الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……………


Centre Universitaire
Abd elhafid boussouf  Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département  de Mathématiques et Informatique


**Mémoire préparé  En vue de l'obtention du diplôme de Licence**

**En: Filière mathématiques**

# Chaîne de Markov


**Préparé par :**

- Kenida akila
- Kedida manel
- Chekkai chahrazed

**Encadrer par :**
**GHAZZEL AHMED**


**Année universitaire:2014/2015**

Remerciements

On voudrait profiter de cette apport unité pour adresser notre profonde gratitude envers :

Dieu qui nous a donnée la force et le courage pour continuer et a éclaircis notre chemin et pour la réalisation de ce mémoire.

Nos remerciements à nos très chers parents, frères, sœurs, collègues et amis respectives qui nous ont encouragés et soutenu durant tout notre parcours.

Un remerciement particulier à notre encadreur

« Ghazzel Ahmed» pour se présence, son aide et surtout pour ses précieux conseils qui nous ont assistés pour l'accomplissement de notre projet malgré les préoccupations administratives.

Enfin nous remercions toutes les profs, et toutes les personnes surtout qui dépares ou de loin on contribués a l'élaboration de cette étude.

Merci bien.

# Table de matière

**Bibliographe.**

# Introduction

Selon les auteurs, une **chaîne de Markov** est de manière générale un processus de Markov à temps discret. En mathématiques, un processus de Markov est un processus stochastique possédant la Markov: de manière simplifiée, la prédiction du futur, sachant le présent, n'est pas rendue plus précise par des éléments d'information supplémentaires concernant le passé, toute l'information utile pour la prédiction du futur est contenue dans l'état présent du processus. Les processus de Markov portent le nom de leur découvreur, Andreï Markov.

Quand Markov avait introduit son fameux modèle en 1906, il ne s'est pas réoccupé. Il a juste voulez prouver l'indépendance n'est pas nécessaire pour la lois des grands nombres, il a considéré l'exemple d'alternance entre les consonnes et les voyelles qui a été décrit comme une chaîne à deux états presque en même temps, et fidèlement à la tradition française des jeux de probabilistes, Poincaré a étudié les chaînes de Markov de group fini. Les physiciens Australiens et Thana Ehrenfels ont proposé en 1907 un modèle de la chaîne de Markov qui a beaucoup aidé à clarifier l'issue controversée de l'irréversibilité dynamique. Sir Francis Galton, un cousin de Darwin, qui était intéressé par la probabilité de suivre de pairie anglaise, était l'inventeur de processus de branchement. Une généralisation à un espace d'état infini dénombrable a été publiée par Kolmogorov en 1936.

Une chaîne de Markov est une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui permet de modéliser l'évolution dynamique d'un système aléatoire : $X_n$représente l'état du système à l'instant $n$.

Les applications des chaînes de Markov sont très nombreuses : réseaux, génétique de populations, mathématique financières, gestion de stock, algorithme stochastique d'optimisation...

# Les motivations

Il Ya plusieurs motivations comme suit:

1. Dans les nouveaux programmes, les chaînes de Markov mobilisent les compétences C2 (modéliser et simuler des phénomènes aléatoires ou déterministes et les traduire en langage mathématique) et C4 (représenter et interpréter les différentes convergences).

2. Les familles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$de variables aléatoires indépendantes sont des objets fondamentaux en probabilités mais souvent trop « naïfs » pour décrire en pratique des phénomènes aléatoires. Les chaînes de Markov constituent un exemple fondamental de familles $(X_n)$de variables exhibant une dépendance suffisamment riche pour être pertinente et suffisamment simple pour se prêter à une étude détaillée.

3. Les chaînes de Markov sont le pendant aléatoire des suites récurrentes

$x_{n+1} = f(x_n)$.

4. Certains phénomènes se présentent spontanément comme des chaînes de Markov. Ce sont souvent des hypothèses d'indépendance inhérentes au phénomène qui se transforment en propriété de Markov.

5. On peut aussi fabriquer une structure markovienne pour s'adapter au plus près à la modélisation d'une situation réelle. A ce titre, les chaînes de Markov constituent des approximations de la réalité dont il convient de mesurer ensuite la pertinence (notamment en termes de prédictions). Notons que la structure markovienne à choisir peut être subtile: certains phénomènes ne sont pas directement markoviens en eux-mêmes mais proviennent d'un processus markovien sous-jacent (chaîne de Markov cachée).

6. Enfin, les chaînes de Markov peuvent être utilisées comme outils dans des problèmes qui n'ont a priori rien de markovien. Par exemple, les bonnes propriétés asymptotiques des chaînes de Markov peuvent permettre la simulation exacte ou approchée d'une loi de probabilité (algorithmes de Métropolies-Hastings et de Propp-Wilson) ou le calcul approché d'une espérance sous cette loi (méthodes dites MCMC pour Monte Carlo Markov Chainse). Elles peuvent aussi servir dans des problèmes d'optimisation (algorithme de recuit simulé).

