

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



N° Réf :.....

Centre Universitaire de Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master
en: - Filière mathématiques fondamentales
- Spécialité mathématiques fondamentales et appliquées

*Étude des bifurcations locales dans
quelques systèmes dynamiques*

Préparé par : *Benbouda Amel*
Bendjeddou Meriem

Soutenue devant le jury :

Président *Mr. Nasr-Eddine Hamri*

Grade PROFESSEUR

Examineur *Mr. Rabeh Boueden*

Grade M. A. A

Promoteur *Mr. Abdelouahab Mohamed Salah*

Grade DOCTEUR

Année universitaire : 2013/2014



Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et le miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce Modeste travail.

Nous tenons à saisir cette occasion et adresser nos profonds remerciements et nos profondes reconnaissances à nos Parents.

Un remerciement particulier à notre encadreur Mr : M. S. Abdelouahab pour sa présence, ses précieux conseils et son aide durant toute la période du travail.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury Mr : Nasr-Eddine Hamri et Mr : Bouedene Rabeih pour l'honneur qu'il nous ont accordé en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Enfin, nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.





Dédicace

*Merci Allah (mon dieu) de m'avoir donné la
capacité d'écrire et de réfléchir, la
force d'y croire, la patience d'aller jusqu'au bout du
rêve et le bonheur
de lever mes mains vers le ciel et de dire " *Ya
Kayoum* "*

*Je dédie ce modeste travail à celle qui m'a donné la
vie, le symbole de tendresse, qui s'est sacrifiée pour mon
bonheur et ma réussite, à ma mère
A mon père, école de mon enfance, qui a été mon
ombre durant toutes les années des études, et qui a
veillé tout au long de ma vie
à m'encourager, à me donner l'aide et à me protéger.*

Que dieu les gardes et les protèges.

*A mes adorables sœurs *Imene* et *Marwa*.*

*A mon adorable petit frère *Abderrahmane*.*

A tous mes amies.

A tous ceux qui me sont chères.

A tous ceux qui m'aiment.

A tous ceux que j'aime





Dédicace

Je dédie ce travail à tous qui ont de près et de loin m'ont accordé leur soutien moral et physique pour la réalisation de ce mmoire.

Mes chers parents, pour leurs soutiens durant toutes mes études. Les mots me manquent pour vous qualifier, tout ce que j'aurais à dire ne saurait, exprimer à fond tout le sacrifice et l'endurance que vous avez du subir pour m'élever. Je vous demande pardon et vos bénédictions nuits et jours. Je ne saurais jamais vous remercier assez. Seul Dieu peut vous gratifier de tout ce que vous avez fait pour moi. Que Dieu le tout puissant vous accorde longue vie, bonne santé et bonheur à nos cotes et qu'il puisse me donner les moyens nécessaires pour affronter les épreuves de la vie ; AMEN !

Mes frères : Sihem, Mouna, Mounir, Issam, Oussama, Manel et la fille de ma sœur Ritage : Mon affection pour vous est sans limite, votre soutien a sans doute été important pour le bon déroulement de mes études. Soyez en remerciés.

Mes oncle : mohemad, djamel, abde algani, brahim, kamel et ma tous famille pour vos conseils, vos encouragements, vos gentilleses et vos sollicitudes.

Tous mes Amis , et à tous ceux qui m'ont aidé à faire ce projet dans les meilleures conditions, trouveront ici l'expression de mon profond respect
A tous les militants d'UGEL Mila et UGEL Setif et
HMOS



Amel



Étude des bifurcations locales dans quelques systèmes dynamiques

Bendjeddou Meriem et Benbouda Amel

Mai 2014

Table des matières

Introduction générale	5
1 Systèmes dynamiques	7
1.1 Notions de système dynamique	7
1.1.1 Portrait de phase	8
1.1.2 Flot	8
1.1.3 Systèmes autonomes et Systèmes non-autonomes	9
1.1.4 Systèmes conservatifs et Systèmes dissipatifs	9
1.1.5 Points fixes	11
1.1.6 Ensembles limites	11
1.1.7 Attracteurs	11
1.2 Résolutions Numériques des équations différentielles :	13
2 Stabilités	16
2.1 Notions de stabilité	16
2.2 La stabilité d'un système linéaire dans \mathbb{R}^2 :	17
2.2.1 Typologie des solutions des systèmes linéaires dans le plan (tr,det)	21
2.3 La stabilité d'un système non linéaire :	23
2.4 Stabilité dans le cas du temps discret	26
3 Bifurcations	27
3.1 Stabilité structurelle	27
3.2 Bifurcations locales	28
3.3 Bifurcation de codimension un :	29
3.3.1 La valeur numérique du paramètre de bifurcation Hopf	41
4 Applications	43
4.1 Diagramme de bifurcation	43
4.2 Application Logistique	44

4.2.1	Historique de l'application logistique	45
4.3	Système Financier	47
4.3.1	Etude d'un système financier	47
	Conclusion	57
	Annexe	58
	Bibliographie	64

Table des figures

1.1	Attracteurs réguliers	12
1.2	Attracteurs étrange de Lorenz	13
2.1	Les types de stabilité	17
2.2	Point selle	18
2.3	Centre	19
2.4	Foyer stable	19
2.5	(a) Noeud instable, (b) Noeud stable	20
2.6	Résumé des différents portraits de phase possibles du système $\dot{x} = Ax$, en fonction du signe de la trace et du déterminant de la matrice A	21
3.1	Convention graphique	28
3.2	Portrait de phase de la bifurcation noeud-col	29
3.3	Diagramme de bifurcation noeud-col	30
3.4	Portrait de phase de la bifurcation transcritique	31
3.5	Diagramme de bifurcation transcritique	32
3.6	Portrait de phase de la bifurcation fourche $c < 0$	33
3.7	Portrait de phase de la bifurcation fourche $c = 0$	34
3.8	Portrait de phase de la bifurcation fourche $c > 0$	35
3.9	Diagramme de la bifurcation fourche super-critique	36
3.10	Diagramme de bifurcation de fourche sous-critique	36
3.11	Bifurcation Hopf super-critique	38
3.12	Bifurcation Hopf super-critique dans l'espace de phase paramétrique	38
3.13	Bifurcation Hopf sous-critique	39
3.14	Bifurcation Hopf sous-critique dans l'espace de phase paramétrique	39
3.15	Bifurcation Hopf dans le système linéaire	41
4.1	Exemple de diagramme de bifurcation	44
4.2	Diagramme de bifurcation de l'application logistique	46

4.3	Solution et diagramme de bifurcation du système financier cas $a = 8.9$. . .	51
4.4	Solution du système financier cas $a = 8.8$	51
4.5	Solution du système financier cas $a = 8.4$	52
4.6	Solution du système financier cas $a = 8.1$	52
4.7	Solution du système financier cas $a = 7.9$	53
4.8	Solution du système financier cas $a = 7.366$	53
4.9	Solution du système financier cas $a = 6.98$	54
4.10	Solution du système financier cas $a = 5.87$	54
4.11	Solution du système financier cas $a = 1$	55
4.12	Diagramme de bifurcation fourche	55
4.13	Diagramme de bifurcation du système financier	56

Introduction générale

Les systèmes dynamiques ont été développés au cours du 19^{ème} siècle et Maintenant, les systèmes dynamiques sont utilisés dans de très nombreux domaines : géophysique, biologie, économie, médecine...

Un système dynamique autonome est un ensemble d'objets ou de phénomènes liés entre eux et isolés artificiellement du monde extérieur. Sa modélisation vise à établir les relations qui lient les variables caractéristiques de ce processus entre elles et à représenter rigoureusement son comportement dans un domaine de fonctionnement donné [10].

Un système dynamique possède en général un ou plusieurs paramètres dits « de contrôle », qui agissent sur les caractéristiques des fonctions. Selon la valeur du paramètre de contrôle, les mêmes conditions initiales mènent à des trajectoires correspondant à des régimes dynamiques qualitativement différents. La modification continue du paramètre de contrôle peut conduire à une modification de la nature des régimes dynamiques développés dans le système. Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage du point fixe au chaos. On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est pas progressive, mais marquée par des changements discontinus appelés bifurcations. Une bifurcation marque le passage soudain d'un régime dynamique à un autre, qualitativement différent. On parle également, lors d'une telle transition, d'une perte de stabilité structurelle. La route vers le chaos par quasi-périodicité, dite à la Ruelle et Takens (1971), est un des scénarios génériques marquant le passage du point fixe au chaos. Elle met en jeu une série de bifurcations menant à des dynamiques de plus en plus complexes.

Donc pour l'étude mathématique des systèmes dynamiques on applique souvent la théorie de bifurcation.

La bifurcation se produit quand un petit changement rapportée en douceur aux valeurs des paramètres (les paramètres de contrôle) d'un système dynamique provoque brusquement un changement "qualitatif" dans son comportement. Les bifurcations se produisent

dans les deux systèmes continus et discrets. Le nom de "bifurcation" a été introduit par Henri Poincaré en 1885 dans le premier document en mathématiques montrant un tel comportement. Henri Poincaré également nommé plus tard les différents types de points fixes et les classer [27].

La bifurcation est l'une des plus récentes notions dégagées par les mathématiciens et dont la signification est très intéressante.

L'intérêt de la théorie des bifurcations réside dans le fait qu'elle fournit des informations sur le comportement d'un modèle non-linéaire et contribue à l'analyse de ses propriétés qualitatives et de leurs changements aux valeurs critiques [25].

Ce mémoire est constitué d'une introduction et de quatre chapitres. On rappelle dans le premier chapitre quelques notions de système dynamique et on le termine par la résolution numérique des équations différentielles.

Dans le second chapitre on présente des notions de stabilité et nous étudions la stabilité des systèmes linéaires et non linéaires, à la fin on donne quelques définitions sur la stabilité dans le cas du temps discret.

On consacre le troisième chapitre pour la bifurcation locale et ces quatre types de codimension un. En fin, on termine notre travail par un chapitre consacré à l'application des outils théoriques précédentes.

Chapitre 1

Systèmes dynamiques

Ce chapitre se consacre aux notions de système dynamique (portrait de phase, flot, système autonomes et non-autonomes,...) et aux résolutions numériques des équations différentielles.

1.1 Notions de système dynamique

Un système dynamique est un système classique qui évolue au cours du temps de façon à la fois :

Causale : c-à-d que son avenir ne dépend que des phénomènes de passé ou du présent.

Déterministe : c-à-d qu'à une condition initiale donnée à l'instant présent va correspondre à chaque instant ultérieur un et un seul état futur possible.

Un système dynamique consiste en un ensemble d'états possibles, avec une loi qui détermine de façon unique l'état présent du système en fonction de ses états passés.

Nous considérons deux types de systèmes dynamiques. Si la loi est appliquée à des temps discrets, nous parlerons de système dynamique à temps discret.

Dans le cas, où la loi devient une équation différentielle on parle alors de système dynamique à temps continu.

Soit un système d'équations différentielles de la forme continu :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x, t, v), \quad x \in U \subseteq \mathbb{R}^n, v \in V \subseteq \mathbb{R}^p \quad (1.1)$$

où $t \in U \subseteq \mathbb{R}_+$ est le temps, $x : t \in I \rightarrow x(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^n$, le vecteur d'état du système (1.1), \mathbb{R}^n est l'espace des phases, et $v \in V \subseteq \mathbb{R}^p$ est le vecteur de paramètres et f une application de classe $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$.

Soit un système d'équations différentielles (système dynamique discret) :

$$x_{k+1} = f(x_k, v), \quad x \in U \subseteq \mathbb{R}^n, v \in V \subseteq \mathbb{R}^p, k = 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

où $k \in \mathbb{N}$ représente le temps discrétisé, $x_k \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ le vecteur d'état du système (1.2), \mathbb{R}^n est l'espace des phases, et $v \in V \subseteq \mathbb{R}^p$ est un vecteur de paramètres. L'application f étant de classe C^1 .

L'équation différentielle admet une solution maximale unique. Une conséquence fondamentale de ce résultat est qu'il ne peut passer qu'une trajectoire par un point donné x_0 de l'espace des phases.

1.1.1 Portrait de phase

Le portrait de phase d'un système dynamique est une représentation graphique de plusieurs trajectoires représentatives dans l'espace des phases. Etant donné un système dynamique, $\dot{x} = F(x, t)$, sans résoudre les équations, on peut toujours, à un instant t donné, représenter graphiquement (à l'aide de flèches) le champ des \dot{x} (le champ des vitesses si x sont des coordonnées). La lecture de cette représentation graphique sera très utile pour avoir une idée du comportement du système.

1.1.2 Flot

Définition 1.1.1 *On appelle flot du système dynamique la famille d'applications*

$$\{\phi_t : x_0 \in U \rightarrow x(x_0, t), t \geq 0\}.$$

Autrement dit, étant donné un point (matériel) x de l'espace des phases, le flot du système permet de préciser la position $\phi_t(x)$ du point x après un déplacement d'une durée t .

Le flot d'un système dynamique est un point de vue global et géométrique sur les équations différentielles.

Pour t fixé, le flot est représentatif de la manière dont l'application $x(t, x_0)$ fait évoluer un ensemble donné de points x_0 dans l'espace des phases.

Loi du flot Si $t_1, t_2, t_1 + t_2 \in]t - T, t + T[$, on a $\phi(x, t_1 + t_2) = \phi(\phi(x, t_1), t_2)$.

En effet $\phi(x, t_1 + t_2)$ et $\phi(\phi(x, t_1), t_2)$ sont des solutions de l'équation différentielle et coïncident pour $t = 0$.

Ainsi on peut passer facilement du système dynamique continu au discret par l'intégration

$$x_{k+1} = x_k + \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} F(x, t) dt$$

telque l'application x sur x est une application au temps τ .

1.1.3 Systèmes autonomes et Systèmes non-autonomes

Lorsque la variable libre t apparaît explicitement dans l'expression de f , le système est dit non-autonome.

On peut toujours transformer un système non-autonome en système autonome (où t n'apparaît pas explicitement), en posant par exemple :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= t \\ \dot{x}_{n+1} &= f_{n+1}(x, v) = 1 \end{aligned}$$

On augmente ainsi la dimension du système d'une unité, mais cela permet de remplacer systématiquement t dans les équations par x_{n+1} .

1.1.4 Systèmes conservatifs et Systèmes dissipatifs

Chez les physiciens, un système conservatif est un système qui conserve l'énergie totale, par contre un système dissipatif est un système qui dissipe de l'énergie. Donc le premier possède une intégrale première (ou constante) du mouvement, et l'autre possède au moins un terme dépendant de la vitesse. les systèmes considérés sont des systèmes déterministes, et pour préciser cette définition, on dit qu'un système déterministe est conservatif, si et seulement si la dynamique du système associée à chaque condition initiale x_0 correspond un et un seul état final $x(t)$, il faut pour cela qu'il existe une application bijective ϕ de l'espace des phases :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi : E \times \mathbb{R} \rightarrow E \\ (x, t) \mapsto \phi_t(x) = \phi(x, t) \end{array} \right.$$

Si le système n'est pas conservatif (dissipatif) le flot ϕ n'est pas bejectif et il existe en générale un ou plusieurs attracteurs dans l'espace de phase du système.

Définition 1.1.2 *Un système hamiltonien à $2n$ degrés de liberté est un système d'équa-*

tions différentielles de la forme

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

où $H = H(p, q, t)$ est une fonction appelée le hamiltonien. Tout système conservatif peut se mettre sous forme d'un système hamiltonien, les variables p_i sont appelées coordonnées d'espace généralisées, et q_i les coordonnées de moments généralisées.

Lorsque $H(p, q, t) = H(p, q)$ ne dépend pas explicitement du temps, mais seulement de p et q , le hamiltonien H ne varie pas (du tout) au cours du temps, sur une même trajectoire :

$$\begin{aligned} \dot{H}(p, q, t) &= \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=0}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \sum_{i=0}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i \\ &= \frac{\partial H}{\partial t} - \sum_{i=0}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{i=0}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ &= \frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned}$$

de sorte que si $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ alors $\dot{H} = 0$.

