الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……………

Centre Universitaire
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Licence

En : - Filière Mathématiques

THEORIE SPECTRALE DES OPERATEURS NON BORNES

Préparé par : Kheloufi Aicha
Belfar Sana
Yakhlef Hanane

Encadré par: Ahmed yahia Rakia

Année universitaire :2014/2015

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ يَرْفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنكُمْ
وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ
وَاللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ ﴾

(المجادلة: 11)

Remerciement

Nous tenons à remercier toujours et par cette occasion, en premier et avant tout, notre créateur <<ALLAH>>

parce que sans sa majesté et son aide nous n'aurions pu arriver à ce stade scientifique.

*Nous présentons nos sincères gratitudes et remerciements à notre encadreur «Docteur **Ahmed Yahia Rakia** »pour le grand soutient morale qu'elle nous a apportée au cours de notre projet et aussi pour son aide précieuse et ses conseils judicieux qu'elle nous a fait bénéficier.*

Nous tenons à exprimer nos sincères remerciements à tout le personnel de l'institut de mathématique ainsi que tous les enseignants qui nous ont enseignés durant toutes nos années d'étude.

Enfin, Nous exprimons nos plus vifs remerciements à toute

Les personnes qui nous a aidé à élaborer ce travail de proche ou de loin.

Table des matières

Introduction

Beaucoup de questions en sciences appliquées menent à des problèmes de résolution d'équations différentielles. La résolution de ces équations revient dans la plupart du temps à inverser des applications définies sur un espace fonctionnel adéquat. Lorsque ces équations sont linéaires on a recout aux opérateurs linéaires.

L'importance que constitue l'étude des opérateurs linéaires, nous à poussé à choisir ce thème. Ce mémoire est réparti sur une introduction, quatre chapitres et une conclusion. Nous débutons, tout d'abord par décrire en détail les types d'opérateur linéaires, leurs structures.... On citera en premier lieu, les opérateurs bornés, les principes fondamentaux et quelques propriétés.

Dans le deuxième chapitre nous avons présenté les opérateurs non-bornés, leurs graphes avec quelques exemples. On étudie l'opérateur fermé, l'adjoint et le spectre .

Dans le troisième chapitre nous avons vu le spectre d'un opérateur compact et opérateur auto-adjoints avec les propriétés spectrales, nous avons écrit quelques grands théorèmes qui évoquent la relation entre la théorie spectrale comme $(Riesz - Schauder)$ et $(Théorème\ spectral\ des\ opérateurs\ auto - adjoints)$, la diagonalisation des opérateurs compacts.

Dans le quatrième chapitre on parle de la théorie spectrale et les opérateurs non bornés dans un espace de Hilbert, on citera quelques resultats comme le théorème spectrale des opérateurs compacts et auto-adjoints puis on donne un exemple sur les opérateurs non bornés .

Enfin, nous achèverons ce mémoire par une conclusion.

Notation :

$\mathbb{R}$: corps des nombres réels.

$\mathbb{C}$: corps des nombres complexes.

H : espace de Hilbert

$B(H)$: Boule unité fermée de H.

T : opérateur linéaire.

T^* : adjoint d'un opérateur linéaire.

$\overline{T}$: extension d'opérateur linéaire.

$D(T)$: domaine de définition de l'opérateur T.

$(D(T), T)$: opérateur non borné.

$G(T)$: graphe d'opérateur T.

$\rho(T)$: ensemble résolvant d'opérateur T.

$K(X, Y)$: espace des opérateurs compacts de X dans Y.

$L(H)$: espace des opérateurs linéaire continus dans H.

E : espace de Banach.

$\sigma(T)$: spectre d'opérateur T.

$\rho(a)$: rayon spectral de a .

λ : valeur spectral de T.

(Y, A) : espace mesurable .

$P(H)$: ensemble des projections orthogonales.

$V_P(T)$: ensemble des valeurs propres de T.

B_∞ : ensemble des opérateurs compacts.

Chapitre 1

Généralités sur les opérateurs bornés

1.1 Introduction

On présente dans ce chapitre les concepts de base de notre étude, nous allons commencer par rappeler les notions d' opérateur borné sur un espace de Hilbert H.

Tous les Hilbert sont considérés sur $\mathbb{C}$.

On note aussi que tous les opérateurs utilisés dans ce mémoire sont linéaires.

1.2 produit scalaire

Définition 1.2.1 *Un espace vectoriel complexe H est dit espace préhilbrtien (ou espace unitaire) si à chaque couple de vecteurs x et y dans H, on associe un nombre complexe noté $\langle x, y\rangle$, appelé produit intérieur ou produit scalaire de x et y vérifiant les axiomes suivants :*

$1-\langle x, y\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$

$2-\langle x+y, z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$

$3-\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ *si* $x \in H$, $y \in H$ *et* $\alpha \in \mathbb{C}$

$4-\langle x, x\rangle \geq 0$ *pour tout* $x \in H$

$5-\langle x, x\rangle = 0$ *si et seulement si* $x =$ *0*

Exemple 1.2.2 *L'espace* $L^2(R) = \left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable tel que} : \int_{\mathbb{R}} \mid f(x) \mid^2 dx < +\infty \right\}$.

le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int f(x)\,\overline{g(x)}\, dx$ *et la norme est définie par* $\| f \| = (\int_{\mathbb{R}} \mid f(x) \mid^2 dx)^{\frac{1}{2}}$.

Définition 1.2.3 *Soit T tel que $T : H \to H$ un opérateur linéaire sur H (H étant un Hilbert) .*

On dit que :

T est continu (borné)

s'il existe $C \geq 0$ tel que : $\| Tx \|_H \leq C \| x \|_H$

Exemple 1.2.4 *Soit $H = L^2(]0,1[)$ et $T\ f(x) = x\ f(x)$.*

Alors : $\| Tf \|_2^2 = \int_0^1 | Tf(x) |^2\, dx = \int_0^1 x^2 \mid f(x) \mid^2 dx \leq \| f \|_2^2$

Donc T et borné sur H.

Proposition 1.2.5 *Soit $T \in B(H)$ alors :*

$\| T \| = \sup_{x \in H} \| Tx \| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \inf \{C \geq 0 \ \ \| f(x) \|_H \leq C \| x \|_H\}$

est la norme de T.

Théorème 1.2.6 *Si $T \in B(H)$ et si $\langle Tx,\, x\rangle = 0$, pour tout $x \in H$, et que H est un $\mathbb{C}$-Hilbert alors : $T = 0$.*

Preuve. Soit $x,\, y \in H$. Puis que H est un espace vectoriel alors :

$x + y \in H$.

D'ou $\langle T(x,\, y) + (x,\, y)\rangle = 0$, or $\langle Tx,\, x\rangle = 0$ et $\langle Ty,\, y\rangle = 0$ ceci implique que :

$\langle Tx,\, y\rangle + \langle Ty,\, x\rangle = 0\ (x \in H, y \in H)$ (1)

Si nous remplaçons y par iy dans (1), l'equation devient

$-i\ \langle Tx,\, y\rangle + i\langle Ty,\, x\rangle = 0\ (x \in H, y \in H)$ (2)

En multipliant (2) par i puis en additionnant le résultat à (1) , nous obtenons

$\langle Tx,\, y\rangle = 0,\ (x \in H, y \in H)$ (3)

En posont $y = Tx$, alors (3) donne $\| Tx \| = 0$ donc $Tx = 0$,

$\forall\ x \in H$ c'est-à-dire que $T = 0$. ∎

Proposition 1.2.7 *Soit $T \in B(H)$ et H-$\mathbb{C}$-Hilbert alors :*

$\langle Tx,\, x\rangle = \langle S\ x,\, x\rangle$ pour tout : $x \in H$, alors : $T = S$.

Exemple 1.2.8 *Soit* $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, *$T$ est borné car* $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, *et T linéaire alors :*

$\langle T\binom{x}{y} \ , \ \binom{x}{y}\rangle = 0$

Car $\langle T\binom{x}{y} \ , \ \binom{x}{y}\rangle = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \binom{x}{y} \ , \ \binom{x}{y}\rangle$

$= \langle \binom{y}{-x} \ , \ \binom{x}{y}\rangle = xy - xy = 0.$

Mais T n'est pas nulle.

1.3 Adjoint d'un opérateur borné

Définition 1.3.1 *Soit H un espace de Hilbert et $T \in B(H)$, alors il existe un seul opérateur, noté par T^*, vérifiant les propriétés suivantes :*

1$-$ $\forall$ $T, S \in B(H)$ *alors* $(T+S)^* = T^* + S^*$,

2$-$ $\forall$ $\alpha \in \mathbb{C}$ *alors* $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$,

3$-$ *Pour tout T, S dans $B(H)$* $(ST)^* = T^* S^*$,

4$-$ *Pour tout T dans $B(H)$* $(T^*)^* = T$,

5$-$ $\| T \|^2 = \| TT^* \| = \| T^*T \|$.

Exemple 1.3.2 *Si :* $T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$, *alors on peut montrer que*

$T^* = \begin{pmatrix} \overline{\alpha_{11}} & \overline{\alpha_{21}} \\ \overline{\alpha_{12}} & \overline{\alpha_{22}} \end{pmatrix}$.

1.4 Opératrurs auto-adjoints

Définition 1.4.1 *Soit H un espace de Hilbert, et soit $T \in B(H)$. On dit que T est auto-adjoint si :* $T^* = T$, *ou bien* $\forall$ $x, y \in H$:

$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$, *et on dit aussi que T est symétrique ou que T est hermitien.*

Définition 1.4.2 *Soit $T \in B(H)$ alors : T est une isometrie* $\Longleftrightarrow$ $\forall$ $x \in H$, $\| Tx \| = \| x \|$

ou bien : $\forall x, y \in H$, $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$.

Définition 1.4.3 *Un opérateur $T \in B(H)$ est dit :*

$1 - T$ *normal si* $T^*T = TT^*$.

$2 - T$ *auto-adjoint si* $T = T^*$.

$3 - T$ *unitaire si* $TT^* = T^*T = I$.

$4 - T$ *une projection si* $T^2 = T$.

