

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



N° Réf :.....

Centre Universitaire  
Abd elhafid boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de  
Licence  
en: - Filière mathématiques

# Présentation générale de la méthode de KARMARKAR

Préparé par : Damak Feriel  
Benmebarek Wissam  
Bedjaoui Faiza

Encadrer par : Benaouicha Loubna

Année universitaire :2014/2015

# Remerciement

*Avant toutes chose j'aimerais remercier Dieu tout puissant le clément et le miséricordieux pour ça grande bonté et pour nous avoir permis d'arriver là où nous sommes aujourd'hui, nous souhaitons adresser nos remerciements les plus sincères aux personnes qui nous ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire.*

*nous tenons à remercier sincèrement Madame Benaouicha Loubna , qui en tant que Directeur de mémoire s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour son inspiration, l'aide et le temps.*

*nos remerciements s'adressent également à madame Laïb qui nous a accordés son aide durant nos recherches pour sa générosité et la grande patience dont elle a su faire preuve avec gentillesse.*

*nous oublions pas nos parents (Damak Chafik et Hamoui Sabira, Benmebarek Mouhamed et Benlaribi Nadjah, Bedjaoui Khabala et un grand hommage à Bedjaoui Aissa que Dieu l'accueil dans son vaste paradis) pour leur contribution, leur soutien et leur patience. nous tenons à exprimer notre reconnaissance envers nos frères et soeurs : Djallil, Ines, Lokmane, Salah eddin, Sawssen ; nos oncles : Nadjib, Abd el Hakim ; nos tantes : Houda, Warda, Dalila, Souad ; nos amis : Sabrina benmekhlouf, Hanene Djebli, Hocine Abdoune, Sellahi Okba, Hichem benlaribi, Haroun Benayache, Kenza Benayache ; nos cousins et cousines : Sabrine, Nardjes, Nadine, Amina, Nour el Houda, Chahra, Arwa que Dieu vous garde pour nous .*

*Enfin, nous adressons nos plus sincères remerciements à tous ceux qui nous ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire.*

*Merci à tous et à toutes.*

# Table des matières

<b>Introduction Générale</b>	<b>3</b>
<b>I Définitions et résultats préliminaires</b>	<b>4</b>
0.1 Espace de Hilbert . . . . .	5
0.2 le gradient . . . . .	5
0.3 Matrice hessienne . . . . .	5
0.4 Fonction de classe $C^0$ . . . . .	6
0.4.1 Fonction continue en un point . . . . .	6
0.4.2 Fonction continue sur un intervalle . . . . .	6
0.5 Fonction de classe $C^1$ . . . . .	6
0.6 Fonction convexe . . . . .	6
0.7 Fonction strictement convexe . . . . .	7
0.8 Ensemble convexe . . . . .	7
0.9 Fonction linéaire . . . . .	7
0.9.1 Représentation graphique . . . . .	7
0.9.2 La norme . . . . .	7
<b>1 Optimisation sans contrainte</b>	<b>8</b>
1.1 Définition des problèmes d'optimisation . . . . .	8
1.2 Problème d'optimisation sans contrainte . . . . .	8
1.2.1 condition d'optimalité . . . . .	9
1.2.2 Résultat d'existence et d'unicité . . . . .	10
<b>2 Optimisation avec contrainte</b>	<b>15</b>
2.1 Problème d'optimisation avec contrainte . . . . .	15
2.1.1 Définition d'optimisation avec contrainte . . . . .	15
2.1.2 Conditions d'optimalité dans le cas de contraintes égalité . . . . .	16
2.1.3 Contraintes inégalités . . . . .	18

2.1.4	Existence – Unicité – Conditions d’optimalité simple : . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Présentation générale de la méthode de Karmarkar</b>	<b>21</b>
3.1	Notions fondamentales . . . . .	21
3.1.1	Définition d’un programme mathématique . . . . .	21
3.1.2	Définition d’un programme linéaire . . . . .	21
3.1.3	Equivalence de deux programme mathématiques . . . . .	22
3.1.4	Forme canonique et forme standard d’un programme linéaire . . . . .	22
3.2	Minimisation d’une fonction linéaire sur un ellipsoïde . . . . .	23
3.3	L’idée générale de l’algorithme . . . . .	24
3.4	La transformation projective de KARMARKAR . . . . .	25
3.5	Description de la méthode . . . . .	26
3.5.1	Fonction potentiel (étude de la convergence) . . . . .	30

# Introduction

Après la deuxième guerre mondiale, la méthode du simplexe s'est imposée comme la seule méthode efficace pour la résolution des programmes linéaires (PL). L'apparition de l'algorithme de NARENDRA KARMARKAR en 1984 a permis le développement des méthodes de points intérieurs qui se sont révélées comme une véritable alternative à la méthode du simplexe. La méthode du simplexe est basée sur le principe fondamental suivant :

la valeur optimale (supposée finie) d'un problème linéaire est atteinte en au moins un sommet (ou point extrémal) du domaine des solutions réalisables, qui est un polyèdre convexe. Elle consiste, alors à parcourir les sommets du polyèdre jusqu'à l'obtention d'une solution optimale.

\* Ce mémoire est constitué d'une introduction générale, quatre chapitres et une conclusion générale

- On a commencée par donné des définitions et des résultats préliminaires.
- Dans le premier chapitre, nous avons présenté la défintion de problème d'optimisation et les conditions d'optimalité sans contrainte et résultats d'existence et d'unicite.
- Dans le deuxieme chapitre on présente la défintion de problème d'optimisation avec contrainte, les conditions de ce problème et le résultat d'existence et d'unicite.
- Enfin dans le dernier chapitre on donne une présentation générale de la méthode de KARMARKAR dont nous citons des notions fondamentales qui se trouve dans ce chapitre puis nous précisons des préliminaires et nous cloturons ce chapitre par une description de la méthode

# **Première partie**

## **Définitions et résultats préliminaires**

## 0.1 Espace de Hilbert

**Définition 0.1.1** un espace de Hilbert  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sur  $K$  est  $K$ -espace vectoriel  $H$  muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  tel que l'espace vectoriel normé  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle) = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$  soit complet. Le rôle de la complétude dans la définition d'un espace de Hilbert est en premier lieu de garantir l'existence d'une projection orthogonale sur les sous-espaces vectoriels de  $H$ .

## 0.2 le gradient

**Définition 0.2.1** Le gradient est une réalisation de la notion de dérivées pour une fonction à plusieurs variables, soit  $f$  une fonction de  $x, y, z$  on peut définir ses trois dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$  (si la fonction est continue et différentiable) à partir de ses trois valeurs on peut construire un vecteur le gradient qu'on note  $\text{grad}$  ou  $\vec{\nabla}$  :

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

## 0.3 Matrice hessienne

**Définition 0.3.1** Soit  $f$  une fonction de  $n$  variables, la matrice hessienne de  $f(x)$ , notée  $\nabla^2 f(x)$  est donnée par :

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

**Remarque 0.3.2** Cette matrice est symétrique si toutes les dérivées sont continues.

## 0.4 Fonction de classe $C^0$

### 0.4.1 Fonction continue en un point

**Définition 0.4.1** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $R$  et  $a$  un réel élément de  $I$ .

$f$  est continue en  $a$  si et seulement  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

$f$  est continue en  $a$  si et seulement  $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$ .

### 0.4.2 Fonction continue sur un intervalle

**Définition 0.4.2** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $R$   
 $f$  est continue sur  $I$  si et seulement si  $f$  est continue en chaque réel  $a$  de  $I$ .

## 0.5 Fonction de classe $C^1$

### Définition 0.5.1

1. On dit que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $U$  si toutes ses dérivées partielles sont définies et continues sur  $U$ .
2. Soit  $V$  un ouvert de  $R^p$ . On dit que  $f$  est un  $C^1$  difféomorphisme de  $U$  dans  $V$  si  $f$  est une bijection de  $U$  dans  $V$ , est de classe  $C^1$  sur  $U$ , et si sa réciproque  $f^{-1}$  est de classe  $C^1$  sur  $V$ .