7. Pédagogiquement, les chaînes de Markov permettent de nouer un lien fort entre probabilités et algèbre linéaire.

# Chapitre I

# les chaines de Markov

# 1. Définition

Une suite $(X_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans un ensemble au plus dénombrable $E$ est une chaîne de Markov d'espace d'états $E$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $(i_0, i_1 \dots, i_{n+1})$dans $E$ telle que,

$$\mathrm{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) \ = \mathrm{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n).$$

Une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est homogène si:

$$\mathrm{P}(X_n = j | X_{n-1} = i) = \mathrm{P}(X_{n+k} = j | X_{n+k-1} = i) = \mathrm{P}(X_1 = j | X_0 = i).$$

Pour tout $k \geq 0, i, j \in E$.

## 1.1. Exemples de chaines de Markov

1. **(La souris dans le labyrinthe)**

Une souris se déplace dans le labyrinthe .Initialement, elle se trouve dans la (case 1). A chaque minute, elle change de case en choisissant, de maniéré équiprobable, l'une des cases adjacentes. Dès qu'elle atteint soit la nourriture (case 4), soit sa tanière (case 5), elle y reste. On se pose alors les questions suivantes:

- Avec quelle probabilité la souris atteint-elle la nourriture plutôt que sa tanière?
- Au bout de combien de temps atteint-elle sa tanière ou la nourriture?

On peut essayer de répondre à ces questions en construisant un arbre d'écrivant les chemins possibles. Par exemple, il est clair que la souris se retrouve dans sa tanière au bout d'une minute avec probabilité 1/3. Sinon, elle passe soit dans la case 2, soit dans la case 3, et depuis chacune de ces cases elle a une chance sur deux de trouver la nourriture. Il y a donc une probabilité de 1/6 que la souris trouve la nourriture au bout de deux minutes.

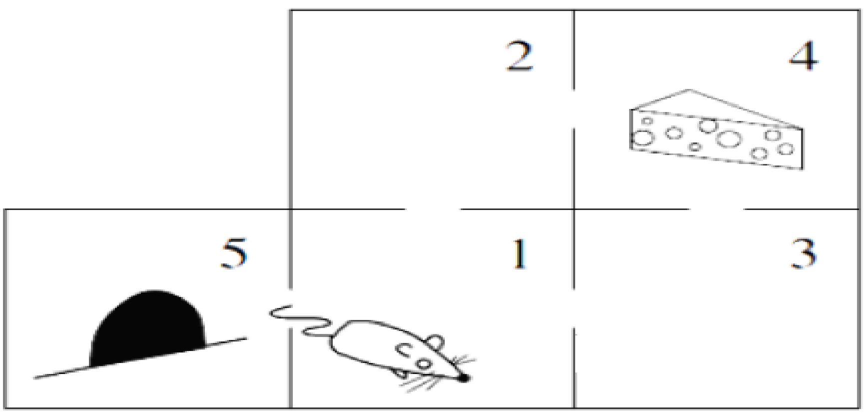



Figure1:La souris dans le labyrinthe.

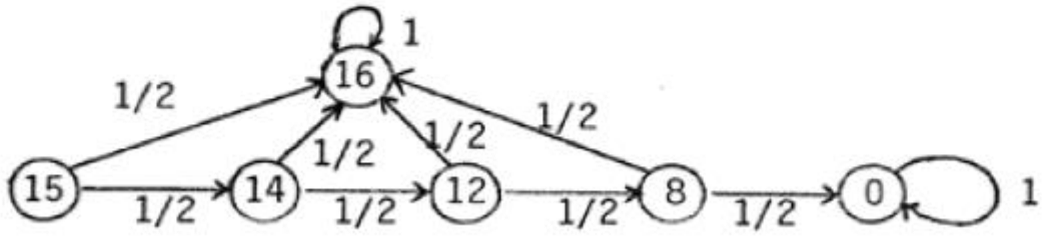
**2. (la roulette)**

Une personne décide de jouer à la roulette suivant la stratégie suivante : elle possède 15 Franc, et elle veut gagner un Franc ; alors elle mise un Franc sur le rouge.

Si elle gagne elle s'arrête de jouer si non elle continue à parier sur le rouge mais en doublant la mise à chaque fois.

- Quelle est sa probabilité de gagne ?