Remarque 1.4.4 *Il est claire que les opérateurs auto-adjoints et unitaires sont normaux.*

Proposition 1.4.5 *Soit $T \in B(H)$ alors $\ker T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$ et $\ker T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$.*

Preuve. On a : $y \in \ker T^* \iff T^*y = 0$

$$\begin{aligned} &\iff \langle x, T^*y\rangle = 0, \forall\ x \in H \\ &\iff \langle Tx, y\rangle = 0, \forall\ x \in H \\ &\iff y \in (\operatorname{Im} T)^\perp \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1.5 Opérateurs compacts

Définition 1.5.1 *On appelle opérateur compact de E dans F tout élément $T \in L(E, F)$ pour lequel l'image de la boule unité fermée de E est une partie relativement compacte de F.*

On a de plus les propriétés suivantes :

Proposition 1.5.2 *(Alternative de Fredholm). Soit T un opérateur compact de E dans E .*

Alors :

1$-$ $N(I - T)$ *est de dimension finie ,*

$2 - R(I - T)$ *est fermé et* $R(I - T) = N(I - T^*)^\perp$,

$3 - N(I - T) = 0 \iff R(I - T) = E$,

$4 - \dim N(I - T) = \dim N(I - T^*)$.

1.6 Spectre et ensemble résolvant d'un opérateur borné

Définition 1.6.1 *Soit T un opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert H sur $\mathbb{C}$ le nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ s'appelle un point régulier de l'opérateur T si $(T - \lambda I)$ est inversible de H dans H, et $(T - \lambda I)^{-1} \in B(H)$ c'est -à-dire que :*

λ régulier pour $T \iff (T - \lambda I)$ est bejectif et $(T - \lambda I)^{-1} \in B(H)$

L'ensemble des points réguliers de l'opérateur T s'appelle l'ensemble résolvant et note par $\rho\,(T)$ tel que :

$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ \ (T - \lambda I)^{-1} \in B(H)\}$.

L'ensemble $\mathbb{C} / \rho\,(T)$ on le note par $\sigma\,(T)$ est appellé le spectre de l'opérateur T

Théorème 1.6.2 *Soit T un opérateur quelconque, il existe deux opérateurs auto-adjoints A et B qui sont uniques tels que : $T = A + iB$*

Preuve. On a : $T = A + iB \Longrightarrow T^* = (A + iB)^*$

$= A^* - iB^*$, alors on obtient :

$\begin{cases} T = A + iB \\ T^* = A^* - iB^* \end{cases}$ Ceci implique $A = (T + T^*)\ /2$ et $B = (T - T^*)\ /2i$ ■

Remarque 1.6.3 *T est normal si A et B sont commutant.*

Théorème 1.6.4 *Soit H un espace de Hilbert et T un opérateur borné alors :*

1· *T est normale $\iff \| T\,x \| = \| T^* x \| : \forall\ x \in H$*

2· *T auto- adjoint $\iff \langle Tx,\ x\rangle \in \mathbb{R}$*

3· *T unitaire $\iff \| T^* x \| = \| Tx \| = \| x \|$ pour tout $x \in H$*

Preuve. 1 T est normale $\Longrightarrow$ $T^*T = TT^*$ d'ou $\| Tx \|^2 - \| T^*x \|^2 = \langle T^*T\ x,\ x\rangle - \langle TT^*x,\ x\rangle = \langle (T^*T - TT^*)\ x,\ x\rangle = 0$

Alors : $\| Tx \|^2 - \| T^*x \|^2 = 0$, donc $\| Tx \|^2 = \| T^*x \|^2$

D'ou $\| Tx \| = \| T^*x \|$

Réciproquement, on a :

$\| Tx \| = \| T^*x \| \Longrightarrow \| Tx \|^2 = \| T^*x \|^2$alors $\langle (T^*T - TT^*)\ x,\ x\rangle = 0$

$T^*T = TT^*$ car H est un espace de Hilbert

2 T auto-adjoint $\Longrightarrow T^* = T$ d'ou $\langle Tx,\ x\rangle = \langle x,\ T^*x\rangle = \langle x,\ Tx\rangle = \overline{\langle x,\ Tx\rangle}$

Alors : $\langle Tx,\ x\rangle$ est réel.
Réciproquement, on a :
$\langle Tx,\ x\rangle = \overline{\langle Tx,\ x\rangle} = \langle x,\ Tx\rangle = \langle x,\ T^{*}x\rangle$ alors T auto-adjoint
3 $T^{*}T = TT^{*} = I$
$\| Tx \|^{2} = \langle Tx,\ Tx\rangle = \langle TT^{*}x,\ x\rangle = \langle x,\ x\rangle = \| x \|^{2}$.
Réciproquement, on a :
$\| Tx \|^{2} = \| T^{*}x \|^{2} = \| x \|^{2}$
D'ou $\langle Tx,\ Tx\rangle = \langle T^{*}x,\ T^{*}x\rangle = \langle x,\ x\rangle$ et alors
$\langle T^{*}Tx,\ x\rangle = \langle x,\ x\rangle$ et $\langle TT^{*}x,\ x\rangle = \langle x,\ x\rangle$.
Donc $T^{*}T = I$ et $TT^{*} = I$ car H est un espace de Hilbert. ■

1.7 Racine carrée d'un opérateur

Théorème 1.7.1 *Soit $T \in B(H)$ positif, alors il existe un opérateur unique positif $S \in B(H)$ tel que : $S^{2} = T$*

de plus, si $B \in B(H)$ commute avec T, alors B commute avec S et on écrit $S = T^{1/2}$

Corollaire 1.7.2 *Soit A et B deux opérateurs bornés dans un espace de Hilbert H.*

S i A et B sont positifs tels que : $AB = BA$ alors AB est positif.

Preuve. On a :
$A \geq 0 \implies \exists\ S \geq 0$, tel que : $S^{2} = A$
et puisque B commute avec A, alors :
B commute avec S
d'ou $\langle ABx,\ x\rangle = \langle S^{2}Bx,\ x\rangle = \langle SBx,\ Sx\rangle = \langle BSx,\ Sx\rangle$
on pose $y = Sx$, donc $\langle By,\ y\rangle \geq 0$ (car B est positif)
alors : AB est positif. ■

Corollaire 1.7.3 *Soit $A \geq 0$ est inversible, alors : $S = A^{1/2}$ est inversible*

Preuve. Soit A est positif et inversible alors :
$(A^{-1}S)\ S = A^{-1}S^{2} = A^{-1}A = I$ et
$S\ (A^{-1}S) = (SA^{-1})\ S = (SA^{-1})\ A\ SA^{-1} = S^{2}A^{-1} = I$
car $AS = SA$ c'est-à-dire $S = ASA^{-1}$
donc S est inversible d'inverse $A^{-1}S$ ■

Exemple 1.7.4 *Soit A l 'opérateur défini par :*

$Af : L^2\,[0,1] \rightarrow L^2\,[0,1]$ *tel que :*

$Af\,(x) = xf\,(x)$

On a : A est positif car

$\langle Af,\ f\rangle = \int_0^1 x\ f\,(x)\ \overline{f\,(x)}\ dx = \int_0^1 x \mid f\,(x) \mid^2 dx \geq 0$

Donc il existe S tel que : $S^2 = A$

On remarque que : $S : L^2\,[0,1] \rightarrow L^2\,[0,1]$

$$f \longrightarrow S\ f(x) = \sqrt{x}\ f(x)$$

et que $S^2 = A$

Mais puisque la racine carrée est unique, alors $\sqrt{A} = S$.

Trouvons $A^{1/2}$, *ou* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

A est un opérateur positif car : $\forall\ x,\ y \in \mathbb{R}$

On a :

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \binom{x}{y}\ ,\ \binom{x}{y} \right\rangle = \langle (2x,\ y)\ ,\ (x,\ y)\rangle = 2x^2 + y^2 \geq 0, \forall\ x,\ y \in \mathbb{R}.$$

On remarque que $B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

vérifié que $B^2 = A$. *Puis que la racine carrée est unique, alors :*

$\sqrt{A} = B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque 1.7.5 *Tous opérateur positif est auto–adjoint.*

Chapitre 2

Opérateurs non-bornés

2.1 Introduction

En analyse fonctionnelle, un opérateur non borné est une application linéaire partiellement définie plus précisément, soient X, Y deux espaces vectoriels.

Un tel opérateur est donné par un sous espace $dom\,(T)$ de X et une application linéaire dont l'ensemble de définition est $dom\,(T)$ et l'ensemble d'arrivée est Y.

2.2 Opérateur non-borné

Définition 2.2.1 *Un opérateur non-borné sur un espace de Hilbert H est un couple $(D\,(T)\;, T)$ ou $D\,(T)$ est un sous -espace vectoriel de H et T est un opérateur linéaire défini de $D\,(T)$ dans H , alors on dit que T est non-borné de domaine $D\,(T)$.*

Exemple 2.2.2 *Soit T un opérateur et H un espace de Hilbert tel que :*

$H = L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \;\; f \;\; \textit{mesurable} \;\; \textit{telle que} : \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx < \infty \right\}$

Le produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R})$ est $\langle f,\ g\rangle = \int f(x)\ \overline{g(x)}\ dx$

$T : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$

$f \longrightarrow T\ f$ *tel que :* $T\ f(x) = x\ f(x)$ *le domaine* $D(T) = \{f \in L^2(\mathbb{R})\, /\ x\ f(x) \in L^2(\mathbb{R})\}$

Alors : $f(x) = 1/\sqrt{1+x^2} \in L^2(\mathbb{R})$ *mais* $x\ f(x) \notin L^2(\mathbb{R})$ *car :*

$\int x\ f(x)\ dx$ *est divergent, alors T est un opérateur non-borné.*

Exemple 2.2.3 $H = L^2(\mathbb{R}) = \left\{ (x_n)_n \in \mathbb{C} \text{ tel que : } \sum_{n=0}^{+\infty} |(x_n)_n|^2 < +\infty \right\}$

L^2 est un espace de Hilbert pour le produit scalaire suivant :

$\langle (x_n)_n,\ (y_n)_n \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \overline{y_n}$ *et la norme* $\|x_n\| = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2}$

L^2 possède une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $e_n = (0, , , , , , 1, , , , , , , 0)$

Pour tout $x = (x_n) \in L^2$, *alors* $x = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n e_n$.

Soit $A : L^2 \longrightarrow L^2$

$Ae_0 = 0,\ Ae_n = \sqrt{n} e_{n+1}$

$Ax = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \sqrt{n} e_{n+1}$

$D(A) = \{x = (x_n)_n \in L^2 \text{ telle que } \ Ax \in L^2\}$.

