_3 > 0,$ on a :*

$$-|B|(\lambda_2/\lambda_1)^n + |C|(\lambda_3/\lambda_1)^n = \begin{cases} -|B|(|\lambda_2|/\lambda_1)^n + |C|(\lambda_3/\lambda_1)^n ;\ n \ paire \\ |B|(|\lambda_2|/\lambda_1)^n + |C|(\lambda_3/\lambda_1)^n ;\ n \ \ impaire \end{cases}.$$

Dans le cas où $n = 2k$, le polynôme exponentiel :

$$P_7(k) = (|\lambda_2|/\lambda_1)^{2k}\left\{-|B| + |C|(\lambda_3/|\lambda_2|)^{2k}\right\},\ k \geq 0$$

est de type $-F+Z$, et donc par le lemme , il existe un entier calculable :$K_{10} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tel que :

$$\sup\{P_7(k) ;\ k \geq 0\} = \max\{0 ; P_7(k) ;\ 0 \leq k \leq K_{10}\}.$$

Dans le cas où n impair $n = 2k+1$, le polynôme exponentiel :

$$P_8(k) = (|\lambda_2|/\lambda_1)^{2k+1}\left\{|B| + |C|(\lambda_3/|\lambda_2|)^{2k+1}\right\}(k \geq 0)$$

est de type $F+Z$, et donc par le lemme (2.2.2),

$$\sup\{P_8(k) ;\ k \geq 0\} = P_8(0) = (|\lambda_2|/\lambda_1)\{|B| + |C|(\lambda_3/|\lambda_2|)\} > 0$$

Par conséquent

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A \geq \max\{P_7(k_1), P_8(0) ;\ 0 \leq k_1 \leq K_{10}\}.$$

*** Pour $\lambda_2 < 0,\ \lambda_3 < 0,$ on a :*

$$-|B|(\lambda_2/\lambda_1)^n + |C|(\lambda_3/\lambda_1)^n = \begin{cases} -|B|(|\lambda_2|/\lambda_1)^n + |C|(|\lambda_3|/\lambda_1)^n ;\ n \ \ paire \\ |B|(|\lambda_2|/\lambda_1)^n - |C|(|\lambda_3|/\lambda_1)^n ;\ n \ \ impaire \end{cases}.$$

Pour $n = 2k$*, le polynôme exponentiel :*

$$P_9(k) = (|\lambda_2| / \lambda_1)^{2k} \left\{ -|B| + |C| (|\lambda_3| / |\lambda_2|)^{2k} \right\}, \; k \geq 0$$

est de type $-F+Z$*, et donc par le lemme (2.2.2), il existe un entier calculable :*
$K_{12} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*, tel que*

$$\sup \{P_9(k) ; \; k \geq 0\} = \max \{0 \; ; P_9(k) ; \; 0 \leq k \leq K_{12}\}.$$

Pour $n = 2k+1$*, le polynôme exponentiel :*

$$P_{10}(k) = (|\lambda_2| / \lambda_1)^{2k+1} \left\{ |B| - |C| (|\lambda_3| / |\lambda_2|)^{2k+1} \right\}, \; k \geq 0$$

est de type $F - Z$*, et donc par le lemme (2.2.2), il existe des entiers calculables :*
$K_{14} > K_{13} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*, tel que :*

$$\sup \{P_{10}(k) ; \; k \geq 0\} = \max \{P_{10}(k) ; \; K_{13} \leq k \leq K_{14}\} > 0.$$

La suite (u_n) *est donc positive, si et seulement si :*

$$A \geq \max \{P_9(k_1), P_{10}(k_2) ; \; 0 \leq k_1 \leq K_{12}, \; K_{13} \leq k_2 \leq K_{14}\}.$$

** Si* $B > 0$*,* $C > 0$*, la suite* (u_n) *est positive si et seulement si :*

$$A \geq -B(\lambda_2/\lambda_1)^n - C(\lambda_3/\lambda_1)^n \, (n \geq 0). \tag{2.9}$$

*** Si* $\lambda_2 > 0$ *et* $\lambda_3 > 0$*, alors (2.9)satisfaite si et seulement si :*

$$A \geq 0.$$

*** Si* $\lambda_2 > 0$ *et* $\lambda_3 < 0$*, alors :*

$$-B(\lambda_2/\lambda_1)^n - C(\lambda_3/\lambda_1)^n = \left\{ \begin{array}{l} -B(\lambda_2/\lambda_1)^n - |C| (|\lambda_3| / \lambda_1)^n ; \; n \text{ paire} \\ -B(\lambda_2/\lambda_1)^n + C(|\lambda_3| / \lambda_1)^n ; \; n \text{ impaire} \end{array} \right. .$$

Le cas de n *pair est ignorée car les termes sont négatifs.*
Pour n *impair* $n = 2k+1$*, ce cas est de type* $-F+Z$*, et donc par le lemme(2.2.2) , il existe un entier calculable* $K_{15} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*, tel que*

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A \geq \max \left\{ 0, \; -B(\lambda_2 / \lambda_1)^{2k+1} + C(|\lambda_3| / \lambda_1)^{2k+1} ; \; 0 \leq k \leq K_{15} \right\}.$$

*** Si $\lambda_2 < 0,\ \lambda_3 > 0,$ alors :*

$$-B\left(\lambda_2/\lambda_1\right)^n - C\left(\lambda_3/\lambda_1\right)^n = \begin{cases} -B\left(|\lambda_2|/\lambda_1\right)^n - C\left(\lambda_3/\lambda_1\right)^n;\ n \text{ paire} \\ B\left(|\lambda_2|/\lambda_1\right)^n - C\left(\lambda_3/\lambda_1\right)^n;\ n \text{ impaire} \end{cases}.$$