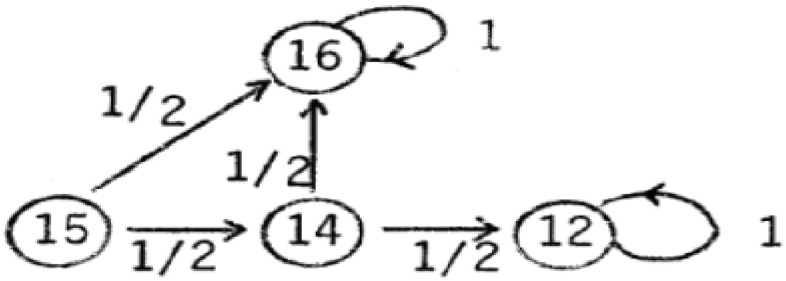
On considère la chaîne suivante:




On cherche la probabilité partant de 15 d'atteindre 16 = La probabilité de gagne= $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

Suit de l'exemple:

Supposons que la personne soit plus prudente elle adopte le même stratège que ci-dessus mais elle s'arrête si elle n'a pas gagné au bout de deux fois



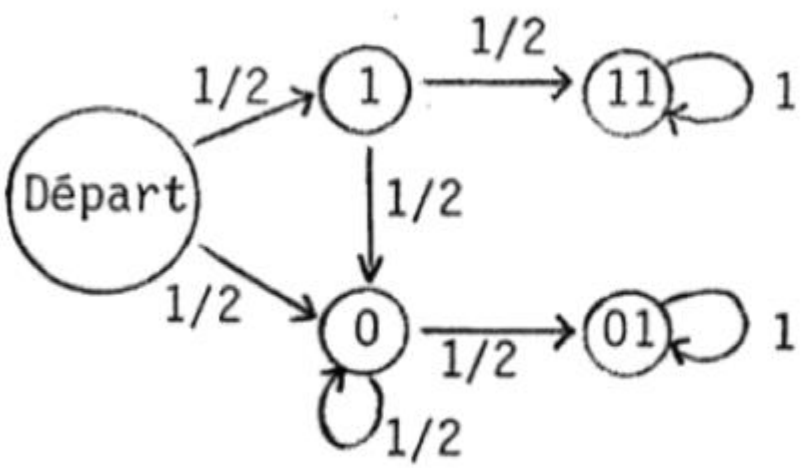

Sa probabilité de gagné est de $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

**3. (Jeu de Pile ou Face)**

On lance une pièce régulière (pile=1, face=0) jusqu'à ce qu'on obtienne pour la première fois soit 11 (deux piles consécutifs) soit 01 (face suivi de pile). A parie sur 11 alors que B parie sur 01

- Calculer les probabilités de gagner respectivement de A et B.

On peut représenter le déroulement de la partie par la chaîne :




## 2. Probabilité de transition

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à espace d'états $E$.
$\forall\, i,j \in E$ La probabilité:

$$p_{i,j} = P(X_n = j | X_{n-1} = i).$$

Est appelée probabilité de transition de l'état $i$ à $j$.

## 2.1. Matrice de transition

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$chaîne de Markov de matrice de transition $\mathbb{P}$. alors $\mathbb{P}$ vérifie :

- Pour tout $i,j \in E$, on a $p_{i,j} \in [0{,}1]$.
- Pour tout $i \in E$, on a $\sum_{j\in E} p_{i,j} = 1$.

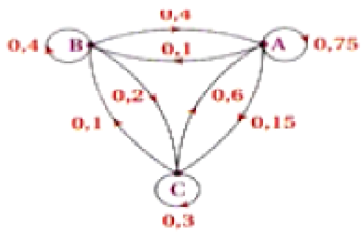
Une matrice de transition d'une chaîne de Markov est une matrice stochastique.

❖ **<u>Quelque exemple sur matrice de transition :</u>**

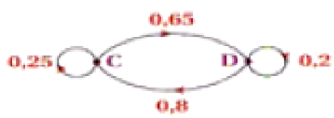
$$\mathbb{P}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}45 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}, \mathbb{P}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}1 & 0{,}15 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}, \mathbb{P}_3 = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}65 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

On peut aussi traduire ces informations à l'aide d'un graphe probabiliste


Graphe n°1




Graphe n°2




Graphe n°3

- Le graphe n°1 est un graphe probabiliste d'ordre 2.
- Le graphe n°2 est un graphe probabiliste d'ordre 3.
- Le graphe n°3 n'est pas un graphe probabiliste car la somme des poids des arcs issus du sommet C est égale à 0,9 et non à 1.

## 2.2. Probabilité initial

La probabilité d'une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est entièrement détermine par la donnée de sa matrice de transition $\mathbb{P}$ et de la loi de $X_0$, appelée probabilité initialeet notée $\mu_0$:

$$\text{Pour tout } i \in E,\ \mu_0(i)=P(X_0 = i).$$

### 2.2.1. Propriété de Vecteur initial

Soit$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition $\mathbb{P}$.