$D(A) = \left\{ x = (x_n)_n \in L^2 \text{ telle que } \ \sum_{n=0}^{+\infty} n\ |x_n|^2 \ \leq +\infty \right\}$.

$u_n = (1/n) \in L^2$ *mais* Au_n *n'est pas dans* $D(A)$

C'est -à-dire $D(A) \subsetneq L^2$

D'ou $(D(A),\ A)$ *est non-borné.*

2.3 Graphe d'un opérateur non-borné

Définition 2.3.1 *Soit* $(D(T),\ T)$ *un opérateur non-borné sur un espace de Hilbert* H *le graphe de* T *est le sous espace vectoriel noté par* $G(T)$ *de* $H \oplus H$ *, alors :*

$G(T) = \{(x,\ Tx),\ x \in D(T)\}$, *et on a :*

$T = S \iff G(T) = G(S)$

et

$T \subset S \iff G(T) \subset G(S)$

2.4 Opérateurs non-bornés fermés

Proposition 2.4.1 *On dit que* T *est fermé si pour tout les suites* $(x_n)_n$ *de* $D(T)$ *convergente vers* x *et la suite des images* $(Tx_n)_n$ *convergente vers* y *dans* H *alors :* $x \in D(T)$ *et* $y = Tx$.

Remarque 2.4.2 *Si* $(D(A),\ A)$ *est un opérateur non-borné de* H, *alors* $D(T)$ *n'est pas en général fermé dans* H, *par contre il sera supposé dense*

dans H *pourqu'on puisse définir l'adjoint de* T *deux opérateurs non-bornés* T_1 *et* T_2 *sont égaux ou coincidents si leur domaine coincident*

et sont égaux sur ce domaine commun $D(T_1) = D(T_2)$, $\forall\ x \in D(T_2) : T_1x = T_2x$
Par contre si $D(T_1) \subset D(T_2)$ *et* $Tx \in D(T_1)$ *alors :* $T_1x = T_2x$
donc, on dit que T_2 *est extension de* T_1 *et on écrit* $T_1 \subset T_2$.

Remarque 2.4.3 *On dit que* T *est un opérateur fermé si son graphe est fermé.*

Théorème 2.4.4 *(du graphe fermé) : Soient* E *et* F *deux espaces de Banach et* $T : E \longrightarrow F$ *un opérateur lineaire, alors :*

T *borné* $\Longleftrightarrow T$ *fermé.*

Remarque 2.4.5 *1– On dit que* T *est fermable si* $\overline{G(T)}$ *est le graphe d'un opérateur non-borné et on note par* $\overline{T}$ *, c'est -à-dire* $\overline{G(T)} = G(\overline{T})$ *d'ou :*

T *est un opérateur fermé sur* H

$\overline{T}$ *est une extention fermé de l'opérateur* T

2– Tout opérateur fermé est fermable mais l'inverse est faux

Proposition 2.4.6 *Soit* $(D(T), T)$ *un opérateur non-borné sur* H, *alors* T *est fermé si et seulment si* $D(T)$ *muni de ce produit scalaire du graphe* $\langle , \rangle_T$ *est un espace de Hilbert.*

$\forall\ x,\ y \in D(T)$, $\langle x,\ y\rangle_T$ *est un espace de Hilbert et que*

$\forall x,\ y \in D(T)$, $\langle x,\ y\rangle_T = \langle x,\ y\rangle_H + \langle Tx, Ty\rangle_H$ *et* $\|x\|_T = \sqrt{\|x\|_H^2 + \|Tx\|_H^2}$.

Preuve. 1 On a $\langle x,\ y\rangle_T$ est bien un produit scalaire sur $D(T)$, il reste a vérifier que $D(T)$ est complet pour la norme $\|\|_T$ Soit $(x_n)_n \in D(T)$ de cauchy, alors $\|x_n - x_m\|_T^2$ $= \|x_n - x_m\|_H^2 + \|Tx_n - Tx_m\|_H^2 \longrightarrow 0$

Par conséquent, $(x_n)_n$ et $(Tx_n)_n$ sont de cauchy dans H elles sont convergentes respectivement vers x et y, puisque T est fermé on a $x \in D(T)$ et $y = Tx$, d'autre part $\|x_n - x\|_I^2 = \|x_n - x\|_H^2 + \|Tx_n - Tx\|_H^2 \longrightarrow 0$

2 ($D(T), \|\|_T$) est un espace de Hilbert, vérifions que T est un opérateur fermé sur H et soit $(x_n) \in D(T)$ tel que : $x_n \longrightarrow x$ et $(Tx_n) \longrightarrow y$ alors

(x_n) est de cauchy dans $(D(T), \|\|_T)$ elle doit donc converger vers $\omega \in D(T)$

$\|x_n - \omega\|_T^2 = \|x_n - \omega\|_H^2 + \|Tx_n - T\omega\|_H^2 \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow +\infty$ d'ou

$x_n \longrightarrow \omega$ et $Tx_n \longrightarrow T\omega$ et par unicité de la limite on trouve $x = \omega$ et $y = Tx = T\omega$

D'ou T est fermé. ■

Exemple 2.4.7 *Soit D un sous espace vectoriel non fermé dans un espace de Hilbert et I l'opérateur indentité de D dans H alors : I est borné de D dans H lorsqu'on le mini D de la topologie induite par celle de H, I n'est pas fermé de D dans H car* $\|x\|_I^2 = \|x\|_H^2 + \|Ix\|_H^2 = 2\|x\|_H^2 \Longrightarrow \|x\|_I = \sqrt{2}\|x\|_H$

d'ou : $\|x\|_I$ est équivalente a $\|x\|_H$ et I_D ne peut pas étre complet pour $\|\|_I$.

Proposition 2.4.8 *Si T est fermable, $\overline{T}$ est la plus petit extension fermée*

Preuve. Puisque $\overline{T}$ est une extension fermée de T, soit S extension fermée de T alors $T \subset S \Longrightarrow G(T) \subset G(S) \Longrightarrow \overline{G(T)} \subset \overline{G(S)} = G(\overline{S}) = G(S)$ d'ou $\overline{T} \subset S$ ■

2.5 Adjoint d'un opérateur non-borné

Définition 2.5.1 *Soit $(D(T), T)$ un opérateur non-borné sur un espace de Hilbert H, on définit l'adjoint T^* de T par, $\forall\ x \in D(T)$ et $y \in D(T^*)$,*

$\langle Tx,\ x\rangle = \langle x,\ T^*x\rangle$, *tel que T^* vérifiant :*

S et T deux opérateurs non-bornés, alors :

$1 - S^* + T^* \subset (S+T)^*$

$2 - S^*T^* \subset (TS)^*$

Si S est borné alors : $(ST)^* = T^*S^*$

Définition 2.5.2 *Soit $(D(T), T)$ un opérateur non-borné sur un espace de Hilbert H de domaine dense dans H*

$1 - T$ *est dit hermitien ou bien symétrique si : $\forall\ x,\ y \in D(T)$, $\langle Tx,\ y\rangle = \langle x,\ Ty\rangle$*

cela signifie que T^* est une extension de T

$2 - T$ *est dit auto-adjoint si $T^* = T$, c'est-à-dire : $D(T) = D(T^*)$ et $T^*x = Tx$*

Ou bien T est auto-adjoint si et seulment si T est symétrique et $D(T^*) \subset D(T)$.

Remarque 2.5.3 1· *Dans le cas des opérateurs linéaires bornés ces deux notions sont identiques*

2 · *Dans le cas des opérateurs non-bornés tout opérateur auto-adjoint est symétrique par contre un opérateur symétrique n'est pas forcément auto-adjoint*

Théorème 2.5.4 *Soit* $(D(T), T)$ *un opérateur non-borné sur un espace de Hilbert* H *du domaine* $D(T)$ *dense dans* H *alors :*

1 $\cdot T^*$ *existe et il est un opérateur fermé.*

2$\cdot$ T *est fermable si et seulment si* $D(T^*)$ *est dense dans* H, *dans ce cas on a :* $\overline{T} = T^{**}$

3$\cdot$ *Si* T *est fermable alors :* $\left(\overline{T}\right)^* = T^*$

Remarque 2.5.5 $(D(T)\ , T)$ *un opérateur non-borné symétrique sur un espace de Hilbert* H *alors :* T^* *est une extension fermée de* T *et puis que* $D(T) \subset D(T^*)$ *dense dans* H, *alors* $D(T^*)$ *est aussi dense dans* H *et on a par conséquent* T *fermable .*

$\overline{T} = T^{**}$ *or* $\overline{T}$ *est la plus petite extention fermé de* T *en particulier si* T *est symétrique fermé alors :* $T = T^{**} \subset T^*$ *et* $T = T^{**} \subset T^{***}$ *si* T *est auto-adjoint,* $T^* = T$ *.*

Alors $T = T^* = T^{**} = T^{***}$.

Si T *auto-adjoint alors* T *est fermé, en déduit alors qu'un opérateur non-borné symétrique fermé et auto-adjoint si seulement si son adjoint est symétrique*

Proposition 2.5.6 *Si* T *est symétrique et fermé, alors* T *auto-adjoint.*

Si T^**est symétrique fermé alors* $\overline{T} = T^{**}$ *est une extention de* T^*

Définition 2.5.7 *Soit* $(D(T), T)$ *un opérateur non-borné symétrique sur* H, *symétrique de domaine* $D(T)$ *dense dans* H *.*

T *est dit essentiellement auto-adjoint si* $\overline{T}$ *est auto-adjoint ou bien* $\left(\overline{T}\right)^* = \overline{T}$

Remarque 2.5.8 1$\cdot$ *Tout opérateur auto-adjoint est essentiellement auto-adjoint mais la réciproque est fausse*

2$\cdot$ *Si* T *est essentiellement auto-adjoint alors :* T^* *est la petite extension fermé de* T

3$\cdot$ *Si* T *est essentiellement auto-adjoint alors :* T^* *est auto-adjoint .*

Théorème 2.5.9 *Soit* $(D(T), T)$ *un opérateur non-borné symétrique sur un espace de Hilbert* H *et de domaine* $D(T)$ *dense dans* H, *alors les proprietés suivantes sont équivalentes :*

1$\cdot$ T *est essentiellement auto-adjoint .*

2$\cdot$ $\ker(T^* \pm i) = \{0\}$.