**Remarque 0.5.2** Si  $f$  est un  $C^1$ -difféomorphisme de  $U$  dans  $V$  et  $W \subset U$  est ouvert, alors  $f(W)$  est ouvert comme image réciproque de  $W$  par l'application continue  $f^{-1}$ .

## 0.6 Fonction convexe

**Définition 0.6.1** Une fonction  $f : I \rightarrow R$  est dite convexe lorsque :

$$\forall (x, y) \in I, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad (1)$$

$f$  sera dite concave si  $-f$  est convexe.

## 0.7 Fonction strictement convexe

**Définition 0.7.1** Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . On dit que la fonction  $f$  est strictement convexe sur  $I$  si  $x \neq y$  et  $\lambda \in ]0, 1[$  impliquent

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

La fonction  $f$  est dite strictement concave sur  $I$  si  $-f$  est strictement convexe sur  $I$ .

## 0.8 Ensemble convexe

**Définition 0.8.1** Un ensemble  $C$  est dit convexe lorsque, pour tous  $x$  et  $y$  de  $C$ , le segment  $[x, y]$  est tout entier contenu dans  $C$  i.e. :

$$\forall x, y \in C, \forall t \in [0, 1], tx + (1 - t)y \in C$$

## 0.9 Fonction linéaire

**Définition 0.9.1** Soit  $a$  un nombre relatif. La fonction linéaire  $f$  de coefficient  $a$  associe à chaque nombre  $x$  le nombre  $ax$  i.e

$$f(\alpha x) = \alpha f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

### 0.9.1 Représentation graphique

**Définition 0.9.2** La représentation graphique de la fonction linéaire  $f : x \rightarrow ax$  est l'ensemble des points de coordonnées  $(x; ax)$

### 0.9.2 La norme

**Définition 0.9.3** Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel. On appelle norme sur  $E$  une application de  $E$  dans  $\mathbb{R}_+$  habituellement notée  $\|\cdot\|$  vérifiant pour tout  $x, y \in E$  et tout  $\lambda \in K$

1.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  (homogénéité)
2.  $(\|x\| = 0) \Rightarrow (x = 0)$
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (inégalité triangulaire)

# Chapitre 1

## Optimisation sans contrainte

### 1.1 Définition des problèmes d'optimisation

L'objectif de ce chapitre est de rechercher des minima ou des maxima d'une fonction  $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  sans contrainte. Le problème d'optimisation sans contrainte s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que :} \\ f(\bar{x}) \leq f(y), \forall y \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Le problème d'optimisation avec contrainte s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \bar{x} \in K \text{ tel que :} \\ f(\bar{x}) \leq f(y), \forall y \in K. \end{cases} \quad (1.1.2)$$

où  $K \subset \mathbb{R}^n$  et  $K \neq \mathbb{R}^n$ . Si  $\bar{x}$  est solution du problème (1.1.1), on dit que  $\bar{x} \in \arg \min_{\mathbb{R}^n} f$ , et si  $\bar{x}$  est solution du problème (1.1.2), on dit que

$$\bar{x} \in \arg \min_K f$$

### 1.2 Problème d'optimisation sans contrainte

**Définition 1.2.1** Soit  $f \in C(E, \mathbb{R})$  et  $E$  un espace vectoriel normé. On cherche soit un minimum global de  $f$ , c.à.d. :

$$\bar{x} \in E \text{ telque } f(\bar{x}) \leq f(y), \forall y \in E \quad (1.2.3)$$

où un minimum local, c.à.d. :

$$\bar{x} \text{ telque } \exists \alpha > 0 \ f(\bar{x}) \leq f(y), \ \forall y \in B(\bar{x}, \alpha) \quad (1.2.4)$$

### 1.2.1 condition d'optimalité

**Proposition 1.2.2** (Condition nécessaire d'optimalité)

soit  $E$  un espace vectoriel normé, et soient  $f \in C(E, \mathbb{R})$ , et  $\bar{x} \in E$  tel que  $f$  est différentiable en  $\bar{x}$ . Si  $\bar{x}$  est solution de (1.2.4) alors :

$$Df(\bar{x}) = 0.$$

**Démonstration 1.2.3** Supposons qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que  $f(\bar{x}) \leq f(y)$  pour tout  $y \in B(\bar{x}, \alpha)$ . Soit  $z \in E \setminus \{0\}$ , alors si  $|t| < \frac{\alpha}{\|z\|}$ , on a  $\bar{x} + tz \in B(\bar{x}, \alpha)$  (où  $B(\bar{x}, \alpha)$  désigne la boule ouverte de centre  $\bar{x}$  et de rayon  $\alpha$ ) et on a donc  $f(\bar{x}) \leq f(\bar{x} + tz)$ .

Comme  $f$  est différentiable en  $\bar{x}$  on a :

$$f(\bar{x} + tz) = f(\bar{x}) + Df(\bar{x})(tz) + |t| \varepsilon_z(t)$$

où  $\varepsilon_z(t) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow 0$ . On a donc  $f(\bar{x}) + tDf(\bar{x})(z) + |t| \varepsilon_z(t) \geq f(\bar{x})$ .  
Et pour  $\frac{\alpha}{\|z\|} > t > 0$ .

En faisant tendre  $t$  vers 0, on obtient que

$$Df(\bar{x})(z) \geq 0, \forall z \in E.$$

On a aussi  $Df(\bar{x})(-z) \geq 0, \forall z \in E$ , et donc :

$$-Df(\bar{x})(z) \geq 0, \forall z \in E.$$

On en conclu que :

$$Df(\bar{x}) = 0$$

**Remarque 1.2.4** Attention, la proposition précédente donne une condition nécessaire mais non suffisante.

En effet,  $Df(\bar{x}) = 0$  n'entraîne pas que  $f$  atteigne un minimum (ou un maximum) même local, en  $\bar{x}$ . Prendre par exemple  $E = \mathbb{R}$ ,  $x = 0$  et la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = x^3$$

## 1.2.2 Résultat d'existence et d'unicité

### Théorème 1.2.5 (Existence)

Soit  $E = \mathbb{R}^n$  et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une application telle que :

(i)  $f$  est continue

(ii)  $f(x) \rightarrow +\infty$  quand  $\|x\| \rightarrow +\infty$

alors il existe  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  tel que  $f(\bar{x}) \leq f(y)$  pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$

**Remarque 1.2.6** 1. Le théorème est faux si  $E$  est de dimension infinie (i.e. si  $E$  est espace de Banach au lieu de  $E = \mathbb{R}^n$ ), car si  $E$  est de dimension infinie,  $B_R$  n'est pas compacte.

2. L'hypothèse (ii) du théorème peut être remplacée par (ii)'  $\exists b \in \mathbb{R}^n, \exists R > 0$  tel que  $\|x\| \geq R \Rightarrow f(x) \geq f(b)$ .

3. Sous les hypothèses du théorème il n'y a pas toujours unicité de  $\bar{x}$  même dans le cas  $n = 1$ , prendre pour s'en convaincre la fonction  $f$  définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x^2(x-1)(x+1).$$

### Théorème 1.2.7 (unicité)

Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  strictement convexe alors il existe au plus un  $\bar{x} \in E$  tel que :

$$f(\bar{x}) \leq f(y), \forall y \in \mathbb{R}$$

**Démonstration 1.2.8** Soit  $f$  strictement convexe, supposons qu'il existe  $\bar{x}$  et  $\bar{\bar{x}} \in E$  tel que :

$$f(\bar{x}) = f(\bar{\bar{x}}) = \min_{\mathbb{R}^n} f$$

comme  $f$  est strictement convexe, si  $\bar{x} \neq \bar{\bar{x}}$  alors :

$$f\left(\frac{1}{2}\bar{x} + \frac{1}{2}\bar{\bar{x}}\right) < \frac{1}{2}f(\bar{x}) + \frac{1}{2}f(\bar{\bar{x}}) = \min_{\mathbb{R}^n} f$$

ce qui est impossible, puisque

$$f(\bar{x}) \leq f\left(\frac{1}{2}\bar{x} + \frac{1}{2}\bar{\bar{x}}\right)$$

donc  $\bar{x} = \bar{\bar{x}}$ .