Proposition 1.1.3 Si $\dot{X} = F(X)$, $X \in \mathbb{R}^{2n}$ est un système dynamique conservatif alors

$$\nabla F = \sum_{1 \leq k \leq 2n} \frac{\partial F_k}{\partial X_k} = 0$$

Preuve. On met le système sous forme hamiltonienne $F = \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}, -\frac{\partial H}{\partial p_i} \right)$, où $\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}$, $\dot{q}_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i}$ et on obtient $\nabla F = \text{div} F = \sum_i \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial}{\partial q_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial p_i} \right) = 0$. ■

Exemple 1.1.4 On considère le système d'équations différentielles du mouvement d'une masse m dans le champ de gravitation d'une masse M :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -M \frac{x}{r^3} \\ \ddot{y} &= -M \frac{y}{r^3} \end{aligned}$$

avec $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ montrons que le système est hamiltonien, les variables conjuguées sont $q = (x, y)$ et $p = (m\dot{x}, m\dot{y})$, le hamiltonien est encore l'énergie :

$$H(p, q) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) - \frac{mM}{(q_x^2 + q_y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{dH}{dq_i} = \begin{cases} mMq_x(q_x^2 + q_y^2)^{-\frac{3}{2}} \\ mMq_y(q_x^2 + q_y^2)^{-\frac{3}{2}} \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{dH}{dp_i} = \begin{cases} -\frac{1}{m}p_x \\ -\frac{1}{m}p_y \end{cases}$$

1.1.5 Points fixes

Définition 1.1.5 *Un point fixe (ou critique ou singulier, ou point stationnaire) de l'équation $\dot{x} = F(x)$ est un point \bar{x} de l'espace des phases vérifiant $F(\bar{x}) = 0$.*

Par un changement de variable $z = x - \bar{x}$ on peut ramener le point d'équilibre \bar{x} à l'origine (0).

1.1.6 Ensembles limites

considérons le système dynamique

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

(F de classe C^r , $r \geq 1$) On notera $\phi_t(\cdot)$ le flot correspondant : $\phi_t(x) =$ l'unique solution du système passant par x en $t = 0$.

Définition 1.1.6 *Un point $a \in I$ est un point ω - limite d'une trajectoire $x(x_0, t)$ s'il existe une suite $t_n \rightarrow +\infty$ tel que : $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{t_n}(x_0) = a$ où ϕ_{t_n} est le flot du système $\frac{dx}{dt} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in C^k(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}^n$, et $x(x_0, t)$ est une solution de ce système avec $x(0) = x_0$.*

Définition 1.1.7 *Un point $b \in I$ est un point α - limites d'une trajectoire $x(x_0, t)$ s'il existe une suite $t_n \rightarrow +\infty$ tel que : $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{t_n}(x_0) = b$.*

Définition 1.1.8 *L'ensemble des points α - limites (resp ω - limite) est désigné par $\alpha(x)$ (resp $\omega(x)$), et on définit l'ensemble limite de $x(x_0, t)$ par l'ensemble : $\alpha(x) \cup \omega(x)$.*

1.1.7 Attracteurs

Définition 1.1.9 *Un attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires des points de l'espace des phases, c'est à dire une situation (ou un ensemble d'états) vers lesquels évolue un système, quelles que soient ses conditions initiales.*

Soit A un ensemble compact, fermé, de l'espace des phases. On suppose que A est invariant par le flot : $\phi_t(A) = A$ pour tout t . A est dite stable si pour tout voisinage U de A , il

existe un voisinage V de A tel que toute solution $x(x_0, t) = \phi_t(x_0)$ restera dans U si $x_0 \in V$. Si de plus

$$\bigcap_{t \geq 0} \phi_t(V) = A$$

et s'il existe une orbite dense dans A , alors A est un attracteur.

Bassin d'attraction

Lorsque A est un attracteur, l'ensemble $W = \bigcup_{t < 0} \phi_t(V)$ est appelé bassin d'attraction. C'est l'ensemble des points dont les trajectoires asymptotiques convergent vers A .

Les différents types d'attracteurs

Il existe deux types d'attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques.

Attracteurs réguliers Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution de systèmes non chaotiques :

Le point fixe : C'est le plus simple attracteur, le système évolue vers un état de repos.

Le cycle limite périodique : C'est une trajectoire dans l'espace de phase qui se referme sur elle-même.

Le cycle limite pseudo-périodique : Le système présente au moins deux périodes simultanées dont le rapport est irrationnel. La trajectoire de phase ne se referme pas sur elle-même, mais s'enroule sur une variété de dimension 2 (par exemple un tore).

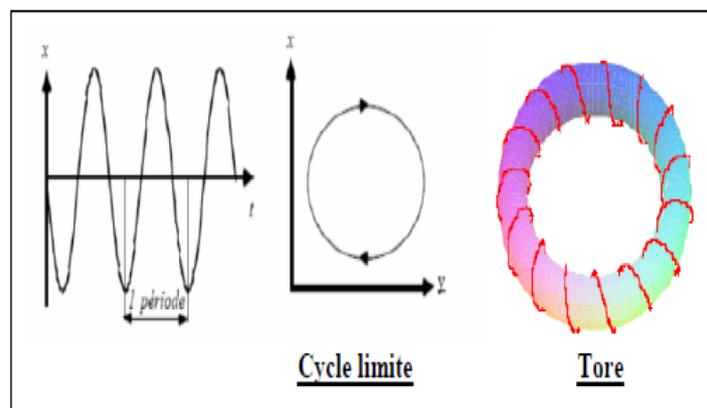


FIGURE 1.1 – Attracteurs réguliers

Attracteurs étranges Un attracteur étrange est un ensemble invariant, sa dimension dans un espace tridimensionnel doit être strictement inférieure à 3. Mais on cherche également un attracteur dont la dimension n'est ni 1 (point fixe) ni 2 (cycle). On recherche donc des objets de dimension non-entière ! on comprend bien que leur nature doit être radicalement différente de celle d'un tore, qui ne peut être attracteur que d'un régime quasi périodique. Les objets considérés ici, par contre, sont le siège de phénomènes apériodiques et du chaos. On les appelle des attracteurs étranges. Et pour cause : il s'agit d'ensembles compacts, donc bornés, dans lesquels on retrouve des trajectoires chaotiques.

Les attracteurs étranges sont caractéristiques de l'évolution des systèmes chaotiques : au bout d'un certain temps, tous les points de l'espace des phases (et appartenant au bassin d'attraction de l'attracteur) donnent des trajectoires qui tendent à former l'attracteur étrange.

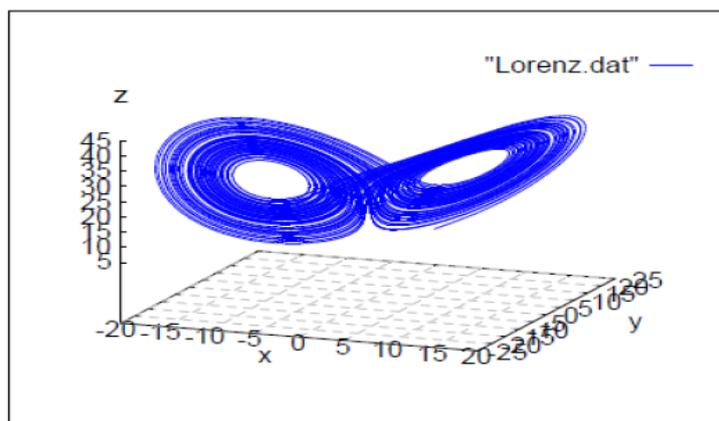


FIGURE 1.2 – Attracteurs étrange de Lorenz

1.2 Résolutions Numériques des équations différentielles :

Nous considérons une équation différentielle résolue du premier ordre. C'est-à-dire le problème :

$$\dot{x} = f(x, t)$$

où f est une fonction de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $x \in \{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n\}$.

Méthodes d'Euler

La méthode d'Euler est l'une des plus ancienne méthode de résolution des équations différentielles. Elle est introduite par Leonhard Paul Euler au 18^{ème} siècle. Elle consiste, en

pratique, pour une valeur initiale donnée, à tracer un graphe à partir d'une approximation successive des dérivées, en utilisant la fonction f .

En choisissant un pas h tel que $h = t_{i+1} - t_i$, et une valeur initiale x_{t_0} à un temps t_0 , on peut approximer la dérivée en ce point par $f(x_0, t_0)$ et ainsi le prochain point de la courbe au temps $h + t_0$ par $x_{t_0} + hf(x_{t_0}, t_0)$. Cela revient à tracer un segment de la tangente en ce point. En répétant ce processus, on obtient :

$$x_{t_{i+1}} = x_{t_i} + hf(x_{t_i}, t_i) = x_i + hf(x_{t_i}, t_0 + hi)$$

Elle correspond exactement au développement de Taylor à l'ordre 1 de la fonction $x(t)$, c'est-à-dire :

$$x(t) = x_{t_0} + h\dot{x}_{t_0} + O(h^2) = x_{t_0} + hf(x_{t_0}) + O(h^2)$$

et converge donc bien vers la solution pour $h \rightarrow 0$. L'erreur locale est en $O(h^2)$ et l'erreur globale, c'est-à-dire après sommation d'un grand nombre de pas, est donc en $O(h)$. On dira alors que cette méthode est d'ordre 1.

La méthode d'Euler fournit une méthode pour résoudre numériquement une équation différentielle ordinaire dans \mathbb{R}^d qui est sous la forme $\dot{x} = F(x)$, mais elle montre aussi que celle-ci a une solution unique. En terme physique, on dit que l'équation différentielle ordinaire modélise une loi d'évolution déterministe car l'état présent $x(0)$ et la loi $\dot{x} = F(x)$ déterminent de façon unique les états passés et futurs $x(t)$.

La méthode d'Euler est relativement imprécise. Pour en trouver de plus précise, nous allons nous intéresser à une méthode particulière.

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

C'est, comme la méthode d'Euler, une méthode pas à pas permettant de calculer une valeur approchée de $x(t + h)$ à partir de celle de $x(t)$. La formule d'itération est plus compliquée que celle de la méthode d'Euler mais l'approximation est meilleure pour une même valeur du pas. Elle s'applique aux systèmes de même type que ceux étudiés par la méthode d'Euler :

$$\dot{x} = f(t, x(t))$$

Les formules d'itération sont les suivantes :

$$x(t+h) = x(t) + \frac{h}{6}(p_1 + 2p_2 + 2p_3 + p_4)$$

avec :

$$p_1 = f(t, x(t))$$

$$p_2 = f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}p_1\right)$$

$$p_3 = f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}p_2\right)$$

$$p_4 = f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + hp_3\right)$$

Il y a donc quatre quantités intermédiaires à calculer (p_1, p_2, p_3, p_4) pour obtenir $x(t+h)$.

On calcule $x(t+h)$ en fonction de $x(t)$ à. Et on la nomme RK4 (f, x, t, h, n) et s'emploie exactement comme Euler (f, x, t, h, n) . A chaque appel, les valeurs de $x(t)$, contenues dans le tableau x , sont remplacées par les valeurs de $x(t, h)$, f étant la fonction qui définit le système différentiel.

Chapitre 2

Stabilités

On a présenté dans ce chapitre, les notions de stabilité, l'étude de la stabilité d'un système linéaire dans \mathbb{R}^2 et la stabilité d'un système non linéaire avec deux méthodes (linéarisation pour les points fixes et la fonction de Lyapounov), pour finir, on donne quelques définitions sur la stabilité dans le cas du temps discret.

2.1 Notions de stabilité

Considérons un système continu de dimension finie décrit par une équation différentielle vectorielle non-linéaire de premier ordre :

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n$$

Les définitions et les théorèmes qui suivent seront établis en considérant le point d'équilibre :

$$x_e = 0$$

Définition 2.1.1 x_e est un point d'équilibre stable si pour tout voisinage $U \subset W$ de x_e , il existe un voisinage U_1 de x_e dans U tel que toute solution $x(t)$ avec $x(0) \in U_1$ dans W_1 est définie et dans U pour tout $t > 0$.

Définition 2.1.2 (Stabilité locale simple et asymptotique) L'état d'équilibre $x_e = 0$ du système $\dot{x} = f(x)$ est :

stable si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe r , tel que :

$$|y - x_e| < r \Rightarrow |\varphi(y) - x_e| < \epsilon \quad \forall t > 0$$

et : $\exists r > 0$ telle que $|y - x_e| < r \implies |\varphi(y) - x_e| \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$,

donc $D_x = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi(y) - x_e| = 0\}$ est appelé le domaine de la stabilité asymptotique de x_e .

Marginalement stable, s'il est stable sans être asymptotiquement stable.

Physiquement, la stabilité au sens de LYAPUNOV garantit que la trajectoire restera à l'intérieur de la boule $B(x_e, \epsilon)$ si son point de départ appartient à une boule $B(x_e, r)$. La stabilité asymptotique inclut cette propriété, mais spécifie de plus que toute trajectoire initialisée dans la boule $B(x_e, r)$ converge vers x_e .

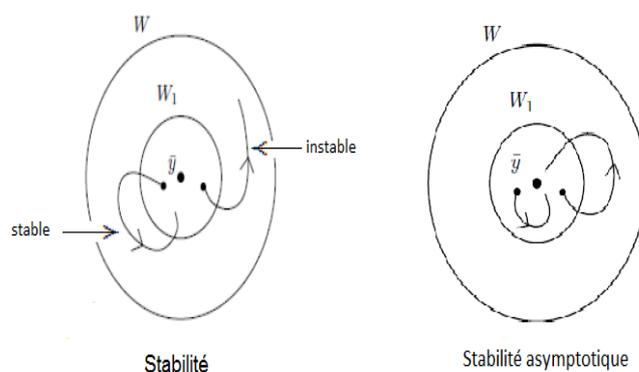


FIGURE 2.1 – Les types de stabilité

Définition 2.1.3 Un point d'équilibre x_e de l'équation $\frac{dx}{dt} = f(x)$ est dit hyperbolique si les valeurs propres de la matrice jacobienne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_e) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

sont toutes à partie réelle non nulle.

Dans ce qui suit et par abus de langage, on parle de stabilité du système au lieu de parler de stabilité du point d'équilibre.

2.2 La stabilité d'un système linéaire dans \mathbb{R}^2 :

Considérons le système linéaire suivant :

$$\dot{x} = Ax$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

telque a, b, c et d sont des constants réels. Le système est défini par l'un des trois cas suivants :

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} \rho & -\omega \\ \omega & \rho \end{pmatrix}$$

chacune de ces trois possibilité nous donne des différents portraits de phase.

1. Point selle : la solution du système est donnée par :

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{(Bt)x_0} \\ &= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Si $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ alors le système possède un point selle.

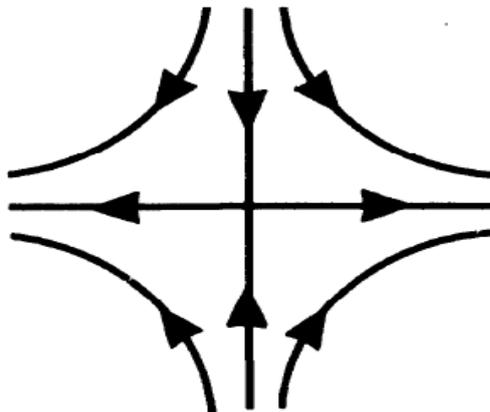


FIGURE 2.2 – Point selle

- Si $\lambda_2 > 0 > \lambda_1$ les flèches seront inversés.

2. Centre : dans la matrice D supposons que $\rho = 0$, les trajectoires se situent sur des cercles concentriques sur l'origine de la flèche de temps dans le sens anti-horaire si $\omega > 0$ et dans le sens horaire si $\omega < 0$.

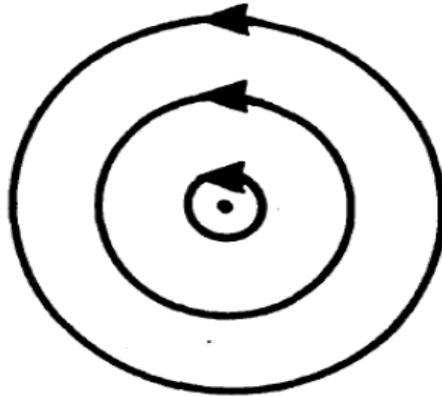


FIGURE 2.3 – Centre

3. Foyer : la solution du système est donnée par :

$$x(t) = \exp(Dt) \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

- Si $p < 0$ l'origine est un foyer stable.
- Si $p > 0$ les trajectoires s'éloignent de l'origine en spéral lorsque $t \rightarrow +\infty$, et les flèches seront inversées; dans ce cas l'origine est un foyer instable.