3$\cdot$ $\operatorname{Im}(T \pm i)$ *est une dense dans* H.

Preuve. On applique le théorème précédent a $\overline{T}$, pour cela on obtient les équivalences suivantes : Sachant que $\overline{T}$ est aussi symétrique

1· $\overline{T}$ est auto-adjoint

2· $\overline{T}$ est essentiellement auto-adjoint

3· $\ker\left(\overline{T} \pm i\right) = \{0\} = \ker\left(T^* \pm i\right)$

4· $\operatorname{Im}\left(\overline{T} \pm i\right) = H$

ainsi pour montrer ce résultat il suffit d'établier que :

$\operatorname{Im}\left(\overline{T} \pm i\right) = \overline{\operatorname{Im}\left(T \pm i\right)}$

En effet, pour opérateur fermable S, on a

$\operatorname{Im}(\overline{S}) \subset \overline{\operatorname{Im}(S)}$, c'est -à-dire on a d'abord $\operatorname{Im}\left(\overline{T} \pm i\right) \subset \overline{\operatorname{Im}\left(T \pm i\right)}$

Réciproquement comme T est symétrique $\overline{T}$ est aussi symétrique

Et pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ l'image de $\left(\overline{T} - \lambda I\right)$ est fermé dans H .

Car en notant que $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$ et on a :

$\left\|\left(T - \lambda I\right) x\right\|^2 = \left\|\left(T - \alpha I\right) x\right\|^2 + \beta^2 \left\|x\right\|^2$

finalement on a :

$\operatorname{Im}\left(\overline{T} - \lambda I\right) = \overline{\operatorname{Im}\left(T - \lambda I\right)}$ ■

Définition 2.5.10 *Un opérateur symétrique T dans H est dit symétrique maximale Si T n'admet pas d'extension symétrique propre, c'est-à-dire si les hypothéses $T \subset S$ et S symétrique implique que $S = T$.*

Théorème 2.5.11 *Les opérateurs auto-adjoint sont symétriques maximaux.*

Preuve. Supposons que T est auto-adjoint, S est symétrique (c'est-à-dire, $S \subset S^*$) et $T \subset S$. Cette inclusion implique évidemment (d'aprés la définition de l'adjoint)que $S^* \subset T^*$.

Donc $S \subset S^* \subset T^* = T \subset S$, ce qui prouve que $S = T$. ■

2.6 Spectre des opérateurs non-bornés

Définition 2.6.1 *Soit $(D(T), T)$ un opérateur non-borné sur un espace de Hilbert H de domaine $D(T)$ dense dans H.*

On appelle ensemble résolvant de l'opérateur T l'ensemble $\rho(T)$ des λ copmlexes tels que

$1 \cdot \operatorname{Im}\left(T - \lambda I\right)$ *est dense dans H.*

2· $(T-\lambda I)$ *est inversible de* $D(T)$ *sur* $\operatorname{Im}(T-\lambda I)$ *d'inverse borné et* $\operatorname{Im}(T-\lambda I)$ *est muni de la topologie induite par* H *on note* $R_\lambda(T)=(T-\lambda I)^{-1}$ *pour tout* $\lambda\in\rho(T)$

$R_\lambda(T)$ *est appelé l'opérateur résolvant de* T

Remarque 2.6.2 $R_\lambda(T)$ *est borné de* $\operatorname{Im}(T-\lambda I)$ *dans* $D(T)$ *c'est-à-dire*

$\exists\ C\geq 0$ *tel que :*

$\|R_\lambda(T)_u\|\leq C\|u\|\ \forall\ u\in\operatorname{Im}(T-\lambda I)$.

Définition 2.6.3 *Soit* $(D(T),T)$ *un opérateur non-borné sur un espace de* H *(lequel est un* $\mathbb{C}$*-Hilbert)*

On désigne par $\sigma(T)$ *le complémentaire dans* $\mathbb{C}$ *de l'ensemble résolvant* $\rho(T)$ *et* $\sigma(T)$ *est appelé le spectre de l'opérateur* T *on a :*

$\sigma(T)=\mathbb{C}\ /\rho(T)$

$\mathbb{C}=\sigma(T)\cup\rho(T)$

$\sigma(T)\cap\rho(T)=\varnothing$

$\sigma(T)$ *peut étre décomposé en trois ensembles deux à deux disjoints notés :*

$\sigma_p(T),\ \sigma_c(T),\ \sigma_r(T)$ *. Ils sont définis comme suivants :*

$\sigma_p(T)=\{\lambda\in\mathbb{C},\ (T-\lambda I)\quad n'est\ pas\ inverse\ de\ D(T)\ dans\ \operatorname{Im}(T-\lambda I)\}$

$\sigma_p(T)$ *est appelé le spectre ponctuel de* T

$\sigma_c(T)=\{\lambda\in\mathbb{C},\ (T-\lambda I)$ *inversible de* $D(T)$ *dans* $\operatorname{Im}(T-\lambda I)$ *et* $\operatorname{Im}(T-\lambda I)$ *est dense dans* I

Mais $R_\lambda(T)$ *n'est pas borné et* $\sigma_c(T)$ *est appelé le spectre continu de* T

$\sigma_r(T)=\{\lambda\in\mathbb{C},\ (T-\lambda I)$ *inversible de* $D(T)$ *dans* $\operatorname{Im}(T-\lambda I)$ *et* $\operatorname{Im}(T-\lambda I)$ *n'est pas dense*

et $\sigma_r(T)$ *est appelé le spectre résiduel de* T

Exemple 2.6.4 $H=L^2(\mathbb{R})$ *et* A *l'opérateur de multiplication par la fonction*

$\varphi(x)=x$ *tel que :* $A\varphi(x)=x\varphi(x)$ *de domaine*

$D(A)=\{\varphi\in L^2(\mathbb{R})\ \ x\varphi\in L^2(\mathbb{R})\}$

alors $D(A)$ *est dense dans* $L^2(\mathbb{R})$ *et* A *auto-adjoint*

donc :

$$\begin{cases} \quad\sigma_p(A)=\varnothing \\ \quad\sigma_c(A)=\mathbb{R} \\ \quad\sigma_r(A)=\varnothing \\ \rho(A)=\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{R} \end{cases}$$

Chapitre 3

Propriétés spectrales

3.1 Définitions

Soit $T \in L(E)$. Pour commencer, donnons quelques définitions et propriétés relatives au spectre d'un opérateur dans un espace de Banach E.

Définition 3.1.1 *On appelle valeur spectrale de T tout élément $\lambda \in \mathbb{k}$ tel que $(\lambda I - T)$ ne soit pas inversible. L'ensemble des valeurs spectrales*

de T est appelé le spectre de T et noté $\sigma(T)$.

Un élément de $\mathbb{k}$ qui n'est pas valeur spectrale de T est appelé valeur résolvante de T.

L'ensemble des valeurs résolvantes de T est noté $\rho(T)$ et est appelé ensemble résolvant de T.

Ainsi, $\rho\ (T) = \mathbb{k} - \sigma(T)$. On appelle résolvante de T l'application qui à $\lambda \in \mathbb{k} - \sigma(T)$ associe l'inverse $(T - \lambda I)^{-1}$, ce que l'on note

$$R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}.$$

On appelle valeur propre de T tout élément $\lambda \in \mathbb{k}$ tel que $(\lambda I - T)$ ne soit pas injectif (c'est-à-dire tel que $N(\lambda I - T) \neq \{0\}$).

Ainsi, toute valeur propre de T est valeur spectrale de T.

Si λ est valeur propre de T, $N(\lambda I - T)$ est appelé espace propre associé à la valeur propre λ. On note $VP(T)$ l'ensemble des valeurs propres de T.

Si $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, alors, d'après le théorème de D'Alembert, le spectre de T n'est pas vide. La quantité :

$$\rho(T) = max\ \{|\lambda|,\ \lambda \in \sigma(T)\}$$

s'appelle le rayon spectral de T.

.

3.2 Propriétés

Proposition 3.2.1 *L'ensemble* $\sigma(T)$ *est un ensemble compact et* $\sigma(T) \subset [-\|T\|_{L(E)}; \|T\|_{L(E)}]$.

Proposition 3.2.2 *Soit* $T \in L(E)$, *on a :*

$$\rho(T) \leq \|T\|_{L(E)} .$$

.

Proposition 3.2.3 *Soit* $T \in L(E)$, *on a :* $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \|T^n\|_{L(E)}^{1/n} = \inf_n \|T^n\|_{L(E)}^{1/n} = \rho(T)$.

3.3 Propriétés spectrales des opérateurs compacts et auto-adjoints compacts

3.3.1 Spectre d'un opérateur compact

Les opérateurs compacts possédent des propriétés analogues aux opérateurs en dimension finie. C'était le cas pour la résolution de systémes

linéaires en étudiant l'alternative de Fredholm. Nous allons maintenant explorer les propriétés spectrales des opérateurs compacts .

En particulier, nous allons voir que tant le spectre des opérateurs compacts que les propriétés de diagonalisation des opérateurs compacts auto-adjoints

sont des "passage à limite" des résultats correspondant en dimention finie .

Nous allons commencer en donnant un résultat géneral de structure du spectre des opérateurs compacts.

Proposition 3.3.1 *Soit* $T \in L(E)$ *:*

$1-$ *Toute valeur spectrale non nulle de* T *est une valeur propre de* T *et son sous-espace propre associé est de dimension finie.*

$2-$ *Le spectre de* T *est dénombrable. S'il est infini, on peut ordonner ses éléments non nuls en une suite* $(\lambda n)_{n \in \mathbb{N}}$ *telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n|$$
$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \lambda_n = 0.$$

Théorème 3.3.2 $(Riesz - Schauder)$

Soient H *un espace de Hilbert et* $T \in \beta_\infty(H)$. *Alors,* $\sigma(T) \diagdown \{0\}$ *est un ensemble discret de* $\mathbb{C}$ *formé de valeurs propres de* T

de multiplicités finies. De plus, si H *est de dimension infinie,* $0 \in \sigma(T)$.

Preuve. Posons , pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = zT$. Alors f est une application holomorphe sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\beta_\infty(H)$.