Et $\pi_0$ le vecteur-ligne décrivant l'état initial du système étudié telle que: $\pi_0 = \big(\mu_0(1), \mu_0(2), \dots, \mu_0(d)\big)$.
Soit $\pi_n$ le vecteur-ligne décrivant l'état probabiliste à l'étape $n$ du système étudié.
Alors:

$$\pi_{n+1} = \pi_n \times \mathbb{P} \text{ telle que } \pi_n = \pi_0 \times \mathbb{P}^n.$$

Cela se traduit en écriture matricielle par: $\pi_{n+1} = \pi_n \times \mathbb{P}$.
On a alors:

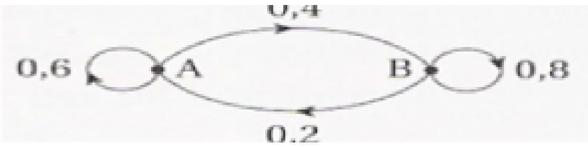
$$\pi_1 = \pi_0 \times \mathbb{P}.$$
$$\pi_2 = \pi_1 \times \mathbb{P} = \pi_0 \times \mathbb{P} \times \mathbb{P} = \pi_0 \times \mathbb{P}^2.$$
.
.
.
$$\pi_n = \pi_{n-1} \times \mathbb{P} = \pi \times \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P} = \pi_0 \times \mathbb{P}^n.$$

**Exemple:**
Les joueurs d'un club de football sont partagés en deux équipes : une équipe $A$ et une équipe $B$.l'entraîneur change la composition de ces équipes après chacun des matchs, suivant les performances des joueurs. Une étude statistique menée au cours des saisons précédentes permet d'estimer que :

- Si un joueur fait partie de l'équipe *A*, la probabilité qu'il reste dans cette équipe pour le match suivant est 0,6.
- Si un joueur fait partie de l'équipe *B*, la probabilité qu'il change d'équipe le match suivant est 0,2.

La situation précédente peut être schématisée par le graphe probabiliste ci-dessous et sa matrice de transition.

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}.$$




Pour une entier naturel *n* donné, on note $\pi_n = (a_n \quad b_n)$ le vecteur-ligne décrivant l'état probabiliste lors du match *n*.

Enzo vient d'arriver dans le club et la probabilité $a_0$ qu'il joue dans l'équipe $A$ pour le match de préparation (match 0) est 0,1.

- L'état probabiliste initial est donc $\pi_0 = (0,1 \quad 0,9)$.
- On a donc, par exemple, $\pi_1 = \pi_0 \times \mathbb{P} = (0,24 \quad 0,76)$.

La probabilité $a_0$ qu'Enzo joue dans l'équipe $A$ pour le match 1 est 0,24.

- On a aussi, par exemple, $\pi_2 = \pi_0 \times \mathbb{P}^2 = (0,296 \quad 0,704)$.

La probabilité $a_2$ qu'Enzo joue dans l'équipe $A$ pour le match 2 est 0,296.

# 3. Equations de Chapman Kolmogorov

**Théorème:**

Les probabilités ${P_{ij}}^{(m)}$ sont appelées probabilités de transition en $m$ étapes.

On note:
${P_{ij}}^{(m)} = P(X_{n+m} = j | X_n = i)$ et $\mathbb{P}^{(m)} = \mathbb{P}^m$.

**Démonstration:**

Par induction. Le résultat est vrai pour $m = 0 \ et \ 1$.supposons le vrai pour $m - 1$. Utilisant la loi des probabilités totales, nous obtenons,

Pour tout $i, j \in E$.

$$\begin{aligned} P_{ij}^{(m)} &= P(X_m = j || X_0 = i) \\ &= P(X_m = j | X_{m-1} = k) P(X_{m-1} = k | X_0 = i). \\ &= \sum_{k \in E} P_{ki}^{(1)} P_{ik}^{(m-1)} = \sum_{k \in E} P_{ik}^{(m-1)} P_{ki}^{(1)} \\ &= \sum_{k \in E} \left(P^{(m-1)}\right)_{ik} \left(P^{(m)}\right)_{kj}. \end{aligned}$$

**Corollaire:**

Soit $\mathbb{P}^{(n)}$ la matrice de transition en n ième étapes d'une chaîne de Markov. Alors, pour tout entier non négatif $l\ et\ m$

$$\mathbb{P}^{(l+m)} = \mathbb{P}^{(l)}\mathbb{P}^{(m)}$$

Ce qui s'écrit sous forme développée :

$$P_{ij}{}^{(l+m)} = \sum_{k\in E} P_{ik}{}^{(l)} P_{kj}{}^{(m)} \quad \forall\, i, j\ \in E.$$

# 4. Classification des états

## 4.1. Etats irréductibles

**Définition 1:**
L'état j est accessible depuis l'ètat i si et seulement s'il existe:

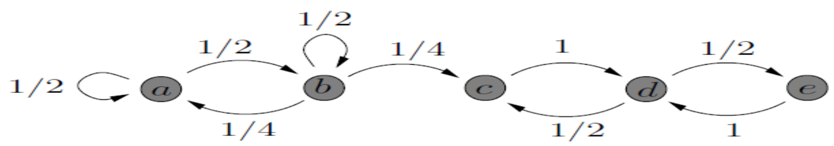
$$n \geq 0 \text{ telle que } P_{ij}^{(n)} > 0.$$

**Définition 2:**
Les états $i$ et $j$ communiquent si et seulement s'il existe:

$$n \geq 0\ et\ m \geq 0 \text{ telle que } P_{ij}^{(n)} > 0\ et\ P_{ji}^{(m)} > 0.$$

**Remarque:**
Les états $i$et $j$ communiquent s'ils sont accessibles l'un à partir de l'autre.
**Exemple**:
Considérons une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathrm{E} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{e}\}$ et dont la matrice et le graphe de transition sont données par :

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



La chaîne comporte deux classes irréductibles : {a, b} et {c, d, e}.

