الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليــم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……………

Centre Universitaire
Abd elhafid Boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Licence

en: Filière mathématiques

Théorie des opérateurs

Préparé par :

- Kerioui Nadjah
- Zemmouri Imane
- Chahdane Hana
- Brik Meryem

Encadrer par :

- Benhabiles Hanane

Année universitaire : 2014/2015

REMERCIEMENTS

Nous remercierons Allah le tout puissant pour nous avoir offert la force, la volanté et la patience durant toutes ces années.

Nous tenons à exprimer un remerciement particulier à notre encadreur madame " ***Hanane Benhabiles*** *", pour avoir dirigé ce travail, pour sa présence, son aide et surtout pour ses précieux conseils.*

Mille merci à nos trop chères parents pour leur dévouement sans limite et à tous nos familles pour leur soutien dans les moments de pénible comme dans les moments de joie, nous souhaitons du dieu vous garde pour nous.

Nous tenons à exprimer, nos sincères remerciements à tout le personnel de l'institut des sciences et de la technologie surtout les enseignants qui nous ont formé durant les années d'étude, et tous ceux qui nous ont apporté une aide au pour la réalisation de ce projet.

Sans oublier bien-sûre tous les amis et collègues d'étude pour leur enjouement et soutient moral.

****Imane, Meryem, Hana, Nadjah****

Table des matières

Introduction Générale

L'analyse fonctionnelle est un domaine des mathématiques qu'est l'étude des vecteurs, espaces vectoriels et de leurs opérations. En particulier, qu'il est souvent considérée comme l'étude des espaces vectoriels normés complets. Ces espaces vectoriels s'étendent sur deux nombres réels et complexes et sont appelés officiellement les espaces de Banach.

Un espace de Hilbert (nomé en l'honneur de David Hilbert) est un exemple d'un espace de Banach et c'est un espace dont le produit intérieur crée une norme.

L'analyse fonctionnelle est normalement introduite par l'étude des espaces linéaires et normés et suivie par les concepts d'espaces de Hilbert et fonctionnelles linéaires. Cette étape est suivie par la notion d'espaces de Banach double, la théorie de Hahn-Banach, les opérateurs linéaires bornés (ainsi que les opérateurs compacts et les opérateurs inversibles), et enfin les nombreux aspects de la théorie spectrale.

L'étude des premières équations intégrales remonte à D. Bernoulli vers 1730. La théorie des équations intégrales connait un important développement au travers des travaux de H. Poincaré, H. Schwarz et V. Volterra, lorsque se mettent en place les outils de l'analyse fonctionnelle à la fin du XIX^{ème} siècle. Mais ce sont surtout les travaux de I. Fredholm de 1903 qui permettent de dégager avec son alternative de Fredholm une analogie forte avec les systèmes linéaires de dimension finie. Ces travaux amèneront D. Hilbert à introduire les espaces et dans lesquels pourra se développer la théorie des opérateurs.

Dans ce projet notre objectif est la théorie des opérateurs, nous avons organisé notre mémoire en deux chapitres :

- Dans le premier chapitre on discute de nombreux exemples importants de tels espaces, on insistant plus particulièrement sur les espaces topologiques, espaces métriques, espaces vectorièls normés, espaces de Banach et espaces hilbertiens.
- Dans le deuxiéme chapitre, nous abordons l'étude des opérateurs bornés, l'espace de ces opérateurs, l'adjoint et le spectre. De plus nous énoncons les opérateurs compacts et positifs.

Notations

$\mathbb{N}$	: L'ensemble des nombres naturels.
$\mathbb{Z}$	: L'ensemble des nombres entiers.
$\mathbb{Q}$	: L'ensemble des nombres rationnels.
$\mathbb{R}$	: L'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{C}$	: L'ensemble des nombres complexes.
$\mathbb{R}^n$	: Espace euclidien réel de dimension n.
$(.,.)\,,<.,.>$	: Le produit scalaire.
(X,τ)	: Espace topologique.
$\tau_d = P(X)$	: Topologie discrète.
$\tau_g = (\phi, X)$	: Topologie grossière.
$B(x_0, r_0)$	: Boule ouverte.
(X,d)	: Espace métrique.
$(\mathbb{k}, +, .)$	: Corps commutatif.
$(E,+)$	: Groupe commutatif.
0_E	: L'élément neutre de E.
$(E, \Vert.\Vert)$	: Espace vectoriel normé.
$\Vert A\Vert$	: La norme de A.
$(E,(.,.))$	: Espace hilbertien.
$M^{\perp}$	: L'orthogonal de M.
$\mathcal{L}(H)$	: L'ensemble des opérateurs de H dans H.
$adh\ B$	: L'adhérence de B.
$G(A)$	: Le graphe d'une application linéaire A.
A^*	: L'adjoint de A.
Id_E	: L'identité de E.
$\Re$	: La partie réelle.
A^{-1}	: L'inverse de A.
Im	: La partie imaginaire.
$\ker A$	: Le noayau de A.
B_H	: La boule unitée fermée de H.
$\sigma(T)$	: Le spectre de T.
$\sigma_p(T)$	: Le spectre ponctuel de T.
$\beta_\infty(E,F)$	: L'ensemble des opérateurs compacts de E dans F.
$E \oplus F$	: La somme directe de E dans F .
$\ell^\infty(C)$	: L'ensemble des fonctions bornées de C dans C .

Chapitre 1

Rappelles et généralités

Résumé. Ce chapitre est consacrée aux notions de base nécessaires pour travailler avec des espaces abstraits aussi généraux que des espaces topologiques, métriques avec des espaces vectoriels normés, et plus particulièrement avec des espaces de Banach et de Hilbert.

1.1 Espaces topologiques

1.1.1 Généralités

Définition 1.1.1 *Soit X un ensemble. Une topologie sur X est une famille $\boldsymbol{\tau}$ de parties de X vérifiant les propriétés suivantes :*
(O_1) *: Toute réunion infinie d'éléments de $\boldsymbol{\tau}$ appartient à $\boldsymbol{\tau}$.*
(O_2) *: Toute intersection finie d'éléments de $\boldsymbol{\tau}$ appartient à $\boldsymbol{\tau}$.*
(O_3) *: $\boldsymbol{\tau}$ contient l'ensemble X et le sous ensemble $\emptyset$ de X.*
Si $\boldsymbol{\tau}$ est une topologie sur X, les éléments de $\boldsymbol{\tau}$ sont appelés ***des ouverts*** *de la topologie et le couple $(X, \boldsymbol{\tau})$ est applé* ***un espace topologique****. S'il n'y a aucune confusion ni nécessité de spécifier la topologie, on sous-entend la topologie $\boldsymbol{\tau}$ et on parle simplement de l'espace topologique X.*

Exemple 1.1.2
– *La topologie* ***discrète*** *sur l'ensemble X est la topologie $\boldsymbol{\tau}_d = \mathbf{P}(\mathbf{X})$.*
– *La topologie* ***grossière*** *sur l'ensemble X est la topologie $\boldsymbol{\tau}_g = (\boldsymbol{\phi}, \mathbf{X})$.*

Proposition 1.1.3 *Toute boule ouverte de (X, d) est un ouvert de la topologie induite par la distance d.*

Preuve. Soient $B(x_0, r_0)$ une boule ouverte de (X, d) et $x \in B(x_0, r_0)$.
Alors $d(x, x_0) < r_0$ et par suite $\varrho = \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{d}(x, x_0)}{\mathbf{2}} > 0$.

On a $B(x,\varrho) \subset B(x_0, r_0)$.
En effet, pour tout $y \in B(x,\varrho)$, on a

$d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + d(x, y) \leq d(x_0, x) + \frac{\mathbf{r_0 - d}(x,x_0)}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{r_0 + d}(x,x_0)}{\mathbf{2}} < r_0$, car $d(x_0, x) < r_0$

■

1.2 Espaces métriques

1.2.1 Définition d'un espace métrique

La définition suivante généralise la notion de la distance dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.2.1 *Un espace métrique* $(\mathbf{X}, \mathbf{d})$ *est un ensemble* $\mathbf{X}$ *muni d'une application* $\mathbf{d} : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \to \mathbb{R}$, *appellée distance ou métrique, qui satisfait les propriétés suivantes :*

(**D1**) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}, \mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \mathbf{0}$ *et* $\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ **si et seulement si** $\mathbf{x} = \mathbf{y}$,
(**D2**) $\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{d}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (**symétrie**),
(**D3**) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{X}, \mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq \mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{d}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ (**inégalité triangulaire**).

Exemple 1.2.2 *L'ensemble des nombres réels* $\mathbb{R}$ *muni de la distance usuelle*

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = | \mathbf{x} - \mathbf{y} |, \ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}$$

est un espace métrique.