Soit $\rho = \{z \neq 0 \mid zTu = u \text{ admet une solution } u \neq 0\}$. Alors, si $z \in \rho$, $\frac{1}{z}$ est valeur propre de T. Puis, comme $z = 0 \notin \rho$, ρ est un ensemble discret.

Si $\frac{1}{z} \notin \rho$, alors

$$(T - z)^{-1} = \tfrac{1}{z}\left(\tfrac{1}{z}T - Id_E\right)^{-1}.$$

Donc, $\sigma(T) \diagdown \{0\} = \left\{\frac{1}{z} \mid z \in \rho\right\}$ et $\sigma(T) \diagdown \{0\}$ est ensemble discret formé de valeurs propres de T par définition de ρ.

Si $\lambda \in \sigma_p(T)$, $\lambda \neq 0$, posons $F = \ker(T - \lambda)$. Alors , si B_F désigne la boule unité de F et B_H celle de H, on a

$$B_F = \tfrac{1}{\lambda}\lambda B_F = \tfrac{1}{\lambda}T(B_F) \subset \tfrac{1}{\lambda}T(B_H).$$

Or, comme T compact , $T(B_H)$ est relativement compact et B_F l'est aussi . Donc, par le théorème de Riesz, F est de dimension finie. Donc chaque valeur

propre non nulle de T est de multiplicité finie .

Supposons que H est de dimension infinie. Si $0 \notin \sigma(T)$, alors T est bejective et T^{-1} est continue.

Donc $B_H = T^{-1}(T(B_H))$ est relativement compact car $T(B_H)$ l'est par compacité de T. Donc, là encore, par le méme théorème de Riesz, H est de dimension finie .

Cela contredit notre premiére hypothése, donc $0 \in \sigma(T)$. ■

Remarque 3.3.3 *Lorsque* $0 \in \sigma(T)$, 0 *ne peut pas être une valeur propre de* T , *par ailleurs* 0 *peut être un point d'accumulation de* $\sigma(T)$.

Théorème 3.3.4 $(Jentzsch)$ *Soient* X *un espace métrique compact,* μ *une mesure borélinne finie sur* X *telle que , pour tout ouvert* U *de* X, $\mu(U) > 0$.

Soit $k \in C(X \times X)$ *une fonction continue telle que, pour tout* $x, y \in X$, $K(x,\ y) > 0$.

Soit $T \in \beta_\infty(C(X))$ *défini pour tout* $u \in C(X)$ *par*

$$\forall\ x \in X,\ Tu(x) = \int_x K(x,\ y)\ u(y)\ d\mu\ (y)\ .$$

Alors,

$1 - r(T) > 0;$

$2 - \sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = r(T)\} = \{r(T)\};$

$3 - \ker(T - r(T)) = Cf$ *ou* $f \in C(X)$ *est telle que* $\forall\ x \in X,\ f(x) > 0.$

Preuve. On remarque que la mesure μ étant borélienne, elle est finie sur les compacts et donc en particulier sur X compact, il n'est donc pas nécessaire de

la supposer a priori finie dans l'énoncé. Le fait que $T \in \beta_\infty (C(X))$.

On démontrer que $r(T) > 0$. Si 1_X désigne la fonction constante égale a 1 sur X, alors $T(1_X) = \int_X K(x,y)\, d\mu\,(y) \leq c > 0$.

De plus, comme K est positif, si $f,\, g \in C(X)$ et $f \geq g$, alors $T\,(f) \geq T(g)$. Puis, $T(T(1_X)) \geq T(c) = cT(1_X) \geq c^2$.

Donc, pour tout $n \geq 1$, $T^n(1_X) \geq c^n$ et $\|T^n\| \geq \|T^n(1_X)\|_\infty \geq c^n$. On en déduit que, pour tout $n \geq 1$, $\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \geq c > 0$ et, par la formule de rayon spectrale, $r(T) \geq c > 0$.

Comme $\sigma(T)$ est un compact de C, il existe $\lambda \in \sigma(T)$ tel que $|\lambda| = r(T)$. Alors, $\lambda \neq 0$ puisque $r(T) > 0$ et, comme T est un opérateur compact,

par le théorème de Riesz-Schauder, λ est une valeur propre de T. Soit $u \in \ker(T - \lambda)$, $u \neq 0$,

$$\forall\, x \in X,\ \int_X K(x,\ y)\ u(y)\ d\mu\ (y) = \lambda u(x).$$

En prenant le module de ces deux membres, on obtient

$$\forall\, x \in X,\ r(T)\ |u(x)| \leq \int_X K(x,\ y)\ |u(y)|\ d\mu(y).$$

Comme u est continue sur X compact, elle y est bornée $\exists\ \delta > 0$ tel que

$$\forall x \in X,\ (r(T) + \delta)\ |u(x)| \leq \int_X K(x,\ y)\ |u(y)|\ d\mu(y).$$

Donc $T(|u|) \geq (r(T) + \delta)\,|u|$ et, par itération, pour tout $n \geq 1$, $T^n(|u|) \geq (r(T) + \delta)^n\,|u|$, d'ou $\|T^n\|\,\|u\|_\infty \geq (r(T) + \delta)^n\,\|u\|_\infty$. Comme $u \neq 0$,

on peut diviser l'inégalité par $\|u\|_\infty$ et en prendre la puissance $\frac{1}{n}$. Alors $n \longrightarrow 0$, et en utilisant la formule du rayon spectral , on obtient $r(T) \geq r(T) + \delta$.

Alors : $\forall x \in X$, $\exists\, \theta \in \mathbb{R}$ tel que : $|K(x,\ y)\,u(y)|\,e^{i\theta} = K(x,\ y)\ u(y)$ pour μ presque tout $y \in X$ par continuité de u et K . Or, $K(x,\ y) > 0$, $|u(y)|\,e^{i\theta} = u(y)$.

Cela implique que pour tout : $\forall x \in X$, si $u \in \ker(T - \lambda)$, $u \neq 0$, on a $u = |u(y)|\,e^{i\theta}$ et $|u|$ est aussi un vecteur propre de T associé à la valeur propre λ.

Donc, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $r(T) = \lambda$.

De plus on démontrer que tout élément $u \neq 0$ de $\ker(T - \lambda)$ est colinéaire à un vecteur propre positif, $|u|$. Or, par continuité, $|u(y)| > 0$ sur un ouvert de X et,

comme $K(x,\ y) > 0\ \ \forall x,\, y \in X$, on obtient

$$\forall x \in X,\ r(T)\ |u(x)| = \lambda\ |u(x)| = \int_X K(x,\ y)\,|u(y)|\ d\mu(y) > 0.$$

Donc, $|u(x)| > 0$ pour tout $x \in X$. Il reste à montrer que $\ker(T - r(T))$ est de dimension 1.Soient $u,\, v \in \ker(T - r(T))$ non nuls, $\forall\ x_0 \in X$ tel que $u(x_0) \neq 0$.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $v(x_0) = \alpha u(x_0)$ $\left(\alpha = \frac{v(x_0)}{u(x_0)}\right)$. Alors, $v - \alpha u \in \ker(T - r(T))$ et $(v - \alpha u)(x_0) = 0$. Donc, $|(v - \alpha u)(x)| = 0$.

Pour tout $x \in X$, on aurait $|(v - \alpha u)(x)| \neq 0$, pour tout $x \in X$ donc $v = \alpha u$ et ker $(T - r(T))$ est de dimension 1. ■

3.3.2 Spectre d'un opérateur auto-adjoint

Définition 3.3.5 *Soit Λ l'ensemble des valeurs propres de T. Alors :*

1· Λ *est une partie infinie, dénombrable et bornée de $\mathbb{R}$ dont le seul point d'accumulation est* 0.

2· *les sous-espaces propres correspondant à des valeurs propres non nulles sont de dimension finie.*

3· *les sous-espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.*

Proposition 3.3.6 $-$*Le spectre de l'adjoint d'un opérateur T est donné par :*

$\sigma(T^*) = \{\overline{\lambda},\ \lambda \in \sigma(T)\}$.

$-$*Le spectre d'un opérateur hermitien est inclus dans un intervalle $[m;\ M]$ où* $m = \inf\{(Tx,\ x)\,;\ \|x\| = 1\}$ *et* $M = \sup\{(Tx,\ x)\,;\ \|x\| = 1\}$.

.

Théorème 3.3.7 ($Théoréme\ spectral\ des\ opérateur\ auto-adjoints$)

Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact . Notons $\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ ....,\ \lambda_n\}$ les valeurs propres de T non nulles et p_n la projection

de H sur $\ker(T - \lambda_n)$. *Alors, pour $n \neq m$, $p_n p_m = p_m p_n = 0$, p_n est de rang fini, $\lambda_n \longrightarrow 0$ lorsque n tend vers ∞ et*

$$T = \sum_{n=1} {}^{\infty} \lambda_n p_n$$

ou la série converge au sens de la norme d'opérateur .

Preuve. Il existe un nombre réel $\lambda_1 \in \sigma_p(T)$ tel que $|\lambda_1| = \|T\|$. Soient $F_1 =$

$\ker(T - \lambda_1)$ et P_1 la projection de H sur F_1.On pose $H_2 = F_1^{\perp}$.Comme T laisse stable

F_1 et est auto-adjoint, il laisse aussi stable H_2. Soit $T_2 = T \mid_{H_2}$la restriction de T à H_2. Alors T_2 est un opérateur compact auto-adjoint. Soit un nombre réel

$\lambda_2 \in \sigma_p(T_2)$ tel que $|\lambda_2| = \|T_2\|$. Soit $F_2 = \ker(T_2 - \lambda_2)$. Alors $F_2 = \ker(T - \lambda_2)$ et, comme $F_2 \subset F_1^{\perp}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Soit alors P_2 la projection de H sur F_2 ; posons $H_3 = (F_1 \oplus F_2)^{\perp}$. Alors, comme $\|T_2\| \leq \|T\|$, on a $|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$.

Par récurrence , on construit une suite de valeurs propres de T telles que $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots$ De plus ,si, pour tout $n \geq 1$, on pose $F_n = \ker(T - \lambda_n)$, alors

$|\lambda_{n+1}| = \left\| T\,|_{(F_1 \oplus \ldots\ldots \oplus F_n)^{\perp}} \right\|$. On note aussi, pour tout $n \geq 1$, P_n la projection de H sur F_n. La relation $P_n P_m = P_m P_n = 0$ pour $n \neq m$ vient du fait que les

F_n sont deux à deux orthogonaux. Enfin, le spectre de T est dénombrable, et la construction faite ici nous montre que $\{\lambda_1 \ldots\ldots\} = \sigma(T) \setminus \{0\}$.