**Remarque 1.2.9** Ce théorème ne donne pas l'existence. Par exemple dans le cas  $n = 1$  la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \exp x$  n'atteint pas son minimum, car  $\min_{\mathbb{R}^n} f = 0$  et  $f(x) \neq 0$  pour  $x \in \mathbb{R}$ , et pourtant  $f$  est strictement convexe.

Par contre, si on réunit les hypothèses des théorèmes (1.2.4) et (1.2.6), on obtient le résultat d'existence et unicité suivant :

**Théorème 1.2.10** (Existence et unicité)

Soit  $E = \mathbb{R}^n$ , et soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que :

- (i)  $f$  continue
- (ii)  $f(x) \rightarrow +\infty$  quand  $\|x\| \rightarrow +\infty$
- (iii)  $f$  est strictement convexe

alors il existe un unique  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  tel que :

$$f(\bar{x}) = \min_{\mathbb{R}^n} f.$$

**Remarque 1.2.11** Le théorème reste vrai si  $E$  est un espace de Hilbert ; on a besoin dans ce cas pour la partie existence des hypothèses (i), (ii) et de la convexité de  $f$ .

**Proposition 1.2.12** (1ère caractérisation de la convexité)

Soit  $E$  un espace vectoriel normé (sur  $\mathbb{R}$ ) et  $f \in C^1(E, \mathbb{R})$  alors :

1.  $f$  convexe si et seulement si  $f(y) \geq f(x) + f(x + t(y - x))$ , pour tout couple  $(x, y) \in E^2$ .
2.  $f$  est strictement convexe si et seulement si  $f(y) > f(x) + Df(x)(y - x)$ , pour tout couple  $(x, y) \in E^2$  tel que  $x \neq y$ .

**Démonstration 1.2.13 démonstration de 1 :**

( $\Rightarrow$ ) Supposons que  $f$  est convexe :

soit  $(x, y) \in E^2$  ; on veut montrer que  $f(y) \geq f(x) + Df(x)(y - x)$ . Soit  $t \in [0, 1]$ , alors  $f(ty + (1 - t)x) \leq tf(y) + (1 - t)f(x)$  grâce au fait que  $f$  est convexe. On a donc :

$$f(x + t(y - x)) - f(x) \leq t(f(y) - f(x)). \quad (1.2.6)$$

Comme  $f$  est différentiable

$$f(x + t(y - x)) = f(x) + Df(x)(t(y - x)) + t\varepsilon(t)$$

où  $\varepsilon(t)$  tend vers 0

Donc en reportant dans (1.2.6)

$$\varepsilon(t) + Df(x)(y-x) \leq f(y) - f(x), \quad \forall t \in ]0, 1[.$$

En faisant tendre  $t$  vers 0, on obtient alors :

$$f(y) \geq Df(x)(y-x) + f(x).$$

( $\Leftarrow$ ) Montrons maintenant la réciproque : Soit  $(x, y) \in E^2$ , et  $t \in ]0, 1[$  (pour  $t = 0$  ou  $t = 1$  on n'a rien à démontrer). On veut montrer que  $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ . On pose  $z = tx + (1-t)y$ . On a alors par hypothèse :

$$f(y) \geq f(z) + Df(z)(y-z)$$

et

$$f(x) \geq f(z) + Df(z)(x-z).$$

En multipliant la première inégalité par  $1-t$ , la deuxième par  $t$  et en les additionnant, on obtient :

$$(1-t)f(y) + tf(x) \geq f(z) + (1-t)Df(z)(y-z) + tDf(z)(x-z)$$

$$(1-t)f(y) + tf(x) \geq f(z) + Df(z)((1-t)(y-z) + t(x-z)).$$

Et comme

$$(1-t)(y-z) + t(x-z) = 0$$

On a donc

$$(1-t)f(y) + tf(x) \geq f(z) = f(tx + (1-t)y)$$

**démonstration de 2 :**

( $\Rightarrow$ ) On suppose que  $f$  est strictement convexe, on veut montrer que  $f(y) > f(x) + Df(x)(y-x)$  si  $y \neq x$ . Soit donc  $(x, y) \in E^2$ ,  $x \neq y$ . On pose  $z = \frac{1}{2}(y-x)$ , et comme  $f$  est convexe, on peut appliquer la partie 1 du théorème et écrire que

$$f(x+z) \geq f(x) + Df(x)(z)$$

On a donc

$$f(x) + Df(x)\left(\frac{y-x}{2}\right) \leq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

Comme  $f$  est strictement convexe, ceci entraîne que

$$f(x) + Df(x)\left(\frac{y-x}{2}\right) < \frac{1}{2}(f(x) + f(y)),$$

d'où le résultat.

( $\Leftarrow$ ) La méthode de démonstration est la même que pour le 1.

**Proposition 1.2.14** (Caractérisation des points tels que  $f(\bar{x}) = \min_E f$ )

Soit  $E$  espace vectoriel normé et  $f$  une fonction de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f \in C^1(E, \mathbb{R})$  et que  $f$  est convexe.

Soit  $\bar{x} \in E$ . Alors :

$$f(\bar{x}) = \min_E f \Leftrightarrow Df(\bar{x}) = 0.$$

En particulier si  $E = \mathbb{R}^n$  alors

$$f(\bar{x}) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \Leftrightarrow \nabla f(\bar{x}) = 0$$

**Démonstration 1.2.15** ( $\Rightarrow$ ) Supposons que  $f(\bar{x}) = \min_E f$  alors on sait que  $Df(\bar{x}) = 0$  (la convexité est inutile).

( $\Leftarrow$ ) Si  $f$  est convexe et différentiable

on a :

$$f(y) \geq f(\bar{x}) + Df(\bar{x})(y - x)$$

pour tout  $y \in E$  et comme par hypothèse

$$Df(\bar{x}) = 0$$

On en déduit que  $f(y) \geq f(\bar{x})$  pour tout  $y \in E$ .

Donc

$$f(\bar{x}) = \min_E f$$

**Proposition 1.2.16** (2ème caractérisation de la convexité)

Soit  $E = \mathbb{R}^n$  et  $f \in C^2(E, \mathbb{R})$ . Soit  $H_{f(x)}$  la hessienne de  $f$  au point  $x$

i.e  $(H_{f(x)})_{i,j} = \partial_{i,j}^2 f(x)$ . Alors :

1.  $f$  est convexe si et seulement si  $H_{f(x)}$  est symétrique et positive pour tout  $x \in E$  (c.à.d.  $H_{f(x)}^t = H_{f(x)}$  et  $H_{f(x)}y, y \geq 0$  pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$ )

2.  $f$  est strictement convexe si  $H_{f(x)}$  est symétrique définie positive pour tout  $x \in E$ . (Attention la réciproque est fausse.)

**Contre-exemple** Pour montrer que la réciproque de 2. est fausse, on propose le contre-exemple suivant :

Soit  $n = 1$  et  $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , on a alors  $H_f(x) = f''(x)$ . Si  $f$  est la fonction définie par  $f(x) = x^4$ , alors  $f$  est strictement convexe car  $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ , mais  $f''(0) = 0$ . Cas d'une fonctionnelle quadratique Soient  $A \in M_n(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n$ , et  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  définie par  $f(x) = \frac{1}{2}Ax \cdot x - b \cdot x$ . Alors  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ . Le calcul du gradient de  $f$  et de sa hessienne : on montre que  $\nabla f(x) = \frac{1}{2}(Ax + A^t x) - b$ . Donc si  $A$  est symétrique  $\nabla f(x) = Ax - b$ . Le calcul de la hessienne de  $f$  donne :  $H_f(x) = D(\nabla f(x)) = \frac{1}{2}(A + A^t)$ . On en déduit que si  $A$  est symétrique,  $H_f(x) = A$ . On peut montrer en particulier que si  $A$  est symétrique définie positive alors il existe un unique  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  tel que  $f(\bar{x}) \leq f(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , et que ce  $\bar{x}$  est aussi l'unique solution du système linéaire  $Ax = b$ .