## 4.2. Etats récurrents et transitent

Pour tout état $i$, désignons par $T_i$ le temps d'atteinte de l'état $i$ à partir de l'instant 1 ; autrement dit

$$T_i = inf\{n \geq 1, X_n = i\}$$

ce temps d'atteinte est un temps d'arrêt de la chaîne.

**Définition:**

On dit que l'état $i$ est récurrent si, partant de l'état $i$, la probabilité que la chaîne de Markov retourne à l'état $i$ en un temps fini est égale à 1

$$P(T_i < +\infty | X_0 = i) = 1.$$

L'´état i est dit transitent dans le cas contraire i.e.

$$P(T_i = +\infty | X_0 = i) > 0.$$

**Exemple:**

Reprenons le cas de la chaîne de Markov à valeurs dans $E = \{a, b, c, d, e\}$ définie dans le paragraphe précédent. L'état $b$ est transient en effet, l'état $c$ est accessible depuis $b$ mais pas l'inverse. Autrement dit, en allant en $c$ depuis $b$, on est sûr de ne jamais y revenir :

$$P(T_b = +\infty | X_0 = b) \geq P(X_1 = c | X_0 = b) = \frac{1}{4}.$$

Et même cas pour l'état $a$.

Les états $c, d$ et $e$ seront quant à eux récurrents.

## 4.3. Etat absorbant

**Définition:**

L'état $i$ est absorbant si et seulement si $p_{ii}$= 1 , $\forall\ i \in E$.

**Exemple:**

Soit $\mathbb{P}$ une matrice de transition à un système étudier

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'état {4} est absorbant.

## 4.4. Périodicité

**Définition:**
Soit $i \in E$. On appelle période de $i$, et on note $d(i)$ le $PGCD$ de tous les entiers $n \geq 1$ pour lesquels $P_{ii}^{(n)} > 0$, $\mathrm{d(i)} = \mathrm{pgcd}(\mathrm{n} \geq 1, P_{i,i}^{(n)} > 0)$.
Si $d(i) = d \geq 2$ on dit que $i$ est périodique de période $d$.
Si $d(i) = 1$, on dit que $i$ est apériodique.
Une chaîne apériodique est une chaîne de dont tous les états sont apériodiques.

**Exemple:**
On considère 5 points équité partis sur un cercle. Un promeneur saute chaque instant, d'un point à l'un de ses voisins avec la probabilité 1/2 pour chaque voisin.
L'ensemble des états est $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
On a $p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = 1/2$ pour $i \in \{2,3,4\}$, et $p_{1,2} = p_{1,5} = 1/2$ et $p_{5,1} = p_{5,4} = 1/2$
Ce qui donne la matrice:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

La chaîne est irréductible (tous les états communiquent). Comme tous les états sont dans la même classe, leur période est la même.
On a $d(1) = pgcd\{n \geq 1; {P_{1,1}}^{(n)} > 0\}$.
${P_{1,1}}^{(2)} \geq p_{1,2}p_{2,1} = \frac{1}{4} > 0$. ${P_{1,1}}^{(5)} \geq p_{1,2}p_{2,3}p_{3,4}p_{4,5}p_{5,1} = \frac{1}{2^5} > 0$.
Or le seul diviseur commun a 2 et a 5est 1. On a donc $d = d(1) = 1$ cette chaîne est donc apériodique.

# 5. Applications de chaine de Markov

## Exercice 1:

Dans un certain pays, il ne fait jamais beau deux jours de suite. Si un jour il fait beau, le lendemain il peut neiger ou pleuvoir avec autant de chances. Si un jour il pleut ou il neige, il y a une chance sur deux qu'il y ait changement de temps le lendemain, et s'il y a changement, il y a une chance sur deux que ce soit pour du beau temps.
a) Former, à partir de cela, une chaîne de Markov et en déterminer sa matrice de transition.
b) Si un jour il fait beau, quel est le temps le plus probable pour le sur lendemain?
c) Si on suppose que l'on a que deux états (beau temps et mauvais temps), déterminer la matrice de transition de la nouvelle chaîne ainsi obtenue.

## Exercice 2:

On considère sur $E = \{1, \dots, 6\}$ la matrice de transition $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{2,2} & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & p_{4,4} & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & p_{5,5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{6,6} \end{pmatrix}$$

1. Compléter la matrice $\mathbb{P}$ pour en faire une matrice de transition.
2. Représenter le graphe de la chaîne de Markov.
3. Quels sont les états récurrents et transitoires de cette chaîne

## Exercice 3:

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur $\{1,2,3\}$ de matrice de transition.