Prouvons que $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ainsi définie converge vers 0. Tout d'abord, comme $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots$, la suite $(|\lambda_n|)_{n\geq 1}$ est convergente, mettons vers α. Puis, pour tout $n \geq 1$, on

choisit $u_n \in F_n, \|u_n\|_H = 1$.Comme T est compact, $\exists\ u \in H$ est une sous_suite $(u_{n\ k})_{k\geq 1}$telle que $\|Tu_{n\ k} - u\|_H \longrightarrow 0$ lorsque k tend vers ∞.

Or, pour $n \neq m$, $u_n \perp u_m$ et, pour tout $k \geq 1$, $Tu_{n\ k} = \lambda_{n\ k} u_{n\ k}$. Donc, pour k, $l \geq 1$, on a $\|Tu_{n\ k} - Tu_{n\ l}\|_H^2 = \lambda_{n\ k}^2 + \lambda_{n\ l}^2 \geq 2\alpha^2$.

Mais, comme $(Tu_{n\ k})_{k\ \geq 1}$est une suite de Cauchy, on doit avoir $\alpha = 0$.

Soient $k \in \{1, \ldots\ldots, n\}$ et $u \in F_k$. Alors $\left(T - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P_j\right) u = Tu - \lambda_k u = 0$.

Donc, $F_1 \oplus, \ldots\ldots \oplus F_n \subset \ker\left(T - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_i P_j\right)$. Si maintenant $u \in (F_1 \oplus, \ldots\ldots F_n)^{\perp}$,

alors $P_j u = 0$, pour tout $j \in \{1, \ldots\ldots, n\}$ et $\left(T - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_i P_j\right) u = Tu$.

Comme de plus T laisse stable $(F_1 \oplus, \ldots\ldots F_n)^{\perp}$, on obtient

$$\left\| T - \sum_{j=1}^{n} \lambda_i P_j \right\| = \left\| T\,(F_1 \oplus, \ldots\ldots F_n)^{\perp} \right\| =$$

$|\lambda_{n+1}| \longrightarrow 0$.

Lorsque n tend vers ∞. Donc la série $\sum \lambda_n P_n$ converge en norme d'opérateur vers T. ■

3.4 Diagonalisation des opérateurs compacts auto-adjoints

Dans cette section, nous présentons la généralisation aux opérateurs compacts auto-adjoints du résultat qui affirme que tout matrice réelle

symétrique est diagonalisable en base orthogonormée. Dans tout la suite H sera un espace de Hilbert complexe.

Proposition 3.4.1 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact auto-adjoint. Alors ,*

$$H = \ker T \oplus \hat{\oplus}_{\lambda \in\ \sigma(T) \setminus \{0\}} \ker(T - \lambda).$$

Preuve. Rappolons tout d'abord que, pour $\lambda \neq \mu$ dans $\sigma_p(T)$, $\ker(T-\lambda) \perp \ker(T-\mu)$. Posons $F = \overset{\wedge}{\oplus}_{\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}} \ker(T-\lambda)$. Alors F est fermé et stable par T

En effet, si $u = \sum_{\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}} u_\lambda$ avec $\sum \|\mu_\lambda\|_H^2$ est convergente, on a $T_\mu = \sum_{\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}} \lambda \mu_\lambda \in F$. De plus, comme T est auto-adjoint, $F^\perp$ est aussi stable par T .

Soit $T_0 : F^\perp \longrightarrow F^\perp$ la restriction de T à $F^\perp$. Alors T_0 est auto-adjoint et compact. On a $r(T_0) = \|T_0\|$. De plus, si $r(T_0) > 0$, T_0 admet une valeur propre non nulle λ_0

car, par la théoréme de $Riesz - Schauder$, tout éléments non nul de $\sigma(T_0)$ est une valeur propre puis que T_0 est compact. Mais comme $\ker(T_0 - \lambda_0) \subset \ker(T - \lambda_0)$,

on aurait $\ker(T-\lambda_0) \cap F^\perp \neq \{0\}$, ce qui absurde car, pour tout $\lambda \neq 0$ on a $F^\perp \perp \ker(T-\lambda)$. Donc $r(T_0) = 0$ et $\|T_0\| = 0$ et T_0 est l'opérateur nul.

Donc $F^\perp \subset \ker T$.

D'autre part $\ker T \subset (\ker(T-\lambda_n))^\perp$ pour tout $\lambda \neq 0$ et $\ker T \subset \ker T^\perp$.

Donc $\ker T = F^\perp$.Or F est fermé, donc $H = F \oplus F^\perp$ et on a $H = \ker T \oplus \overset{\wedge}{\oplus}_{\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}} \ker(T-\lambda)$. ∎

Chapitre 4

Théorie spectrale

4.1 Définition

La théorie spectrale est un domaine des mathématiques dont les premiers résultats appartiennent à l'algèbre linéaire. Dans ce cadre, la théorie spectrale établit

notamment l'existence d'une base orthonormale de vecteurs propres pour tout endomorphisme symétrique sur un espace vectoriel complexe de dimension finie.

Lorsque l'on se pose la question d'une généralisation de ce résultat au cas d'un espace de dimension infinie, il devient nécessaire de considérer la topologie induite

par le produit scalaire et l'on entre dans le cadre de l'analyse fonctionnelle. Une fois la topologie introduite, une approche naturelle est de s'intéresser, en premier

lieu, aux opérateurs linéaires continus. Toutefois, la physique, en particulier la mécanique quantique, fait intervenir dans ses modèles des opérateurs qui ne sont pas continus et

c'est l'objet de la suite de ce travail.

4.2 Rayon spectrale

Définition 4.2.1 *Soit A une algébre de Banach unitaire complexe, la quantité*

$$\rho(a) = max\{|\lambda| : \ \lambda \in Sp\,(a)\}$$

s'appelle le rayon spectral de $a \in A$. On a déjà remarqué que le spectre de a est contenu

dans le disque de $\mathbb{C}$ centré en 0 et de rayon $\|a\|$, donc

$$\rho(a) \leq \|a\|.$$

On va obtenir au théorème 1 une formule importante qui précise cette remarque simple et qui permet d'estimer, sinon de calculer, ce rayon spectral.

Théorème 4.2.2 *Soient A une algébre de Banach unitaire complexe et $a \in A$: la suite $(\|a^n\|^{\frac{1}{n}})$ est convergente et on a*
$\rho(a) = \underset{n \longrightarrow \infty}{lim} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Preuve. On d´emontre d'abord que $\rho(a) \leq\ lim\ sup_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$, remarquons tout de suite que $\|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|a\|$ pour tout $n \geq 1$, donc ce que nous devons démontrer est

un raffinement de l'estimation $\rho(a) \leq \|a\|$ que nous avons déjà vue, on obtiendra ce raffinement en reprenant les arguments déjà employés, si $b \in A$ est tel que

$\beta =\ lim\ sup_n \|b^n\|^{\frac{1}{n}} < 1$, choisissons t réel tel que : $\beta < t < 1$, on aura alors $\|b^n\|^{\frac{1}{n}} < t$, pour n grand, donc $\|b^n\| < t^n$, donc la série $\sum_k b^k$sera normalement

convergente, donc convergente dans le Banach A, et la démonstration déjà vue, nous dira que $1_A - b$ est inversible, si on écrit comme avant $a - \lambda 1_A = -\lambda(1_A - a/\lambda)$

cet élément sera inversible dés que $b = a/\lambda$ vérifiera $lim\ sup_n \|b^n\|^{\frac{1}{n}} < 1$, ce qui se produit quand $lim\ sup_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}} < |\lambda|$. Ceci signifie qu'aucun nombre complexe

λ tel que $|\lambda| > lim\ sup_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ ne peut étre dans le spectre de a, c'est à dire que $\rho(a) < lim\ sup_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

La démonstration de l'inégalité inverse demande de se rappeler le cours de fonctions holomorphes si $g(z) : B(0,\ R) \longrightarrow \mathbb{C}$, est holomorphe (valeur $R = +\infty$ admise),

alors elle est développable en série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} C_k Z^K$ dans ce disque ouvert $B(0,\ R)$, pour tout r tel que $0 < r < R$ la formule de Cauchy appliquée au cercle γ_r

de rayon r donne pour tout $n \geq 0$

$$r^n c_n = r^n \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{g(z)}{z^{n+1}} dz = \int_0^{2\pi} g\left(re^{i\theta}\right) e^{-in\theta} \frac{d\theta}{2\pi}$$

ce qui fournit les inégalités de Cauchy

$$|c_n|\, r^n \leq M(r,\ g) = max \left\{|g\,(z)| : |z| = r\right\}.$$

Considérons la fonction vectorielle $f(z) = (1_A - \ za)^{-1}$, elle est définie pour tout complexe z tel que $1/z$ ne soit pas

dans le spectre de a, ce qui est le cas lorsque $|z| < R = \rho(a)^{-1}$, la continuité de l'application $u \longrightarrow u^{-1}$ sur l'ouvert des éléments

inversibles, montre que $z \longrightarrow f(z)$ est continue pour $|z| < R$, pour tout r tel que $0 < r < R$, la fonction $z \longrightarrow \|f(z)\|$

est donc bornée par un certain $M_0(r)$ sur le cercle de rayon r (qui est compact).

Si on pose $u = 1_A - \ za$ avec $|z| < R$, on sait que pour $|h| < h_0 = |u^{-1}a|^{-1}$, l'élément

$f(z+h) = (u - \ ha)^{-1} = (1_A - hu^{-1}a)^{-1}u^{-1}$ est la somme de la série de vecteurs :

$$f(z+h) = f(z) + ha_1 + h^2 a_2 + \ldots\ldots + h^n a_n + \ldots\ldots$$

où $a_n = (u^{-1}a)^n u^{-1}$ pour tout $n \geq 1$. Soit x^* une forme linéaire continue sur A, $\|x^*\| \leq 1$, posons $g(z) = x^*(f(z))$ lorsque $|z| < R$

en appliquant x^* à la série précédente, on voit que $x^*(f(z+h))$ est pour h assez petit (dépendant de z) la somme d'une série entiére

en h, donc g est holomorphe dans $B(0, R)$ et développable en série entiére $\sum_{k=0}^{+\infty} C_k Z^k$, convergente lorsque $|z| < R$. Par ailleurs , pour

z assez petit on sait que $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k a^k$,donc $f(z) = \sum_k z^k x^* \left(a^k\right)$, par l'unicité des coefficients de Taylor il résulte que $c_n = x^* \left(a^n\right)$

pour tout n.