# Chapitre 2

## Optimisation avec contrainte

### 2.1 Problème d'optimisation avec contrainte

#### 2.1.1 Définition d'optimisation avec contrainte

**Définition 2.1.1** Soit  $E = \mathbb{R}$ , soit  $f \in C(E, \mathbb{R})$ , et soit  $K$  un sous ensemble de  $E$ . On s'intéresse à la recherche de  $\bar{x} \in K$  tel que :

$$\begin{cases} \bar{x} \in K \\ f(\bar{x}) = \min_K f \end{cases} \quad (\star)$$

Ce problème est un problème de minimisation avec contrainte (ou "sous contrainte") au sens où l'on cherche  $x$  qui minimise  $f$  en astreignant  $x$  à être dans  $K$ . Voyons quelques exemples de ces contraintes (définies par l'ensemble  $K$ ), qu'on va expliciter à l'aide des  $p$  fonctions continues,  $g_i \in C(E, \mathbb{R})$   $i = 1 \dots p$ .

#### 1. Contraintes égalités.

On pose  $K = \{x \in E, g_i(x) = 0, i = 1 \dots p\}$ . On verra plus loin que le problème de minimisation de  $f$  peut alors être résolu grâce au théorème des multiplicateurs de Lagrange (voir théorème (Kuhn–Tucker)).

#### 2. Contraintes inégalités.

On pose  $K = \{x \in E, g_i(x) \leq 0 \ i = 1 \dots, p\}$ . On verra plus loin que le problème de minimisation de  $f$  peut alors être résolu grâce au théorème de Kuhn–Tucker (voir théorème Kuhn–Tucker ).

## 2.1.2 Conditions d'optimalité dans le cas de contraintes égalité

Dans ce paragraphe, on considèrera les hypothèses et notations suivantes :

$$f \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}), g_i \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}), i = 1 \dots p;$$

$$K = \{u \in \mathbb{R}^n, g_i(u) = 0, \forall i = 1 \dots p\} \quad (\star\star)$$

$$g = (g_1, \dots, g_p)^t \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^p)$$

**Remarque 2.1.2** (Quelques rappels de calcul différentiel)

Comme  $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ , si  $u \in \mathbb{R}^n$ , alors  $Dg(u) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ , ce qui revient à dire, en confondant l'application linéaire

$$Dg(u) \text{ avec sa matrice, que } Dg(u) \in M_{p,n}(\mathbb{R}).$$

Par définition,

$$\text{Im}(Dg(u)) = \{Dg(u)z, z \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^p$$

et

$$\text{rang}(Dg(u)) = \dim(\text{Im}(Dg(u))) \leq p$$

On rappelle de plus que :

$$Dg(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

et que  $\text{rang}(Dg(u)) \leq \min(N, p)$ . De plus, si  $\text{rang}(Dg(u)) = p$ , alors les vecteurs  $(Dg_i(u))_{i=1 \dots p}$  sont linéairement indépendants dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Théorème 2.1.3** (Multiplieurs de Lagrange)

Soit  $\bar{x} \in K$  tel que  $f(\bar{x}) = \min_K f$ . On suppose que  $f$  est différentiable en  $\bar{x}$  et  $\dim(\text{Im}(Dg(\bar{x}))) = p$  (ou  $\text{rang}(Dg(\bar{x})) = p$ ), alors :

il existe  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$  tel que :

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$$

**Exemple 2.1.4 1.**  $\min f(x, y) = x^2 + 2y^2$

sujet à  $f_1(x, y) = x + y - b = 0$

$L(\lambda, x, y) = (x^2 + 2y^2) + \lambda(x + y - b)$

$L$  convexe en  $(x, y)$ . Donc minimum atteint lorsque  $\nabla_{x,y}L(\lambda, x, y) = 0$

$$\nabla_{x,y}L(\lambda, x, y) = \begin{bmatrix} 2x + \lambda \\ 4y + \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2x \\ \lambda = -4y \end{cases} \Leftrightarrow x = 2y$$

$$x + y - b = 2y + y - b = 3y - b = 0 \Leftrightarrow y = \frac{b}{3}$$

Considérons maintenant le problème de programmation mathématique suivant

$$\min f(x)$$

$$\text{Sujet à } f_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$x \in X$$

**2.**  $\min f(x) = x^2$

Sujet à  $f_1(x) = 2x + 5 \leq 0$ .

$L$  convexe en  $(x)$ . Donc minimum atteint lorsque  $\nabla_x L(\lambda, x) = 0$

$$\nabla_x L(\lambda, x) = 2x + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow x = -\lambda$$

$$2x + 5 = -2\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{5}{2}$$

$\lambda = \frac{5}{2} \geq 0$ $2x + 5 = 0 \Leftrightarrow (2x + 5)\lambda = 0$
--

$$\text{donc } x = -\lambda = -\frac{5}{2}$$

**Théorème 2.1.5** (Utilisation pratique du théorème de Lagrange)

Soit  $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ,  $g = (g_1, \dots, g_p)^t$  avec  $g_i \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  pour  $i = 1, \dots, p$ , et soit  $K = \{x \in \mathbb{R}^n, g_i(x) = 0, i = 1, \dots, p\}$ . Le problème qu'on cherche à résoudre est le problème de minimisation  $(\star)$  qu'on rappelle ici :

$$\begin{cases} \bar{x} \in K \\ \bar{x} = \min_K f \end{cases} \quad (\star)$$

**Remarque 2.1.6** 1. D'après le théorème des multiplicateurs de Lagrange, si  $\bar{x}$  est solution de  $(\star)$  et  $\text{Im}(Dg(\bar{x})) = \mathbb{R}^p$ , alors il existe  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$  tel que  $\bar{x}$  est solution du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, & j = 1, \dots, p \\ g_i(\bar{x}) = 0, & i = 1, \dots, p \end{cases} \quad (\star\star\star)$$

Le système  $(\star\star\star)$  est un système non linéaire de  $(n + p)$  équations et à  $(n + p)$  inconnues  $(\bar{x}, \dots, \bar{x}_n, \lambda_1 \dots \lambda_p)$ . Ce système sera résolu par une méthode de résolution de système non linéaire (Newton par exemple).

2. On vient de montrer que si  $\bar{x}$  solution de  $(\star)$  et  $\text{Im}(Dg(\bar{x})) = \mathbb{R}_p$ , alors  $\bar{x}$  solution de  $(\star\star\star)$ . Par contre, si  $\bar{x}$  est solution de  $(\star\star\star)$ , ceci n'entraîne pas que  $\bar{x}$  est solution de  $(\star)$ .

### 2.1.3 Contraintes inégalités

Soit  $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  et  $g_i \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$   $i = 1, \dots, p$ , on considère maintenant un ensemble  $K$  de la forme :  $K = \{x \in \mathbb{R}^n, g_i(x) \leq 0 \forall i = 1 \dots p\}$ , et on cherche à résoudre le problème de minimisation  $(\star)$  qui s'écrit :

$$\begin{cases} \bar{x} \in K \\ f(\bar{x}) \leq f(x), \quad \forall x \in K \end{cases}$$

**Remarque 2.1.7** Soit  $\bar{x}$  une solution de  $(\star)$  et supposons que  $g_i(\bar{x}) < 0$ ,

pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$ . Il existe alors  $\varepsilon > 0$  tel que si  $x \in B(\bar{x}, \varepsilon)$  alors  $g_i(x) < 0$  pour tout  $i = 1, \dots, p$ .

On a donc  $f(\bar{x}) \leq f(x) \forall x \in B(\bar{x}, \varepsilon)$ . On est alors ramené à un problème de minimisation sans contrainte, et si  $f$  est différentiable en  $\bar{x}$ , on a donc :

$$\nabla f(\bar{x}) = 0$$

On donne maintenant sans démonstration le théorème de Kuhn-Tucker qui donne une caractérisation de la solution du problème  $(\star)$ .