Exemple 1.2.3 *Sur l'espace* $\mathbb{R}^n$, *on peut définir plusieurs distances faisant intervenir les distances entre les composantes. Soient* $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ *et* $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.
On définit deux distances, à savoir

$$\mathbf{d}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} | \mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i | \ et \ \mathbf{d}_\infty(x, y) = \max\{| \mathbf{x} - \mathbf{y} |, \ \mathbf{i} = \mathbf{1}, ..., \mathbf{n}\} \quad .$$

la troisiéme est ce qu'on appelle ***la distance euclidienne :***

$$\mathbf{d}_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=\mathbf{1}}^{n} (\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i)^2}.$$

Exemple 1.2.4 *On peut définir une distance, dite* ***discrète,*** *sur un ensemble quelconque*

X en posant, pour $x, y \in X$:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & si\ x = y \\ 1 & si\ x \neq y \end{cases}$$

Exemple 1.2.5 (Distance induite) *Si (X,d) est un espace métrique et A un sous ensemble de X, la restriction : $d/_{A\times A} : A \times A \to \mathbb{R}$ est une distance sur A. Ainsi, la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^3$ induit une distance sur la sphère*

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \mid x^2 + y^2 + z^2 \mid = 1\right\}.$$

Proposition 1.2.6 *Pour tous x, y et z des points d'un espace métrique $(\mathbf{X}, \mathbf{d})$, on a :*

$$\mid \mathbf{d}(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \mathbf{d}(\mathbf{x},\mathbf{z}) \mid \leq \mathbf{d}(\mathbf{y},\mathbf{z}).$$

Preuve. La condition D2 qui vérifie la distance $\mathbf{d}$ nous donne

$$\mathbf{d}(\mathbf{x},\mathbf{z}) - \mathbf{d}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq \mathbf{d}(\mathbf{y},\mathbf{z}).$$

En utilisant la symétrie, on obtient

$$\mathbf{d}(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \mathbf{d}(\mathbf{x},\mathbf{z}) \leq \mathbf{d}(\mathbf{z},\mathbf{y}) = \mathbf{d}(\mathbf{y},\mathbf{z}).$$

De ces deux inéquations, on en déduit que

$$\mid \mathbf{d}(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \mathbf{d}(\mathbf{x},\mathbf{z}) \mid \leq \mathbf{d}(\mathbf{y},\mathbf{z}).$$

■

1.2.2 Suites de Cauchy et espaces métriques complets

Définition 1.2.7 (Suite de Cauchy) *Soit (X,d) un espace métrique.*
-Une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans (X,d) est dite suite de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in N$ tel que tout $n, m \in N$ verifiant $n \geq n_0$ et $m \geq n_0$, on ait $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Il revient au même de dire que pour tout $\varepsilon < 0$, il existe $n_0 \in N$ tel que pour tout $n \in N$ vérifiant $n \geq n_0$ et pour tout $p \in N$, on ait $d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$.

Corollaire 1.2.8 *Soient X un ensemble, d et $d^{'}$ des distances uniformément équivalentes sur X. Alors on a :*

1. *Toute suite de Cauchy pour l'une des distances est de Cauchy pour l'autre.*
2. *Les espaces métriques (X, d) et $\left(X, d^{'}\right)$ sont simultanément complets ou non complets.*

Définition 1.2.9 (Espace métrique complet) *Soit (X, d) un espace métrique.*

1. *On dit que (X, d) est complet si toute suite de Cauchy dans (X, d) est convergente.*
2. *Un sous-ensemble A de (X, d) est dit complet si A muni de la distance induite est un espace métrique complet.*

L'importance fondamentale des espaces métriques complets réside dans le fait que pour démontrer qu'une suite est convergente dans un tel espace, il n'est pas nécessaire de connaitre d'avance la valeur de la limite.

Exemple 1.2.10 *Soit (X, d) un espace métrique discret, alors (X, d) est complet car on a $d(x, y) = 1 \neq y$, donc toute suite de Cauchy dans X est stationnaire, donc convergente.*

1.3 Espaces vectoriels normés

Dans tout ce que suit, les espaces vectoriels considérés sont des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, non réduits au vecteur nul.

1.3.1 Espace vectoriel

Dans tout ce qui suit, on designe par $(\mathbb{k}, +, .)$ un corps commutatif. Les éléments de $\mathbb{k}$ seront, sauf mention expresse du contraire, désignés par des petites lettres grecques. Les éléments neutres des lois de composition internes $+$ et . seront respectivement notés 0 et 1.

Définition 1.3.1 *Soit $(E, +)$ un groupe commutatif dont l'élément neutre est noté 0_E est soit*

$$\begin{aligned} l : \mathbb{k} \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, x) &\rightarrow \lambda x \end{aligned}$$

une application telle que pour tout $x \in E$, $y \in E$, $\lambda \in \Bbbk$, $\mu \in \Bbbk$ on ait :

$$\begin{array}{ll} (L1) & \lambda\,(x+y) = \lambda x + \lambda y, \\ (L2) & (\lambda+\mu)\,x = \lambda x + \mu x, \\ (L3) & (\lambda.\mu)\,x = \lambda\,(\mu x)\,, \\ (L4) & 1x = x. \end{array}$$

Le triplet $(E,+,l)$ s'appelle un espace vectoriel sur le corps $(\Bbbk,+,.)$ (ou $\Bbbk$-espace vectoriel).

1.3.2 Normes, espace véctoriel normé

Définition 1.3.2 *Soit E un espace vectoriel sur $\Bbbk$.*
- Une norme sur E est une application

$$\|\ .\ \|: E \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que, pour tout $(x,y) \in E \times E$ et pour tout $\lambda \in \Bbbk$, on ait :

$$\begin{array}{ll} (N_1) & \|x\| \geq 0, \\ (N_2) & \|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0, \\ (N_3) & \|\lambda x\| = \mid \lambda \mid \|x\|, \\ (N_4) & \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \text{ (\textbf{l'inégalité triangulaire})}. \end{array}$$

-Le couple $(E, \|\ .\ \|)$ s'appelle ***espace vectoriel normé.***
-Plus généralement, on définit ***une semi-norme*** *comme une application*

$$P:\ E \longrightarrow \mathbb{R}$$

satisfaisant seulement aux propositions N_1,N_3,N_4.
-On sait que la condition (N_4) a pour conséquence que pour tout vecteurs x,y de E :

$$(N\,'_4) \qquad \mid \|x\| - \|y\| \mid \leq \|x-y\|.$$

Les applications suivantes, trés classiques, fournissent des normes qui seront systématiquement utilisées :

1. *L'application* ***valeur absolue,*** *de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$

$$x \to\mid x \mid$$

est une norme sur $\mathbb{R}$*, considéré comme espace vectoriel sur lui mème.*

2. *Pour tout* $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{k}^n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*et pour tout* $p \in \mathbb{N}^*$*, on pose :*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} \mid x_k \mid^p\right)^{\frac{1}{p}} ; \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} \mid x \mid .$$

Les applications de $\mathbb{k}^n$ *vers* $\mathbb{R}$

$$x \to \|x\|_p, \quad x \to \|x\|_\infty$$

sont des normes sur $\mathbb{k}^n$*.*

1.3.3 L'équivalence des normes

Définition 1.3.3 *Soit* E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$*, et soient* $\| \,.\, \|_1$ *et* $\| \,.\, \|_2$ *des normes sur* E*. On dit que* $\| \,.\, \|_1$ *est équivalente à* $\| \,.\, \|_2$*, s'il existe un couple* (α, β) *de nombres réels strictement positifs, tel que pour tout* $x \in E$ *:*

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1.$$

Rappelons que sur $\mathbb{k}^n$*, toutes les normes sont équivalentes. Rappelons aussi que toute norme est canoniquement associée une distance. Plus précisement :*

Proposition 1.3.4 *Soit* $(E, \| \,.\, \|)$ *un espace vectoriel normé sur* $\mathbb{k}$*. On définit sur* E *une distance* d *en posant pour tout couple* $(x, y) \in E \times E$ *:*

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

L'application

$$\begin{array}{rcl} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & = & d(x, y) \end{array}$$

s'appelle ***la distance associée à la norme*** $\| \, . \, \|$.

1.4 Espace de Banach

Rappelons qu'un espace métrique (E, d) est dit complet si toute suite de Cauchy de E convergente.

Définition 1.4.1 *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé qui est complet pour la distance associée à la norme.*

Proposition 1.4.2 *Soient E un espace vectoriel, $\| \, . \, \|_1$ et $\| \, . \, \|_2$ des normes équivalentes sur E. Alors $(E, \| \, . \, \|_1)$ est un espace de Banach si et seulement si $(E, \| \, . \, \|_2)$ est un espace de Banach.*
voici quelques exemples d'espaces de Banach :
-L'espace $(\mathbb{k}, | \, . \, |)$ est un espace de Banach. Il en est de même de $\mathbb{k}^n$ pour tout $n \geq 2$.
-L'espace $((C^0 [a, b], \mathbb{k}), \| \, . \, \|_\infty)$ des applications continues du segment $[a, b]$, $a < b$ à valeurs dans $\mathbb{k}$ est un espace de Banach.