Puisque $\|x^*\| \leq 1$, on a $|g(z)| \leq \|f(z)\|$, ce qui entraine que $M(r;\, g) \leq M_0(r)$, les inégalités de Cauchy, appliquées à g, donnent :

$|x^*(a_n)| \leq M_0(r)/r^n$ pour tout n et toute $x^* \in A^*$ telle que $|x^*| = 1$, pour chaque $n \geq 1$ donné on peut choisir par Hahn-Banach

une forme linéaire x^* telle que $\|x^*\| = 1$ et $x^*(a_n) = \|a_n\|$, on obtient ainsi $\|a_n\| \leq M_0(r)/r^n$ pour tout $n \geq 1$, ce qui implique

$lim\ sup_n \|a^n\|^{1/n} \leq 1/r$, d'ou $lim\ sup_n \|a^n\|^{1/n} \leq \rho(a)$ en faisant tendre r vers $R = 1/\rho(a)$.

La convergence de la suite $(\|a^n\|^{1/n})$ pour tous p, $q \geq 1$, on a :

$\|a^{p+q}\| = \|a^p a^q\| \leq \|a^p\| \, \|a^q\|$. ■

Proposition 4.2.3 *Soit H un espace de Hilbert complexe, le rayon spectral de tout élément normal T de $L(H)$ est égal à sa norme, $\rho(T) = \|T\|$.*

Preuve. Soit d'abord A un élément hermitien , on a $\|A^2\| = \|A * A\| = \|A\|^2$.

on en déduit par récurrence que $\|A^{2n}\| = \|A\|^{2n}$ pour tout $n \geq 0$, donc $\rho(A) = \|A\|$. Soit maintenant T un élément normal de $L(H)$

par récurrence

sur n, on a$(T^*T)^n = (T^*)^n T^n$ donc $(T^*T)^n = \|T^n\|^2$ et $\rho(T^*T) = \rho(T)^2$, or : $A = T^*T$ est hermitien , donc

$$\rho(T)^2 = \rho(T^*T) = \|T^*T\| = \|T^2\|. \ ■$$

Exemple 4.2.4 *Posons $H = L_2([0,1])$, pour toute fonction $f \in H$ et $s \in [0,1]$, on pose $V(f)(s) = \int_0^s f(t)dt$.*

En appliquant Cauchy-Schwarz au produit $1_{[0,\, s]} f$ on voit que $|V(f)(s)| \leq \sqrt{s}\, \|f\|^2$ ce qui

implique que $\|V\,(f)\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 \int_0^1 s ds = \frac{1}{2} \|f\|_2^2$ donc V définit une application linéaire continue *notée V_2 de $L_2([0,1])$ dans lui-méme.*

Soit $f \in H$ telle que$\|f^2\| \leq 1$, on a montré que $|V(f)(s)| \leq \sqrt{s}\,\|f\|_2 \leq 1$, pour tout réel $s \in [0,1]$

on en déduit que $|V\ \ (V(f)(s))| = \left|\int_0^s V\,(f)\,(t)dt\right| \leq s$, puis, par récurrence sur n que : $|V^{n+1}\,(f)\,(s)| \leq s^n \diagup n!$.

donc : $\|V^{n+1}\,(f)\|_2^2 \leq \frac{1}{(n!)^2}\int_0^1 s^{2n}ds \leq \frac{1}{(n!)^2}$, ce qui donne $\left\|V_2^{n+1}\right\| \leq (n!)^{-1}$, comme $lim_n(n!)^{-1/n} = 0$

il sénsuit que le rayon spectral de V_2 est nul, donc $Sp(V_2) = \{0\}$.

.

Définition 4.2.5 *Un homomorphisme d'algébres de Banach unitaires est une application linéaire continue $\varphi : A \longrightarrow B$ entre deux*

algébres de Banach unitaires A et B, telle que $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ pour tous $a, b \in A$ et que $\varphi(1_A) = 1_B$.

Si a est inversible dans A, son image est inversible dans B et l'inverse de l'image est l'image de l'inverse. De plus $\varphi(a - 1_A) = \varphi(a) - 1_B$. Il en résulte que

$$Sp(\varphi(a)) \subset Sp(a).$$

4.3 Théorie spectrale

4.3.1 Mesures spectrales

On souhaite généraliser la réduction des endomorphismes en dimension fini sà ceux des espaces de Hilbert quelconques, pour cela, on aura besoin

de la notion de mesure spectrale.

Définition 4.3.1 *(Mesure spectrale). Soit H un espace de Hilbert et $(Y,\ A)$ un espace mesurable. On note $P(H)$*

l'ensemble des projections orthogonales sur H. Une mesure spectrale E est une application de

Y dans $P(H)$ qui vérifie les propriétés suivantes :

$(\sigma\ -$ additivité) si (δ_n) est une famille finie ou dénombrable d'ensembles mesurables disjoints, alors $E\,(\cup_n \delta_n) = \sum E\,(\delta_n)$.

(complétude) $E\,(Y) = Id$.

Proposition 4.3.2 *En gardant les mêmes notations, les propriétés suivantes sont immédiates :*

$-E(\delta_1)\ E(\delta_2) = E(\delta_2)\ E(\delta_1) = E(\delta_1 \cap \delta_2)$

$-Si\ \delta_1 \subset \delta_2\ alors\ \ E(\delta_1) \leq E(\delta_2)$

$-Si\ \delta_n\ \ croît,\ alors\ \ E\left(\cup_n \delta_n\right) = lim\ E\left(\delta_n\right)$

$-Si\ \delta_n\ \ décroît,\ alors\ E\left(\cap_n \delta_n\right) = lim\ E\left(\delta_n\right)$

On peut alors définir les mesures finies suivantes :

$1 - \mu_f(\delta) = (E(\delta)f,\ f).$

$2 - \mu_{f,\ g}(\delta) = (E(\delta)f,\ g).$

4.3.2 Intégration selon une mesure spectrale

Comme pour la mesure de Lebesgue, on définit l'intégrale d'abord sur les fonctions simples bornées : si on écrit $\psi = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{\delta_i}$, alors $J_\psi = \int \psi\ dE = \sum_{i=1}^{n} a_i\ E\left(\delta_i\right).$

Proposition 4.3.3 *Il en découle les propriétés suivantes :*

$1 - J\ \ est\ \mathbb{C}\text{-}linéaire$

$2 - J_{\psi\phi} = J_\psi J_\phi = J_\phi J_\psi$

$3 - (J_\psi)^* = J_{\overline{\psi}}$

$4 - J_1 = Id$

$5 - (J_\psi\ f,\ g) = \int \psi\ d\mu_{f,\ g}$

$6 - (J_\psi f,\ f) = \int \psi\ d\mu_f$

$7 - \|J_\psi\ f\|^2 = \int |\psi|^2\, d\mu_f$

$8 - \|J_\psi\| = \|\psi\|_{+\infty}$ *(le sup essentiel)*

Par densité et convergence monotone, J s'étend naturellement à $L^\infty(Y,\ E)$, conservant ces propriétés.

Ils en suit que l'application J est un morphisme de $\mathbb{C}^*$ -algèbre entre $L^\infty(Y,\ E)$ et l'ensemble des opérateurs bornés sur H.

On peut aussi définir J dans le cas d'opérateur non bornés, mais il faut ajouter quelques restrictions à l'ensemble de définition.

4.3.3 Théorème spectral

L'objection de cette partie est de montrer les résultats suivants :

Proposition 4.3.4 *(Théorème Spectral). Soit A un opérateur auto-adjoint sur un Hilbert H, alors il existe une unique mesure spectrale E_A sur les boréliens de $\sigma(A)$ telle que*

$$A = \int_{\sigma(A)} \lambda dE_A(\lambda) \qquad (1)$$

C'est une généralisation de la propriété sur les matrices hermitiennes en prenant $dE = \sum\limits_{\lambda \in \sigma(A)} \delta_\lambda P^{\perp}_{\ker(A-\lambda I)}$

4.4 Théorie spectrale des opérateurs compacts auto-adjoints

Les opérateurs autoadjoints compacts ont une structure spectrale très particulière, qui ressemble beaucoup à celle des opérateurs linéaires en dimension finie.

Théorème 4.4.1 *(Diagonalisation de T). Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et $T \in L(H)$*

un opérateur auto-adjoint compact. Alors il existe une suite (μ_n) de réels non nuls, finie ou tendant

vers 0, et une base hilbertienne $(e_n) \cup (f_n)$ de H telle que :

$1 - \sigma(T) = (\mu_n) \cup \{0\}$,

$2 - (f_n)$ *est une base de* $\ker(T)$,

$3 - Te_n = \mu_n e_n$.

En outre, pour tout $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$, l'espace propre $E_\lambda = Ker(\lambda - T)$est de dimension finie. En fait, plusieurs cas peuvent se présenter :

$i-$ou bien $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{0\}$, au quel cas $T = 0$. Dans ce cas, la base (f_n) engendre tout l'espace, et la base (e_n)est vide

$ii-$ ou bien $\sigma\ (T) = \sigma_p(T) = \{\mu_n\}, n \in \{1, ..., N\} \cup \{0\}$, c'est-à-dire que T est de rang fini.

Dans cecas, la base (e_n) est de cardinal fini N, et la base (f_n) est de cardinal infini .

$iii-$ou bien $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{\mu_n\}, n > 0 \cup \{0\}$, au quel cas T est non injectif. La base (e_n) est de cardinal infini, alors que la base (f_n) peut être de cardinal fini ou infini en fonction de la

dégénerescence de la valeur propre 0.

$iv-$ ou bien $\sigma_p(T) = \{\mu_n\}, n > 0$ et $0 \in \sigma_p(T)$, au quel cas Test injectif.

Dans ce cas, $\sigma_c(T) = \{0\}$,car $\sigma_r(T) = \emptyset$.