**Théorème 2.1.8** (Kuhn-Tucker)

Soit  $f \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ , soit  $g_i \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ , pour  $i = 1, \dots, p$ , et soit :

$$K = \{x \in \mathbb{R}^N, g_i(x) \leq 0 \forall i = 1 \dots p\}$$

On suppose qu'il existe  $\bar{x}$  solution de  $(\star)$ , et on pose :

$$I(\bar{x}) = \{i \in \{1, \dots, p\}, |g_i(\bar{x}) = 0\}$$

On suppose que  $f$  est différentiable en  $\bar{x}$  et que la famille de  $\mathbb{R}^n$   $\{\nabla g_i(\bar{x}), i \in I(\bar{x})\}$  est libre. Alors il existe une famille  $(\lambda_i)_i \in I(\bar{x}) \subset \mathbb{R}_+$  telle que :

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$$

**Remarque 2.1.9** 1. Le théorème de Kuhn-Tucker s'applique pour des ensembles de contrainte de type inégalité. Si on a une contrainte de type égalité, on peut évidemment se ramener à deux contraintes de type inégalité en remarquant que  $\{h(x) = 0\} = \{h(x) \leq 0\} \cap \{-h(x) \leq 0\}$ . Cependant, si on pose  $g_1 = h$  et  $g_2 = -h$ , on remarque que la famille  $\{\nabla g_1(\bar{x}), \nabla g_2(\bar{x})\} = \{\nabla h(\bar{x}), -\nabla h(\bar{x})\}$  n'est pas libre. On ne peut donc pas appliquer le théorème de Kuhn-Tucker sous la forme donnée précédemment dans ce cas (mais on peut il existe des versions du théorème de Kuhn-Tucker permettant de traiter ce cas, voir Bonans-Saguez).

2. Dans la pratique, on a intérêt à écrire la conclusion du théorème de Kuhn-Tucker (i.e. l'existence de la famille  $(\lambda_i)_i \in I(\bar{x})$ ) sous la forme du système de  $N + p$  équations et  $2p$  inéquations à résoudre suivant :

**Exemple 2.1.10** 
$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0, \\ \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0, \forall i = 1, \dots, p, \\ g_i(\bar{x}) \leq 0, \forall i = 1, \dots, p, \\ \lambda_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, p. \end{array} \right.$$

$$i = 1, \dots, p \quad g_i(\bar{x}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, p$$

$$\min_{\lambda_1 \geq 0} 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 10x_1 - 10x_2$$

sujet à  $x_1^2 + x_2^2 \leq 5$

$$3x_1 + x_2 \leq 6$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x_1 + 2x_2 - 10 + \lambda_1 2x_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 10 + \lambda_1 2x_2 + 1 \lambda_2 = 0 \end{array} \right.$$

<i>S'il existe un <math>\lambda^*</math> telque</i>	
$\nabla_x L(\lambda^*, x^*) = \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^* \nabla f_i(x^*) = 0$	
$\lambda_i^* f_i(x^*) = 0$	$f_i(x^*) \leq 0 \quad i = 1, \dots, n$
$\lambda_i^* \geq 0$	$i = 1, \dots, n$

$$\lambda_1 (x_1^2 + x_2^2 - 5) = 0$$

$$\lambda_2 (3x_1 + x_2 - 6) = 0$$

$$(x_1^2 + x_2^2 - 5) \leq 0$$

$$(3x_1 + x_2 - 6) \leq 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$$

## 2.1.4 Existence – Unicité – Conditions d’optimalité simple :

**Théorème 2.1.11** (*Existence*) :

Soit  $E = \mathbb{R}^n$  et  $f \in C(E, \mathbb{R})$ .

1. Si  $K$  est un sous-ensemble fermé borné de  $E$ , alors il existe  $\bar{x} \in K$  tel que  $f(\bar{x}) = \min_K f$ .
2. Si  $K$  est un sous-ensemble fermé de  $E$ , et si  $f$  est croissante à l’infini, c’est-à-dire que  $f(x) \rightarrow +\infty$  quand  $|x| \rightarrow +\infty$ , alors  $\exists \bar{x} \in K$  tel que :

$$f(\bar{x}) = \min_K f.$$

**Théorème 2.1.12** (*Unicité*) :

Soit  $E = \mathbb{R}^N$  et  $f \in C(E, \mathbb{R})$ . On suppose que  $f$  est strictement convexe et que  $K$  est convexe. Alors il existe au plus un élément  $\bar{x}$  de  $K$  tel que :

$$f(\bar{x}) = \min_K f.$$

**Théorème 2.1.13** (*Existence et unicité*) :

Soient  $E = \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C(E, \mathbb{R}^n)$  une fonction strictement convexe et  $K$  un sous ensemble convexe fermé de  $E$ .

Si  $K$  est borné ou si  $f$  est croissante à l’infini, c’est-à-dire si  $f(x) \Rightarrow +\infty$  quand  $\|x\| \rightarrow +\infty$ .

Alors il existe un unique élément  $\bar{x}$  de  $K$  solution du problème de minimisation  $(\star)$ , i.e. tel que

$$f(\bar{x}) = \min_K f.$$

**Remarque 2.1.14** On peut remplacer  $E = \mathbb{R}^n$  par  $E$  espace de Hilbert de dimension infinie dans le dernier théorème, mais on a besoin dans ce cas de l’hypothèse de convexité de  $f$  pour assurer l’existence de la solution .

**Proposition 2.1.15** (*Condition simple d’optimalité*) :

Soient  $E = \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C(E, \mathbb{R})$  et  $\bar{x} \in K$  tel que :

$$f(\bar{x}) = \min_K f.$$

On suppose que  $f$  est différentiable en  $\bar{x}$

1. Si  $\bar{x} \in K$  alors  $\nabla f(\bar{x}) = 0$ .
2. Si  $K$  est convexe, alors  $\nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) \geq 0$  pour tout  $x \in K$ .

# Chapitre 3

## Présentation générale de la méthode de Karmarkar

### 3.1 Notions fondamentales

Dans ce paragraphe, on présente simplement quelques notions fondamentales de la programmation linéaire qui serviront de support à l'intuition dans les développements ultérieurs.

#### 3.1.1 Définition d'un programme mathématique

le problème de programmation mathématique est représenté par la notation :

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in D \end{cases} \quad (\star)$$

- Un point de  $D$  est appelé "solution réalisable" de  $(\star)$ .
- On appelle "solution optimale" de  $(\star)$  toute solution réalisable  $x^*$ .
- La valeur  $f^* = f(x^*)$  est appelée "valeur optimale"

#### 3.1.2 Définition d'un programme linéaire

Un programme linéaire est un programme mathématique dans lequel

- Le domaine  $D$  des solution réalisables est défini par un ensemble d'équations et/ou d'inéquations linéaires appelées "contraintes".
- La fonction  $f$ , dite "fonction objectif ou économique", est linéaire.

### 3.1.3 Equivalence de deux programme mathématiques

Deux programme mathématiques  $(p)$  et  $(p')$  (en particulier deux programmes linéaires) sont dit "équivalents" si à toute solution réalisable de l'un on sait faire correspondre une solution réalisable de l'autre de telle sorte que les fonctions objectives soient égales pour cette paire de solutions.

### 3.1.4 Forme canonique et forme standard d'un programme linéaire

- Un programme linéaire est écrit sous "forme canonique" si le domaine des solutions réalisables est défini par un système d'inéquations linéaires.
- Si par contre le domaine des solutions réalisables est défini par un système d'équation linéaire, on dit que le programme est écrit sous "forme standard".
- On peut toujours mettre un programme linéaire quelconque sous forme standard en introduisant des variables supplémentaires appelées "variables d'écart".

#### Exemple 3.1.1

$$\left\{ \begin{array}{l} \min 5x_1 - 3x_2 \\ x_1 - x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ -x_1 + 6x_2 = 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

En introduisant les variables d'écart  $x_3 \geq 0$  et  $x_4 \geq 0$  dans la première et la deuxième contrainte, on met (1) sous la forme équivalente :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min 5x_1 - 3x_2 + 0.x_3 + 0.x_4 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 4 \\ -x_1 + 6x_2 = 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

(2) est la forme standard de (1).

Pour cette raison, on ne considérera dans ce qui suit que des programmes linéaires sous forme standard du type :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min c^t x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \right. \quad (P)$$

où

$n$  désigne le nombre de variables.

$m$  : nombre de contraintes.

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  est la matrice des contraintes.

$c \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur cout.

$b \in \mathbb{R}^m$  est le second membre.

**Remarque 3.1.2** 1. On peut toujours supposer que l'on a  $\text{rang}(A) = m$  (c'est le cas dans la méthode de Karmarkar) En effet, si  $\text{rang}(A) < m$ , une ou plusieurs lignes de  $A$  peuvent s'exprimer comme combinaisons linéaires des autres. Suivant la valeur des composantes  $b_i$  de  $b$ , les contraintes correspondantes sont soit redondantes (auquel cas elles peuvent être éliminées du problème) soit incompatibles avec les autres (auquel cas le système  $Ax = b$  n'a pas de solutions).