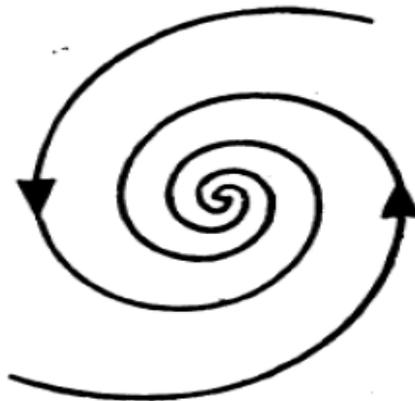


FIGURE 2.4 – Foyer stable

4. Noeud : la solution du système est donné par :

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \exp(Ct)x_0 \\
 &= x \exp \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} t \\
 \Rightarrow x(t) &= \exp(\lambda t) \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \\
 &= \exp(\lambda t) \begin{bmatrix} c_1 + c_2 t \\ c_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

- Si $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ cette courbe décrit une parabole généralisée tangentielle, c'est ce qu'on appelle un noeud instable.

- Si $-\lambda_1 > -\lambda_2 > 0$ dans ce cas on inverse les flèches on obtient un noeud stable.

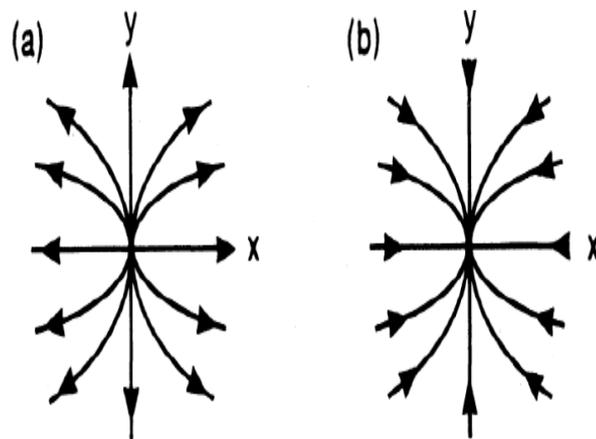


FIGURE 2.5 – (a) Noeud instable, (b) Noeud stable

Récapitulation Pour la dimension 2, on peut donc grouper les résultats précédents en quatre cas :

- valeurs propres réelles de signe opposé : point selle ;
- valeurs propres à parties réelles négatives : puits ;
- valeurs propres à parties réelles positives : source ;
- valeurs propres imaginaires pures : centre.

Cela pourra en grande partie se généraliser pour la dimension n .

Cas de la dimension n :

On généralise l'étude réalisée au paragraphe précédent ; le problème c'est le nombre de cas est très grand au vu du nombre de valeurs propres. On peut cependant conclure dans certains cas.

- Si toutes les valeurs propres de A ont leur partie réelle strictement négative, alors les solutions vérifient $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ et l'origine est un puits.
- Si toutes les valeurs propres de A ont leur partie réelle strictement positive, alors les solutions vérifient $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$ et l'origine est une source.
- S'il y a des valeurs propres à parties réelles négatives et des valeurs propres à parties réelles positives et pas de valeurs propres à parties réelles nulles, on a un point selle.

2.2.1 Typologie des solutions des systèmes linéaires dans le plan (tr,det)

La typologie des solutions des systèmes linéaires planaires que nous avons établie à partir de la nature des valeurs propres de la matrice du système peut également se résumer dans un plan (tr,det).

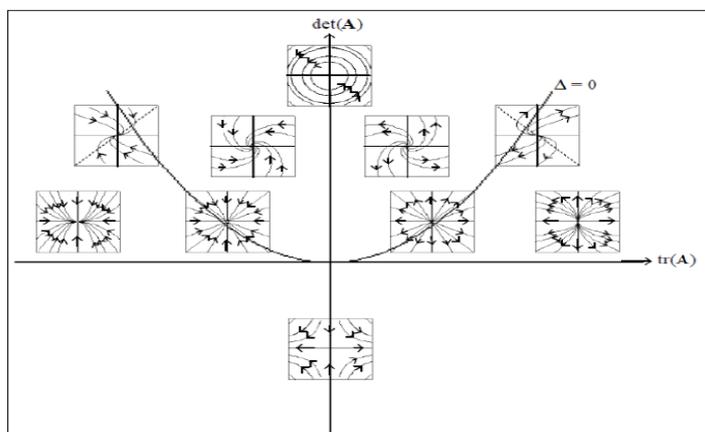


FIGURE 2.6 – Résumé des différents portraits de phase possibles du système $\dot{x} = Ax$, en fonction du signe de la trace et du déterminant de la matrice A

Les valeurs propres de A sont solutions de l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = 0$$

avec

$$\begin{cases} tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 \\ det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \end{cases}$$

La nature des valeurs propres dépend du signe du discriminant :

$$\Delta = (tr(A))^2 - 4det(A)$$

Dans le plan (tr, det) , l'équation $\Delta = 0$ est celle d'une parabole passant par l'origine :

$$det(A) = \frac{1}{4}(tr(A))^2$$

Cette parabole divise le plan en deux grandes régions : au-dessus de la parabole ($\Delta < 0$), on trouve les portraits de phase des foyers et des centres ; en-dessous ($\Delta > 0$), on trouve les noeuds et les points selle.

• **Cas $\Delta = 0$**

On a alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$, c'est-à-dire $det(A) = \lambda_0^2 > 0$ et $tr(A) = 2\lambda_0$.

Par conséquent, si la trace est positive ($\lambda_0 > 0$), on a une étoile ou un noeud dégénéré instable ; si la trace est négative ($\lambda_0 < 0$), on a une étoile ou un noeud dégénéré stable.

• **Cas $\Delta > 0$**

On a alors deux valeurs propres réelles distinctes. On est dans la région sous la parabole se partage en trois zones :

- $det(A) < 0$: λ_1 et λ_2 sont de signe opposé, l'origine est un point selle.
- $det(A) > 0$ et $tr(A) > 0$: $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, l'origine est un noeud instable.
- $det(A) > 0$ et $tr(A) < 0$: $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, l'origine est un noeud stable.

• **Cas $\Delta < 0$**

On a alors deux valeurs propres complexes conjuguées, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, c'est-à-dire

$$det(A) = \alpha^2 + \beta^2 > 0 \text{ et } tr(A) = 2\alpha.$$

On est dans la région au-dessus de la parabole, qui se partage là encore en trois zones distinctes :

- $tr(A) < 0$: La partie réelle des valeurs propres est négative, l'origine est un foyer stable.
- $tr(A) > 0$: La partie réelle des valeurs propres est positive, l'origine est un foyer instable.
- $tr(A) = 0$: La partie réelle des valeurs propres est nulle, l'origine est un centre.

Remarque 2.2.1 *Nous n'avons pas traité le cas où la matrice A du système $\dot{x} = Ax$ n'est pas inversible, i.e, $det(A) = 0$. Dans ce cas particulier, il faut regarder directement le portrait de phase pour reconnaître la nature de l'origine.*

Critère 2.2.2 [2] (Routh-Hurwitz). On a le polynôme $p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$, où les coefficients a_i , $i = 1, 2, \dots, n$ sont des constantes réelles, qui définit les matrices n Hurwitz.

$$\begin{aligned}
 H_1 &= (a_1), \\
 H_2 &= \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix} \\
 &\vdots \\
 H_n &= \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

où, $a_i = 0$ si $i > n$.

Tous les racines du polynôme ont partie réelle négative si et seulement si les déterminants de toutes les matrices de Hurwitz sont positifs : $\det H_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Le critère de Routh-Hurwitz pour $n = 3$ est $a_1 > 0$, $a_3 > 0$ et $a_1a_2 - a_3 > 0$.

2.3 La stabilité d'un système non linéaire :

Pour étudier la stabilité d'un système dynamique non linéaire $\dot{x} = f(x)$ on a deux méthodes :

- Méthode directe basée sur l'utilisation d'une fonction appelée fonction de Lyapunov.
- Méthode indirecte basée sur la linéarisation de la fonction f .

Méthode indirecte de Lyapunov

Une approximation locale de la dynamique du système au tour du point d'équilibre permet dans certain cas de déduire la stabilité locale d'un système dynamique. Il s'agit de la méthode indirecte de Lyapunov.

Considérons le système :

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

où $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe $C^1(D)$ et D une partie de \mathbb{R}^n contenant le point d'équilibre du système, i.e. $f(0) = 0$. Par le théorème de la moyenne, nous avons

$$f_i(x) = f_i(0) + \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i)x$$

où, z_i est un point du segment joignant x et l'origine. cette égalité est vraie pour tout $x \in D$ tel que le segment x et l'origine reste dans D . Comme $f(0) = 0$, nous pouvons écrire

$$f_i(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i)x = \frac{\partial f_i}{\partial x}(0)x + \left[\frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right] x$$

D'où

$$f(x) = Ax + g(x)$$

avec

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0) \text{ et } g_i(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right] x$$

La fonction $g_i (i = 1, \dots, n)$ vérifié

$$|g_i(x)| \leq \left\| \left[\frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right] \right\| \|x\|$$

et par la continuité de la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$, on remarque que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0$$

Cela signifie que dans un voisinage de zéro suffisamment petit, on peut approcher le système (2.1) par son linéarisé

$$\dot{x} = Ax, \text{ où } A = \frac{\partial f}{\partial x}(0) \tag{2.2}$$

Le théorème qui suit, connu une méthode indirecte de Lyapunov, utilise la linéarisation (2.2) du système (2.1) peut dans certain cas apporter une réponse au problème de la stabilité locale. Plus précisément :

Théorème 2.3.1 [7] *Soit $x = 0$ un point d'équilibre du système*

$$\dot{x} = f(x)$$

où, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe $C^1(D)$, et D un voisinage de zéro. Soit

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x) \Big|_{x=0}$$

Alors,

1. l'origine est asymptotiquement stable si $Re(\lambda_i) < 0$ pour toutes les valeurs propres λ_i de A .
2. l'origine est instable si $Re(\lambda_i) > 0$ pour au moins une valeur propre λ_i de A .

Notons que ce théorème ne permet pas de conclure sur la stabilité du système lorsque $Re(\lambda_i) \geq 0$ pour tout i et $Re(\lambda_i) = 0$ pour un certain i .

Méthode directe (La fonction de Lyapunov)

Pour certains cas, l'examen des valeurs propres ne suffit pas de conclure sur la stabilité. On a besoin d'un autre outil dû au mathématicien et ingénieur russe Lyapunov. L'idée est que près d'un point d'équilibre asymptotiquement stable (puits), il y a une norme $\|\cdot\|$ de \mathbb{R}^n , telle que $\|x(t) - x_e\|$ décroît lorsque $x(t) \rightarrow x_e$. Lyapunov a montré que l'on pouvait utiliser d'autres fonctions qu'une norme.

On considère toujours le système d'équations différentielles autonomes et on a la définition suivante :

Définition 2.3.2 On appelle fonction de Lyapunov pour le point d'équilibre x_e une fonction continue V dans un voisinage W de x_e à valeurs dans \mathbb{R} , différentiable sur $W - \{x_e\}$ et telle que :

- a) $V(x_e) = 0$ et $V(x) > 0$ si $x \neq x_e$.
- b) $\frac{dV}{dt}(x(t)) \leq 0$ dans $W - \{x_e\}$.
- c) si de plus $\frac{dV}{dt}(x(t)) < 0$ dans $W - \{x_e\}$, alors V est une fonction de Lyapunov stricte.

C'est le théorème suivant qui sert à utiliser les fonctions de Lyapunov.

Théorème 2.3.3 [4] Si le point d'équilibre x_e admet une fonction de Lyapunov, alors c'est un point d'équilibre stable. Si le point d'équilibre x_e admet une fonction de Lyapunov stricte, alors c'est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Quelques remarques au sujet des fonctions de Lyapunov :

- On note souvent \dot{V} pour $\frac{dV}{dt}(x(t))$.
- On peut utiliser une fonction de Lyapunov sans résoudre le système.
- Il n'y a aucune méthode générale pour trouver une fonction de Lyapunov.

Mais en mécanique et pour les systèmes électriques on peut souvent utiliser l'énergie totale comme fonction de Lyapunov.

2.4 Stabilité dans le cas du temps discret

Définition 2.4.1 Un point fixe p d'une application f est un point invariant par f (i.e. $f(p) = p$).

Définition 2.4.2 Un point fixe attractif (ou stable) de f est un point fixe p de f tel qu'il existe un voisinage de p et pour tout u_0 dans ce voisinage la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$, définie par la donnée de u_0 et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, converge vers p .

Proposition 2.4.3 Soient I un intervalle et $f : I \rightarrow I$ une application de classe C^1 admettant un point fixe p . Si $|f'(p)| < 1$, alors p est attractif.

Définition 2.4.4 Un point fixe p de f est répulsif (ou instable) si :

$$\forall x_0 \exists \epsilon \text{ tel que si } |p - x_0| < \epsilon \text{ alors } |p - f(x_0)| \gg 0$$

Proposition 2.4.5 Soit $f : I \rightarrow I$ une application de classe C^1 admettant un point fixe p . Si $|f'(p)| > 1$, alors p est répulsif.

Remarque 2.4.6 Si $|f'(p)| = 1$, on ne peut pas conclure la nature du point fixe. De plus, un point fixe ni attractif, ni répulsif est dit neutre.

Chapitre 3

Bifurcations

Dans ce chapitre, on définit la stabilité structurelle et traite les quatre types de bifurcations locales de codimension un (noeud-col, transcritique, fourche et Hopf).

Les systèmes que nous considérons sont en général fonction de paramètres de contrôle. Un point de bifurcation est un point de l'espace de contrôle où le portrait de phase du système change de façon qualitative.

Un système est structurellement stable ou robuste si le portrait de phase ne change pas dans une perturbation de ses paramètres. Par conséquent une bifurcation correspond à une perte de stabilité structurelle.

Un petit changement quantitatif des paramètres peut induire un changement qualitatif de comportement. Celui-ci peut être local ou global selon qu'il affecte le portrait de phase dans une région localisée autour d'ensembles limites particuliers ou, au contraire, dans son ensemble [22].

Soit le système

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, c) \quad (3.1)$$

Donc une bifurcation est un changement qualitatif de la solution x_0 du système (3.1) lorsqu'on modifie c , et d'une manière plus précise la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions.

3.1 Stabilité structurelle

Définition 3.1.1 *Un système est dit structurellement stable (resp. instable) sur une portion de l'espace des paramètres si son comportement qualitatif est monomorphe (resp.*

polymorphe) sur cette portion.

Sur un intervalle de valeurs d'un paramètre qui contient une valeur de bifurcation, un système est donc structurellement instable. L'analyse de bifurcation a pour objectif de localiser ces éventuelles valeurs particulières des paramètres.

3.2 Bifurcations locales

Une bifurcation correspond donc à la "collision" de deux objets (attracteur, point ré-pulsif ou selle) ou de deux variétés et ceci est une méthode géométrique efficace pour les décrire. La collision de deux objets donne naissance à une bifurcation locale alors que la collision de deux variétés donne naissance à une bifurcation globale, et nous nous intéressons à la bifurcation locale [17].

Les bifurcations "locales" sont appelées ainsi car elles peuvent toujours être identifiées lors d'une linéarisation du système au voisinage de la solution. Le cas des bifurcations locales concerne les valeurs propres du Jacobien (étant donné qu'il intervient au premier ordre dans la linéarisation).

Alors une bifurcation locale se produit lorsqu'un ensemble limite change de stabilité. Par exemple, en dimension 2, un noeud bifurque lorsque l'une de ses valeurs propre passe par zéro et change de signe, le transforme en un col, et réciproquement. Un foyer bifurque quand la partie réelle de ses valeurs propres s'annule et change de signe. Le centre caractérisé par une paire de valeurs propres imaginaires pures conjugués est à cet égard structurellement instable car la moindre perturbation apportée au système le transforme en foyer, stable ou instable [22].

Dans la suite, chaque bifurcation sera présentée graphiquement. Les conventions des représentations graphiques seront les suivantes :

	Objet stable
	Objet instable
	Equilibre stable
	Equilibre instable
	Point selle
	Trajectoire

FIGURE 3.1 – Convention graphique

3.3 Bifurcation de codimension un :

La codimension d'une bifurcation est la plus petite dimension de l'espace des paramètres telle que la bifurcation soit persistante, et il existe quatre types de bifurcations correspondant tous à des comportements génériques.

Collisions d'équilibres : Bifurcation "noeud-col" ou "saddlenode"

La bifurcation noeud-col est le mécanisme de base par lequel les points fixes sont créés et détruits. Lorsque le paramètre est modifié, les deux points fixes se déplacent l'un vers l'autre, entre en collision, et s'anéantissent mutuellement.