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $P(X_3 = 1 | X_0 = 1)$ dans les cas suivants: $p = 1/6$ et $p = 1/12$.

**Exercice 4:**

On considère la matrice de transition suivante :

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

a) Représenter le graphe de la chaîne.
b) Peut-on parler de chaîne périodique, apériodique?
c) Quelles sont les classes de la chaîne.

# Les solutions:

## Solution1:

a) On a l'ensemble des états suivants $E = \{BT, PL, N\}$ et le temps pour un jour ne dépend que du temps du jour précédent, indépendamment de la période de l'année également. On a donc bien une chaîne de Markov, de matrice de transition :

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

b) Pour le temps du surlendemain, il faut déterminer $P^2$. Mais seule la première ligne de $P^2$ nous intéresse car on veut déterminer les probabilités à partir d'un jour de beau temps. On a:

$$\begin{aligned} p_{BT,BT}^{(2)} &= p_{BT,BT} \times p_{BT,BT} + p_{BT,PL} \times p_{PL,BT} + p_{BT,N} \times p_{N,BT} \\ &= 0 \times 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{BT,P}^{(2)} &= p_{BT,BT} \times p_{BT,P} + p_{BT,PL} \times p_{PL,PL} + p_{BT,N} \times p_{N,BT} \\ &= 0 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{BT,N}^{(2)} &= p_{BT,BT} \times p_{BT,N} + p_{BT,PL} \times p_{PL,N} + p_{BT,N} \times p_{N,N} \\ &= 0 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Ainsi, si un jour il fait beau, le temps le plus probable pour le sur lendemain est la pluie ou la neige.

c) On suppose maintenant que $E'$= {BT, MT}, ce qui est possible puisque la pluie et la neige se comportent de la même façon pour ce qui est des transitions. Donc $\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$.

## Solution 2:

On a :

- Pour tout $i, j \in E$, on a $p_{i,j} \in [0,1]$.
- Pour tout $i \in E$, on a $\sum_{j\in E} p_{i,j} = 1$.

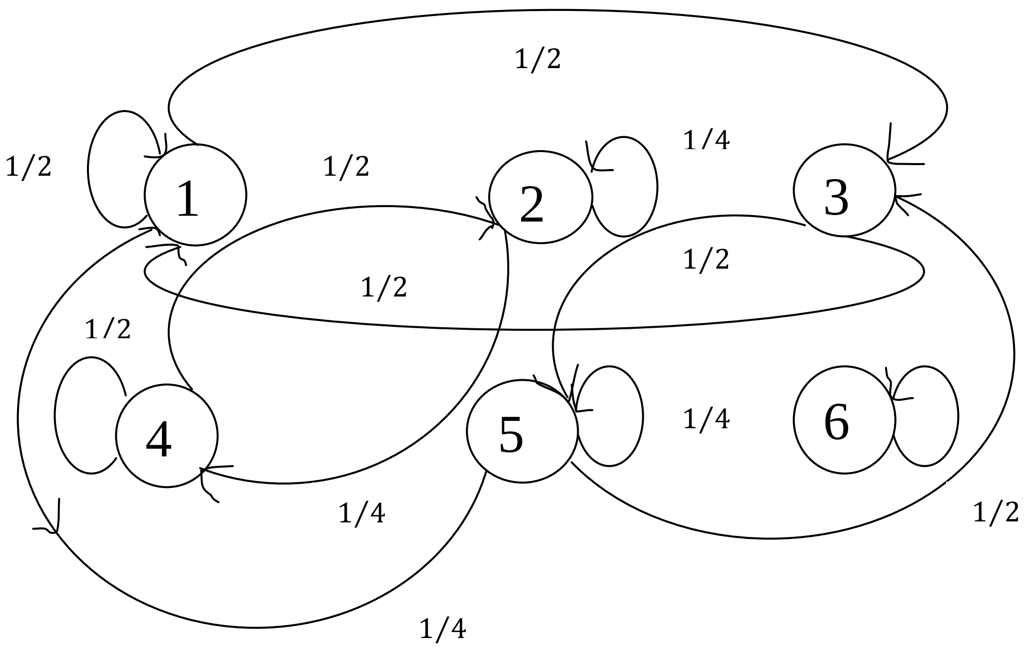
$$\begin{aligned} p_{1,1} &= 1 - \left(p_{1,2} + p_{1,3} + p_{1,4} + p_{1,5} + p_{1,6}\right) \\ &= 1 - (0 + 1/2 + 0 + 0 + 0) = 1/2 \end{aligned}$$

Même cas pour : $p_{2,2},\ p_{4,4},\ p_{5,5},\ p_{6,6}$

Donc

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le graphe de la chaîne de Markov est comme suite :



L'état $E$ est transient En effet, l'état $\{1\}$ est accessible depuis $\{5\}$ mais pas l'inverse.
Autrement dit, en allant en 1 depuis 5, on est sûr de ne jamais y revenir.