2. Il n'est pas restrictif de supposer que la variable  $x$  est astreints à être non négative. En effet, si la variable  $x$  est non contrainte en signe, on pourra remplacer  $x$  par la différence  $x^+ - x^-$  de deux variables  $x^+$  et  $x^-$  astreintes, elles à ne prendre que des valeurs non-négatives. Le programme qui en résulte est évidemment un programme linéaire de la forme (p).

## 3.2 Minimisation d'une fonction linéaire sur un ellipsoïde

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \min c^t x \\ x \in E \end{cases} \quad (0)$$

Où  $x, c \in \mathbb{R}^n$  et  $E$  un ellipsoïde défini par son centre  $a^0$ , par  $r$  et la matrice symétrique définie positive  $A$

$$\text{Algébriquement : } E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : (x - a^0)^t A (x - a^0) \leq r^2 \right\}$$

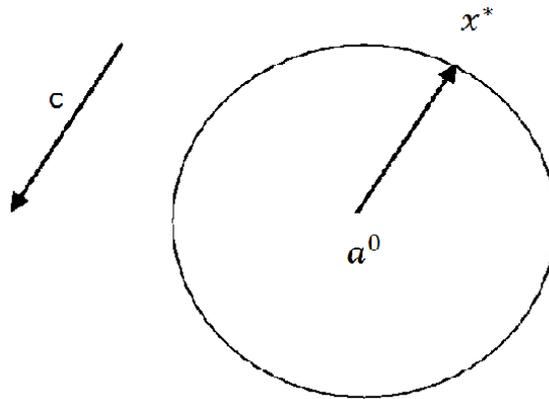
**Lemme 3.2.1** La solution du problème (0) est donnée par :

$$x^* = a^0 - \frac{A^{-1}cr}{\sqrt{\langle c, A^{-1}c \rangle}}.$$

**cas particulier du lemme :**

Si l'ellipsoïde  $E$  est réduit à une sphère ( $A = I$ )  
alors la solution de (0) est :  $x^* = a^0 - \frac{c}{\|c\|^r}$ .

Autrement dit :



### 3.3 L'idée générale de l'algorithme

Soit  $A$  un élément de  $\mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  et  $c \in \mathbb{R}^n$  et posons par définition

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$$

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\} = \Omega \cap \mathbb{R}_+^n$$

où  $\mathbb{R}_+^n$  l'orthant positif.

Considérons alors le programme linéaire générale :

$$\begin{cases} \min c^t x \\ x \in P \end{cases} \quad (\text{p.l.g})$$

Si l'on remplace  $\mathbb{R}_+^n$  par une sphère (ou un ellipsoïde)  $E_1 \subset \mathbb{R}_+^n$ , on obtient le problème

$$\begin{cases} \min c^t x \\ x \in \Omega \cap E_1 \end{cases} \quad (1)$$

Or, l'intersection d'une sphère et d'un espace affine est une sphère de dimension plus petite dans cet espace affine, donc  $(\Omega \cap E_1 = E_2)$ .

Le problème devient :

$$\begin{cases} \min c^t x \\ x \in E_2 \end{cases} \quad c' \text{ désigne la projection orthogonale de } c \text{ sur } \Omega \quad (2)$$

D'après ce qui précède , le problème (2) est trivial : il suffit de se déplacer à partir du centre de  $E_2$  dans la direction  $(-\hat{c})$  d'une distance égale au rayon de  $E_2$ .

Finalement, tout revient à remplacer  $P$  par un ellipsoïde (ou une sphère)  $E$  de centre  $a^0$  ( $a^0 \in P : a_i^0 > 0, i = 1, \dots, n$ ) et minimiser  $c^t x$  sur  $E$  au lieu de  $P$ .

**Lemme 3.3.1**

$$0 \leq \frac{f_E - f_P}{f(a^0) - f_P} \leq f - \frac{1}{v}$$

### 3.4 La transformation projective de KARMARKAR

Soit  $a = (a_1, a_2, \dots; a_n)^t$  un point strictement intérieur à  $p$  (i.e. tel que  $a \in \Omega$  et  $a_i > 0$ ) et posons  $D = \text{diag}\{a\}$  définissons alors le simplexe  $s_{n+1}$  de dimension  $n$  contenu dans  $R^{n+1}$  :

$$s_{n+1} = \{x \in R^{n+1}, x \geq 0 \text{ et } e_{n+1}^t x = 1\}$$

la transformation projective (notée  $T$ ) est une fonction :

$$y = T(x) \text{ avec } \begin{cases} y_i = \frac{x_i/a_i}{1 + \sum_{i=1}^n x_i/a_i} & , i = 1, \dots, n \\ \text{et} \\ y_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

il est facile de voir que :  $y_i = \frac{x_i}{a_i} y_{n+1}, i = 1, \dots, n$

ou encore :  $y_{[n]} = (D^{-1}x) y_{n+1}$  , où  $y [n]$  désigne les  $n$  premières composantes de  $y$ . ceci montre que  $T$  est bijective : En effet,

$$T^{-1}(y) = x = \frac{Dy [n]}{y_{n+1}}$$

evidemment :

- \*  $T(R_+^n) = s_{n+1} \subset R_+^{n+1}$
- \*  $T(a) = a^0 = (1/n + 1) e_{n+1}$  (centre de  $s_{n+1}$ )

**Quelques propriétés de  $T$  :**

1. L'image d'un espace affine  $\Omega$  par  $T$  est un espace affine  $\Omega'$ , donc puisque  $a \in \Omega$  , son image  $a^0 \in \Omega'$ .
2. L'image d'une face  $(x_i = 0)$  de  $R_+^n$  est la face correspondante  $(y_i = 0, i = 1, \dots, n)$  du simplexe  $s_{n+1}$  , quand à la face  $y_{n+1} = 0$  de  $s$ , elle est l'image des points à l'infini.

Il est facile de voir que la plus grande sphère inscrite dans  $s_{n+1}$  et la plus petite sphère contenant  $s_{n+1}$  centrées en  $a^0$  sont respectivement :

$$B(a^0, r) = \{X \in R^{n+1} : e_{n+1}X^t = 1, \|X - a^0\| \leq r\}$$

$$B(a^0, R) = \{X \in R^{n+1} : e_{n+1}X^t = 1, \|X - a^0\| \leq R\}$$

où  $r = 1/\sqrt{n(n+1)}$  et  $R = \sqrt{n/(n+1)}$  d'où  $(R/r) = n$

la situation est donc la suivante :  $B(a^0, r) \subset s_{n+1} \subset B(a^0, R)$  ce qui entraîne :

$B(a^0, r) \cap \Omega' \subset s_{n+1} \cap \Omega' \subset B(a^0, R) \cap \Omega'$  or,  $s_{n+1} \cap \Omega' = P' = T(P = \Omega \cap R_+^n)$  de plus l'intersection d'une sphère  $B$  avec un espace affine  $\Omega$  est une sphère  $B'$  de dimension petite et de même rayon que  $B$  si  $\Omega$  contient le centre de  $B$ , c'est le cas ici puisque  $a^0 \in \Omega'$ . ainsi :  $B'(a^0, r) \subset P' \subset B'(a^0, R)$ , où  $B'(a^0, R) = B(a^0, R) \cap \Omega'$  et  $B'(a^0, r) = B(a^0, r) \cap \Omega'$ . ceci prouve que la minimisation sur la sphère inscrite dans la région admissible réduit la valeur de l'objectif d'au moins  $(1 - 1/n)$ .

### 3.5 Description de la méthode

#### Le problème traité par KARMARKAR et les hypothèses de travail

On se place désormais dans  $R^n$  : le simplexe  $S_n = \{x \in R^n : e_n x^t = 1, x \geq 0\} \subset R^n$  est donc de dimension  $(n - 1)$ .