Soit l'équation suivante :

$$\dot{x} = c + x^2$$

où c est un paramètre, qui peut être positif, négatif ou nul.

- Lorsque c est négatif, il existe deux points fixes, l'un stable et l'autre instable (Figure a).
- Lorsque c tend vers 0 au-dessous, la parabole se déplace vers le haut et les deux points fixes se déplacent l'un vers l'autre. Lorsque $c = 0$, les points fixes se fondent en un point fixe demi-stable $\bar{x} = 0$ (Figure b).
- Ce type de point fixe est extrêmement délicat, il s'évanouit dès que $c > 0$, et dans ce cas il n'y a pas de points fixes (Figure c).

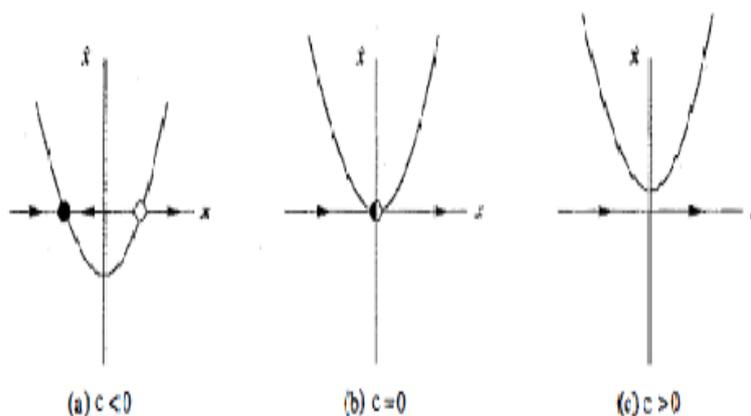


FIGURE 3.2 – Portrait de phase de la bifurcation noeud-col

La figure (3.3) présente ce que on appelle le diagramme de bifurcation. La variation du point d'équilibre en fonction du paramètre c .

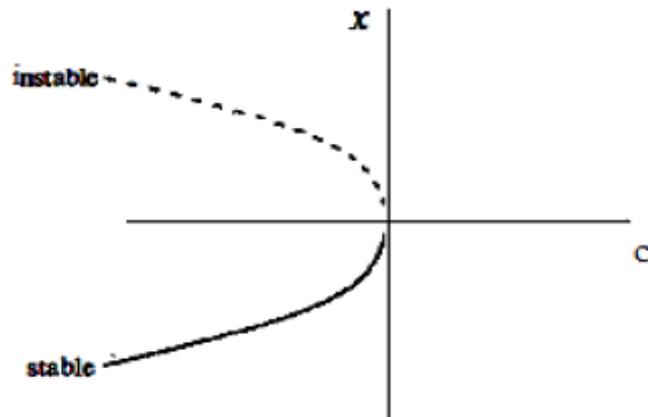


FIGURE 3.3 – Diagramme de bifurcation noeud-col

Exemple 3.3.1 considérons le système (3.1)

Si on peut réécrire la fonction f sous la forme :

$$f(x, c) = x^2 + c \quad (3.2)$$

nous appelons la fonction (3.2) la forme normale de la bifurcation noeud-col.

Étudions le comportement de l'équation (3.2) : les points fixes de cette dernière sont :

$$\tilde{x} = \pm\sqrt{-c}$$

il existe seulement pour $c \leq 0$, leur stabilité est déterminée par :

$$\dot{f}(\tilde{x}) = -2\tilde{x} = -2(\pm\sqrt{-c}) = \pm\sqrt{-c}$$

selon les signes de $\dot{f}(\tilde{x})$, on voit que $\bar{x} = +\sqrt{-c}$ est instable, tandis que $\bar{x} = -\sqrt{-c}$ est stable.

Bifurcation transcritique ou échange de stabilité :

Il y a certaines situations scientifiques où un point fixe doit exister pour toutes les valeurs d'un paramètre et ne peut jamais être détruite. Par exemple, dans l'équation logistique et d'autres modèles simples pour la croissance d'une espèce unique, la population zéro est un point fixe, quelle que soit la valeur de la vitesse de croissance. Cependant, un tel point fixe peut changer sa stabilité quand le paramètre est modifié. La bifurcation transcritique est le mécanisme standard pour de tels changements dans la stabilité. La

forme normale pour une bifurcation transcritique est

$$\dot{x} = cx - x^2$$

Cela ressemble à une équation logistique, mais maintenant nous permettons x et c à être positif ou négatif.

La figure suivante nous montre le champ de vecteur lorsque c varie. Notons qu'il existe un point fixe $\bar{x} = 0$ pour toutes les valeurs de c .

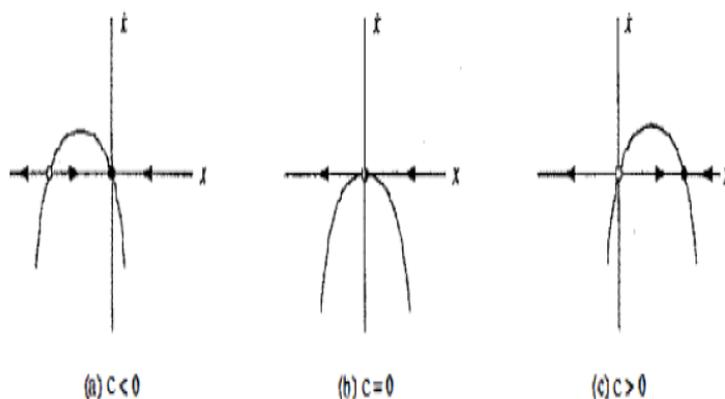


FIGURE 3.4 – Portrait de phase de la bifurcation transcritique

- * Pour $c < 0$, il y a un point fixe instable $\bar{x} = c$ et un point fixe stable $\bar{x} = 0$.
- * Lorsque c augmente, le point fixe instable s'approche de l'origine, et entre en fusion avec elle lorsque $c = 0$.
- * Enfin, lorsque $c > 0$, l'origine est devenue instable, et $\bar{x} = c$ est maintenant stable.

Certaines personnes disent que l'échange de stabilités a eu lieu entre les deux points fixes.

On note la différence importante entre la bifurcation noeud-col et la bifurcation transcritique : dans le cas transcritique, les deux points fixes ne disparaissent pas après la bifurcation, il change simplement de stabilité.

La figure (3.5) représente le diagramme de bifurcation transcritique. Comme sur la figure, le paramètre c est considéré comme la variable indépendante, et les points fixes $\bar{x} = 0$ et $\bar{x} = c$ sont présentés comme variables dépendantes.

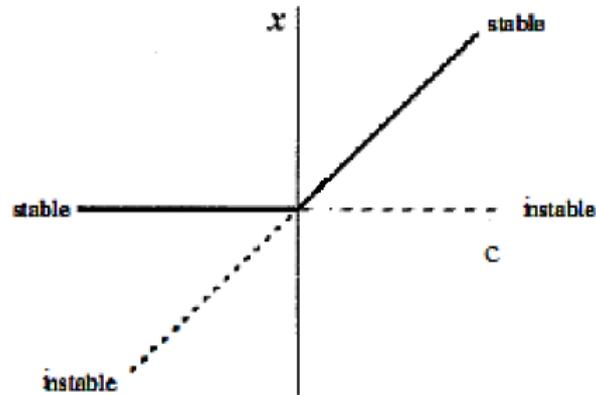


FIGURE 3.5 – Diagramme de bifurcation transcritique

L'analyse usuelle de l'équation suivante :

$$\dot{x} = cx - x^2$$

nous donne :

$$\bar{x}(c - \bar{x}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = 0 \\ \bar{x} = c \end{cases}$$

$$f'(\bar{x}) = c - 2\bar{x} = \begin{cases} c \text{ pour } \bar{x} = 0 \\ -c \text{ pour } \bar{x} = c \end{cases}$$

Donc $\bar{x} = 0$ est stable pour $c < 0$, instable pour $c > 0$, tandis que $\bar{x} = c$ fait le contraire : ces deux points fixes échangent simplement leur stabilité.

Bifurcations fourches (pitchfork)

La forme générale des systèmes que nous allons étudier sera donc la suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, c) \\ \dot{y} = g(x, y, c) \end{cases}$$

Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-c - x^2) \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (3.3)$$

On distingue trois cas selon le signe du paramètre c :

- $c < 0$

Dans ce cas, le système admet trois points d'équilibre, l'origine et deux autres points

symétriques de coordonnées $(-\sqrt{|c|}, 0)$ et $(\sqrt{|c|}, 0)$. Afin de déterminer la nature de chacun de ces points d'équilibre, calculons la matrice Jacobienne qui s'écrit de manière générale :

$$A = \begin{pmatrix} -c - 3x^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Au point d'équilibre $(0,0)$, cette matrice s'écrit :

$$A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} |c| & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice admet deux valeurs propres réelles de signe opposé : $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = |c|$. Par conséquent l'origine est un point selle (instable).

Aux deux autres points d'équilibre $(-\sqrt{|c|}, 0)$ et $(\sqrt{|c|}, 0)$, la matrice Jacobienne prend la même forme :

$$A' = \begin{pmatrix} -2|c| & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Elle admet deux valeurs propres réelles négatives $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -2|c|$. Ainsi, ces deux points d'équilibre sont des noeuds asymptotiquement stables. Les isoclines verticales ($\dot{x} = 0$) correspondent à trois droites : la droite $x = 0$ et les deux droites $x = \pm\sqrt{|c|}$. L'isocline horizontale ($\dot{y} = 0$) est la droite $y = 0$. Le portrait de phase peut alors être construit comme suit :

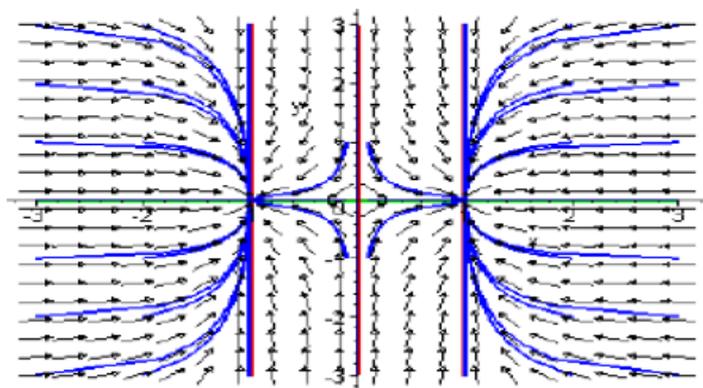


FIGURE 3.6 – Portrait de phase de la bifurcation fourche $c < 0$

Ce portrait de phase montre un point selle fixé à l'origine entouré par deux noeuds asymptotiquement stables, symétriques autour de l'origine et qui s'éloignent lorsque $|c|$ augmente.

- $c = 0$

Dans ce cas, le système (3.3) se réduit à :

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (3.4)$$

Ce système admet l'origine comme point d'équilibre unique, il est non hyperbolique car la matrice Jacobienne en ce point s'écrit :

$$A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer la stabilité de ce point d'équilibre, considérons la fonction définie positive suivante :

$$V(x, y) = x^2 + y^2$$

Calculons \dot{V} . Il vient :

$$\dot{V}(x, y) = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = -2(x^4 + y^2)$$

Cette expression est strictement négative sur l'ensemble du plan, à l'exception de l'origine. Par conséquent, la fonction $V(x, y)$ est une fonction de Lyapunov forte pour le système (3.4). Par application du théorème de Lyapunov pour fonction forte, nous pouvons conclure que l'origine est asymptotiquement stable.

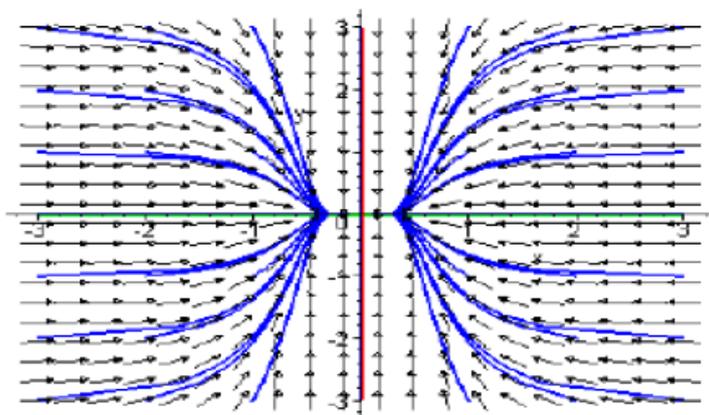


FIGURE 3.7 – Portrait de phase de la bifurcation fourche $c = 0$

De plus, le bassin d'attraction de l'origine est \mathbb{R}^2 tout entier (Figure (3.7)).

- $c > 0$

Dans ce cas, le système dynamique (3.3) devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-c - x^2) \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (3.5)$$

Il n'admet qu'un unique point d'équilibre, l'origine. La matrice Jacobienne en ce point s'écrit :

$$A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -c & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Elle admet deux valeurs propres réelles négatives $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -c$. L'origine est donc un noeud asymptotiquement stable (Figure (3.8)).

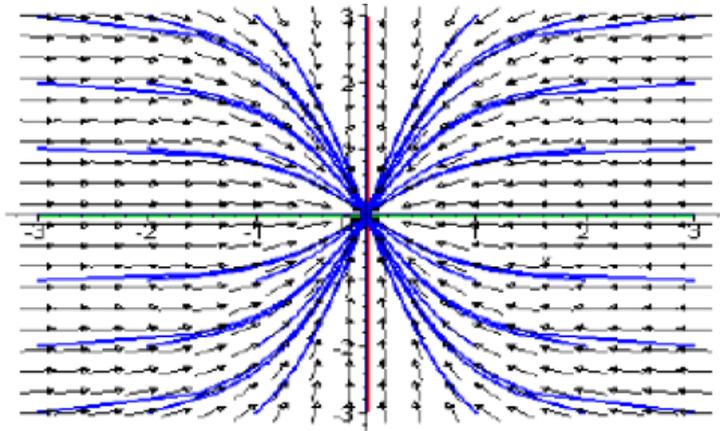


FIGURE 3.8 – Portrait de phase de la bifurcation fourche $c > 0$

En résumé, à la valeur du paramètre $c = 0$, le système voit le nombre des points d'équilibres passer de trois à un. Pour $c < 0$, nous avons un point selle entouré de deux noeuds asymptotiquement stables. Pour $c \geq 0$, le système n'admet qu'un seul point d'équilibre asymptotiquement stable, l'origine.

Le diagramme de bifurcation est présenté sur la figure (3.9).

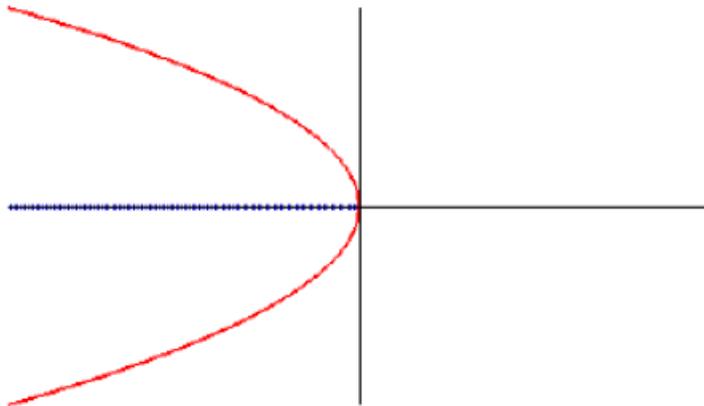


FIGURE 3.9 – Diagramme de la bifurcation fourche super-critique

Il s'agit là de la bifurcation fourche super-critique.

Le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-c + x^2) \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

correspond par contre à une bifurcation fourche sous-critique dont le diagramme de bifurcation est donné sur la figure (3.10)

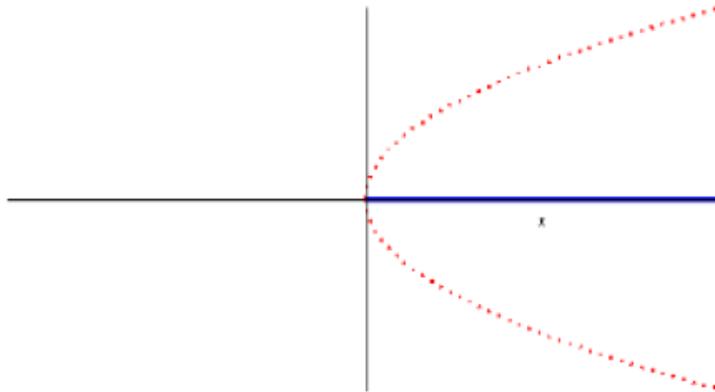


FIGURE 3.10 – Diagramme de bifurcation de fourche sous-critique

Bifurcation Hopf

Considérons le système de deux équations différentielles suivant en fonction d'un paramètre c :

$$\begin{cases} \dot{x} = cx - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + cy - y(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (3.6)$$

Ce système a l'équilibre $x = y = 0$ pour tous c avec la matrice jacobienne

$$\dot{A} = \begin{pmatrix} c & -1 \\ 1 & c \end{pmatrix}$$

qui possède deux valeurs propres $\lambda_{1,2} = c \pm i$. Introduisons la variable complexe $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ $|z| = z\bar{z} = x^2 + y^2$.