La chaîne comporte 3 classes récurrentes:$\{1,3\}$ , $\{2,4\}, \{3,5\}$

## Solution 3:

On a :

$$P_{11}{}^{(3)} = P(X_3 = 1|X_0 = 1)$$

Et on a pour $p = 1/6$ et $n = 1$
$P_{11}{}^{(1)} = 0.$
Pour $n = 2$

$$\mathbb{P}^{(2)} = \mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/6 & 5/6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/6 & 5/6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/18 & 13/18 & 4/18 \\ 0 & 13/18 & 5/18 \end{pmatrix}$$

Donc $P_{11}{}^{(2)} = 0.$
Pour $n = 3$

$$\mathbb{P}^{(3)} = \mathbb{P}^3 = \mathbb{P}^2\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/18 & 13/18 & 4/18 \\ 0 & 13/18 & 5/18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/6 & 5/6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/18 & 13/18 & 4/18 \\ 1/26 & 39/54 & 13/54 \\ 5/108 & 77/108 & 13/54 \end{pmatrix}$$

Donc $P_{11}{}^{(3)} = \frac{1}{18}$.

Et on a pour $p = 1/12$ et $n = 1$
$P_{11}{}^{(1)} = 0.$
Pour $n = 2$

$$\mathbb{P}^{(2)} = \mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/12 & 11/12 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/12 & 11/12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/36 & 3/4 & 2/9 \\ 0 & 5/7 & 11/36 \end{pmatrix}$$

Donc ${P_{11}}^{(2)} = 0$.
Pour $n = 3$.

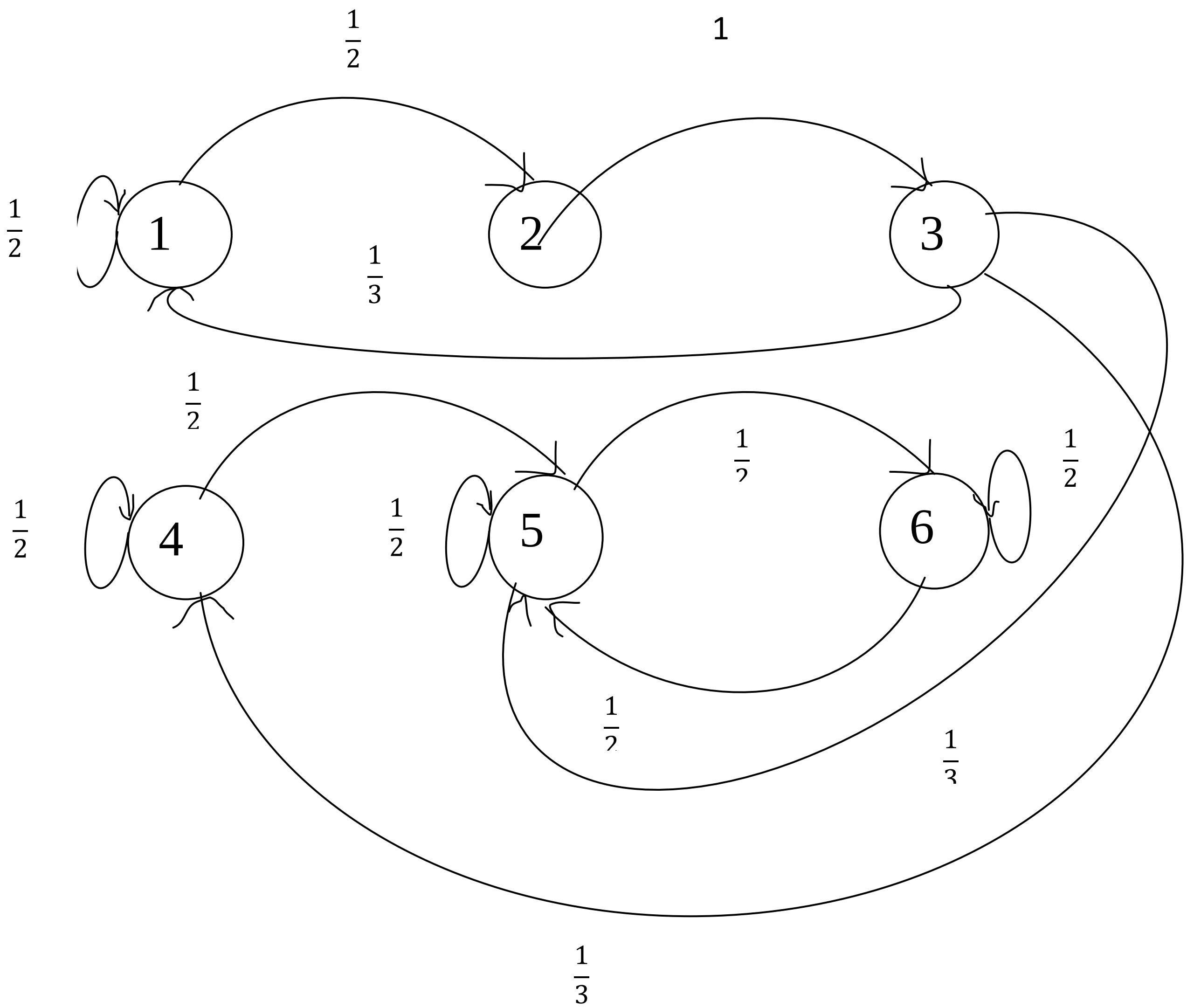
$$\mathbb{P}^{(3)} = \mathbb{P}^3 = \mathbb{P}^2\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/36 & 3/4 & 2/9 \\ 0 & 5/7 & 11/36 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/12 & 11/12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/36 & 3/4 & 2/9 \\ 1/54 & 79/108 & 1/4 \\ 11/432 & 2287/3024 & 5/21 \end{pmatrix}$$