La méthode projective de KARMARKAR résoud directement le programme linéaire réduit suivant :

$$\begin{cases} \min cx^t \\ Ax = 0 \\ x \in s_n \end{cases} \quad (\text{p.l.r})$$

en supposant que :

1. La valeur optimale est nulle, i.e : si  $x^*$  est une solution optimale de (p.l.r) alors

$$c^t x^* = z^* = 0.$$

2. Le point  $a^0 = (1/n)e_n$  (centre du simplexe  $s_n$ ) est une solution réalisable de (p.l.r)
3. La matrice  $A$  est de plein rang :  $rg(A) = m$ .

ces trois hypothèses seront appelées les conditions de KARMARKAR

on suppose également que  $c^t a^0 > 0$ , puisque si  $c^t a^0 = 0$  on s'arrête immédiatement avec  $a^0$  optimal. ceci implique que  $c^t x$  n'est pas positif pour tout  $x$  réalisable.

**Remarque 3.5.1 a-** Si la valeur optimale est connue à priori mais non nulle l'égalité  $e_n x^t = 1$  permet de se ramener à un objectif nul. en effet, soit  $x$  une solution optimale du problème et  $z^*$  la valeur optimale de l'objectif alors  $c^t x = z^* = z^* e_n^t x \implies (c - z^* e_n)^t x = (c')^t x = 0$ . on minimise alors l'objectif  $(c')^t x$  au lieu de  $c^t x$ , où  $c'_i = c_i - z^*$ ,  $i = 1 \dots n$ .

**b-** Si le système de contraintes est de la forme  $Ax = b$ ,  $b \neq 0$ , on se ramène facilement à un système homogène, il suffit d'écrire :  $Ax = b e_n^t y \implies (A - b e_n^t) x = 0$

autrement dit on obtient un système si la forme  $A^t x = 0$  où les éléments de  $A$  sont

**c-** Le problème (p.l.r) ainsi défini peut être vu comme un problème de faisabilité en effet, puisqu'on suppose la valeur optimale ( $z^*$ ) nulle ou connue à priori, il s'agit alors de trouver :

$$x \geq 0 \text{ telque : } \begin{cases} c^t x = z^* \\ Ax = 0 \\ e_n^t x = 1 \end{cases}$$

### L'algorithme de base

Nous présentons dans ce paragraphe l'algorithme de base de KARMARKAR pour résoudre un programme linéaire du type (p.l.r). pour cela on se donne une précision  $\varepsilon$  (par exemple  $\varepsilon = 2^{-q}$  où  $q$  est un entier,  $q \geq 1$ )

partant de la solution initiale  $x^0 = a$ , l'algorithme produit une suite de points intérieurs  $a$  converge vers une solution optimale du problème en un temps polynomial.

dans le but de ramener l'objectif  $c^t x$  à zéro on le minimise localement sur une sphère inscrite dans la région admissible. à chaque itération ( $k$ ) itéré ( $x^k > 0$ ) est ramené au centre de  $s_n$  par la transformation projective  $T_k$  définie par :

$$T_k : x \in s_n \dashrightarrow T_k(x) = y \in s_n \text{ avec}$$

$$T_k(x) = \frac{D_k^{-1} x}{e_n^t D_k^{-1} x} = y \quad T_k'(y) = \frac{D_k y}{e_n^t D_k y}, \quad D_k = \text{diag} \{x^k\}$$

et ainsi de suite jusqu'à ce que le test d'optimalité ( $c^t x^k \leq \varepsilon$ ) soit vérifié.

### Début algorithme initialisation

$$x^0 = a^0 = (1/n) e_n, k = 0$$

**tant que**  $c^t x^k > \varepsilon$  **faire**

$$\text{pas 0} \left\{ \begin{array}{l} D_k = \text{diag} \{ x^k \} \\ B_k = \begin{bmatrix} A_k \\ \dots \\ e_n^t \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad A_k = AD_k$$

$$\text{pas 1} \quad p_k = \left\{ I - B_k^t (B_k B_k^t)^{-1} B_k \right\} D_k' c = \left\{ I - A_k^t (A_k A_k^t)^{-1} A_k - \frac{1}{n} e_n e_n^t \right\} D_k c$$

$$\text{pas 2} \quad d_k = \frac{p_k}{\|p_k\|}$$

$$\text{pas 3} \quad y^k = a^0 - \alpha r d_k \quad r = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}, \quad 0 < \alpha < 1$$

$$\text{pas 4} \quad x^{k+1} = \frac{D_k y^k}{e_n^t D_k y^k} = T_k^{-1}(y^k), \quad k = k + 1$$

**fin tant que**

**fin algorithme**

dans : le pas 0 on ne fait que construire la matrice des contraintes (i.e  $B_k$ )

le pas 1 consiste à projeter  $c_k = D_k c$  sur le noyau de  $B_k$  (c'est l'opération la plus coûteuse de l'algorithme). la formule donnant  $p_k$  est obtenue par un calcul élémentaire en utilisant le fait que  $A_k e_k = 0$ .

au pas 2 on calcule le vecteur normé  $d_k$ , correspondant à  $p_k$

au pas 3 on choisit  $y^k$  à une distance  $\alpha r$  de  $a^0$  dans la direction  $-d_k$  KARMARKAR choisit  $\alpha = \frac{1}{4}$

et en fin au pas 4 on effectue la transformation inverse  $T_k^{-1}$  pour calculer le nouvel itéré  $x^{k+1}$

### Dérivation et analyse de l'algorithme

Le but de ce paragraphe est de montrer en quelque sorte comment est obtenu l'algorithme précédent.

on a vu que la transformation  $T_k$  applique le simplexe  $s_n$  dans lui même, en même temps l'itéré  $x^k > 0$  (dont les composantes forment la matrice diagonale  $D_k$ ) est envoyé au centre de  $s_n$ . cependant le transformé du programme linéaire (p.l.r) est le programme suivant :

$$(p.n.l) \left\{ \begin{array}{l} \min \frac{c^t D_k y}{e_n^t D_k y} \\ \frac{AD_k y}{e_n^t D_k y} = 0 \\ e_n^t y = 1, \quad y \geq 0 \end{array} \right.$$

mais on a pour tout  $y \in s_n : e_n^t D_k y = \sum_{i=1}^n x_i^k y_i \geq \min \{x_i^k : i = 1, \dots, n\} > 0$

les égalités  $\frac{c^t D_k y}{e_n^t D_k y} = 0$  et  $\frac{AD_k y}{e_n^t D_k y} = 0$  sont donc satisfaites si et seulement si  $c^t D_k y = 0$  et  $AD_k y = 0$

(p.n.l) est équivalent au programme linéaire

$$(p.l) \begin{cases} \min c^t D_k y \\ AD_k y = 0 \\ e_n^t y = 1, y \geq 0 \end{cases}$$

qui est de la forme (p.l.r) et vérifie les conditions de KARMARKAR

**Remarque 3.5.2** (remarque fondamentale)

Si on ajoute au problème (p.l) la contrainte  $\{y \in R^n : \|a^0 - y\| \leq \alpha r\}$ , où  $0 < \alpha < 1$  et  $r = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$

i.e la sphère  $B(a^0, \alpha r)$  de centre  $a^0$  et de rayon  $\alpha r$ , la contrainte de positivité ( $y \geq 0$ ) devient redondante. ce résultat est une conséquence du lemme suivant :

**Lemme 3.5.3** Si pour un programme linéaire donné on connaît une solution réalisable  $y$  telle que ( $y_i > 0, i = 1 \dots n$ ), alors l'ellipsoïde :

$$E = \left\{ x \in R^n : \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - y_i)^2}{y_i^2} \leq \beta^2, 0 < \beta < 1 \right\}$$

est à l'intérieur de l'orthant positif de  $R^n$ .