Cette variable satisfait l'équation différentielle

$$\dot{z} = \dot{x} + i\dot{y} = c(x + iy) + (ix - y) - (x + iy)(x^2 + y^2)$$

et nous pouvons donc réécrire le système (3.6). Dans la forme complexe suivant :

$$\dot{z} = (c + i)z - z|z|^2 \quad (3.7)$$

Enfin, en utilisant la représentation $z = \rho e^{i\varphi}$ on obtient

$$\dot{z} = \dot{\rho}e^{i\varphi} + \rho i\dot{\varphi}e^{i\varphi}$$

où

$$\dot{\rho}e^{i\varphi} + i\rho\dot{\varphi}e^{i\varphi} = \rho e^{i\varphi}(c + i - \rho^2)$$

qui donne la forme polaire du système (3.6)

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(c - \rho^2) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases} \quad (3.8)$$

La bifurcations du portrait de phase du système lorsque c passe par zéro peuvent facilement être analysés en utilisant la forme polaire, puisque les équations pour ρ et φ dans (3.8) sont découplés. La première équation (qui devrait évidemment être envisagée seulement pour $\rho \geq 0$). Au point d'équilibre $\rho = 0$ pour toutes les valeurs de c . L'équilibre est linéairement stable si $c < 0$; il reste stable à $c = 0$, mais de façon non linéaire (de sorte que le taux de convergence de la solution à zéro n'est plus exponentielle); pour $c > 0$ l'équilibre devient linéairement instable. En outre, il y a un point d'équilibre stable supplémentaires $\rho_0 = \sqrt{c}$ pour $c > 0$. La deuxième équation décrit une rotation à vitesse constante. Ainsi, par superposition des mouvements définis par les deux équations (3.8), on obtient le diagramme de bifurcation pour le système à deux dimensions d'origine (3.6) (voir figure 3.11). Le système a toujours un équilibre à l'origine. Cet équilibre est un foyer stable pour $c < 0$ et un foyer instable pour $c > 0$. A la valeur critique $c = 0$ l'équilibre est

non linéaire et stable. Parfois, il est appelé un faible foyer attirer. Cet équilibre est entouré pour $c > 0$ par une orbite isolé fermée (cycle limite) qui est unique et stable. Le cycle est un cercle de rayon $\rho_0(c) = \sqrt{c}$. Toutes les orbites de départ en dehors ou à l'intérieur du cycle, sauf à l'origine ont tendance au cycle lorsque $t \rightarrow +\infty$. Il s'agit d'une bifurcation Andronov-Hopf.

Cette bifurcation peut aussi être présentée en (x, y, c) -espace (voir figure 3.12). L'apparition c -famille de cycles limites forme une surface parabolique.

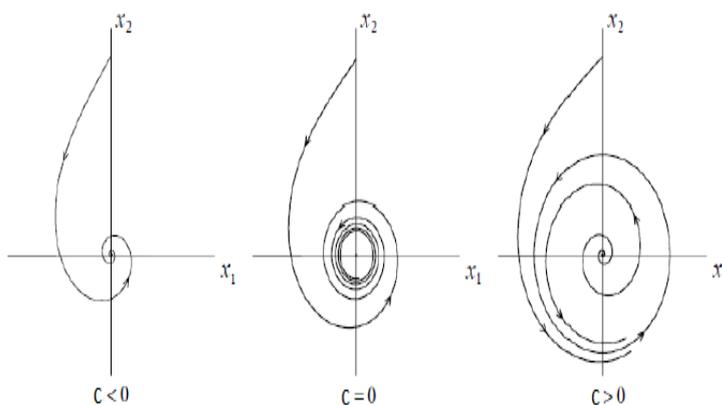


FIGURE 3.11 – Bifurcation Hopf super-critique

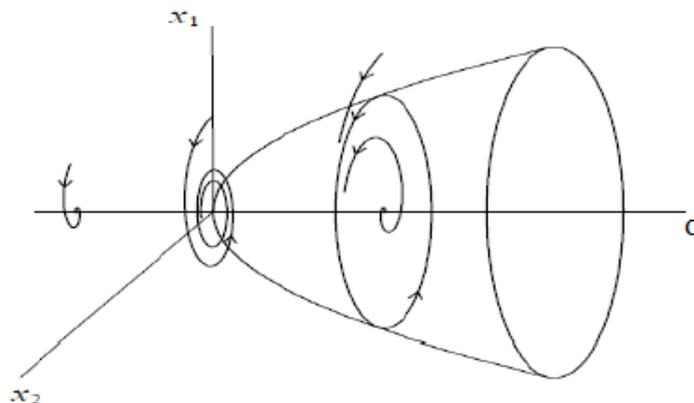


FIGURE 3.12 – Bifurcation Hopf super-critique dans l'espace de phase paramétrique

Un système ayant termes non linéaires avec le signe opposé :

$$\begin{cases} \dot{x} = cx - y + x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + cy + y(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (3.9)$$

qui a la forme complexe suivante :

$$\dot{z} = (c + i)z + z|z|^2$$

peuvent être analysés de la même manière (voir figure (3.13) et (3.14)). Le système subit la bifurcation Andronov-Hopf à $c = 0$. Contrairement au système (3.6), il existe un cycle limite instable en (3.9), qui disparaît lorsque c passe par zéro, des valeurs négatifs à des valeurs positives. L'équilibre à l'origine a la même stabilité pour $c \neq 0$ dans le système (3.6) : Il est stable pour $c < 0$ et instable pour $c > 0$. Sa stabilité à la valeur du paramètre critique est opposée à celle de (3.6) : Il est (non linéaire) instable à $c = 0$.

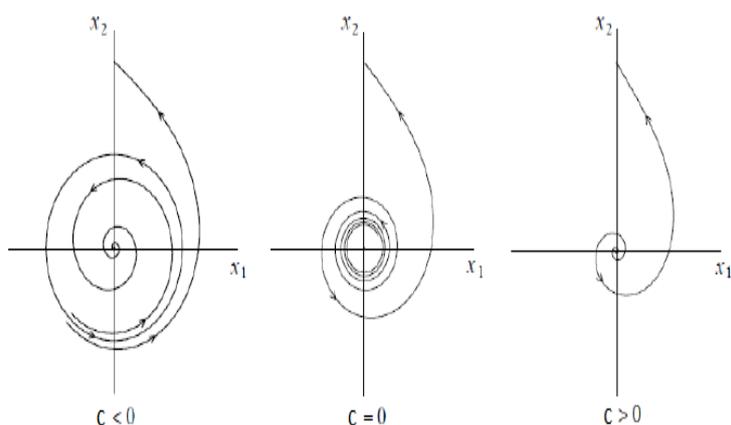


FIGURE 3.13 – Bifurcation Hopf sous-critique

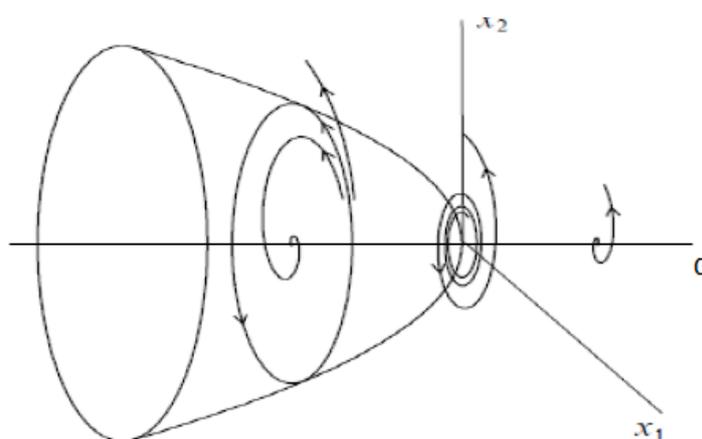


FIGURE 3.14 – Bifurcation Hopf sous-critique dans l'espace de phase paramétrique

Remarque 3.3.2 1- Nous avons vu qu'il existe deux types de la bifurcation Andronov-Hopf. La bifurcation dans le système (3.6) est souvent appelé supercritique, car il existe le cycle pour les valeurs positives du paramètre c ("après" la bifurcation). La bifurcation dans

le système (3.9) est appelé sous-critique puisque le cycle est présent "avant" la bifurcation. Il est clair que cette terminologie est en quelque sorte trompeuse car "après" et "avant" dépend de la direction choisie de variation des paramètres.

2- Dans les deux cas, nous avons une perte de stabilité de l'équilibre à $c = 0$ sous augmentation du paramètre. Dans le premier cas (avec "-" devant les termes cubiques), l'équilibre stable est remplacé par un cycle limite stable de faible amplitude. Par conséquent, le système "reste" dans un quartier tout de l'équilibre et nous avons une perte de stabilité non catastrophique. Dans le second cas (avec "+" devant les termes cubiques), la zone d'attraction du point d'équilibre est délimitée par le cycle instable, ce qui "rétracte" comme paramètre se rapproche de sa valeur critique et disparaît. Ainsi, le système est "repoussé" d'un quartier tout de l'équilibre, nous donnons une perte nette ou une stabilité catastrophique. Si le système perd sa stabilité doucement, il est bien «contrôlables» : Si nous faisons le paramètre à nouveau négatif, le système revient à l'équilibre stable. Au contraire, si le système perd sa stabilité fortement, la remise à une valeur négative du paramètre peut ne pas retourner le système à l'équilibre stable, car il peut avoir quitté sa région d'attraction. Notons que le type de la bifurcation Andronov-Hopf est déterminée par la stabilité de l'équilibre à la valeur du paramètre critique.

3- L'interprétation ci-dessus de la bifurcations Hopf super-critiques doit être considéré avec soin. Si l'on considère c comme une variable lente et on ajoute au système (3.6) la troisième équation

$$\dot{c} = \varepsilon$$

avec ε faible, mais positif, alors la série de temps qui en résulte $(x(t), y(t), c(t))$ va démontrer un certain degré de "netteté". Si la solution commence à un point initial (x_0, y_0, c_0) avec $c_0 < 0$, il converge vers l'origine et reste très proche de lui, même si c est positif, nous montrons pas d'oscillations. Ce n'est que lorsque c atteint une valeur positive finie que la solution s'éloigne de l'équilibre "fortement" et commence à osciller avec une amplitude relativement grande.

4- Enfin, nous considérons un système sans termes non linéaires :

$$\dot{z} = (c + i)z \tag{3.10}$$

Ce système a également une famille d'orbites périodiques d'amplitude croissante, mais ils sont tous présents à $c = 0$ lorsque le système dispose d'un centre à l'origine (voir Figure (3.15)). On peut dire que la parabole du cycle de limite "dégénère".

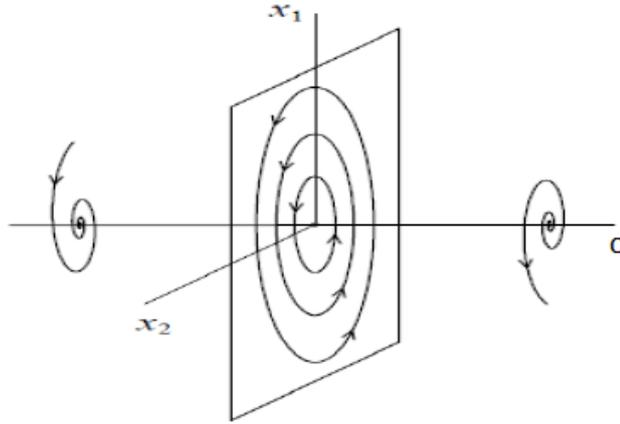


FIGURE 3.15 – Bifurcation Hopf dans le système linéaire

Dans le plan $c = 0$ dans (x, y, c) -espace. Cette observation fait naturelle l'apparition des petits cycles limites dans le cas non linéaire.

Ajoutons maintenant quelques termes d'ordre supérieur au système (3.6) et l'écrire sous la forme de vectorielle

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -1 \\ 1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o(\|X\|^4) \quad (3.11)$$

avec

$$X = (x + y)^T \quad \text{et} \quad \|X\|^2 = x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad o(\|X\|^4)$$

ces termes peuvent donner la dépendance par rapport à c .

Proposition 3.3.3 *Le système (3.11) est localement topologiquement équivalent près de l'origine du (3.6).*

Par conséquent, les termes d'ordre supérieur ne modifient pas le comportement de bifurcation du système

3.3.1 La valeur numérique du paramètre de bifurcation Hopf

Tout d'abord, rappelons les conditions d'obtention d'une bifurcation de Hopf [8]. En effet, on a le système dynamique (3.1) qui a un point fixe $x = x^*(c)$ et que sa matrice jacobienne possède une paire de valeurs propres complexes conjuguées λ_1, λ_2 :

$\lambda_{1,2} = \alpha(c) \pm i\omega(c)$ telle que :

- pour une certaine valeur d'un paramètre $c = c_r$,

$$\alpha(c_r) = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{d\alpha(c)}{dc} \right|_{c=c_r} \neq 0$$

- les $n - 2$ autres valeurs propres évaluées en c aient leur partie réelle strictement négative.
Si ces hypothèses sont satisfaites alors $(x^*(c_r), c_r)$ est un point de bifurcation Hopf de l'état d'équilibre $x^*(c_r)$ vers un cycle limite.

Chapitre 4

Applications

On a abordé d'abord le diagramme de bifurcation, et pour prouver l'étude précédente, on étudie l'application logistique et l'analyse d'un système financier.

Avant de faire des applications nous allons présenter un outil très efficace pour l'analyse des bifurcations qui est le diagramme de bifurcation.

4.1 Diagramme de bifurcation

L'objectif de l'analyse des bifurcations est d'arriver à un, ou plusieurs, diagrammes de bifurcations. Un diagramme de bifurcation est une portion de l'espace des paramètres sur laquelle tous les points de bifurcations sont représentés.

Les logiciels actuels ne permettent de construire que des diagrammes de bifurcation en deux dimensions. Les ensembles de points de bifurcations de même nature (Hopf, noeud-col etc.) forment donc des courbes, appelées courbes de bifurcation. Elles délimitent des zones de l'espace dans lesquelles le comportement qualitatif du système est monomorphe. Par exemple, trois zones sont délimitées dans la figure (4.1) :

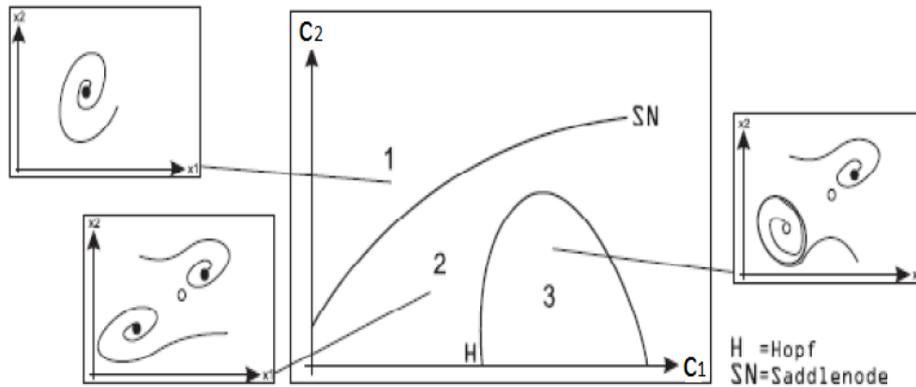


FIGURE 4.1 – Exemple de diagramme de bifurcation

Dans ce cas, pour c_1 croissant, le système est d'abord attiré par un équilibre stable (Zone 1). Ensuite une bifurcation noeud-col fait apparaître deux nouveaux équilibres, un stable et l'autre instable. Dans la nouvelle zone (Zone 2), deux attracteurs sont donc présents et l'équilibre atteint pas le système dépend des conditions initiales pour x_1 et x_2 . Enfin pour c_2 assez petit et c_1 assez grand, il existe une zone délimitée par une bifurcation de Hopf de l'équilibre initial. Dans ce cas (Zone 3), deux attracteurs sont présents mais ils ne sont pas de même nature : il y a un cycle et un équilibre. Le régime adopté dépend encore une fois des conditions initiales.