Le cas de n pair est ignorée car les termes sont négatifs.
Pour $n = 2k+1$, ce cas est de type $F - Z$, et donc par le lemme (2.2.2) , il existe des entiers calculables $K_{17} > K_{16} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tel que

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A \geq \max\left\{B\left(|\lambda_2|/\lambda_1\right)^{2k+1} - C\left(\lambda_3/|\lambda_2|\right)^{2k+1};\ K_{16} \leq k \leq K_{17}\right\}.$$

***Pour $\lambda_2 < 0,\ \lambda_3 < 0,$ alors :*

$$-B\left(\lambda_2/\lambda_1\right)^n - C\left(\lambda_3/\lambda_1\right)^n = \begin{cases} -B\left(|\lambda_2|/\lambda_1\right)^n - C\left(|\lambda_3|/\lambda_1\right)^n;\ n \text{ paire} \\ B\left(|\lambda_2|\diagup\lambda_1\right)^n + C\left(|\lambda_3|\diagup\lambda_1\right)^n;\ n \text{ impaire} \end{cases}.$$

Le cas de n pair est ignorée car les termes sont négatifs.
Pour n impair, ce cas est de type $F + Z$, et donc par le lemme (2.2.2)

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A \geq B\left(|\lambda_2|\diagup\lambda_1\right) + C\left(|\lambda_3|\diagup\lambda_1\right).$$

■

Lemme 2.2.5 *Supposons que :*

$$u_n = \left(A + Bn + Cn^2\right)\lambda^n\,(n \geq 0),\ \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}\diagdown\{0\}.$$

Alors le problème de positivité de la suite $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ peut être effectivement décidable.

Preuve. Nous avons deux sous cas selon le signe de λ.
1. Si $\lambda < 0$.
La suite (u_n) est positive si et seulement si, pour chaque n, soit $A + Bn + Cn^2 = 0$ ou :

$$sign\left(A + Bn + Cn^2\right) = sign\left(\lambda^n\right)$$

La suite (u_n) est donc positive si et seulement si :

$$A + Bn + Cn^2 \equiv 0$$

i.e, si et seulement si :

$$A = B = C = 0.$$

2. $\lambda > 0$.
La suite (u_n) est positive si et seulement si :

$$A + Bn + Cn^2 \geq 0, \text{ pour tout } n \geq 0$$

Puisque $A + Bn + Cn^2$ est un polynôme quadratique en n, alors

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow C \geq 0$$

■

Lemme 2.2.6 *Supposons que :*

$$u_n = A\lambda_1^n + (B + Cn)\lambda_2^n,\ n \geq 0, \text{où } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} - \{0\}, \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Alors le problème de positivité de la suite $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ peut être efficacement décidable.

Preuve. On distingue trois possibilitées en fonction des valeurs absolues de deux racines.
1. Si $|\lambda_1| > |\lambda_2| > 0$. On peut écrire

$$u_n = \lambda_1^n \{A + (B + Cn)(\lambda_2/\lambda_1)^n\}.$$

Nous subdivisons en deux sous cas selon le signe de λ_1
* Si $\lambda_1 < 0$.
Puisque :

$$(B + Cn)(\lambda_2/\lambda_1)^n \to 0, \text{ quand } n \to \infty\ ,$$

et $sign(\lambda_1^n) = \mp|\lambda_1^n|$. Alors

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A = 0,$$

Ce qui donc :

$$u_n = (B + Cn)\lambda_2^n$$

C'est exactement le même que le lemme (2.1.2) de positivité d'une suite réccurence linéaire du dexième ordre, ce qui déja a été montré pour être décidable.
* Si $\lambda_1 > 0$. Puisque

$$sign\{A + (B + Cn)(\lambda_2/\lambda_1)^n\} = sign(A),$$

où n est assez grand. Alors

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A \geq 0 \text{ et } A \geq -(B + Cn)(\lambda_2/\lambda_1)^n\ (n \geq 0) \tag{2.10}$$

De toute évidence, il existe un entier calculable $T \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tel que la relation (2.10) est vérifié si et seulement si :

$$A \geq \max\left\{-\left(B+Cn\right)\left(\lambda_2/\lambda_1\right)^n ;\ 0 \leq n \leq T\right\}.$$

Par conséquent

$$A \geq \max\left\{\left(0, -\left(B+Cn\right)\left(\lambda_2/\lambda_1\right)^n\right) ;\ 0 \leq n \leq T\right\}.$$

2. Si $|\lambda_1| < |\lambda_2|$.
Ecrivons

$$u_n = \lambda_2^n \left\{A\left(\lambda_1/\lambda_2\right)^n + \left(B+Cn\right)\right\}. \tag{2.11}$$

On distingue deux sous_cas selon le signe de λ_2.
* Si $\lambda_2 < 0$.
Puisque :

$$sign\left(A\left(\lambda_1/\lambda_2\right)^n + \left(B+Cn\right)\right) = sign\left(C\right),$$

où n assez grand, et $sign\left(\lambda_2^n\right) = \mp\left|\lambda_1^n\right|$.Alors

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow C = 0$$

L'expression (2.11) devient

$$u_n = \lambda_2^n \left(A\left(\lambda_1 \diagup \lambda_2\right)^n + B\right).$$

Puisque

$$sign\left(A\left(\lambda_1 \diagup \lambda_2\right)^n + B\right) = sign\left(B\right).$$

Lorsque n est suffisament grand.
Nous concluons que la suite (u_n) est positive uniquement lorsque $B = 0$ et donc

$$u_n = A\lambda_1^n$$

Par conséquent, la suite (u_n) est positive si et seulement si :

$$A \geq 0 \text{ et } \lambda_1 > 0$$

* Si $\lambda_2 > 0$. Alors

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow B \geq R(n) = -A(\lambda_1 / \lambda_2)^n - Cn \text{ , pour tout } n \geq 0 \tag{2.12}$$