**Preuve.** Supposons au contraire qu'il existe  $j \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $x_j \leq 0$ , alors :

$$\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - y_i)^2}{y_i^2} \geq \frac{(x_j - y_j)^2}{y_j^2} \geq 1 \geq \beta^2, \text{ c.q.f.d}$$

pour retrouver le résultat précédent il suffit de prendre  $y = a^0$  et  $\beta = \alpha r$

finalement, le problème (p.l) devient :

$$\begin{cases} \min c^t D_k y \\ AD_k y = 0 \\ e_n^t y = 1 \\ \|a^0 - y\| \leq \alpha r \end{cases} \quad (\text{poux})$$

on vient de remplacer l'orthant positif par la sphère  $B(a^0, \alpha r)$  qui est beaucoup plus simple à manier. ■

**Théorème 3.5.4** Le point  $y^k$  (du pas 3 de l'algorithme) est une solution optimale de (poux).

### 3.5.1 Fonction potentiel (étude de la convergence)

Pour établir la convergence de l'algorithme, il faut montrer que :

$$\frac{c^t x^{k+1}}{c^t x^k} < q_0 \quad \text{ou} \quad 0 < q_0 < 1 \quad \text{est indépendant de } k$$

or, il est difficile de trouver directement  $q_0$ . pour surmonter cette difficulté, Karmarkar associe à l'objectif linéaire  $c^t x$  la fonction potentiel  $f(x) = \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{c^t x}{x_i}\right)$ , définie sur  $F = \{x \in \mathbb{R}^n : x > 0, Ax = 0, e_n^t x = 1\}$

**Lemme 3.5.5** Soit  $x^k$  le  $K^{ième}$  itéré de l'algorithme, alors :

$$\frac{c^t x^k}{c^t x^0} \leq (\exp [f(x^k) - f(x^0)])^{\frac{1}{n}}$$

ou  $x^0 = \frac{e_n}{n}$

**Preuve.**  $\exp [f(x^k) - f(x^0)] = \left(\frac{c^t x^k}{c^t x^0}\right) \prod_{i=1}^n \frac{x_i^0}{x_i^k} \Rightarrow \frac{c^t x^k}{c^t x^0} = \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i^k}{x_i^0}\right)^{\frac{1}{n}} (\exp [f(x^k) - f(x^0)])^{\frac{1}{n}}$   
 or,  $\left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i^k}{x_i^0}\right)^{\frac{1}{n}} = n \left(\prod_{i=1}^n x_i^k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{n \sum_{i=1}^n x_i^k}{n} = 1$ , (puisque  $x^k \in S_n$ )  
 d'où le résultat ■

**conséquence immédiate :**

si la suite  $f(x^k)$  tend vers  $-\infty$  alors la suite  $c^t x^k$  tend vers zéro outrement dit pour diminuer  $c^t x$  il suffit de diminuer suffisamment  $f(x)$ .

**Propriété 3.5.6** (propriété de  $f(x)$ )

1- Une propriété cruciale de  $f(x)$  est qu'elle conserve toutes ses caractéristiques par  $T_k$   
 $i, e$  : elle transformée en une fonction de la même forme :

$$g(y) = \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{c^t D_k y}{y_i}\right) - \sum_{i=1}^n \log(x_i^k), \quad \text{ou } y = T_k(x). \quad g(y) \text{ est bien définie sur } F_k = \{y \in \mathbb{R}^n : y > 0, AD_k y = 0, e_n^t y = 1\}$$

2- Soit  $y = T(x)$  et  $y^0 = T(x^0)$  alors on a :  $f(x) \leq f(x^0) - d \Leftrightarrow g(y) \leq g(y^0) - d$ ,  $d$  étant un réel positif. En d'autres termes toute réduction de  $f(x)$  entraîne la même réduction de  $g(y)$  et réciproquement.

3- La fonction potentiel  $g(y)$  est associée à la fonction linéaire  $c^t D_k y$  (objectif du problème (pau)).

4-  $g(y)$  est une fonction monotone croissante de  $c^t D_k y$

**Théorème 3.5.7 (théorème de convergence de KARMARKAR)**

si  $0 < \alpha \leq \frac{1}{4}$ , alors en partant de  $x^0 = e_n/n$  après  $\mathbf{o}(nq + n \log n)$  itération l'algorithme trouve un point réalisable  $x$  tel que :

$$(i) c^t x = 0 \quad \text{ou} \quad (ii) \frac{c^t x}{c^t x^0} \leq 2^q \quad \text{ou } q \text{ est une précision fixée.}$$

un résultat plus précis est donné juste après par PADBERG qui montre en utilisant la fonction potentiel :

$$h(x) = \frac{c^t x}{\left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n}}$$

que la convergence est réalisée en  $\mathbf{o}(nq)$  itération pour :  $0 < a < 0.7968 \dots$

nous allons nous attarder quelque peu sur le choix du paramètre de convergence  $a$  dont dépend en partie la vitesse de convergence.

**Choix de KARMARKAR :**

KARMARKAR montre en fait que pour  $n$  grand ( $n \rightarrow +\infty$ ) la fonction potentiel  $f(x)$  diminue à chaque itération d'une quantité :

$$\delta(a) = a - a^2/2 - a^2/(1-a)$$

i.e

$$f(x^k) \leq f(x^{k-1}) - \delta(a)$$

il suggère alors de prendre  $a = 1/4$ , valeur qui correspond approximativement à la valeur maximale de  $\delta(a)$  :

$$\max \{ \delta(a), 0 < a < 1 \} = 0.245122 \dots$$

**Autre choix de  $a$  :**

Nous allons montrer en s'inspirant de la démonstration de PADBERG que l'on peut très bien choisir ( $a \succ 1/4$ )

considérons ainsi le théorème suivant :

**Théorème 3.5.8** Soit  $x^k$  le  $k^{\text{ème}}$  itéré de l'algorithme, alors on a :

$$\frac{c^t x^k}{c^t x^0} \leq \left( \frac{\exp(-2a)}{1-a} \right)^{k/n}$$

**Remarque 3.5.9** 1. Du point de vue pratique pour ( $\alpha = 1/2$ ) l'algorithme est deux fois plus rapide que pour ( $\alpha = 1/4$ ).

2. Le fait que  $t(1/2)$  soit la plus petite valeur de  $t(\alpha)$  pour  $\alpha \in (0, 1)$  ne signifie pas que c'est pour cette valeur que l'algorithme est plus rapide, d'ailleurs il converge plus vite pour  $\alpha > 1/2$  (voir exemple I.1 ci dessous).

**Exemple 3.5.10** Considérons le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} \min x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 3 \end{cases} \quad (\text{III},1)$$

ce programme satisfait toutes les conditions de KARMARKAR, en particulier sa valeur optimale est nulle. sa solution optimale exacte est :

$$\begin{cases} x_1^0 = x_2^0 = 0 \\ x_3^0 = 1 \end{cases}$$

le tableau ci-dessous présente les résultats obtenus en appliquant l'algorithme de KARMARKAR au problème (III,1) pour différentes valeurs de  $\alpha$  avec une précision de l'ordre de  $10^{-4}$

$\alpha$	itération	temps(secondes)	valeur de l'objectif
0.25	23	0.6600	0.0005
0.50	12	0.3899	0.0004
0.70	9	0.2700	0.0003
0.90	7	0.2200	0.0003
0.99	6	0.1599	0.0005

(tableau III.1)

algorithme de KARMARKAR pour différentes valeurs de  $\alpha$

la solution trouvée est pratiquement la même pour toutes les valeurs de  $\alpha$

$$x_1^* = x_2^* = 0.0002\dots$$

$$x_3^* = 0.999\dots$$

## **CONCLUSION GENERALE**

la méthode de KARMARKAR est "une méthode de point intérieur " qui produit une suite de solutions réalisables (dans l'intérieur relatif de région admissible) convergeant vers une solution optimale du problème traité .

# Bibliographie

- [1] H.boumaza-B.collas-S.collion-M.dellinger-Z.faget-L.lazzarini-F.schaffhhauser, Mathématique Analyse L3 :Paris, (juin 2009).
- [2] L.rezeau, L3physique appliquée aux science de la vie et de la planète, (octobre 2004).
- [3] Guy Desaulxiers, Cours MTH 1101-calcul 1, partie 3, Optimisation ( 2014).
- [4] Raphaële Herbin, Cours d'Analyse numérique, Université Aix Marseille, 19 octobre 2008.
- [5] J.Royer, L2 Parcours spécial, Calcul différentiel et integral, Université Toulouse3.
- [6] A.Keraghel,"Etude Adaptative et comparative des principales variantes dans p.algorithmme de Karmarkar",Univercité Joseph Fourier Grenoble France,1989.