Théorème 1.4.3 *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.*

Théorème 1.4.4 *Un $\mathbb{k}$-espace vectoriel normé est un espace de Banach si et seulement si toute série absolument convergente de cet espace est convergente.*

1.5 Espace de Hilbert

Tout au long du suivant, on travaillera sur un corps, qui sera soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$.

1.5.1 Produit scalaire et espace de Hilbert

Définition 1.5.1 *Un produit scalaire sur un espace vectoriel H est une application $\langle .,. \rangle$ vérifiant*
_ Pour tout $h \in H$, l'application $g \longmapsto \langle g, h \rangle$ est linéaire,
_ Pour tout $g, h \in H$, $\langle g, h \rangle = \overline{\langle h, g \rangle}$,
_ Pour tout $g \in H \setminus \{0\}$, $\langle g, g \rangle > 0$.
On note alors $\|g\| = \sqrt{\langle g, g \rangle}$ et on verifie que c'est une norme sur H.
Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, qui est de plus complet pour la norme $\| \ . \ \|$. Tous les espaces de Hilbert que nous considérerons seront supposés séparable. C'est-à-dire admettant un sous-ensemble dénombrable dense.
Une inégalité fondamentale est ***l'inégalité de Cauchy-Schwarz.***

$$|\langle g, h \rangle| \leq \|g\|.\|h\|$$

On en déduit immédiatement la formule suivante :

$$\|g\| = \sup_{h \in H, \|h\| \leq 1} |\langle g, h \rangle|$$

Proposition 1.5.2 (complété hilbertien) *Soit $(H_0, (. \mid .)_0)$ un $\mathbb{k}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Soit $(H, \|.\|)$ le complété de H_0 pour la norme $\| \ . \ \|_0 = \sqrt{(. \mid .)_0}$ sur H_0. Alors H peut être muni d'un produit scalaire $(. \mid .)$ tel que $(. \mid .) \mid_{H_0 \times H_0} = (. \mid .)_0$ est tel que la norme associée à ce produit scalaire soit la norme $\| \ . \ \|$ sur H. L'espace de Hilbert $(H, (. \mid .))$ ainsi obtenu est appelé le complété hilbertien de $(H_0, (. \mid .)_0)$.*

1.5.2 Espace pré-hilbertien

Définition 1.5.3 *Espace pré-hilbertien est un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire (dite structure euclidienne). C'est -à-dire d'une application bélinéaire de $E \times E \to \mathbb{C}$, notée $\langle x, y \rangle$ tell que :*

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \ \forall x, y \in E$ *(conjugaison dans* $\mathbb{C} : a + ib \to a - ib$),
2. $\langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle \ \forall x, y, z \in E$,
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \ \forall x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{C}$,
4. $\langle x, x \rangle \geq 0 \ \forall x \in E$,
5. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Dans le cas d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, la première propriété se produit à la symétrique

$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ dans la suite du cours, sauf mention contraire, le corps des scalaires sera réel.
La notation $\langle x, y\rangle$ est parfois utilisée pour noter un produit scalaire.

Exemple 1.5.4 *L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$*
-Dans $\mathbb{R}$ définissons $\langle x, y\rangle = x * y$ (le produit de deux nombres réels).
-Dans $\mathbb{R}^2$ soit $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ deux vecteurs. Définissons $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$ Vérifier les axiomes euclidiens. Généraliser à $\mathbb{R}^n$.

1.5.3 Projection orthogonale

Définition 1.5.5 (Projection) *Soit X une partie d'un espace préhilbertien $(E, (. \mid .))$, et z un point de E. On dit qu'un point x_0 de X est une **projection** de z sur X si*

$$d(z, x_0) = d(z, X).$$

On sait que si X est une partie compacte d'un espace métrique quelconque (E, d), tout point z de E admet une projection sur X, (qui n'est pas unique en générale).

Définition 1.5.6 (Orthogonalité) *Si $g, h \in H$, on dit que g et h sont **orthogonaux**, et on écrit $g \perp h$ si $\langle g, h\rangle = 0$. Si M est une partie de H, **l'orthogonal** de M est defini par*

$$M^{\perp} = \{h \in H \quad t.q.\ \forall g \in M,\ h \perp g\}$$

La remarque suivante est souvent utile : un sous-sepace $M \subset H$ est dense seulement si

$$M^{\perp} = \{0\}.$$

De plus, si M est un sous-espace fermé, alors H se décompose en somme direct

$$H = M \oplus M^{\perp}.$$

*On peut énoncer **le théorème de Pythagore** : Si $f_1, ..., f_n \in H$ sont deux à deux orthogonaux, alors*

$$\|f_1 + ... + f_n^2\| = \|f_1\|^2 + ... + \|f_n\|^2$$

Une identité à retenir est ***l'identité du parallélogramme :*** *si* $f, g \in H$

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\left(\|f\|^2 + \|g\|^2\right)$$

Si $M \subset H$ *est un sous-espace fermé, on peut définir* ***la projection orthogonal*** *sur* M *notée* P_M*, de la manière suivante : pour* $h \in H$, $P_M h$ *est l'unique élément* M *tel que* $h - P_M h \perp M$. *Alors* P_M *est une application linéaire telle que* $P_M^2 = P_M, \|P_M h\| \leq \|h\|$ *pour tout* $h \in H$, $\ker P_M = M^\perp$ *et* $\operatorname{Im} P_M = M$.

Corollaire 1.5.7 *Soit* E *un espace de Hilbert, muni d'un produit scalaire* $(.,.)$ *et de la norme associée* $\|.\|$. *Soit* M *un sous-espace vectoriel fermé de* E. *Alors tout vecteur* x *de* E *se décompose de manière unique sous la forme*

$$x = y + z, \qquad y \in M, \qquad z \in M^\perp.$$

De plus, on a

$$\|x - y\| = \inf\{\|x-u\|,\ u \in M\}$$

et y *est caractérisé par le fait que pour tout* $u \in M$, $(x-y, u) = 0$. *On dit que* $y = P_M x$ *est le projeté orthogonal de* x *sur* M.

Preuve. Le sous-espace vectoriel M est fermé dans un ensemble complet, il est donc complet. ■

1.5.4 Base hilbertienne (ou orthonormale)

L'équivalent de l'outil aux bases algébriques dans un espace vectoriel est pour un espace de Hilbert la base orthonormale.

Définition 1.5.8 *Une famille* $(e_i)_{i \in I}$ *est une base orthonormale d'un espace de Hilbert* H *si :*

- $\|e_i\| = 1$,
- *L'espace engendré* $Vect\{e_i\}$ *est dense dans* H,
- $e_i \perp e_j$ *pour* $i \neq j$.

Tout espace de Hilbert admet une base orthonormale qui est finie si et seulement si l'espace est de dimension finie.

Exemple 1.5.9 *Dans l^2 la famille formée de vecteurs $e_i = \{0, 0, ..., 1, ...\}$ le 1 étant à la i ème coordonnée, est une famille orthonormale.*

Définition 1.5.10 *Soit E un espace de Hilbert ; $(e_i)_{i\,\in I}$ une famille de vecteurs. Si le seul vecteur orthogonal à tous les éléments e_i est le vecteur nul, cette famille est dite **totale.***

Définition 1.5.11 *Un espace de Hilbert est appelé **séparable** s'il possède une suite totale.*

Théorème 1.5.12 *Soit E un espace de Hilbert séparable. Il possède une base et même une infinité de bases orthonormales. Toutes ces bases possèdent le même nombre d'éléments appelé **la dimension de l'espace de Hilbert** E.*

1.5.5 Dual d'un espace de Hilbert

Si a est un élément de H, nous noterons f_a la forme linéaire (et continue) définie en posant pour tout $x \in H$,

$$f_a(x) = (x \mid a).$$

Théorème 1.5.13 (Théorème de représentation de Riesz) *Soit ℓ une forme linéaire continue sur un espace de Hilbert H. Alors il existe un unique vecteur $y_\ell \in H$ tel que, pour tout $x \in H$*

$$\ell(x) = \langle x, y_\ell \rangle.$$

Enfin, voici une différence fondamentale entre $\mathbb{k}^n$ et les espaces de Hilbert de dimension infinie.

Théorème 1.5.14 *Soit H un espace de Hilbert et B_H sa boule-unité. Alors B_H est compacte si et seulement si H est de dimension finie.*

Chapitre 2

Les opérateurs Bornés

L'objet de ce chapitre est d'obtenir une généralisation pour les opérateurs bornés. Nous souhaitons de définir la notion des espaces des opérateurs bornés puis l'adjoint de ces opérateurs. Ensuit, nous énoncons le théorème de Baire et nous parlons sur la diagonalisation des opérateurs compacts auto-adjoints et normaux. De plus, nous présentons les opérateurs compacts et les opérateurs positifs. Nous terminons par l'étude du spectre d'un opérateur borné.