Il s'agit maintenant de trouver $\sup_{n \geq 0} R(n)$.
De tout évidence, nous ne pouvons exclue la situation où $C < 0$ car pas de nombre réel B satisfait (2.12), pour tout $n \geq 0$.
Si $C = 0$, alors

$$R(n) = -A(\lambda_1 / \lambda_2)^n \to 0, \text{ quand } n \to \infty,$$

Et donc, il ya $T_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ telle que :

$$\sup\{R(n)\,;\ n \geq 0\} = \max\{0,\ R(n)\,;\ 0 \leq n \leq T_2\}$$

Ainsi, (2.12) est satisfaite si et seulement si :

$$B \geq \max\{0,\ R(n)\,;\ 0 \leq n \leq T_2\}.$$

Si $C > 0$. Puisque $R(n) \to -\infty$, quand $n \to \infty$, il existe un entier calculable $T_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, de telle sorte que :

$$\max\{R(n)\,; n \geq 0\} = \max\{R(n)\,;\ 0 \leq n \leq T_3\}.$$

Ainsi, (2.12) est satisfaite, si et seulement si :

$$B \geq \max\{R(n)\,;\ 0 \leq n \leq T_3\}.$$

3. Si $|\lambda_1| = |\lambda_2|$:
$*$ Si $\lambda_1 = -\lambda_2 > 0$. Le terme générale de la suite est :

$$u_n = \{A + (-1)^n (B + Cn)\} \lambda_1^n = \begin{cases} \{A + (B + 2Ck)\} \lambda_1^{2k}, & si\ n = 2k \\ \{A - (B + C + 2Ck)\} \lambda_1^{2k+1} & ,si\ n = 2k + 1 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} u_n &\geq 0 \Leftrightarrow A - B - C \geq 0 \geq 2Ck \geq -A - B, \text{ pour tout } k \geq 0. \\ &\Leftrightarrow A - B \geq 0 \geq -A - B \Leftrightarrow A \geq |B|. \end{aligned}$$

* $\lambda_1 = -\lambda_2 < 0$. Nous avons

$$u_n = \{(-1)^n A + B + Cn\} \lambda_2^n = \begin{cases} (A + B + 2Ck) \lambda_2^{2k}, \ si \ n = 2k \\ (-A + B + C + 2Ck) \lambda_2^{2k+1}, \ si \ n = 2k+1 \end{cases}$$

La suite (u_n) est positive si et seulement si :

$$A + B + 2Ck \geq 0 \text{ et } - A + B + (2k+1) C \geq 0, \text{ pour tout } k \geq 0$$

Puisque les deux inégalités ne détiennent pas si $C < 0$, lorsque k assez grand.
Les deux inégalités donc valables pour tout $k \geq 0$ si et seulement si :

$$C \geq 0, A + B \geq 0 \ \text{ et } C \geq A - B.$$

■

Lemme 2.2.7 *Supposons que :*

$$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n + \overline{B\lambda_2^n},$$

où A, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{C}$ *et* $\lambda_2 \in \mathbb{C} \diagdown \mathbb{R}$, *alors :*
1. Si $\lambda_1 < 0$, *alors* $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ *comporte des éléments négatifs.*
2. Si $\lambda_1 > 0$, *alors le problème de positivité de la suite* $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ *peut être éfficacement décidable.*

Preuve. Supposons que :

$$\lambda_2 = |\lambda_2| \exp i\theta, \ B = |B| \exp i\varphi,$$

où θ, $\varphi \in [-\pi, \ \pi)$, $\theta \notin \{-\pi, \ 0\}$.
Alors

$$u_n = A\lambda_1^n + 2 |B| |\lambda_2|^n \cos(\varphi + n\theta).$$

Si $A = 0$, alors :

$$u_n = 2 |B| |\lambda_2|^n \cos(\varphi + n\theta).$$

Ce qui déja a été montré pour être décidable dans la section 1.
Supposons désormais que $A \neq 0$.
1. Si $\lambda_1 < 0$.
* Si $B = 0$, alors :

$$u_n = A\lambda_1^n$$

Puisque $\lambda_1^n = \mp |\lambda_1^n|$, donc u_n n'est pas positive.
* Si $B = 0$, alors :
1.1 Si $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, on a :

$$u_n = \lambda_1^n \{A + 2|B| (|\lambda_2| / \lambda_1)^n \cos(\varphi + n\theta)\}$$

Puisque :

$$sign \{A + 2|B| (|\lambda_2| / \lambda_1)^n \cos(\varphi + n\theta)\} = sign(A),$$

où n assezgrand, et $\lambda_1^n = \pm |\lambda_1|^n$, la suite (u_n) est positive seulement où $A = 0$,
1.2 Si $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, on a :

$$u_n = |\lambda_2|^n \{(-1)^n A + 2|B| \cos(\varphi + n\theta)\}$$

La suite (u_n) est positive si et seulement si :

$$-2|B| \cos(\varphi + nk\theta) \leq A \leq 2|B| \cos(\varphi + (2k+1)\theta), \; k \geq 0.$$

la fonction cos prend des valeurs positives et négatives, alors

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A = B = 0$$

1.3 Si $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= A\lambda_1^n + 2|B\lambda_2^n| \cos(\varphi + n\theta) \\ &= |\lambda_2^n| \{A(\lambda_1 / |\lambda_2|)^n + 2|B| \cos(\varphi + n\theta)\}. \end{aligned}$$

Puisque $A(\lambda_1 / |\lambda_2|)^n \to 0$, quand $n \to \infty$, et la fonction $\cos(\varphi + n\theta)$ prend des valeurs positives et négatives, alors

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow B = 0$$

Ce qui implique

$$u_n = A\lambda_1^n \geq 0 \Leftrightarrow A = 0$$

2. Suposons maintenant que $\lambda_1 > 0$.
Si $B = 0$, alors

$$u_n = A\lambda_1^n$$

Donc la suite (u_n) est positive si et seulement si $A \geq 0$.
Si $B = 0$.