4.2 Application Logistique

L'application logistique est l'application g_a qui à x associe $ax(1-x)$ avec $a \in [0, 4]$. Elle est définie sur l'intervalle $[0, 1]$ et prend ses valeurs dans $[0, 1]$. L'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée sont identiques, l'application logistique peut donc être itérée, c'est-à-dire être appliquée plusieurs fois de suite. Cela permet de définir par récurrence la suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in [0, 1]$ et $x_{n+1} = g_a(x_n)$.

Cette application est un système dynamique dont la particularité dépend d'un paramètre a .

C'est donc tout naturellement que nous étudions g_a en fonction de a . On remarque ensuite que pour des valeurs de a particulières, l'application logistique change de dynamique. La recherche de ces valeur appelées bifurcation [26].

4.2.1 Historique de l'application logistique

L'application logistique $g_a = ax(1 - x)$ a pour principal intérêt la modélisation de l'évolution des populations. Elle a été proposée en 1838 par Pierre François Verhulst, mathématicien belge (1804-1849), afin de modéliser de manière non exponentielle l'évolution des populations. Ce nouveau modèle vient en réaction au modèle de Thomas Malthus (économiste britannique 1766-1834) qui prévoit une croissance exponentielle de la population. En effet, pour Malthus, chaque année, la population augmente dans un rapport fixe : $u_{n+1} = ru_n$ où u_n représente la population de l'année n et r le taux de croissance de la population. Ce modèle exponentiel prévoit donc une évolution infinie de la population et par conséquent, correspond mal à la réalité. Effectivement, aucun frein à l'évolution (pénurie de nourriture, maladie) n'est pris en compte. La correction du modèle de Malthus s'impose alors en prenant en compte ces freins.

L'évolution de chaque population se calcule à l'aide de l'application logistique $g(x) = ax(1 - x)$ et dépend de la valeur de a . En effet, pour certaines valeurs de a , le comportement de l'application change de manière significative. Plus tard, ces paramètres sont appelés bifurcations [26].

Définition 4.2.1 *Soit a un paramètre. L'application logistique est*

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow ax(1 - x) \end{cases} \quad (4.1)$$

Le système dynamique associé est : partant d'une condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}$, on pose

$$x_1 = g(x_0), x_2 = g(x_1), \dots, x_{n+1} = g(x_n), \dots$$

Remarque 4.2.2 *On dit que c'est un système dynamique de dimension 1 car $x \in \mathbb{R}$, et à temps discret car les points évoluent par étape (et non continument comme avec une équation différentielle ordinaire). La loi du mouvement est simplement $x_{n+1} = g(x_n)$. C'est une loi déterministe car la valeur de x_n à l'instant n et la loi $g(x)$ déterminent la valeur x_{n+1} à l'instant suivant $n + 1$.*

Proposition 4.2.3 *L'application g_a a une bifurcation en c_0 si et seulement si il existe un point fixe x de g_{c_0} tel que $g'(x) = \pm 1$.*

Maintenant, on va étudier l'application logistique (4.1) :

On a

$$g(x) = ax(1 - x)$$

Le point fixe x défini par $x = g(x)$ est donné par

$$g(x) = x \Leftrightarrow ax(1-x) = x. \text{ Alors } x = 0 \text{ ou } x = 1 - \frac{1}{a}$$

- * Si $a = 1$ il y a un seul point fixe $x_0 = \frac{a-1}{a}$.
- * Si $a > 1$ il y a deux points fixes $x_1 = 0$ et $x_2 = 1 - \frac{1}{a}$.
- * Si $a < 1$ il y a aussi deux points fixes $x_1 = 0$ et $x_2 = 1 - \frac{1}{a}$.

On a $\dot{g}(x) = a(1-x) - ax$ donc $\dot{g}(x_2) = a(1-2x_2) = 2-a$.

Ainsi si $1 < a < 3$ alors $|\dot{g}(x)| < 1$ alors le point fixe x_2 est attractif pour la dynamique de g et $\dot{g}(0) = a > 1$ donc le point fixe $x = 0$ est répulsif pour la dynamique de g .

Lorsque $a = 1$ on a $\dot{g}(x) = 1$ donc il y a une bifurcation à $a = 1$. Cette bifurcation est une bifurcation transcritique.

Lorsque $a = 3$ on a $\dot{g}(x) = -1$ donc il y a une bifurcation à $a = 3$. Cette bifurcation est une bifurcation transcritique.

Le diagramme de bifurcation rend compte du comportement de l'application logistique en fonction du paramètre a . Sur ce diagramme les différentes valeurs du paramètre a sont représentées en abscisses et en ordonnées celles de g_a . Nous construisons le diagramme en repérant pour chaque valeur de a les points de convergence de la suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$ définie par $x \in [0, 1]$ et $x_{n+1} = g_a(x_n)$. Nous obtenons :

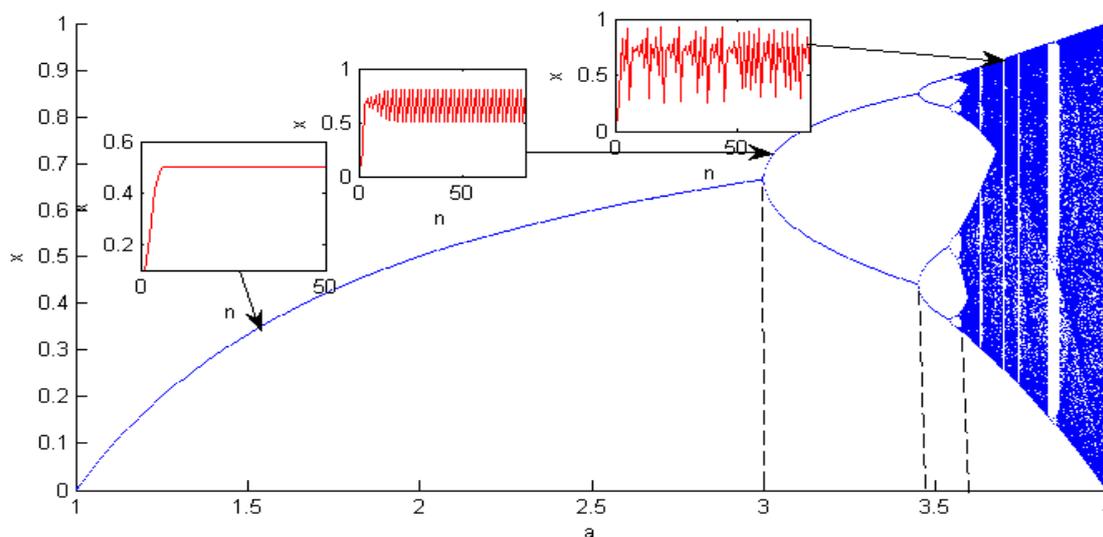


FIGURE 4.2 – Diagramme de bifurcation de l'application logistique

- * Pour $1 < a < 3$, il n'y a qu'une seule branche. La suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers le point fixe x_2 .
- * Pour $3 < a < 3.44$, il y a deux branches. Ceci correspond au comportement périodique, l'application g_a a une orbite périodique de période 2.
- * Quand il y a 4 branches, il y a une orbite périodique de période 4. Puis, pour 8 branches, c'est une orbite périodique de période 8, etc. Cette partie du diagramme est appelée cascade ou arbre de doublement de la période.
- * Pour $3.57 < a < 4$ la naissance du chaos.

4.3 Système Financier

Il est progressivement reconnu que les idées de la théorie de la dynamique complexes sont utiles pour l'économie et la finance. En fait, au début des années 1950 Richard Goodwin [5] utilise des techniques non linéaires dans l'étude des processus de la dynamique économiques. Avec les progrès de la recherche sur les systèmes complexes, des concepts et des méthodes dans la dynamique non linéaire comme la stabilité, bifurcation, catastrophe et le chaos etc ont été appliquées à des problèmes économiques et des résultats positifs ont été obtenus. La dynamique non-linéaire est devenue une approche importante pour l'analyse économique.

La bifurcation se réfère au phénomène lorsque le paramètre du système atteint une valeur critique, le comportement du système change soudainement, cela peut entraîner la rupture de l'ensemble du système d'ingénierie et de provoquer une perte inestimables. Les contrôles de bifurcation ont suscité un grand intérêt dans la recherche scientifique non linéaire récente.

4.3.1 Etude d'un système financier

Récemment, les études [12, 13] ont rapporté un modèle dynamique de la finance, composée de trois équations différentielles du premier ordre. Le modèle décrit la variation dans le temps de trois variables d'état : le taux d'intérêt x , la demande d'investissement y , et l'indice des prix z . Les facteurs qui influencent les changements de x proviennent principalement de deux aspects : tout d'abord c'est la contradiction du marché de l'investissement, l'excédent entre l'investissement et l'épargne ; deuxièmement, c'est l'ajustement de la structure de prix des biens. Le taux de variation de y est en proportion avec le taux d'investissement, et en proportion par inversion avec le coût de l'investissement et le taux d'intérêt. Les changements de z , d'une part, sont contrôlés par la contradiction entre

l'offre et la demande du marché commercial, et d'autre part, sont influencés par le taux d'inflation. Ici, nous supposons que le montant des offres et des demandes de publicités est constante dans une certaine période de temps, et que le montant des offres et des demandes de publicités est en proportion par inversion avec les prix.

Toutefois, les modifications du taux d'inflation peuvent en effet être représentés par les changements du taux d'intérêt réel et le taux d'inflation égal au taux d'intérêt nominal soustrait le taux d'intérêt réel. Le modèle original a neuf paramètres indépendants à ajuster, il doit encore être simplifié. Par conséquent, en choisissant le système de coordonnées approprié et fixer une dimension appropriée pour chaque variable d'état, nous pouvons obtenir le modèle le plus simplifié suivant avec seulement trois paramètres les plus importants :

Le système dynamique s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = z + (y - a)x \\ \dot{y} = 1 - by - x^2 \\ \dot{z} = -x - cz \end{cases} \quad (4.2)$$

L'espace des phases est tridimensionnel. Les valeurs de b et c sont fixées, respectivement à 0.1 et 1 : Le paramètre de contrôle est a qui est positif.

L'équilibre du modèle

On cherche les points d'équilibre qui sont les solutions du système.

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

on trouve que :

-si $1 - b(a - \frac{1}{c}) \leq 0$: on a un seul point fixe : $p_1 = (0, \frac{1}{b}, 0)$

-si $1 - b(a - \frac{1}{c}) > 0$: on a trois points fixe :

$$p_1 = (0, \frac{1}{b}, 0), p_{2,3} = (\pm\sqrt{1 - b(a + \frac{1}{c})}, (a + \frac{1}{c}), \pm\sqrt{1 - b(a + \frac{1}{c})})$$

On a $b = 0.1$, $c = 1$ et $a \in \mathbb{R}^+$ alors :

Pour $a \geq 9$, il n'y a qu'un seul point d'équilibre $p_1 = (0, 10, 0)$.

Et, pour $a < 9$, il y a trois points d'équilibre : $p_1 = (0, 10, 0)$, $p_2 = (-\sqrt{\frac{9-a}{10}}, 1+a, \sqrt{\frac{9-a}{10}})$ et $p_3 = (\sqrt{\frac{9-a}{10}}, 1+a, -\sqrt{\frac{9-a}{10}})$.

L'étude de la stabilité des points d'équilibre repose sur le signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice Jacobienne A obtenu en linéarisant le système autour d'un point d'équilibre.

L'expression de la matrice Jacobienne A du système est :

$$A = \begin{pmatrix} y - a & x & 1 \\ 2x & \frac{-1}{10} & 0 \\ -1 & 0 & -c \end{pmatrix}$$

La stabilité du point $p_1 = (0, 10, 0)$

On a la matrice jacobienne associée

$$A_{p_1} = \begin{pmatrix} 10 - a & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-1}{10} & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

son polynôme caractéristique est donné par :

$$P_1(\lambda) = \lambda^3 + (a - 8.9)\lambda^2 + (1.1a - 9.9)\lambda + (0.1a - 0.9)$$

Les valeurs propres de la matrice A_{p_1} sont les racines du polynôme $p(\lambda)$.

D'après le critère de Routh-Hurwitz les parties réelles de ces valeurs propres sont tous négatives si et seulement si :

$$\begin{cases} a - 8.9 > 0 \\ 0.1a - 0.9 > 0 \\ (a - 8.9)(1.1a - 9.9) - (0.1a - 0.9) > 0 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} a > 8.9 \\ a > 9 \end{cases} \Rightarrow a > 9$$

De plus, les valeurs propres de A_{p_1} sont :

$$\lambda_1 = -0.1 \text{ et } \begin{cases} \lambda_{2,3} = \frac{9-a \pm \sqrt{a^2 - 22a + 117}}{2} \text{ si } a \in]0, 9[\cup]13, +\infty[\\ \lambda_{2,3} = \frac{9-a \pm i\sqrt{a^2 - 22a + 117}}{2} \text{ si } a \in]9, 13[\end{cases}$$

Donc le point d'équilibre est asymptotiquement stable si et seulement si $a > 9$.

D'après la subsection (3.3.1) on a :

$\lambda_{2,3} = \alpha(a) \pm i\omega(a)$ tel que $\alpha(a) = \frac{9-a}{2}$ et $\omega(a) = \frac{\sqrt{a^2-22a+117}}{2}$
 lorsque $a = a_r = 9$ on a :

$$\alpha(9) = 0 \text{ et } \left. \frac{d\alpha(c)}{dc} \right|_{c=c_r} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

Les deux hypothèses sont vérifiées, alors pour $a = 9$ on a une bifurcation Hopf.

La stabilité pour les deux autres points

La matrice jacobienne associée est

$$A_{p_{2,3}} = \begin{pmatrix} 1 & \pm\sqrt{\frac{9-a}{10}} & 1 \\ \pm 2\sqrt{\frac{9-a}{10}} & -\frac{1}{10} & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

son polynôme caractéristique est donné par :

$$P_{2,3}(\lambda) = \lambda^3 + 0.1\lambda^2 + \left(-\frac{1}{5}a + 1.8\right)\lambda + \left(-\frac{1}{5}a + 1.8\right)$$

Les valeurs propres de la matrice $A_{p_{2,3}}$ sont les racines du polynôme $P_{2,3}(\lambda)$.

D'après le critère de Routh-Hurwitz les parties réelles de ces valeurs propres sont tous négatives si et seulement si :

$$\begin{cases} -\frac{1}{5}a + 1.8 > 0 \\ 0.1\left(-\frac{1}{5}a + 1.8\right) - \left(-\frac{1}{5}a + 1.8\right) > 0 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} a < 9 \\ a > 9 \end{cases} \Rightarrow a \in \emptyset$$

Donc, les parties réelles de ces valeurs propres, ne seront jamais toutes négatives en même temps, par conséquent les deux points d'équilibre $P_{2,3}$ ne seront jamais stables.

Donc les deux points d'équilibre $p_{2,3}$ sont toujours instables.

Notons que le système étudié est symétrique, alors cette symétrie joue un rôle très important pour la bifurcation fourche.

Pour $a < 9$, le système possède alors un point fixe p_1 qui a été stable lorsque $a \geq 9$ et il est devenu instable en diminuant a ou de la de 9.

Lorsque a atteint la valeur 9, le système se déstabilise : le point fixe perd sa stabilité : il y a donc une bifurcation. On voit apparaître alors deux points fixes instables p_2 et p_3 . Il y a

eu en quelque sorte dédoublement du point fixe naissance de deux états symétriques. Le diagramme de bifurcation figure (4.12) correspondant montre une branche qui bifurque en diminuant la valeur de a à partir de la valeur critique de bifurcation $a = 9$. Dans ce cas on observe une bifurcation fourche.