2.1 Propriétés élémentaires et premiers exemples

Nous étudierons les applications linéaires continues d'un espace de Hilbert H dans lui-même. Une grande partie des théorèmes est également valable pour les applications linéaires continues entre deux espaces de Hilbert H et K mais nous n'en parlerons pas pour plus de concision.

Proposition 2.1.1 *Soit H un espace de Hilbert et $A : H \to H$ une application linéaire. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est continue.*
2. *A est continue en 0.*
3. *Il existe $x \in H$ tel que A est continue en x.*
4. *Il existe une constante $c > 0$ telle que $\|Ah\| \leq c\|h\|$ pour tout $h \in H$.*

Définition 2.1.2 *On appelle* ***opérateur*** *sur H une application linéaire continue de H dans H. On note $\mathcal{L}(H)$ l'ensemble des opérateurs sur H. Si $A \in \mathcal{L}(H)$, on définit sa* ***norme opérateur*** *par :*

$$\|Ah\| = \sup\{\|Ah\| : h \in H, \ \|h\| \leq 1\}$$

Proposition 2.1.3 *Voici quelques propriétés de la norme opérateur :*

1. *Si* $A \in \mathcal{L}(H)$, *alors* $\|A\| = 0$ *si et seulement si* $A = 0$.
2. *Si* $A, B \in \mathcal{L}(H)$, *alors* $A + B \in \mathcal{L}(H)$ *et* $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.
3. *Si* $\alpha \in K$ *et* $A \in \mathcal{L}(H)$, *alors* $\alpha A \in \mathcal{L}(H)$ *et* $\|\alpha A\| =\mid \alpha \mid .\|A\|$.
4. *Si* $A, B \in \mathcal{L}(H)$, *alors* $AB \in \mathcal{L}(H)$ *et* $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ *(*AB *désigne la composition* $A \circ B$*).*

Les trois premiers points de la proposition précédente affirment que $\|.\|$ *définit une norme sur* $\mathcal{L}(H)$.

Définition 2.1.4 *Un opérateur* A *tel que* $\|A\| < \infty$ *est dite* ***borné****.*

une propriété remarquable et admise est qu'il ya équivalence, dans les espaces Hilbertiens, entre opérateur **borné** et opérateur continue.

Exemple 2.1.5 *Si* H *est de dimension finie* n, *toute application linéaire de* H *dans* H *est continue. Etant donnée une base* $(e_1, ..., e_n)$ *de* H, *on peut identifier* $A \in \mathcal{L}(H)$ *à la matrice* (a_{ij}) *défnie par :*

$$a_{ij} = \langle Ae_i, e_j \rangle$$

2.2 L'espace des opérateurs bornés

Nous commençons par définir l'espace des opérateurs bornés entre espaces vectoriels normés et nous définissons ensuite plusieurs topologies sur cet espace.

Définition 2.2.1 *Si* $(E, \|.\|_E)$ *et* $(F, \|.\|_F)$ *sont des espaces vectoriels normés, un* ***opérateur borné*** *de* E *dans* F *est une application linéaire continue* $T : E \longrightarrow F$, *telle que*

$$\exists C > 0, \forall u \in E, \|Tu\|_F \leq C\|u\|_E.$$

Notation 2.2.2 *On désigne par* $\mathcal{L}(E, F)$ *l'ensemble des opérateurs bornés de* E *dans* F. *Lorsque* $E = F$, *on notera* $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ *.*
$\mathcal{L}(E, F)$ *est un espace vectoriel sur lequel on introduit la norme,*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{u \in E \backslash \{0\}} \frac{\|Tu\|_F}{\|u\|_E} = \sup_{\|u\|_E = 1} \|Tu\|_F.$$

La topologie induite par cette norme sur $\mathcal{L}(E,F)$ est appelée topologie uniforme des opérateurs.
Si $(F,\|.\|_F)$ est un espace de Banach, $\left(\mathcal{L}(E,F),\|.\|_{\mathcal{L}(E,F)}\right)$ est aussi un espace de Banach. De plus, la norme $\|.\|_{\mathcal{L}(E,E)}$ est une norme d'algèbre sur $(\mathcal{L}(E,E),+,.,\circ)$ et plus généralement, si $(E,\|.\|_E)$, $(F,\|.\|_F)$ et $(G,\|.\|_G)$ sont des espaces vectoriels normés et si $T_1 \in \mathcal{L}(E,F)$ et $T_2 \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $T_2 \circ T_1 \in \mathcal{L}(E,G)$ et

$$\|T_2 \circ T_1\|_{\mathcal{L}(E,G)} \leq \|T_2\|_{\mathcal{L}(F,G)} \|T_1\|_{\mathcal{L}(E,F)}.$$

Exemple 2.2.3 *Soit $T_n : \ell^2(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N})$, $T_n(x_0,x_1,...) = \left(\frac{1}{n}x_0, \frac{1}{n}x_1, ...\right)$. Alors $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0, l'opérateur nul.*

Exemple 2.2.4 *Soit $S_n : \ell^2(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N})$, $S_n(x_0,x_1,...) = (0,...,0,x_n,x_{n+1},...)$. Alors $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers 0, mais pas uniformément.*

Exemple 2.2.5 *Soit $W_n : \ell^2(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N})$, $W_n(x_0,x_1,...) = (0,...,0,x_0,x_1,...)$ avec n fois 0 au début de la suite. Alors $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0, mais pas fortement ni uniformément.*

2.3 Autour du théorème de Baire

Le théorème de Baire est un outil fondamental lorsqu'on travaille en dimension infinie. Les résultats de cette section n'ont rien de spécifique aux espaces de Hilbert et sont vrais dans n'importe quel espace de Banach. La propriété importante est ici la complétude.

Théorème 2.3.1 (Baire) *Soit X un espace métrique complet et $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite d'ouverts denses de X. Alors $\cap U_n$ est dense dans X. De même, si $(F_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fermés d'intérieur vide de X, alors $\cup F_n$ est d'intérieur vide dans X.*

Preuve. Soit $B_0 \subset X$ un ouvert non vide. Comme U_1 est dense, il existe une boule B_1, de centre x_1 et de rayon $r \leq 1$ telle que $adhB1 \subset U_1 \cap B_0$. Ensuite, comme U_2 est dense, il existe une boule B_2, de centre x_2 et de rayon $r \leq 1/2$ telle que $adh\ B_2 \subset U_2 \cap B_1$. De proche en proche, on construit B_n, de centre x_n et de rayon $r_n \leq 1\ /n$, telle que $adB_n \subset U_n \cap B_{n-1}$. En particulier, la suite $(adhB_n)$ est décroissante, et la suite (x_n) est de Cauchy donc converge ; soit x sa limite. Pour tout $n, x \in adhB_n \subset U_n$, et donc $x_n \in \cap U_n$. Comme on a aussi $x \in B_0$, on a montré que l'ensemble $\cap U_n$ intersecte tout ouvert, donc il est dense. La deuxième partie de l'énoncé découle de la première en passant au complémentaire. ■

Théorème 2.3.2 (De l'application ouverte) *Si $T \in \mathcal{L}(H)$ est **un opérateur surjectif**, alors pour tout ouvert $U \subset H, T(U)$ est ouvert.*

Preuve. Comme T est linéaire, il suffit de montrer que l'image de la boule-unité contient un voisinage de 0. Soit $B = B(0,1)$ la boule-unité ouverte de H. Comme T est surjectif, on peut écrire $T = \cup_{n \in N} adh\ (nT\,(B))$. Par le théorème de Baire, il existe $n \in N$ tel que $adh(nT(B))$ est d'intérieur non vide. Soit $x \in H$ et $\varepsilon > 0$ tel que $adh(nT(B)) \supset B(x, \varepsilon)$. On a aussi $adh(nT(B)) \supset B(-x, \varepsilon)$, et donc $adh(nT(B))$ étant convexe, $adh(nT(B)) \supset B(0, \varepsilon)$ et donc $B \subset adhT(\lambda B)$ avec $\lambda = n\ /\varepsilon$.
Montrons que cela implique que $B \subset T(2\lambda B)$. Soit $z \in B$; comme $z \in adhT(\lambda B)$, il existe x_1 avec $\|x\ _1\| < 1$ et $\|z - Tx_1\| < 1/2$. De même, comme $z - Tx_1 \in adhT(\frac{\lambda}{2}B)$, il existe x_2 avec $\|x_2\| < \frac{\lambda}{2}$, et $\|z - Tx_1 - Tx_2\| < \frac{1}{4}$. On construit ainsi par récurrence une suite (x_k) vérifiant $\|x_k\ \| < 2^{k-1}$ et $\|z - (Tx_1 + ... + Tx_k)\| < 1/2^k$ La série convergeant normalement, on peut poser $x = \sum x_k$, et $\|x\| < 2\lambda$, donc $x \in 2\lambda B$. Comme T est continue, on a $Tx = z$. Ainsi $z \in T(2\lambda B)$. Ceci conclut la preuve. ■

Théorème 2.3.3 (De l'opérateur inverse) *Si $A \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur bijectif, alors A^{-1} est aussi un opérateur. Si H est un espace de Hilbert, on peut aussi munir $H \times H$ d'une structure d'espace de Hilbert à l'aide du produit scalaire*

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle := \langle x_1, x_2 \rangle + \langle y_1, y_2 \rangle.$$

Théorème 2.3.4 (Du graphe fermé) *Le graphe d'une application linéaire $A : H \to H$ est la partie de $H \times H$ défnie comme suite $G(A) = \{(h, Ah) : h \in H\}$.*
Si $G(A)$ est fermé dans $H \times H$, alors A est continue.