2.1 Si $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, on a :

$$u_n = \lambda_1^n \left\{ A + 2 |B| \left(|\lambda_2| / \lambda_1 \right)^n \cos(\varphi + n\theta) \right\}$$

Puisque

$$sign \left\{ A + 2 |B| \left(|\lambda_2| / \lambda_1 \right)^n \cos(\varphi + n\theta) \right\} = sign(A) ,$$

où n est suffisament grand, alors

$$u_n \geq 0A \geq 0 \text{ et } \Leftrightarrow A \geq -2 |B| \left(|\lambda_2| / \lambda_1 \right)^n \cos(\varphi + n\theta) , \; n \geq 0$$

Par le lemme (2.1.5), il existe $N_L \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tel que $\cos(\varphi + N_L\theta) < 0$.
Puisque $\left(|\lambda_2| / \lambda_1 \right)^n \to 0$, quand $n \to \infty$; il ya donc $N_M > N_L$, tel que pour tout $n \geq N_M$, on a :

$$-2 |B| \left(|\lambda_2| / \lambda_1 \right)^n \cos(\varphi + n\theta) < -2 |B| \left(|\lambda_2| / \lambda_1 \right)^{N_L} \cos(\varphi + N_L\theta) .$$

Par conséquent, la suite (u_n) est positive si et seulement si :

$$A \geq \max \left\{ -2 |B| \left(|\lambda_2| / \lambda_1 \right)^n \cos(\varphi + n\theta) ; \; N_L \leq n \leq N_M \right\} .$$

2.2. Si $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, on a :

$$u_n = \lambda_1^n \left\{ A + 2 |B| \cos(\varphi + n\theta) \right\}$$

la suite (u_n) est positive si et seulement si :

$$A \geq \max \left\{ -2 |B| \cos(\varphi + n\theta) ; \; n \geq 0 \right\} .$$

Envisageons deux cas :
* Si θ est un rationnel multiple de π. D'aprés le lemme (2.9), la suite $(\cos(\varphi + n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique.
C'est-à dire, il existe des réels négatif $C_1, ..., C_m$, tels que la relation(2.13) satisfaite si et seulement si :

$$A \geq \max \left\{ -2 |B| C_1, ..., -2BC_m \right\} \tag{2.13}$$

*Si θ estun multiple irrationnel de π. Toujours, d'aprés le lemme (2.9), la relation(2.13) satisfaite si et seulement si :

$$A \geq 2 |B| .$$

2.3 Si $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, on a :

$$u_n = |\lambda_2^n| \left\{ A\left(\lambda_1 / |\lambda_2|\right)^n + 2|B| \cos(\varphi + n\theta) \right\}.$$

Puisque $A\left(\lambda_1 / |\lambda_2|\right)^n \to 0$, quand $n \to \infty$, et la fonction $\cos(\varphi + n\theta)$ prend des valeurs positives et négatives, alors

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A = B = 0$$

■

2.3 Positivité d'une SRL de l'ordre quatre

Considérons la suite linéaire de la forme

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + a_3 u_{n-3} + a_4 u_{n-4}, \qquad (n \geq 4) \tag{2.14}$$

où $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Le polynôme caractéristique associé à la relation (2.14) est

$$p(x) = x^4 - a_1 x^3 - a_2 x^2 - a_3 x - a_4$$

Théorème 2.3.1 *Le problème de positivité pour les SRL de l'ordre 4 est décidable.*

Remarque 2.3.2 *On sait déja, que le problème de positivité pour les SRL de la forme suivante est décidable :*

Partie I :

$$\begin{cases} \text{(HHH1) } u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n, \quad A, B \in \mathbb{R}; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^\star \\ \text{(HHH2) } u_n = (A + Bn)\lambda^n, \qquad A, B \in \mathbb{R}; \lambda \in \mathbb{R}^\star \\ \text{(HHH3)} u_n = A\lambda^n + \overline{A\lambda}^n, \quad A \in \mathbb{C}; \lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R}. \end{cases}$$

PartieII :

$$\begin{cases} \text{(LT1)} \quad u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n + C\lambda_3^n \ , \ A, B, C \in \mathbb{R}; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}^\star) \\ \text{(LT2)} \quad u_n = (A + Bn + Cn^2)\lambda^n, \quad A, B, C \in \mathbb{R}; \lambda \in \mathbb{R}^\star \\ \text{(LT3) } u_n = A\lambda_1^n + (B + Cn)\lambda_2^n, \ A, B, C \in \mathbb{R}; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^\star \\ \text{(LT4)} \quad u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n + \overline{B}\lambda_2^n, \ B \in \mathbb{C}, \lambda_2 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}, \ A \in \mathbb{R}; \lambda_1 \in \mathbb{R}^\star \end{cases}$$

Preuve. (Preuve du théorème 2.3.1)

1- Supposons que le polynôme caractéristique de relation (2.14 admet une sule racine réelle. Dans ce cas, le terme général de la suite est de la forme

$$u_n = p_1(n)\lambda_1^n + p_2(n)\lambda_2^n + \dots\dots + p_m(n)\lambda_m^n \ ; \ (n \geq 0, m \leq 4),$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ sont des nombres réels distincts non nuls, et on a

$$p_i(n) = A_{i,1} + A_{i,2}n + \dots + A_{i,l_i}n^{l_i-1},$$

avec $\quad l_i \in \mathbb{N},\ i = 1, 2, \dots, m\ ,\ A_{i,l_i} \neq 0\ $ et $\ l_1 + l_2 + \dots + l_m = 4.$
Donc nous avons deux possibilités à envisager.
1.1) Il existe deux racines avec les mêmes valeurs absolues :
Sans perte de généralité, soient $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 = -\lambda_1$. Ici

$$u_n = \{p_1(n) + (-1)^n p_2(n)\}\, \lambda_1^n + p_3(n)\lambda_3^n + \dots + p_m(n)\lambda_m^n \quad ; \quad n \geq 0$$