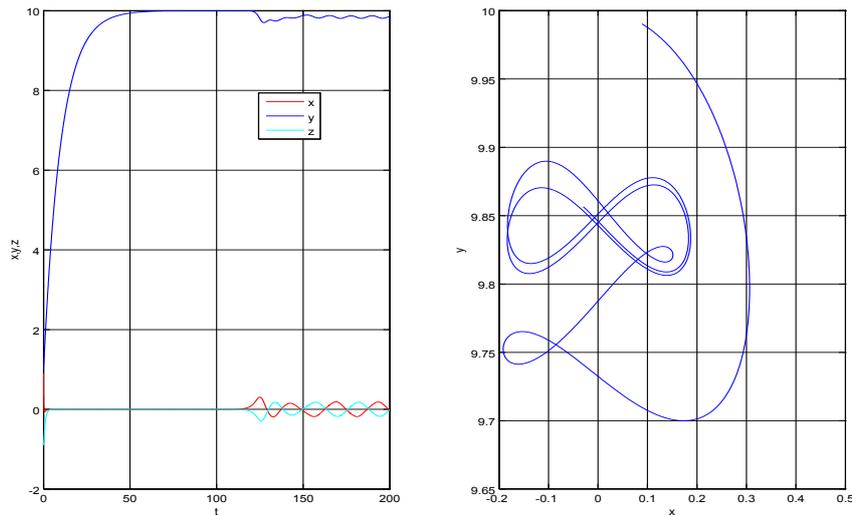


FIGURE 4.3 – Solution et diagramme de bifurcation du système financier cas $a = 8.9$

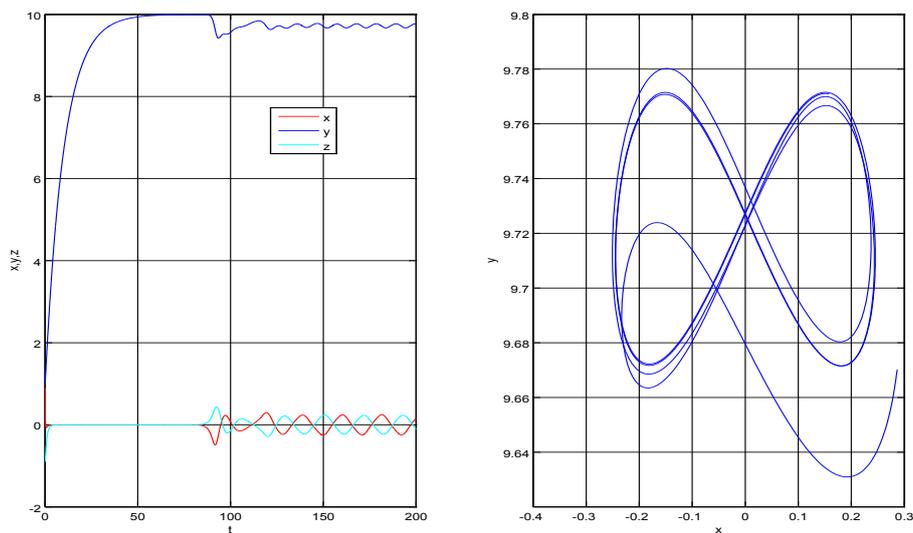


FIGURE 4.4 – Solution du système financier cas $a = 8.8$

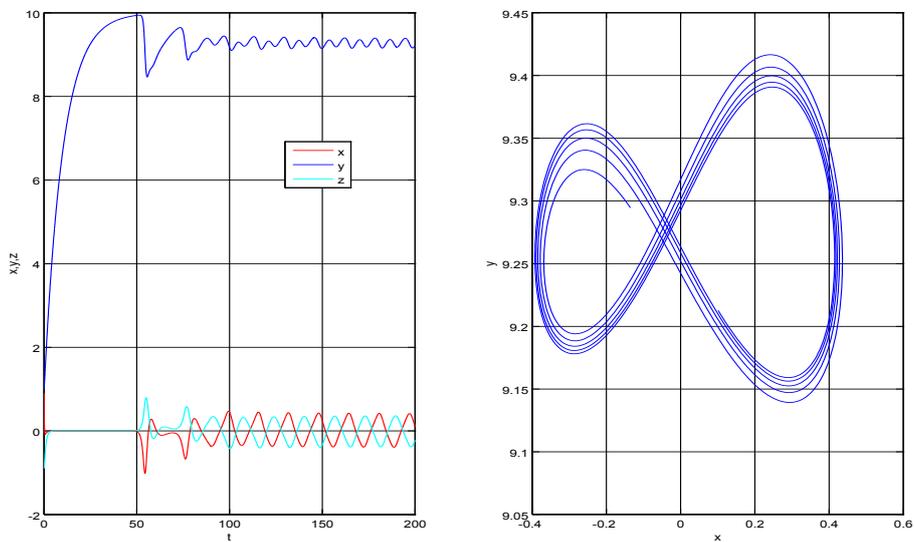


FIGURE 4.5 – Solution du système financier cas $a = 8.4$

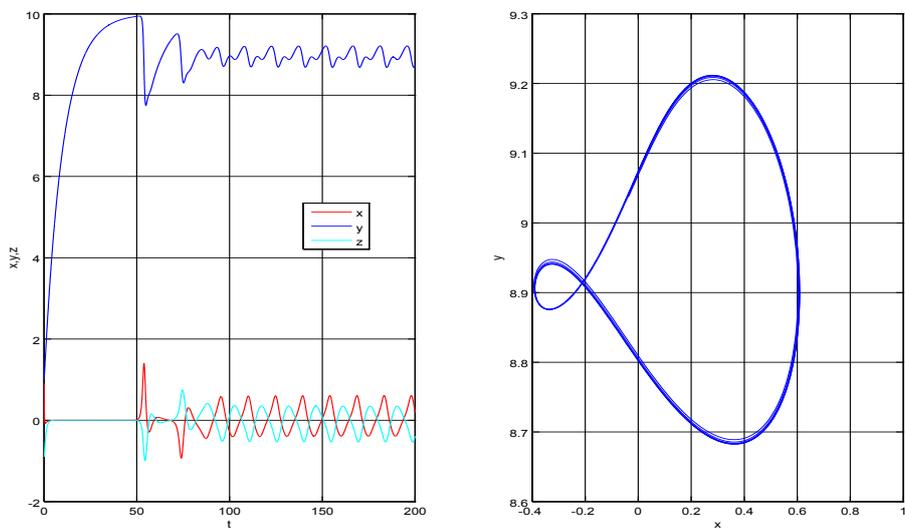


FIGURE 4.6 – Solution du système financier cas $a = 8.1$

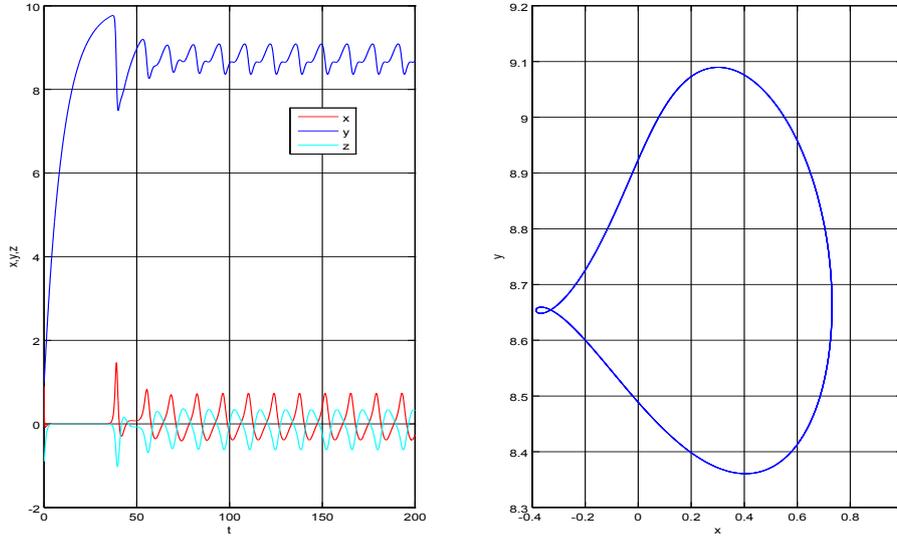


FIGURE 4.7 – Solution du système financier cas $a = 7.9$

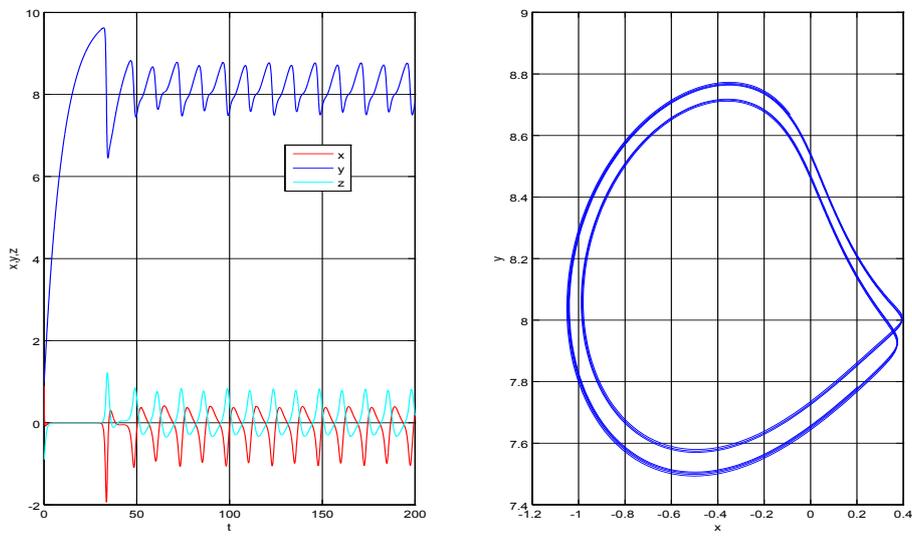


FIGURE 4.8 – Solution du système financier cas $a = 7.366$

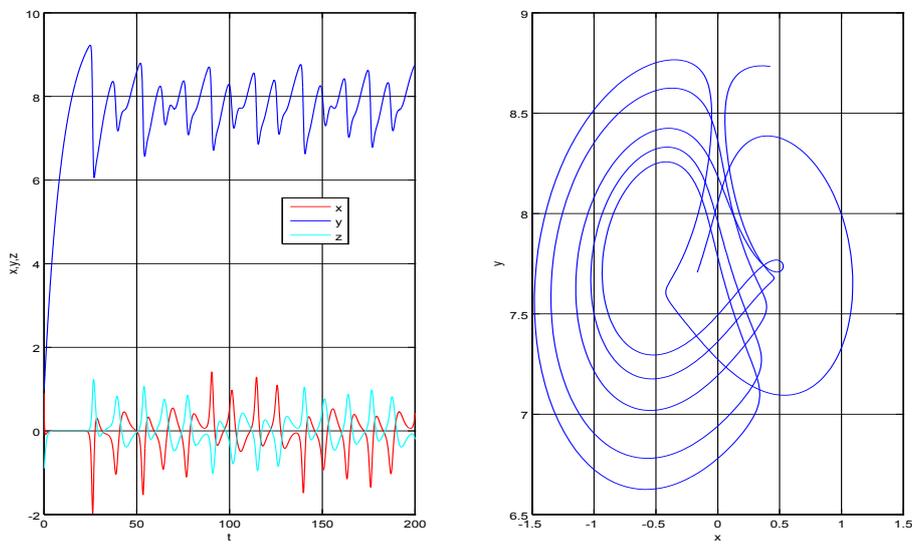


FIGURE 4.9 – Solution du système financier cas $a = 6.98$

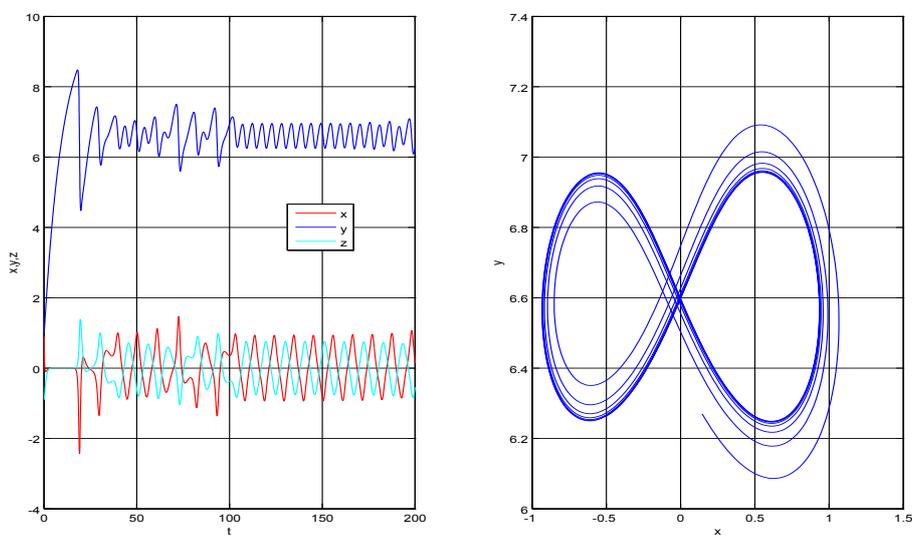


FIGURE 4.10 – Solution du système financier cas $a = 5.87$

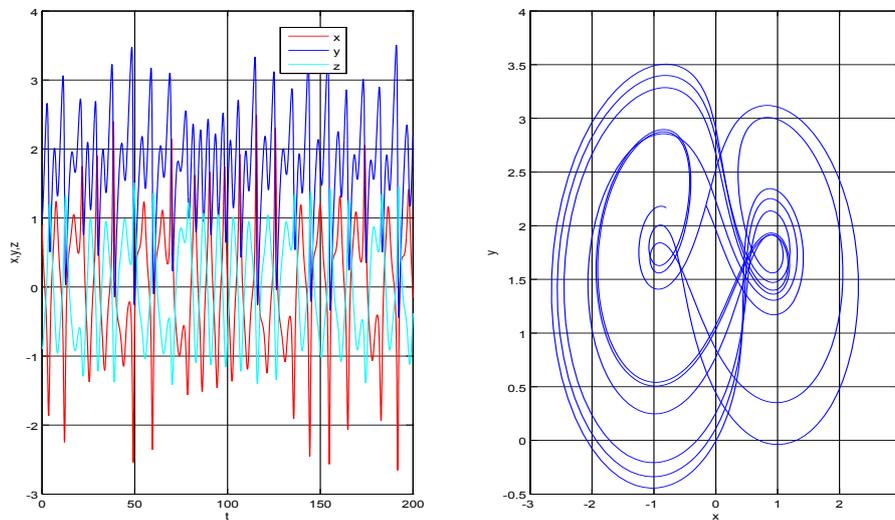


FIGURE 4.11 – Solution du système financier cas $a = 1$

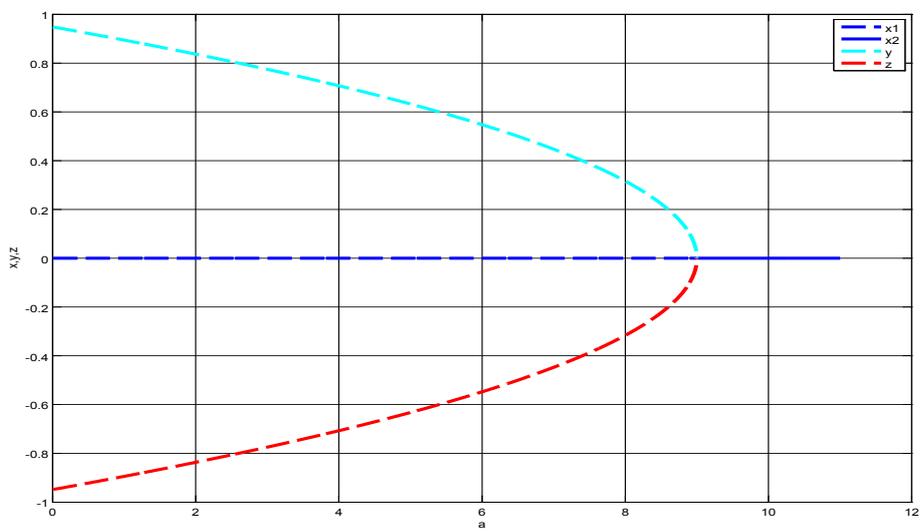


FIGURE 4.12 – Diagramme de bifurcation fourche

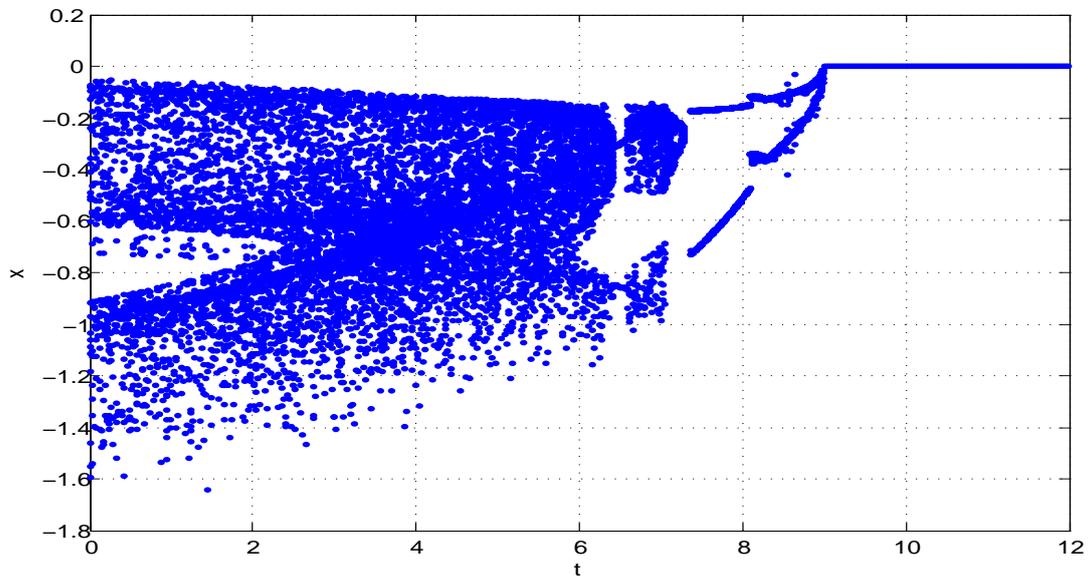


FIGURE 4.13 – Diagramme de bifurcation du système financier

Conclusion

Le but de ce mémoire est l'étude des bifurcation dans quelques systèmes dynamiques. Dans les deux premiers chapitres nous avons rassemblé les outils nécessaires pour cette étude (les notions du systèmes dynamiques et de stabilité).