2.4 L'adjoint d'un opérateur borné

Proposition 2.4.1 (Définition) *Soit H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors il existe un unique opérateur $A^* \in \mathcal{L}(H)$, appelé **adjoint** de H, qui vérifie la relation suivante :*
pour tous $x, y \in H$

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle.$$

De plus, on a $\|A^*\|_{op} = \|A\|_{op}$.

Preuve. D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz et la définition de la norme opérateur, on a l'inégalité

$$| \langle Ax, y\rangle | \leq \|A\|_{op}.\|x\|.\|y\|.$$

Ainsi, l'application $\ell_y : x \mapsto \langle Ax, y\rangle$ est une forme linéaire continue sur H, et par le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique élément dans H notons-le $A^*(y)$ tel que

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle.$$

On vérifie facilement que pour tous $y, z \in H$ et $\lambda \in K$, $A^*(y) + A^*(z)$ vérifie la propriété qui définit $A^*(y + \lambda z)$. Par unicité, $A^*(y) + A^*(z) = A^*(y + \lambda z)$, ce qui prouve que A^* est linéaire.
Enfin, on calcule la norme opérateur de

$$\|A^*\|_{op} = \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} | \langle A^*x, y\rangle | = \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} | \langle y, A^*x\rangle | = \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} | \langle Ay, x\rangle | = \|A\|_{op}.$$

■

Exemple 2.4.2 *Pour tout espace de Hilbert H, $Id_H^* = Id_H$.*

Proposition 2.4.3 *Soit $A, B \in \mathcal{L}(H)$ et $\alpha \in K$. Alors*

1. $(\alpha A + B)^* = \overline{\alpha} A^* + B^*$.
2. $(AB)^* = B^*A^*$.
3. $(A^*)^* = A$.
4. *Si A est inversible d'inverse A^{-1}, alors A^* est inversible et $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.*

Rappelons que $A \in \mathcal{L}(H)$ est dit **inversible** s'il existe $B \in \mathcal{L}(H)$ tel que

$$AB = BA = Id$$

L'opérateur B est alors unique et on le note A^{-1}.

Proposition 2.4.4 *Si $A \in \mathcal{L}(H)$, alors $\|A\| = \|A^*\| = \|AA^*\|^{\frac{1}{2}}$.*

Preuve. Pour $h \in H$ avec $\|h\| \leq 1$, on a

$$\|Ah\|^2 = \langle Ah, Ah\rangle = \langle A^*Ah, h\rangle \leq \|A^*Ah\|.\|h\| \leq \|A^*A\| \leq \|A^*\|.\|A\|.$$

et donc en prenant le supremum sur h, $\|A\|^2 \leq \|A^*A\| \leq \|A^*\|.\|A\|$ En simplifiant par $\|A\|$, on obtient $\|A\| \leq \|A^*\|$. En remplaçant A par A^*, on obtient $\|A^*\| \leq \|A^{**}\| = \|A\|$. Ainsi $\|A\| = \|A^*\|$ et la chaîne d'inégalités est en fait une chaîne d'égalités. ■

Définition 2.4.5 *Un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est dit :*

1. ***Hermitien** ou **auto-adjoint** si $A^* = A$.*
2. ***Positif** s'il est hermitien et si de plus $\langle Ah, h\rangle \geq 0$ pour tout $h \in H$.*
3. ***Unitaire** si A est inversible et $A^* = A^{-1}$.*
4. ***Normal** si $AA^* = A^*A$.*

Définition 2.4.6 *Un opérateur $P \in \mathcal{L}(H)$ est appelé **un projecteur** lorsque $P^2 = P$. Si de plus $P^* = P$, on dit que P est **un projecteur orthogonale.***

Proposition 2.4.7 *Si A est auto-adjoint, alors*

$$\|A\| = \sup\{| \langle Ah, h\rangle |\} : \|h\| = 1.$$

Preuve. Soit $M = \sup\{| \langle Ah, h\rangle |\} : \|h\| = 1$. Si $\|h\| = 1$, alors $\langle Ah, h\rangle \leq \|A\|$ et donc $M \leq \|A\|$. D'autre part, remarquons d'abord que pour tout f dans H, $| \langle Af, f\rangle |\leq M\|f\|^2$. Si $\|h\| = \|g\| = 1$, alors

$$\begin{aligned}\langle A(h \pm g), h \pm g\rangle &= \langle Ah, h\rangle \pm \langle Ah, g\rangle \pm \langle Ag, h\rangle + \langle Ag, g\rangle \\ &= \langle Ah, h\rangle \pm \langle Ah, g\rangle \pm \langle g, A^*h\rangle + \langle Ag, g\rangle\end{aligned}$$

Puisque $A = A^*$, cela implique

$$\langle A(h \pm g), h \pm g\rangle = \langle Ah, h\rangle \pm 2\Re\langle Ah, g\rangle + \langle Ag, g\rangle$$

En soutrayant l'une de l'autre de ces inégalités, on obtient

$$4\Re\langle Ah, g\rangle = \langle A(h+g), h+g\rangle - \langle A(h-g), h-g\rangle \leq M\left(\|h+g\|^2 + \|h-g\|^2\right).$$

On obtient alors, par l'identité du parallélogramme

$$4\Re\langle Ah, g\rangle \leq 2M\left(\|h\|^2 + \|g\|^2\right) = 4M.$$

Soit maintenant $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que $\langle Ah, g\rangle = e^{i\theta} \mid \langle Ah, g\rangle \mid$. En appliquant l'inégalité précédente avec $e^{i\theta}h$ à la place de h, on obtient $\mid \langle Ah, g\rangle \mid \leq M$ dès lors que $\|h\| = \|g\| = 1$. On prenant le supremum sur g et h, on obtient $\|A\| \leq M$. ■

Corollaire 2.4.8 *Si $A^* = A$ et si $\langle Ah, h\rangle = 0$ pour tout h, alors $A = 0$.*
Ce corollaire n'est pas vrai si on ne suppose pas $A = A^*$. Par exemple, soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{sur } \mathbb{R}^2.$$

Alors $\langle Ah, h\rangle = 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^2$.
*Si H est un espace de Hilbert complexe et si $A \in \mathcal{L}(H)$, alors les opérateurs $B = (A+A^*)/2$ et $C = (A-A^*)/2i$ sont **auto-adjoints** et $A = B+iC$. Les opérateurs B et C sont appelés respectivement **partie réelle** et **partie imaginaire** de A.*

Proposition 2.4.9 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *A est normal.*
2. *$\|Ah\| = \|A^*h\|$ pour tout h.*

   Dans le cas complexe, ces assertions sont équivalentes à
3. *Les parties réelles et imaginaires de A commutent.*

Preuve. Si $h \in H$, alors

$$\|Ah\|^2 - \|A^*h\|^2 = \langle Ah, Ah\rangle - \langle A^*h, A^*h\rangle = \langle (A^*A - AA^*)h, h\rangle.$$

Puisque $A^*A - AA^*$ est hermitien, l'équivalence de 1 et 2 découle du corollaire 2.4.8.
Si B et C sont les parties réelle et imaginaire de$A$, alors on calcule

$$\begin{aligned} A^*A &= B^2 - iCB + iBC + C^2, \\ AA^* &= B^2 + iCB - iBC + C^2, \end{aligned}$$

et donc $A^*A = AA^*$ si et seulement si $BC = CB$. ■

Un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est une isométrie si il préserve la norme, c'est-à-dire si $\|Ah\| = \|h\|$ pour tout h.

Proposition 2.4.10 *Si $A \in \mathcal{L}(H)$, les assertions suivantes sont équivalentes*

1. A est une isométrie.

2. $A^*A = Id$.

3. $\langle Ah, Ag\rangle = \langle h, g\rangle$ pour tout h, g dans H.

Preuve. Comme $\langle A^*Ah, g\rangle = \langle Ah, Ag\rangle$, on voit facilement que (2) et (3) sont équivalents on obtient (1) à partir de (3) en prenant $g = h$. Pour montrer (1) $\Longrightarrow$ (3), on utilise la formule de **polarisation**

$$\langle Ah, Ag\rangle = \frac{1}{4}\left(\|A(h+g)\|^2 - \|A(h-g)\|^2 + i\|A(h+ig)\|^2 - i\|A(h-ig)\|^2\right).$$

■

Terminant avec un théoréme facile mais important.