Autrement dit

$$\begin{aligned} u_{2k} &= (p_1(2k) + p_2(2k))\lambda_1^{2k} + p_3(2k)\lambda_3^{2k} + \dots + p_m(2k)\lambda_m^{2k} \\ u_{2k+1} &= (p_1(2k+1) - p_2(2k+1))\lambda_1^{2k+1} + p_3(2k+1)\lambda_3^{2k+1} + \dots + p_m(2k+1)\lambda_m^{2k+1} \text{ avec } k \geq 0. \end{aligned}$$

La suite (u_n) est positive ou nullle si et seulement si les deux suites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) ne sont pas négatives.
En utilisant la remarque (2.3.2) on déduit le résultat.
1.2) Tous les racines ont des valeurs absolues différentes
Nous avons besoin de ne traiter que le cas où il ya une racine dominant positif, soit $\lambda_1 > 0$.
Sans perte de généralité, supposons $\lambda_1 > |\lambda_2| > |\lambda_4|$.
Ici

$$u_n = \lambda_1^n \{p_1(n) + \dots + p_4(n)(\lambda_4/\lambda_1)^n\} \quad ; \quad n \geq 0$$

et si (u_n) est positive ou nul si et seulement si

$$(p_1(n) + \dots + p_4(n)(\lambda_4/\lambda_1)^n) \geq 0, \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Si $A_{1,l_1} < 0$, alors

$$p_1(n) + \dots + p_4(n)(\lambda_4/\lambda_1)^n < 0,$$

Pour tout n suffisamment grand, et si ce cas est intenable.

Si $A_{1,l_1} > 0$, puisque

$$(p_1(n) + \ldots + p_4(n)(\lambda_4/\lambda_1)^n) \to \infty \quad \text{quand} \quad n \to \infty$$

Alors, il existe $M_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, telle que

$$(p_1(n) + \ldots + p_4(n)(\lambda_4/\lambda_1)^n) \geq 0; \text{pour tout } n \geq M_0$$

2) Lorsque $p(x)$ n'admet pas des racines réelles, les forme possibles des quatre racines sont :
a-Deux paires complexes conjuguées, soit distinctes ou identiques, désignés par $C(Z_1\overline{Z_1}Z_2\overline{Z_2})$.
b-Deux identiques nombres réels et un paire de racine conjugué complexe, notée $C(r_1^2Z\overline{Z})$.
c-Deux nombres réels distincts et une paire ce racine conjuguée complexe, notée $C(r_1r_2Z\overline{Z})$.
Traitement du Problème :a- La première possibilité $C(Z_1\overline{Z_1}Z_2\overline{Z_2})$ est décidable (Voir proposition 2.1 Bell-Gerhod [1]).
b-Cas $C(r_1^2Z\overline{Z})$: Dans ce cas, le terme général de la suite est donné par

$$u_n = (A + Bn)\lambda_1^n + C\lambda_2^n + \overline{C\lambda_2}^n \ ; \quad (n \geq 0),$$

où $A, B, \lambda_1 \in \mathbb{R}^\star, C \in \mathbb{C}, \lambda_2 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.
D'aprés ce qui précide, nous devons traiter le cas où la suite de terme général u_n ayant une racine dominant positif. Soit $\lambda_1 > 0$.
Il ya deux possibilités :
b-1 **:**$\lambda_1 = |\lambda_2|$. Nous avons

$$u_n = \lambda_1^n(A + Bn + 2\,|C|\cos(\varphi + n\theta)) \qquad n \geq 0$$

suite (u_n) donc est positive ou nulle si et seulement si

$$A \geq -Bn - 2\,|C|\cos(\varphi + n\theta)); \text{ pour tout } n \geq 0 \tag{2.15}$$

• $B < 0$, alors (2.15) ne peut pas être positive.
Si $B = 0$**,** alors

$$u_n = A\lambda_1^n + C\lambda_2^n + \overline{C\lambda_2}^n$$

est de la forme (LT4). Donc notre probléme est bien décidable
Si $B > 0$. Puisque

$$-Bn - 2\,|C|\cos(\varphi + n\theta) \to -\infty \quad (n \to \infty).$$

Alors il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ dépendant de B, C, φ, θ, tel que

$$\max_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \{-Bn - 2|C|\cos(\varphi + n\theta)\} = -BN_0 - 2|C|\cos(\varphi + N_0\theta).$$

Par conséquent, la suite (u_n) est positive ou nul si et seulement si

$$A \geq -BN_0 - 2|C|\cos(\varphi + N_0\theta)$$

**b-2 $\lambda_1 > |\lambda_2|$. Dans ce cas

$$u_n = \lambda_1^n \{A + Bn + 2|C|(|\lambda_2|/\lambda_1)^n \cos(\varphi + n\theta)\}; \quad n \geq 0.$$

Puisque

$$sign(A + Bn + 2|C|(|\lambda_2|/\lambda_1)^n \cos(\varphi + n\theta)) = sign(B),$$

Lorsque n assez grand .Pour la suite (u_n) à être non négative, nous devons avoir

$$B \geq 0,$$

et

$$A \geq -Bn - 2|C|(|\lambda_2|/\lambda_1)^n \cos(\varphi + n\theta); \quad n \geq 0.$$