Remarque 4.4.2 *La preuve précédente montre qu'on peut écrire tout opérateur autoadjoint de $K(H)$ (lorsque H est un espace de Hilbert) comme une limite d'opérateurs de rang fini (voir* [1]*).*

En effet, on peut écrire tout $u \in H$ sous la forme :

$u = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$

et l'application T est diagonale dans cette base :

$Tu = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n u_n.$

avec $\lambda_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ (éventuellement, il est possible que $\lambda_n = 0$ à partir d'un certain rang). Définissant les opérateurs de rang fini T_N par :

$T_{Nu} = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n u_n.$

on voit facilement que $\|T - T_N\| \leq \sup\limits_{m>N} |\lambda m| \to 0$ lorsque $N \to +\infty$.

Remarque 4.4.3 *(Calcul fonctionnel). Notons également que la décomposition (3.5) permet de définir des opérateurs $f(T)$ par la formule :*

$f(T)_u = \sum_{n=0}^{+\infty} f(\lambda_n) u_n.$

Ceci généralise les opérations faites sur les matrices symétriques réelles. La décomposition ci-dessus reste vraie pour des opérateurs à résolvante compacte .

4.5 Théorie spectrale des opérateurs non bornés

Beaucoup de définitions et de résultats exposés dans les sections précédentes sont encore valables pour des opérateurs non bornés, à condition qu'ils soient fermés. Commençons par un résultat important pour définir le spectre d'un opérateur.

Proposition 4.5.1 *Soit E, F deux espaces de Banach et $T : D(T) \subset E \to F$ un opérateur fermé.*

Les assertions suivantes sont équivalentes :

$i-T$ est injectif, d'inverse $T^{-1} : Ran(T) \to D(T)$ borné .

$ii-$il existe $m > 0$ tel que : $\|T_u\|_F \geq m \|u\|_E$ pour tout $u \in D(T)$.

$iii-$ $Ran(T)$ est fermé dans F et $\ker(T) = \{0\}$.

Preuve. D'aprés le théorème du graphe fermé. On peut alors définir l'ensemble résolvant $\rho(T)$ d'un opérateur $T : E \to E$ fermé :

$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - T \quad \text{inversible}\}.$

$= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - T \quad \text{injectif et } \ Ran(\lambda - T) = E\}.$

Notons en effet que le point (iii) de la Proposition ci-dessus assure que $(\lambda - T)^{-1}$ est borné dès que $Ran(\lambda - T)$ est fermé dans E, ce qui montre l'équivalence entre les deux définitions.

Une fois le spectre défini, on peut à nouveau classifier ses élements en spectre ponctuel $(\ker(\lambda - T) \neq \{0\})$, spectre résiduel $(\ker(\lambda - T) = \{0\}$ et $\overline{Ran(\lambda - T)}\ ) \neq E$, et spectre continu $(\ker(\lambda - T) = \{0\}$ et $\overline{Ran(\lambda - T)}) = E$, mais $Ran(\lambda - T)) \neq E$. ■

4.6 Exemple d'opérateur non-borné

Si H est un espace de Hilbert, un opérateur sur H est un couple $(T,\ D(T))$ ou $D(T)$ est un sous-espace dense de H et T est une aplication linéaire de $D(T)$ dans H. Une première difficulté qui apparait alors est celle de définir l'adjoint d'un tel opérateur. On peut définir T^* comme étant l'application linéaire telle que, pour tout $u \in D(T)$ et $v \in D(T^*)$, $(Tu \mid v) = (u \mid T^*v)$, il faut tout de méme pouvoir définir $D(T^*)$ Cela se fait en posant

$$D(T^*) = \{v \in H \mid \exists\, c > 0, \forall u \in D(T),\ \ |(Tu \mid v)| \leq c\,\|u\|_H\}.$$

Manipuler cette adjoint et traiter de la théorie des opérateurs auto-adjoint (tels que $(T,\ D(T)) = (T^*,\ D(T^*))$ s'avère donc plus délicat.

Notons qu'avec opérateur auto-adjiont, il existe une famille spectrale E telle que

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda \, dE(\lambda).$$

La difficulté est que $\sigma(T)$ n'est plus a priori compact et pas méme borné . La preuve que nous avons faite du théorème spectral pour les opérateurs, pourtant les opérateurs non-bornés apparaissent naturellement parmi les exemples d'applications linéaires que nous recontrons .

Nous allons maintenant traiter un exemple d'opérateur d'une équation différentielle du second ordre linéaire. L'étude du spectre de cet opérateur pourra se ramener à la théorie à notre disposition, car l'opérateur aura une résoluvante compacte .

Soit $q \in C([0,1], \mathbb{R})$ .Soit $(T,\ D(T))$ l'opérateur défini sur $L^2([0,1])$ par

$$D(T) = \{f \in C^2([0,1]) \mid f(0) = f(1) = 0\} \text{ et}$$

$\forall f \in D(T), Tf = -f'' + qf.$

tout d'abord, pour tous $f,\ g \in D(T)$, on prouve par intégration par parties que $(Tf \mid g) = (f \mid Tg)$.

On dit que l'opérateur $(T,\ D(T))$ est symétrique. Pourtant, on peut prouver qu'il n'est pas auto-adjiont. Nous admettrons qu'il existe un opérateur $\left(\overline{T},\ D\left(\overline{T}\right)\right)$

dans le graphe est $\overline{\lceil(T)}$ et que $\left(\overline{T},\ D\left(\overline{T}\right)\right)$ est auto-adjiont et prolonge $(T,\ D(T))$ au sens où $D(T) \subset D\left(\overline{T}\right)$ et $T = \overline{T}$ sur $D(T)$ .L'opérateur $\overline{T}$ est un exemple d'opérateur de sturm-liouville.

On prouve ensuite, à l'aide de la variation de la constante à l'ordre 2, que si $z \notin \sigma_p(T)$, alors il existe $K_z \in L^2\left([0,1]^2\right)$, et méme $K_z \in C\left([0,1]^2\right)$ tel que

$$\forall\, g \in C^2([0,1]),\ (T-z)\, f = g \Leftrightarrow f(T) = \int_0^1 k_z(t,\ s)\, g(s)\, ds.$$

Cela signifie que, pour tout $z \notin \sigma_p(T)$, la résolvante $R_z(T)$ est la restriction d'un opérateur de Hilbert-Schimidt et est donc un opérateur compact. En particulier, pour tout $z \notin \sigma_p(T)$, $R_z(T)$ est la restriction d'un opérateur borné. Cela reste valable pour $\overline{T}$, donc, si $z \notin \sigma_p(T)$, $z \notin \sigma\left(\overline{T}\right)$ d'ou l'on déduit que $\sigma\left(\overline{T}\right) = \sigma_p\left(\overline{T}\right) = \sigma_p(T)$.

De plus, si $\lambda \in \sigma_p(T)$ et $f \in \ker(T-\lambda)$, alors, par l'intégration par parties, $\lambda \|f\|_2^2 = (Tf \mid f) = \|f\prime\|_2^2 + \int_0^1 q(T)\, \overline{f}(T)\, f(T)\, dt \geq \left(\inf_{[0,1]} q\right) \|f\|_2$, donc $\lambda > \inf_{[0,1]} q$.

Donc $\sigma\left(\overline{T}\right) \subset \left[\inf_{[0,1]} q, +\infty\right[$.

Si $\mu < \inf_{[0,1]} q$, alors $\mu \notin \sigma\left(\overline{T}\right)$ et $R\mu\left(\overline{T}\right)$ est compact et auto-adjoints car $\overline{T}$ l'est. Donc le spectre de $R\mu\left(\overline{T}\right)$ est composé de 0 et de valeurs propres de multiplicité finie. En fait,on a $\sigma\left(R\mu\left(\overline{T}\right)\right) = \left\{\frac{1}{\mu-\lambda_n} \mid \lambda_n \in \sigma_p\left(\overline{T}\right)\right\}$. De plus, il existe un base hilbertienne $(f_n)_{n\in\,\mathbb{N}}$ de $L^2([0,1])$ telle que

$$\forall\, g \in L^2([0,1]),\ R\mu\left(\overline{T}\right) g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu-\lambda_n} (g \mid f_n)\, f_n,$$

où les f_n sont des fonctions propres de $R\mu\left(\overline{T}\right)$ associées aux valeurs propres $\frac{1}{\mu-\lambda_n}$. Donc les f_n sont des fonction propres de $\overline{T}$ associées aux valeurs propres λ_n.

On déduit que

$$\overline{T} = \sum_{n\geq 0} \lambda_n (\cdot \mid f_n)\, f_n \quad \text{et} \quad D\left(\overline{T}\right) = \left\{f \in L^2([0,1]) \,/\, \sum_{n\,\geq 0} |\lambda_n (f \mid f_n)|^2 < +\infty\right\}.$$

Bien que $\overline{T}$ ne soit pas borné, le fait que résolvante soit compact nous permet encore de diagonaliser en base hilberienne, ceci un exemple d'intrduction à la théorie des opérateurs non-bornés.

Conclusion

Cette étude nous à mené à déduir que la théorie spectrale, est une théorie étandant à des opérateus définis sur des espaces fonctionnels généraux, la théorie élémentaire des valeurs propres et des vecteurs propres de matrice. Bien que ces ideés viennent au départ du développement de l'algébre linéaire, elles sont également lieés à l'etude des fonctions.

En fin, nous remarquons que les opérateurs linéaires non bornés ont des utilisations qui ont dépassé le domaine des mathématiques. Les travaux de recherche actuels ont pou objectif de developper ce domaine afin que l'on puisse l'utiliser dans le futur, dans la resolution de beaucoup de problèmes de la vie quotidienne.

Bibliographie

[1] J. B. Conway. A course in functional Analysis, springer, 1990(2nd edition)

[2] J. B. Conway. A course in operator theory, GSM 21, American mathematical society, RI, 2000.

[3] H. Brezis. Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Collection Mathématiques. Appliquées pour la Maitrise. Masson. Paris. 1983.

[4] Jean -Pierre Marco "Mathématiques analyse L_3 " . " Pearson Education France". 2009

[5] M. Reod, B. Simon, Methods of Modern Mathematical physics, vol. 1, Functional Analysis, Academic press, 1972.

[6] Walter Rudin "Analyse fonctionnelle, paris 1995.