Théorème 2.4.11 *Si $A \in \mathcal{L}(H)$, alors* $\ker A = (\operatorname{Im} A^*)^\perp$.

Preuve. Si $h \in \ker A$ et $g \in H$, alors $\langle h, A^*g\rangle = \langle Ah, g\rangle = 0$ donc $\ker A \subset (\operatorname{Im} A^*)^\perp$. Dans l'autre direction, si $h \in \operatorname{Im} A^*$ et $g \in H$, alors $\langle Ah, g\rangle = \langle h, A^*g\rangle = 0$, et donc $(\operatorname{Im} A^*) \subset \ker A$. ■

2.5 Opérateurs positives

Définition 2.5.1 *Soit H un espace de Hilbert. Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est dite **positif** s'il est auto-adjoint et si, pour tout $u \in H$, $(Tu, u) \geq 0$.*

Notation 2.5.2 *Si $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur positif, on note $T \geq 0$. Si $S \in \mathcal{L}(H)$, on note $S \geq T$ lorsque $S - T \geq 0$.*

A l'aide de ces notations, on peut reformuler la proposition 2.4.7

Proposition 2.5.3 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Alors $\|T\|_{\mathcal{L}(H)} \leq M$ si et seulement si $-MI \leq T \leq MI$.*

Preuve. Supposons que $\|T\|_{\mathcal{L}(H)} \leq M$. Alors, par la proposition 2.4.7, pour tout $u \in H$,

$$-M\|u\|^2 \leq (Tu, u) \leq M\|u\|^2$$

Soit encore $0 \leq ((T + MI)\,u \mid u)$ et $0 \leq ((MI - T)\,u \mid u)$, donc $-MI \leq T \leq MI$. Réciproquement si $-MI \leq T \leq MI$, on obtient que pour tout $u \in H$,

$$-M\|u\|^2 \leq (Tu, u) \leq M\|u\|^2$$

donc $\|T\|_{\mathcal{L}(H)} \leq M$ encore par la proposition 2.4.7. ■

Lemme 2.5.4 *La série entière en* 0 *de* $\sqrt{1-z}$ *est absolument convergente sur le disque* $\mid z \mid \leq 1$.

Corollaire 2.5.5 *Soit* $T_1 \in \mathcal{L}(H)$ *et* $T_2 \in \mathcal{L}(H)$ *deux opérateurs positifs qui commutent. Alors,* T_1T_2 *est un opérateur positif.*

Preuve. Soit S la racine carrée de T_1. Alors $T_1T_2 = SST_2 = ST_2S$, car T_2 commute avec S puisqu'il commute avec T_1. Soit $u \in H$. Alors

$$(T_1T_2u \mid u) = (ST_2Su \mid u) = (T_2Su \mid Su)$$

car S est auto-adjoint. Puis, comme T_2 est positif, $(T_2Su \mid Su) \geq 0$, donc T_1T_2 est positif. ■

Nous pouvons maintenant définir le module d'un opérateur borné.

Définition 2.5.6 *Soit* $T \in \mathcal{L}(H)$. *On appelle module de* T *l'opérateur positif*

$$\mid T \mid = \sqrt{T^*T}$$

2.6 Opérateurs compacts

Nous introduisons dans cette section les opérateurs compacts, qui en un certain sens se comportent le même manière que les opérateurs en dimension finie. On note B_H la boule-unité fermée de H.

Définition 2.6.1 $T \in \mathcal{L}(H)$. *On dit que* T *est* ***compact*** *si l'adhérence de* $T(B_H)$ *est compacte dans* H. *On note* $K(H)$ *l'ensemble des opérateurs compacts.*

Quand H est de dimension finie, le théorème 1.5.14 implique que Id n'est pas compact.

Proposition 2.6.2 $K(H)$ *est un idéal fermé de l'algèbre* $\mathcal{L}(H)$, *c'est-à-dire que*

1. $K(H)$ *est un sous-espace fermé de* $\mathcal{L}(H)$ *(pour la norme opérateur).*
2. *Si* $A \in \mathcal{L}(H)$ *et* $B \in K(H)$, *alors* AB *et* BA *sont compacts.*

Définition 2.6.3 *Un opérateur* $T \in \mathcal{L}(H)$ *est dit* ***de rang fini*** *si* $\operatorname{Im} T$ *est de dimension finie , son rang est la dimension de* $\operatorname{Im} T$.

Corollaire 2.6.4 *Si* $T \in \mathcal{L}(H)$ *est un opérateur compact et* $(e_1, e_2, ...)$ *est une base orthonormale de* H, *et si on note* P_n *la projection orthogonale sur* $Vect(e_1...e_n)$, *alors* $\|P_nT - T\| \to 0$

Définition 2.6.5 *Soit* $T \in \mathcal{L}(H)$

1. *Un nombre complexe est une* ***valeur propre*** *de* T *s'il existe un vecteur* $h \in H$, $h \neq 0$ *tel que* $Th = \lambda h$. *Un tel vecteur* h *est appelé un* ***vecteur propre*** *de* T.
2. *On appelle* ***spectre ponctuel*** *de* T, *et on note* $\sigma_p(T)$, *l'ensemble des valeurs propres de* T.
3. *Le* ***spectre*** *de* T *est défini comme*

$$\sigma(T) := \{\lambda \in C \ \ t.q \ T - \lambda Id \ \text{n'est pas inversible.}\}$$

Comme un opérateur inversible est nécessairement injectif, on a $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$.

Proposition 2.6.6 *Soit* T *un opérateur compact et* $\lambda \in \sigma_p(T)$. *Si* $\lambda \neq 0$, *alors l'espace propre* $\ker(T - \lambda Id)$ *est de dimension finie.*

Preuve. Supposons par l'absurde que $\ker(T - \lambda Id)$ contienne une suite orthonormale infinie (e_n). Comme T est compact, on peut en extraire une sous-suite (e_{n_k}) telle que (Te_{n_k}) converge. Mais pour $n_k \neq n_j$, on a

$$\|Te_{n_k} - Te_{n_j}\| =\mid \lambda \mid .\|e_{n_k} - e_{n_j}\| = \sqrt{2} \mid \lambda \mid,$$

ce qui contredit le fait que (Te_{n_k}) est une suite de Cauchy. ■

La proposition suivante est utile pour prouver qu'un opérateur compact a des valeurs propres.

Proposition 2.6.7 *Soit* T *un opérateur compact et* $\lambda \neq 0$. *Si*

$$\inf \{\| (T - \lambda Id) h\| : \|h\| = 1\} = 0,$$

alors $\lambda \in \sigma_p(T)$.

Preuve. Par hypothèse, il existe une suite (h_n) de vecteurs de norme 1 telle que $\|(T - \lambda Id)h_n\| \to 0$. Comme T est compact, il existe une sous-suite (h_{n_k}) telle que (Th_{n_k}) converge vers $f \in H$. En écrivant

$$h_{n_k} = \lambda^{-1}[Th_{n_k} - (T - \lambda Id)H_{n_k}],$$

on voit que h_{n_k} converge vers $\lambda^{-1}f$. En particulier $\|f\| =\mid \lambda \mid$ donc $f \neq 0$. De plus, (Th_{n_k}) converge alors vers $\lambda^{-1}Tf$, ce qui montre que $\lambda^{-1}Tf$, donc $Tf = f$.
On a donc bien trouvé un vecteur propre, et $\sigma_p(T)$. ■

2.6.1 Généralités

Définition 2.6.8 *Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \longrightarrow F$ un opérateur. On note B_E la boule unité de E. On dit que T est compact si $\overline{T(B_E)}$ est une partie compacte de F.*

Notation 2.6.9 *On note $ß_\infty(E,F)$ l'ensemble des opérateurs compacte de E dans F.*

Exemple 2.6.10 *Si $E = F$ est de dimension infinie, l'identité $Id : E \longrightarrow E$ n'est pas compacte. En effet, par le théorème de Riesz, B_E n'est pas compacte. Pourtant Id est continue donc tous les opérateurs bornés ne sont pas compactes.*

Définition 2.6.11 *Un opérateur $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est dite de rang fini si $\operatorname{Im} T$ est de dimension fini.*

2.7 Diagonalisation des opérateurs compacts auto-adjoints et normaux

Voici le principal résultat du chapitre : tout opérateur compact auto-adjoint est diagonalisable.

Théorème 2.7.1 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact auto-adjoint. Alors il existe une suite (λ_n) de réels tendant vers 0, et une famille orthonormale (e_n) dans H tels que, si P_n désigne la projection sur Vect e_n,*

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$$

la convergence ayant lieu au sens de la norme opérateur.