D'après le lemme (2.2.3), il existe un minimum $N_L \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ telle que

$$\cos(\varphi + N_L\theta) < 0.$$

Puisque $(|\lambda_2|/\lambda_1)^n \to 0, n \to \infty$, alors il existe $N_M > N_L$ tel que, pour tous $n \geq N_M$, nous avons

$$-2|C|(|\lambda_2|/\lambda_1)^n \cos(\varphi + n\theta) < -2|C|(|\lambda_2|/\lambda_1)^{N_L} \cos(\varphi + N_L\theta).$$

Par conséquent, la suite(u_n) est non négative si, et seulement si

$$B \geq 0,$$

et

$$A \geq \max\{-Bn - 2|C|(|\lambda_2|/\lambda_1)^n \cos(\varphi + n\theta)\}; N_l \leq n \leq N_M$$

c-$C(r_1r_2Z\overline{Z})$: Dans ce cas, le terme général de la suite est de la forme

$$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n + C\lambda_3^n + \overline{C\lambda_3}^n \quad ; \; n \geq 0,$$

où $A, B, \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{C}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^\star$ et $\lambda_3 \in \mathbb{C}{-}\mathbb{R}$.
$\lambda_3 = |\lambda_3| \exp(i\theta), C = |C| \exp(i\varphi)$,telles que $\theta, \varphi \in [-\pi, \pi), \theta \notin \{\pi, 0\}$, alors

$$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n + 2\,|C|\,|\lambda_3^n| \cos(\varphi + n\theta)$$

il suffit de décider de la situation où $p(x)$ a une racine dominant positive. Soit par exemple $\lambda_1 > 0$, et ainsi $\lambda_1 > \max\{|\lambda_2|\,, |\lambda_3|\}$. Il ya trois possibilités :
Les trois racines ont les mêmes valeurs absolues.
Tous les trois racines λ_1, λ_2 et λ_3 ont des valeurs absolues différentes.
existe exactement deux λ_i ayant la même valeur absolue.
Pour le cas c.1 : i.e $\lambda_1 = |\lambda_2| = |\lambda_3|$.Ici $0 < \lambda_1 = -\lambda_2 = |\lambda_3|$. Le terme de la suite est de la forme

$$u_n = (A + (-1)^n B)\lambda_1^n + C\lambda_3^n + \overline{C\lambda_3}^n \quad ; \qquad n \geq 0$$

C'est-a-dire

$$\begin{aligned} u_{2k} &= (A + B)\lambda_1^{2k} + C\lambda_3^{2k} + \overline{C\lambda_3}^{2k} \\ u_{2k+1} &= (A - B)\lambda_1^{2k+1} + C\lambda_3^{2k+1} + \overline{C\lambda_3}^{2k+1} \;;\; k \geq 0. \end{aligned}$$

Les deux suite (u_{2k}) et (u_{2k+1}) sont décidables parce qu'ils sont de la forme (LT4) . c.2 : Les trois racines λ_1, λ_2et λ_3 ont des valeurs absolues strictement différentes dans ce cas

$$u_n = \lambda_1^n (A + B(|\lambda_2|/\lambda_1)^n + 2\,|C|\,(|\lambda_3|/\lambda_1)^n \cos(\varphi + n\theta)) \quad ; \quad n \geq 0$$

La suite(u_n) est positive ou nul si et seulement si

$$(A + B(|\lambda_2|/\lambda_1)^n + 2\,|C|\,(|\lambda_3|/\lambda_1)^n \cos(\varphi + n\theta)) \geq 0; \;\; \text{pour tout} \;\; n \geq 0 \tag{2.16}$$

*Si $A = 0$, alors

$$u_n = B\lambda_2^n + C\lambda_3^n + \overline{C\lambda_3}^n \;;\; \text{ avec } \qquad n \geq 0,$$

qui est de la forme (LT 4).
$A < 0$, alors

$$A + B(\lambda_2/\lambda_1)^n + 2\,|C|\,(|\lambda_3|/\lambda_1)^n \cos(\varphi + n\theta) \to A \quad ; \quad n \to \infty$$

Ce qui montre que (2.16) est impossible .
$A > 0$, il existe un entier$N_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tel que (2.16) est vraie pour tous $n \geq N_0$.
c.3 $\lambda_1 = |\lambda_2|$ ou $\lambda_1 = |\lambda_3|$ ou $\lambda_2 = |\lambda_3|$.
*Si $\lambda_1 = |\lambda_2| = -\lambda_2 > |\lambda_3|$. Ici

$$u_n = (A + (-1)^n B)\lambda_1^n + C\lambda_3^n + \overline{C\lambda_3}^n \ ; \ n \geq 0$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} u_{2k} &= (A + B)\lambda_1^{2k} + C\lambda_3^{2k} + \overline{C\lambda_3}^{2k} \ ; \ k \geq 0 \\ u_{2k+1} &= (A - B)\lambda_1^{2k+1} + C\lambda_3^{2k+1} + \overline{C\lambda_3}^{2k+1}; \qquad k \geq 0. \end{aligned}$$

Les suites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) sont à la fois décidable parce qu'ils sont de la forme (LT4).
*$\lambda_1 > |\lambda_2| = |\lambda_3| > 0$.
**Si $\lambda_2 > 0$, alors $|\lambda_2| = |\lambda_3| = \lambda_2$ et on a

$$\begin{aligned} u_n &= A\lambda_1^n + (B + 2\,|C| \cos(\varphi + n\theta))\lambda_2^n \\ &= \lambda_1^n (A + (B + 2\,|C| \cos(\varphi + n\theta))(|\lambda_2| / \lambda_1)^n) \end{aligned} \tag{2.17}$$

Puisque

$$(B + 2\,|C| \cos(\varphi + n\theta))(\lambda_2/\lambda_1)^n \to 0 \ ; \quad n \to \infty$$