Cette étude a été présentée dans le troisième chapitre, dont le but d'analysé les différentes types de bifurcation. D'après les exemples qu'on a vu nous avons remarqué que le comportement des systèmes dynamiques dépend crucialement de leurs paramètres de contrôle. Avant de devenir chaotique, ces systèmes présentes des changements brutaux de comportement. On dit alors qu'une bifurcation se produit à chaque changement.

Annexe

Dans cette partie, nous introduisons des algorithmes en Matlab.

1. L'application logistique :

Résolution de (4.1)

```
close all;
clear all;
clc;
avalues=1 :0.005 :4;
N=1000;
a=avalues;
x0 = [];
for i=1 :length(avalues)
x0=[x0 rand(1)];
% x0=0.1;
end
x=x0;
for n=1 :.3*N
x=a.*x.*(1-x);
end
hold on
for n=.3*N :N
x=a.*x.*(1-x);
% If you use the following, it will plot lines instead of dots!
% plot(a,x)
subplot(231)
plot(a,x,',' , 'MarkerSize',0.5)
end
a1=2;
y1(1)=0.1;
```

```

n1(1)=1;
for i=1 :100
n1(i+1)=i+1;
y1(i+1)=(a1*y1(i))*(1-y1(i));
end
a2=3.2;
y2(1)=0.1;
n2(1)=1;
for i=1 :100
n2(i+1)=i+1;
y2(i+1)=(a2*y2(i))*(1-y2(i));
end
a3=3.7;
y3(1)=0.1;
n3(1)=1;
for i=1 :100
n3(i+1)=i+1;
y3(i+1)=(a3*y3(i))*(1-y3(i));
end
subplot(234)
plot(n1,y1)
subplot(235)
plot(n2,y2)
subplot(236)
plot(n3,y3)
figure(1)
title('Application logistique')
hold off

```

2. Système financier :

Résolution du système (4.2) on utilisons la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 :

```

clear all;
close all;
clc;
T=100;
a=1;
b=0.1;

```

```

c=1;
x(1)=0+0.9;%sqrt((9-a)/10);
y(1)=1;%a+1;
z(1)=0-0.9;%-sqrt((9-a)/10);
N=999;
h=T/N;
t=0 :h :T;
for i=1 :N
k1=h*(z(i)+(y(i)-a)*x(i));
l1=h*(1-b*y(i)-(x(i)*x(i)));
p1=h*(-x(i)-(c*z(i)));
k2=h*((z(i)+p1/2)+((y(i)+l1/2)-a)*(x(i)+k1/2));
l2=h*(1-(b*(y(i)+l1/2))-(x(i)+k1/2)*(x(i)+k1/2));
p2=h*(-(x(i)+k1/2)-(c*(z(i)+p1/2)));
k3=h*((z(i)+p2/2)+((y(i)+l2/2)-a)*(x(i)+k2/2));
l3=h*(1-(b*(y(i)+l2/2))-(x(i)+k2/2)*(x(i)+k2/2));
p3=h*(-(x(i)+k2/2)-(c*(z(i)+p2/2)));
k4=h*((z(i)+p3)+((y(i)+l3-a)*(x(i)+k3)));
l4=h*(1-(b*(y(i)+l3))-(x(i)+k3)*(x(i)+k3));
p4=h*(-(x(i)+k3)-(c*(z(i)+p3)));
x(i+1)=x(i)+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
y(i+1)=y(i)+(1/6)*(l1+2*l2+2*l3+l4);
z(i+1)=z(i)+(1/6)*(p1+2*p2+2*p3+p4);
%figure(1)
%plot3(x(i+1),y(i+1),z(i+1)); hold on
if(i>3000)
xx(jj)=x(i+1);
yy(jj)=y(i+1);
zz(jj)=z(i+1);
jj=jj+1;
end
end
subplot(1,2,1)
plot(t,x,'r',t,y,'b',t,z,'c')
grid on
subplot(1,2,2)

```

```

plot(x,y)
grid on
Solution du système (4.2) pour avoir le diagramme de bifurcation :
clear all;
close all;
clc;
T=100;
a=0.01;
b=0.1;
c=1;
jj=1;
for j=1 :1200
x(1)=0+0.9; %sqrt((9-a)/10);
y(1)=1; %a+1;
z(1)=0-0.9; %-sqrt((9-a)/10);
N=999;
h=T/N;
t=0 :h :T;
if (a>9)
N=1010;
else
N=20000;
end
for i=1 :N
k1=h*(z(i)+(y(i)-a)*x(i));
l1=h*(1-b*y(i)-(x(i)*x(i)));
p1=h*(-x(i)-(c*z(i)));
k2=h*((z(i)+p1/2)+((y(i)+l1/2)-a)*(x(i)+k1/2));
l2=h*(1-(b*(y(i)+l1/2))-(x(i)+k1/2)*(x(i)+k1/2));
p2=h*(-(x(i)+k1/2)-(c*(z(i)+p1/2)));
k3=h*((z(i)+p2/2)+((y(i)+l2/2)-a)*(x(i)+k2/2));
l3=h*(1-(b*(y(i)+l2/2))-(x(i)+k2/2)*(x(i)+k2/2));
p3=h*(-(x(i)+k2/2)-(c*(z(i)+p2/2)));
k4=h*((z(i)+p3)+((y(i)+l3-a)*(x(i)+k3)));
l4=h*(1-(b*(y(i)+l3))-(x(i)+k3)*(x(i)+k3));
p4=h*(-(x(i)+k3)-(c*(z(i)+p3)));

```

```

x(i+1)=x(i)+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4) ;
y(i+1)=y(i)+(1/6)*(l1+2*l2+2*l3+l4) ;
z(i+1)=z(i)+(1/6)*(p1+2*p2+2*p3+p4) ;
if (i>1000)
if(a<9)
if (abs(x(i+1)-sqrt((9-a)/10))<0.001)
yy(jj)=y(i) ;
zz(jj)=z(i) ;
aa(jj)=a ;
jj=jj+1 ;
end
else
if (abs(x(i+1))<0.001)
yy(jj)=y(i) ;
zz(jj)=z(i) ;
aa(jj)=a ;
jj=jj+1 ;
end
end
end
%figure(1)
%plot3(x(i+1),y(i+1),z(i+1)); hold on
end
a=a+0.01 ;
end
figure(1)
plot(aa,yy,''); grid on
figure(2)
plot(aa,zz,''); grid on
%plot(t,x,'r',t,y,'b',t,z,'c')
%title(' la solution du système financier ')
%figure(2)
%plot(x,y)
%grid on
%title('Système financier')
%figure(3)

```

```

%plot(a,y)
%grid on
%title('Système financier')
Solution du système (4.2) pour avoir le diagramme de la bifurcation fourche :
clear all;
clc;
a=0.01
j=1;
for i=1 :1100
if (a<9)
a1(i)=a;
x1(i)=0;
y(i)=sqrt((9-a)/10);
z(i)=-sqrt((9-a)/10);
else
a2(j)=a;
x2(j)=0;
title(' Bifurcation ')
j=j+1;
end
a=a+0.01;
end
plot(a1,x1'', 'b', 'MarkerSize',0.5)
hold on; grid on
plot(a2,x2'', 'y', 'MarkerSize',0.5)
hold on; grid on
plot(a1,y'', 'c', 'MarkerSize',0.5)
hold on; grid on
plot(a1,z'', 'r', 'MarkerSize',0.5)
hold on; grid on

```

Bibliographie

- [1] Abdelouahab Mohammed Salah . Les systèmes chaotiques à dérivées fractionnaires. Mémoire de magistère, Université de Mentouri, Constantine, 2009.
- [2] Abdelouahab Mohammed Salah , Nasr-Eddine Hamri, and Junwei Wang². Chaos Control of a Fractional-Order Financial System. Department of Science and Technology, University Center of Mila, Mila 43000, Algeria. Cisco School of Informatics, Guangdong University of Foreign Studies, Guangzhou 510006, China. Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering Volume 2010, Article ID 270646. Received 4 November 2009 ; Revised 29 April 2010 ; Accepted 2 June 2010.
- [3] Cherifa Bennani. Stabilité et Estimation de l'état des Systèmes Dynamiques non Linéaire et Applications. Mémoire de magistère, université de Mouloud Mammeri, Tizi-ouzou, 2011.
- [4] Claude Gomez. Systèmes dynamiques, Février 2007.
- [5] D. Zengru and M. Sanglier, A two-dimensional logistic model for the interaction of demand and supply and its bifurcations, Chaos, Solitons and Fractals, Vol. 7 (1996) No. 12, pp. 2259-2266.
- [6] Frédéric Faure, Notes de cours, Systèmes dynamiques, chaos et applications, Université Joseph Fourier, Grenoble ; Master de Physique M1. Version : 25 décembre 2013.
- [7] H. K, Khalil. Non Linear System, Third Edition, Prentice Hall, 2002.
- [8] Hopf, E., "Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines differential-systems," Bereich. Math. Phys. Kl. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig, 94, 1-22, et Bereich. Math. Phys. Kl. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig, 95(1), 3-22, (1942).
- [9] Ibtissam Talbi. Systèmes dynamiques non linéaire et phénomènes de chaos. Mémoire de magistère, Université de Mentouri, Constantine, 2010.
- [10] Imen Ellouze. Étude de la stabilité et de la stabilisation des systèmes à retard et des systèmes impulsifs. Mémoire pour l'obtention du Doctorat de l'Université Paul Verlaine de Metz et de l'Université de Sfax. 15 décembre 2010.

- [11] J. H. Ma and Y. S. Chen, “Study for the bifurcation topological structure and the global complicated character of a kind of nonlinear finance system. I,” *Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 22, no. 11, pp. 1240–1251, 2001.
- [12] J. H. Ma and Y. S. Chen, “Study for the bifurcation topological structure and the global complicated character of a kind of nonlinear finance system. II,” *Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 22, no. 12, pp. 1375–1382, 2001.
- [13] Jacques Le Bourlot. *Introduction aux systèmes dynamiques dissipatifs*, Année 2008-2009.
- [14] J.Bricmont. *Unité de Physique théorique et mathématique. Introduction à la dynamique non linéaire*, PHYS 2111, Année académique 2009-2010.
- [15] Jérémy Cochoy. *Méthodes numériques ROCK4 pour la résolution d'équations différentielles et étude de l'algèbre pré-Lie*, 1^{er} février 2011.
- [16] Jean-Olivier Irisson. *L'analyse de bifurcations et son application à un problème de dynamiques adaptatives*. Séminaire Biologie Quantitative, Mardi 10 Décembre 2002.
- [17] Menacer Tidjani. *Synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques à dérivées fractionnaires*. Mémoire de magistère, Université de Mentouri, Constantine.
- [18] Nicolas Petit, Pierre Rouchon. *Automatique Dynamique et contrôle des systèmes*. MINES ParisTech CAS - Centre Automatique et Systèmes Unité Mathématiques et Systèmes. Février 2009.
- [19] Nicole Berline et Claude Sabbah. *Systèmes dynamiques le premier retour* Journées X-UPS 1996, suivi de (réédition) *Aspects des systèmes dynamiques : des équations différentielles aux itérations de fonctions* Journées X-UPS 1994. Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique. 91128 Palaiseau. U.R.C.169 du C.N.R.S. Septembre 1996.
- [20] Pierre Puiseux. *Jeux numériques avec le chaos*. LMA Université de Pau.
- [21] Paul Manneville. *Systèmes dynamiques et chaos*. LadHyX, Ecole polytechnique pops@ladhyx.polytechnique.fr, DEA 1998-1999.
- [22] Paul Glendinnig. *Stability, Instability and Chaos : an introduction to the theory of nonlinear differential equations*. Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics University of Oambridge. Cambridge University Press 1994. First Published 1994.
- [23] Steven H.Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos, With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*.

- [24] Sébastien Kolb. Théorie des bifurcations appliquée à l'analyse de la dynamique du vol des hélicoptères. Thèse pour obtenir le grade de Doctorat de L'INP Grenoble. le 27 juin 2007.
- [25] Seigneur Agathe sous la direction de Rechtman Ana. Les bifurcations de l'application logistique. Septembre 2012.
- [26] Selwa Benyahia, Saida Omara, Amina Lahcene. La théorie des bifurcations. Mémoire de licence, Centre universitaire de Mila, 2013.
- [27] William E.Boyce. Richard C.Diprima. Elementry differential equations and boundary value problems. Ninth edition. Department of Mathematical Sciences Rensselaer Polytechnic Institute.
- [28] Xuedi Wang, Yang Zhou, Kaihua Shi. Bifurcation Controlling for a Nonlinear Financial System. Nonlinear Scientific Research Center, Faculty of Science Jiangsu University, Zhenjiang, Jiangsu 212013, P.R. China Received 4 March 2013 , accepted 10 December 2013.
- [29] Yuri A. Kuznetsov. Elements of Applied Bifurcation Theory, Second Edition. Departments of Mathematics and Statistics Columbia University New York, NY 10027, USA. 1998, 1995 Springer-Verlag New york, Inc.

Résumé

L'étude des bifurcations consiste à étudier un système dynamique dépendant d'un paramètre et à décrire les différences qualitatives de comportement du système suivant les valeurs de ce paramètre. Il se trouve que le comportement d'un tel système peut se présenter dans un diagramme de bifurcation.

Dans ce mémoire, nous avons présenté quelques notions des systèmes dynamiques, (notions de stabilité, analyse de bifurcation), et comme application, on a étudié deux exemples, le premier est un système discret (une application logistique), nous avons trouvé de quelle bifurcation elle subit, le second d'un système financier nous avons constaté qu'un petit changement du paramètre nous donne un nouveau comportement de bifurcation.

Mots clés

Systemes dynamiques, Stabilités, Bifurcations.

Abstract

The study of bifurcations is to study a dependent of a parameter and describe the qualitative differences in behavior of the system according to the values of this parameter dynamic system. It turns out that the behavior of such a system can be presented in a bifurcation diagram.

In this brief, we have presented some concepts of dynamic systems, (notions of stability, bifurcation analysis), and as an application, we studied two examples, the first is a discrete system (logistics application), we found what she undergoes bifurcation, the second of a financial system we found that a small change of the parameter gives us a new bifurcation behavior.

Keys words

Dynamical systems, stabilities, Bifurcations.

الديناميكي. هي هذا يمكن تقديمها النوعية .
هذه درسنا مثالين، هو المفاهيم (تطبيق) الديناميكية، (مفاهيم وتحليل (وكتطبيق،
تغيير طفيف في يعطينا سلوك جديدة. يخضع له،

الكلمات المفتاحية

النظام الديناميكي .