Avant de démontrer le théorème 2.7.1, énonçons quelques résultats généraux. Un sous-espace fermé $E \subset H$ est dit **invariant** par A si $A(E) \subset E$. Le lemme suivant est facile

Lemme 2.7.2 *Soit $E \subset H$ un sous-espace fermé, et $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors E est invariant par A si et seulement si $E^\perp$ est invariant par A^*.*

Proposition 2.7.3 *Si A est un opérateur normal et $\lambda \in K$, alors $\ker(A-\lambda Id) = \ker(A-\lambda Id)^*$. De plus, l'espace $\ker(A-\lambda Id)$ est invariant par A et par A^*.*

Proposition 2.7.4 *Si A est un opérateur normal, et λ, μ sont deux scalaires distincts, alors* $\ker(A - \lambda Id) \perp \ker(A - \mu Id)$.

Proposition 2.7.5 *Si A est auto-adjoint, alors $\sigma_p(A) \subset R$.*

Pour démontrer le théorème 2.7.1, il faudra exhiber des valeurs propres de T. Pour cela, le lemme-clé est le suivant

Lemme 2.7.6 *Si T est un opérateur compact auto-adjoint, alors l'un des deux nombres $\pm\|T\|$ est une valeur propre de T.*

Preuve. Si $T = 0$, c'est évident. Sinon, la proposition 2.4.7 fournit une suite (h_n) de vecteurs de norme 1 telle que $| \langle Th_n, h_n\rangle | \to \|T\|$ Quitte à remplacer (h_n) par une de ses sous-suites, on peut supposer que $| \langle Th_n, h_n\rangle | \to \lambda$, avec $\lambda = \pm\|T\|$. On a

$$0 \leq \|(T - \lambda Id)h_n\|^2 = \|Th_n\|^2 - 2\lambda\langle Th_n, h_n\rangle + \lambda^2 \to 0,$$

et donc $\lim \|(T - \lambda Id)h_n\| = 0$. Par la proposition 2.6.7, cela implique que $\lambda \in \sigma_p(T)$. ■

Preuve. Du théoreme 2.7.1 Par le lemme 2.7.6, $\sigma_p(T)$ contient un nombre réel, λ_1, égal à $\pm\|T\|$. Soit $E_1 = \ker\ (T - \lambda_1 Id)$ et π_1 la projection sur E_1. Soit $H_2 = E_1^{\perp}$. Par la proposition 2.7.3, E_1 et H_2 sont des sous-espaces invariants de T. On appelle T_2 la restriction de T à H_2 ; on vérifie que $T_2 \in \mathcal{L}(H_2)$ est un opérateur compact auto-adjoint. On applique le lemme 2.7.6 à T_2. Alors $\sigma_p(T_2)$ contient un nombre réel, λ_2, égal à $\pm\ \|T\|$. On pose $E_2 = \ker\ (T_2 - \lambda_2 Id) \subset \ker\ (T - \lambda_2 Id)$. De plus on a nécessairement $\lambda_1 = \lambda_2$ puisque $E_2 \perp E_1$. On note P_2 la projection sur E_2 et $H_3 = (E_{1\oplus} E_2)^{\perp}$. Notons aussi que $\|T_2\| \leq \|T\|$ et $\|\lambda_2\| \leq \|\lambda_1\|$.
On construit ainsi par récurrence une suite (λ_n) d'éléments distincts de $\sigma_p(T)$ telle que

1. $| \lambda_1 | \geq | \lambda_2 | \geq ...$
2. Si $E_n = \ker(T - \lambda_n)$, alors $| \lambda_{n+1} | = \|T_{|(E_1 \oplus ... \oplus E_n)|^{\perp}}\|$

La première propriété implique que la suite $(| \lambda_n |)$ converge vers $\alpha \geq 0$. Montrons que $\alpha = 0$. Sinon, on pourrait choisir un vecteur e_n dans E_n avec $\|e_n\| = 1$. On a $Te_n = \lambda_n e_n$ et donc $\|Te_n - Te_m\|^2 = \lambda_n^2 + \lambda_m^2 \geq 2\alpha^2$. Aucune sous-suite de (Te_n) n'est donc de Cauchy. Mais comme T est compact, on peut extraire de (Te_n) une sous-suite convergente, ce qui est absurde.
Notons π_n la projection sur E_n, on vérifie que :

$$\|T - \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \pi_i\| = \|T_{|(E_1 \oplus ... E_n \oplus)|^{\perp}}\| = | \lambda_{n+1} | \to 0,$$

Ce qui montre que la série $\sum \lambda_n \pi_n$ converge normalement vers T. Pour obtenir la forme voulue par le théorème, on choisit une base orthonormale dans chaque espace propre E_n. Cela induit une écriture de π_n comme la somme d'un nombre fini de projecteurs de rang 1. On rassemble ensuite les bases orthonormales de E_n en une famille orthonormale de H.
■

Avant de poursuivre, énonçons un théorème sur les opérateurs qui commutent avec un opérateur diagonal.

Théorème 2.7.7 *Soit (P_n) une suite de projecteurs deux à deux orthogonaux, et (λ_n) une suite bornée de scalaires non nuls deux à deux distincts. Soit A l'opérateur diagonal $\sum \lambda_n P_n$. Soit $B \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$AB = BA$.*
2. *Pour tout n, le sous-espace $\operatorname{Im} P_n$ est invariant par B et B^*.*

Preuve. 1. $\Longrightarrow$ 2. Supposons que $AB = BA$ et soit $h \in \operatorname{Im}(P_n)$. Comme les (λ_n) sont deux à deux distincts, $\operatorname{Im} P_n = \ker(A - \lambda_n Id)$, et donc $Ah = \lambda_n h$. Alors $\lambda_n Bh = B(\lambda_n h) = BAh = ABh$, et comme $\lambda \neq 0$ cela implique $Bh \in \operatorname{Im} P_n$ et donc $\operatorname{Im} P_n$ est invariant par B. On peut appliquer le même raisonnement à $A^* = \sum \overline{\lambda_n} P_n$ et B^*(qui commute avec A^*), donc B * laisse aussi invariant $\operatorname{Im} P_n$
2. $\Longrightarrow$ 1. On a $B(\operatorname{Im} P_n) \subset \operatorname{Im} P_n$, ce qui implique que $P_n B P_n = BP_n$. Le même raisonnement appliqué à B^*donne $P_n B P_n = B^* P_n$, et donc en prenant $P_n B P_n = P_n B$. On a donc $P_n B = BP_n$. On en déduit facilement que $AB = BA$. ■

Dans le cas complexe, on peut maintenant étendre le théorème 2.7.1 aux opérateurs compacts normaux.

Théorème 2.7.8 *Soit H un espace de Hilbert complexe et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact normal. Alors il existe une suite (λ_n)de nombres complexes tendant vers 0, et une famille orthonormale (e_n) dans H tels que, si P_n désigne la projection sur $Vect\ e_n$,*

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n,$$

la convergence ayant lieu au sens de la norme opérateur.

Preuve. On définit les parties réelle et imaginaire de T par $A = (T + T^*)/2$ et $B = (T - T^*) = 2i$. On vérifie que A et B sont deux opérateurs auto adjoints compacts qui commutent. On applique le théorème 2.7.1 à A, en découpant selon les espaces propres on obtient une écriture $A = \sum \alpha_n P_n$ où les (α_n) sont des réels non nuls tous distincts et (P_n) des projecteurs de rang fini. Puisque $AB = BA$, le théorème 2.7.7 implique que pour tout n, $\operatorname{Im} P_n$ est invariant par B. On vérifie que la restriction de $B_{|\operatorname{Im} P_n} \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} P_n)$ est un opérateur auto-adjoint. On applique le théorème 2.7.1 à $B_{|\operatorname{Im} P_n}$ (ou bien la version -dimension finie- du théorème spectral), ce qui permet de décomposer $B_{|\operatorname{Im} P_n} = \sum_k \beta_k^{(n)} Q_k^n$ où $(Q_k^{(n)})$ sont des projecteurs de rang 1. De même, $\ker A$ est invariant par B. On applique aussi le théorème 2.7.1 à $B_{|\ker A}$. On réunit les bases orthonormales obtenues pour chaque application du théorème 2.7.1, ce qui donne une suite (P_n) de projecteurs de rang 1 deux à deux orthogonaux et deux suites (α_n), (β_n) tendant vers 0, telles que

$$\begin{aligned} A &= \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n P_n, \\ B &= \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n P_n, \end{aligned}$$

En posant $\lambda_n = \alpha_n + \beta_n$, on a bien l'écriture voulue pour T. ■

Une conséquence du théorème 2.7.1 est que l'on peut définir $f(A)$ lorsque A est un opérateur compact normal et f une fonction bornée de C dans C.

Définition 2.7.9 *On note $\ell^\infty(C)$ l'ensemble des fonctions bornées de C dans C. Si A est un opérateur compact normal écrit sous la forme du théorème 2.7.8 et $\varphi \in \ell^\infty(C)$, on pose :*

$$\varphi(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\lambda_n) P_n + \varphi(0) P_0$$

où P_0 est la projection orthogonale sur $\ker T$.