Alors, soit

$$-(B + 2\,|C| \cos(\varphi + n\theta))(\lambda_2/\lambda_1)^n < 0\,; \quad \text{pour tout } n \geq 0,$$

ou il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ telle que

$$-(B + 2\,|C| \cos(\varphi + N_1\theta))(\lambda_2/\lambda_1)^{N_1} = \max_{n \geq 0} \{-(B + 2\,|C| \cos(\varphi + n\theta))(\lambda_2/\lambda_1)^n\} \geq 0,$$

La suite (u_n) est donc non négative si et seulement si

$$A \geq \max_{n \geq 0} \left\{0, -(B + 2\,|C| \cos(\varphi + N_1\theta))(\lambda_2/\lambda_1)^{N_1}\right\}$$

**Si $\lambda_2 < 0$, alors $|\lambda_2| = |\lambda_3| = -\lambda_2$ et on a

$$u_n = A\lambda_1^n + ((-1)^n B + 2\,|C| \cos(\varphi + n\theta))\,|\lambda_3|^n$$

Les deux sous suites correspondant sont donnés par

$$\begin{aligned} u_{2k} &= A\lambda_1^{2k} + (B + 2|C|\cos(\varphi + 2k\theta))|\lambda_3|^{2k} & ; k \geq 0 \\ u_{2k+1} &= A\lambda_1^{2k+1} + (-B + 2|C|\cos(\varphi + (2k+1)\theta))|\lambda_3|^{2k+1} & ; \ k \geq 0 \end{aligned}$$

sont de la forme (2.17).

*$\lambda_1 = |\lambda_3| > |\lambda_2| > 0$, alors

$$u_n = \lambda_1^n(A + 2|C|\cos(\varphi + n\theta)) + B(\lambda_2/\lambda_1)^n)$$

La suite (u_n) est non négative si et seulement si

$$(A \geq -2|C|\cos(\varphi + n\theta)) - B(\lambda_2/\lambda_1)^n) \quad n \geq 0 \tag{2.18}$$

$-$Si θ est un rationnel multiple de π. Soit $\theta = s\pi/t$, où $(s, t > 0) \in \mathbb{Z} - \{0\}$ et $\gcd(s,t) = 1$. D'aprés le lemme (2.2.3), $\cos(\varphi + n\theta)$ est périodique et prend au maximum $2t$ valeur distinct (positive et négative).

Puisque $-B(|\lambda_2|/\lambda_1)^n \to 0$ lorsque $n \to \infty$, (2.18) tient si et seulement si

$$A \geq \begin{cases} -2c_t|C| & \text{si} \quad B = 0 \quad \text{ou} \quad B > 0,\ \lambda_2 > 0 \\ \max\limits_{n=0,1,\ldots,2t-1}\{-2|C|\cos(\varphi + n\theta)) - B(\lambda_2/\lambda_1)^n \ \} \end{cases}$$

Si θ est irrationnel de π. Nous avons

$$u_n = |\lambda_2|^n \{(A + 2|C|\cos(\varphi + n\theta))(\lambda_1/|\lambda_2|)^n + B(\lambda_2/|\lambda_2|)^n\}$$

La suite (u_n) est non négative si et seulement si

$$(A + 2|C|\cos(\varphi + n\theta))(\lambda_1/|\lambda_2|)^n + B(\lambda_2/|\lambda_2|)^n \geq 0 \ ; \ n \geq 0 \tag{2.19}$$

Si $C = 0$, alors

$$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n,$$

qui est de la forme (HHH1).

Supposons désormais que $C > 0$.

a) Si $A \leq 0$, puisque les valeurs de $\cos(\varphi + n\theta)$ sont denses dans l'intervalle fermé $[-1, 1]$,et que$(\lambda_1/|\lambda_2|)^n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$, il existe $N_L \in \mathbb{N}$ telque

$$(A + 2|C|\cos(\varphi + N_L\theta))(\lambda_1/|\lambda_2|)^{N_L} + B(\lambda_2/|\lambda_2|)^{N_L} < 0,$$

et la relation (2.19) est impossible.

b) Si $0 < A < 2|C|$. On pose $2|c| - A = \Delta > 0$. Alors

$$(A+2\,|C|\cos(\varphi+n\theta))(\lambda_1/\,|\lambda_2|)^n+B(\lambda_2/\,|\lambda_2|)^n \quad = (2\,|C|\,(1+\cos(\varphi+n\theta))-\Delta)(\lambda_1/\,|\lambda_2|)^n+B(\lambda_2/\,|\lambda_2|)^n \tag{2.20}$$

Prenons une sous suite (n_k) pour laquelle $\cos(\varphi+n_k\theta) \to -1$, quand $k \to \infty$. L'expression (2.20) tend vers $-\infty$, quand k tend vers $+\infty$.
Ce qui montre que (2.19) est impossible.

c) Si $A > 2|c| > 0$. On pose $\delta = A - 2\,|C| > 0$. Puisque

$$(A+2\,|C|\cos(\varphi+n\theta))(\lambda_1/\,|\lambda_2|)^n+B(\lambda_2/\,|\lambda_2|)^n \geq \delta(\lambda_1/\,|\lambda_2|)^n+B(\lambda_2/\,|\lambda_2|)^n \to \infty \quad ; n \to \infty$$

il ya une moins un entier$N_0 \in \mathbb{N}$, dépendant de $A, B, C, \varphi, \theta, \lambda_1, \lambda_2$, tel que

$$(A + 2\,|C|\cos(\varphi + n\theta))(\lambda_1/\,|\lambda_2|)^n + B(\lambda_2/\,|\lambda_2|)^n \geq 0,$$

pour tout $n \geq N_0$.

d) Si $A = 2|C|$, alors (2.19) devient

$$(2\,|C|\,(1 + \cos(\varphi + n\theta)) - \Delta)(\lambda_1/\,|\lambda_2|)^n + B(\lambda_2/\,|\lambda_2|)^n \geq 0 \quad n \geq 0 \tag{2.21}$$