Théorème 2.7.10 (Calcul fonctionnel borné pour les opérateurs compacts normaux) *Soit T un opérateur compact normal sur un espace de Hilbert complexe H. L'application $\varphi \longmapsto \varphi(T)$ de $\ell^\infty(C)$ dans $\mathcal{L}(H)$ a les propriétés suivantes :*

1. *$\varphi \longmapsto \varphi(T)$ est linéaire et multiplicative, au sens où $(\varphi\psi)(T) = \varphi(T)\psi(T)$.*
2. *Si $\varphi \equiv 1$, alors $\varphi(T) = Id$. Si $\varphi(z) = z$ pour tout $z \in \sigma_p(T) \cup \{0\}$, alors $\varphi(T) = T$.*
3. *$\|\varphi(T)\| = \sup \{| \varphi(\lambda) | : \lambda \in \sigma(T)\}$.*
4. *$\varphi(T)^* = \overline{\varphi}(T)$.*
5. *Si $A \in \mathcal{L}(H)$ vérifie $AT = TA$, alors $A\varphi(T) = \varphi(T)A$ pour tout $\varphi \in \ell^\infty(C)$.*

2.8 Le spectre d'un opérateur

2.8.1 Spectre, résolvante et rayon spectral

Nous commençons par donner la définition du spectre d'un opérateur borné. Dans toute la suite, $(E, \|.\|_E)$ est un $\mathbb{C}$-espace de Banach. Quand il n'y a pas d'ambiguité sur la notation, nous noterons, pour $T \in \mathcal{L}(E)$, $\|T\| := \|T\|_{\mathcal{L}(E)}$.

Notation 2.8.1 *Pour $T \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $T - \lambda := T - \lambda Id_E$ où Id_E est l'application linéaire identité de $\mathcal{L}(E)$.*

Définition 2.8.2 *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. Le spectre de T est la partie de $\mathbb{C}$ définie par :*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda \text{ n'est pas inversible dans } \mathcal{L}(E)\}.$$

*Les éléments de $\sigma(T)$ sont appelés **valeurs spectrales**.*

Proposition 2.8.3 *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda$ n'est pas bijectif$\}$.*

Définition 2.8.4 *L'ensemble des valeurs propres de $T \in \mathcal{L}(E)$ est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $T - \lambda$ n'est pas injectif. L'ensemble des valeurs propres de T est appelé spectre ponctuel de T et est noté $\sigma_p(T)$. Un vecteur $u \in E$ non nul tel que $Tu = \lambda u$ est appelé vecteur propre de T associé à la valeur propre λ. Enfin, on appelle multiplicité de la valeur propre λ, la dimension (**finie** ou **infinie**) de $\ker(T - \lambda)$.*
On a $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$. Toute valeur propre est une valeur spectrale, mais ces deux ensembles ne sont pas égaux en général.

Notation 2.8.5 *L'ensemble $\sigma(T)^c$ est appelé ensemble résolvant de T et est noté $\rho(T)$. C'est un ouvert non borné de $\mathbb{C}$.*

Définition 2.8.6 *Soient $T \in \mathcal{L}(E)$ et $z \in \mathbb{C}$. L'application $R(T) : \rho(T) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ définie par $R(T)(z) = (T - z)^{-1}$ est appelée résolvante de l'opérateur T. Pour $z \in \rho(T)$, l'application linéaire $R_z(T) := R(T)(z)$ est appelée résolvante de T au point z.*

Définition 2.8.7 (Rayon spectral) *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. On appelle rayon spectral de T le réel positif $r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} \mid \lambda \mid$.*

Proposition 2.8.8 *Soit H un espace de Hilbert et soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Alors*

$$\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)} = \left\{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\right\}.$$

De plus, pour tout $z \in \rho(T)$, $R_{\overline{Z}}(T^*) = R_Z(T)^*$.

Preuve. En effet, d'aprés le point 4 de la proposition 2.4.3, $T-\lambda$ est inversible si et seulement si $(T-\lambda)^*$ l'est. Or $(T-\lambda)^* = T^* - \overline{\lambda}$.
Donc $\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow T-\lambda$ non inversible $\Leftrightarrow (T-\lambda)^*$ non inversible $\Leftrightarrow T^*-\overline{\lambda}$ non inversible $\Leftrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma(T^*)$, d'où la première assertion. puis, si $z \in \rho(T)$,

$$R_{\overline{Z}}\left(T^* - \overline{Z}\right)^{-1} = \left((T-Z)^*\right)^{-1} = \left((T-Z)^{-1}\right)^* = R_Z(T)^*,$$

toujours d'aprés le point 4 de la proposition 2.4.3. ∎

Lemme 2.8.9 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ avec $\|T - Id\| < 1$. Alors T est inversible et on a la formule suivante (dite **série de Neuman**)*

$$T^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (Id - T)^n .$$

Preuve. Posons $S = Id - T$, et soit $r := \|S\|$; on a $r < 1$. Puisque $\|S^n\| \leq \|S\|^n = r^n$, la série $\sum \|S^n\|$ converge et donc la série $R := \sum_{n=0}^{\infty} S^n$ converge normalement. On a

$$(Id + S + S^2 + ... + S^n)(Id - S) = (Id + S + ... + S^n) - (S + S2 + ... + S^{n+1}) = Id - S^{n+1}$$

Comme $\|S^{n+1}\| \to 0$, on a $R(Id - S) = Id$. De même, on a $(Id - S)R = Id$. Ainsi $T = Id - S$ est inversible et $T^{-1} = R$. ∎

Corollaire 2.8.10 *Soit T_0 **un opérateur inversible**. Si un opérateur T vérifie*

$$\|T - T0\| < \|T_0^{-1}\|^{-1}$$

alors T est inversible.

Preuve. Alors

$$\|T_0^{-1}T - Id\| = \|T_0^{-1}(T - T_0)\| \leq \|T_0^{-1}\|.\|(T - T_0)\| < 1.$$

Par le lemme précédent, $T_0^{-1}T$ est inversible. ∎

Théorème 2.8.11 *L'ensemble G des éléments inversibles de $\mathcal{L}(H)$ est ouvert (pour la topologie induite par la norme opérateur). De plus, l'application $T \mapsto T^{-1}$ est continue de G dans G.*

Preuve. Le fait que G est ouvert est une conséquence du corollaire 2.8.10. Montrons d'abord que $T \mapsto T^{-1}$ est continue en Id. Soit (Tn) une suite convergeant vers Id. Soit $0 < \delta < 1$ et supposons que $\|T_n - Id\| \leq \delta$. Par le lemme précédent,

$$T_n^{-1} = (Id - (Id - T_n))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (Id - T_n)^k = Id + \sum_{k=0}^{\infty} (Id - T_n)^k$$

et donc

$$\|T_n^{-1} - Id\| = \| \sum_{k=0}^{\infty} (Id - T_n)^k \| \leq \sum_{k=0}^{\infty} (Id - T_n)^k \leq \delta / (1 - \delta)$$

Cette quantité peut être rendue infèrieure à n'importe quel $\varepsilon > 0$ fixé en choisissant assez petit. Alors $\|T_n - Id\| < \delta$ implique $\|T_n^{-1} - Id\| \leq \varepsilon$, ce qui prouve la continuité voulue. Si maintenant une suite (T_n) d'éléments de G converge vers $T \in G$, alors $\|T_n^{-1} - Id\| \leq \varepsilon$ converge vers Id. Par ce qui précède $\|T_n^{-1}T\| = \left((T^{-1}T_n)^{-1}\right)$, converge vers Id, et en multipliant à droite par T^{-1} on obtient que (T_n^{-1}) converge vers T^{-1}. ∎

Bibliographie

[1] Jean-Pierre Marco, Mathimatique L3 Analyse, Pearson Education France (2009).

[2] Haim Bresis. Analyse fonctinnelle, Théories et applications, University Pierre et Marie Curie et école polytechnique.

[3] Guillaume AUBRUN, Théorie des opérateurs1, M1 Mathématiques, Université de la Réunion.

[4] Daniel Sondaz, Bien maîtriser les mathématiques, Espaces vectoriels normés, banachiques et hilbertiens, Introduction à la topologie, collection dirigée par Jean-Marie Morvan, Cépaduès-Edition.

[5] Jean-Jacques Colin, Jean-Marie Morvan avec la participation de Rémi Morvan, Bien débuter en mathématique L2, L3, Classes préparatoires, Topologie des espaces vectoriels normés, Cépaduès-Edition.

[6] Thierry Goudon, Intégration, Intégrale de Lebesgue et introduction à l'analyse fonctionnelle, Ellipses Edition Marketing S.A., 2011.

[7] Léonard Todjihounde, Topologie élémentaire pour la licence de mathématiques, 2^e édition, Cépaduès-Edition.

[8] Jean-Jacques Colin, Jean-Marie Morvan, Bien débuter en mathématique L1, L2, Classes préparatoires, Espaces vectoriels, Applications linéaires, Cépaduès-Edition.

[9] Hitta Amara, Maître de conférences habilité, Cours Licence, Topologie des espaces métriques, Université 8 Mai 1945/ Guelma, 2009-2010.