Nous nous arrêtons pour prouver deux revendications importantes. ■

Corollaire 2.3.3 *Il existe au maximum un entier naturel N_0, telle que*

$$1 + \cos(\varphi + N_0\theta) = 0 \tag{2.22}$$

Preuve. Supposons le contraire, il existe N_0 et N_0', alors il existe deux entiers k_0, k_0' tels que

$$\begin{aligned} \varphi + N_0\theta &= (2k_0 + 1)\pi \\ \varphi + N_0'\theta &= (2k_0' + 1)\pi \end{aligned}$$

soustrayant les deux équations, nous trouvons que θ est un multiple de π, qui est une contradiction. ■

Corollaire 2.3.4 *Si $(n_k) \subset \mathbb{N}$ est une suite croissante, tels que*

$$1 + \cos(\varphi + n_k\theta) \to 0 \; ; \quad k \to \infty$$

Alors

$$2\left|C\right|(1+\cos(\varphi+n_k\theta))(\lambda_1/\left|\lambda_2\right|)^{n_k}+B(\lambda_2/\left|\lambda_2\right|)^{n_k}\to\infty \ ; \qquad k\to\infty$$

Preuve. Le résultat se déroule à l'aide du corolaire (2.3.3), et de théorème de l'Hôpital.
En revenant à (2.19), s'il existe $N_0\in\mathbb{N}$ telle que (2.22) soit vérifiée.
Alors (2.19) est satisfait si et seulement si $B(\lambda_2/\left|\lambda_2\right|)^{N_0}\geq 0$.
De plus, l'utilisation du corrolaire (2.3.4) et le fait que pour n assez grand, les valeurs de$1+\cos(\varphi+n\theta)$ sont positives et bornées par1, on en déduit que

$$2\left|C\right|(1+\cos(\varphi+n\theta))(\lambda_1/\left|\lambda_2\right|)^{n}+B(\lambda_2/\left|\lambda_2\right|)^{n}\to\infty \ ; \qquad n\to\infty$$

Ainsi, il existe un plus petit entier$N_1\in\mathbb{N}$ explicitement calculable, en fonction de $A,B,C,\varphi,\theta,\lambda_1,\lambda_2$, de telle sorte que

$$2\left|C\right|(1+\cos(\varphi+n\theta))(\lambda_1/\left|\lambda_2\right|)^{n}+B(\lambda_2/\left|\lambda_2\right|)^{n}\geq 0\ , \text{ pour tout } \qquad n\geq N_1$$

■

Conclusion 2.3.5 *Le Problème pour les suites récurrentes linéaires de l'ordre inférieur ou égal à quatre est décidable. C'est-à-dire on peut faire un algorithme qui permet de résoudre ce problème.*

Bibliographie

[1] Bell, J. P. and S. Gerhold. 2007. On the positivity set of a linear recurrence sequence. Israel J. Math. 157 : 333-345.

[2] Burke, J. R. and Webb, W. A., 1981, Asymptotic behavior of linear recurrences. Fibonacci Quart. 19, 318-321.

[3] Halava, V., T. Harju and M. Hirvensalo. 2006. Positivity of second order linear recurrent sequences. Discrete Appl. Math. 154 : 447-451

[4] Halava, V., T. Harju, M. Hirvensalo and J. Karhumaki. 2005. Skolem's problem. On the border between decidability and undecidability. TUCS. Technical Report 683.

[5] Gerhold, S. 2005. Point lattices and oscillating recurrence sequences. J. Differ. Equations Appl. 11(6) : 515-533.

[6] Pinthira Tangsupphathawat. 2009. Positivity and Periodicity of Linear Recurrence Relation. Kasetsart University, Thailand.

[7] Nagasaka, K. and Shiue, J., 1990, Asymptotic positiveness of linear recurrence sequences. Fibonacci Quart. 28, no. 4, 340-346.

[8] Schultz, P. 1977. Mortality of $2 \times 2 matrices.Amer.Math.Monthly 84 : 463 - 464$.

[9] P. Tangsupphathawat, N. Punnim and V. Laohakosol, The positivity problem for fourth order linear recurrence sequences is decidable, Colloq. Math. 128(2012), 133-142.

Résumé

Dans ce travail on va étudier le problème de positivité d’une suite récurrente linéaire d’ordre inferieur ou égale à quatre.

Ce travail comporte deux chapitres. Il est structuré de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, on introduit les éléments nécessaires pour une bonne compréhension du problème qui sera étudié. Nous rappelons quelques principes et résultats fondamentaux de la théorie des suites récurrentes linéaires, notamment le théorème d’existence et l’unicité concernant la solution des suites récurrentes linéaires.

Le deuxième chapitre vise à donner une méthode simple qui permet de résoudre notre problème de positivité .

ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة مشكلة إيجابية متتالية تراجعية خطية رتبتها أقل أو تساوي أربعة.

هذا العمل يحتوي على فصلين. ويتمحورعلى النحو التالي:

في الفصل الأول، نقدم بعض المفاهيم الضرورية من اجل الفهم الجيد للمشكلة المراد دراستها. نذكر بعض المبادئ و النتائج الأساسية المتعلقة بالمتاليات التراجعية الخطية، على سبيل الخصوص نظرية الوجود و الوحدانية لحل متتالية تراجعية خطية.

في الفصل الثاني سنقوم بإعطاء طريقة بسيطة لحل مشكلة إيجابية متتالية تراجعية خطية.

Abstract

The purpose of this work is to study the positivity problem of a linear recurring sequence of degree less than or equal to four.
This work contains two chapters. It is structured as follows:
In the first chapter, we introduce the necessary elements for a good comprehension of the problem to be studied. We recall some basic principles and results of the theory of linear recurring series, including the existence theorem for the solution of linear recurrent sequences.
In the second chapter we shall provide the decidability problem. We shall give a simple method to solve our positivity problem.