Donc ${P_{11}}^{(3)} = \frac{1}{36}$

## Solution 4:

Le graphe de la chaîne de Markov est comme suite :



Comme tous les états sont dans la même classe, leur période est la même.
On a: $d(1) = pgcd\{n \geq 1; P_{1,1}{}^{(n)} > 0\}$.
$P_{1,1}{}^{(1)} \geq p_{1,1} = \frac{1}{2} > 0$. $P_{1,1}{}^{(3)} \geq p_{1,2}p_{2,3}p_{3,1} = \frac{1}{6} > 0$. Or le seul diviseur commun a 1 et 3 est 1. On a donc $d = d(1) = 1$, cette chaîne est donc apériodique.
La chaîne comporte 4 classes irréductibles: $\{1,2,3\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{5,6\}$ .
On à L'état 3 est transient, l'état 4 est accessible depuis 3 mais pas l'inverse. Autrement dit, en allant en 4 depuis 3, on est sûr de ne jamais y revenir:

$$P(T_3 = +\infty | X_0 = 3) \geq P(X_1 = 4 | X_0 = 3) = \frac{1}{3}.$$

# Chapitre II

## Convergences des suites de variables aléatoires

# 1. Rappels

## 1.1. Inégalité de Markov

Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs non-négatives et l'espérance $\mathrm{E}(X)$ est finie, pour tout réel $a > 0$.

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathrm{E}(X)}{a}$$

**Démonstration:**

La démonstration qui suit s'applique à une variable $X$ continue

de densité $f$.

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{a} xf(x)dx + \int_a^{+\infty} xf(x)dx \geq \int_a^{+\infty} xf(x)\,dx$$
$$\geq \int_a^{+\infty} af(x)dx = a\int_a^{+\infty} f(x)dx = aP(X \geq a)$$

## 1.2. Bienaymé-Tchebychev

Soit $X$ une variable aléatoire d'espérance $\mu$ et de variance $\sigma^2$ finies. Pour tout réel $k > 0, P(\mid X - \mu \mid \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$

**Démonstration:**

On peut appliquer l'inégalité de Markov, avec $a = k^2$, à la variable

$(X - \mu)^2$ puisque celle-ci est à valeurs non-négatives.

On obtient

$$P((X - \mu)^2 \geq k^2) \leq \frac{\mathrm{E}[(X - \mu)^2]}{k^2}$$

Mais comme $(X - \mu)^2 \geq k^2$ équivaut à $\mid X - \mu \mid \geq k$ la formule peut écrite $P(\mid X - \mu \mid \geq k) \leq \frac{\mathrm{E}[(X-\mu)^2]}{k^2} = \frac{\sigma^2}{k^2}$.

## 1.3. Lemme de Borel-Cantelli

Soit $(X_n)_{n\geq\mathbb{N}}$ une famille d'événements, on note

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{X_n}) = \bigcap_{n\geq 0}\left(\bigcup_{j\geq n}\mathrm{X_j}\right).$$

$$\lim_{n\to\infty}\inf_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{X_n}) = \bigcup_{n\geq 0}\left(\bigcap_{j\geq n}\mathrm{X_j}\right).$$

Dans un espace probabilisé $(\Omega, E, P)$, considérons une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $X$.

1. Si $\sum_{n\geq 0} P(X_n) < +\infty$ alors $P(\lim_{n\to\infty} sup_{n\in\mathbb{N}}(X_n)) = 0.$
2. Si $\sum_{n\geq 0} P(X_n) = +\infty$ alors $P(\lim_{n\to\infty} sup_{n\in\mathbb{N}}(X_n)) = 1.$

### Démonstration:

Soit $(X_n)$ une suite d'événements dans un espace de probabilité et supposons que la somme des probabilités de la $(X_n)$ est fini.

On suppose que :

$$\sum_{n\geq 0} P(X_n) < +\infty$$

et pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{X_n}) = \bigcap_{n\geq 0}\bigcup_{j\geq n}\mathrm{X_j} \subset \bigcup_{j\geq i}\mathrm{X_j}$$

donc

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}(X_n)\right) \leq P\left(\bigcup_{j\geq i}X_j\right) \leq \sum_{j\geq i} P(X_j)$$

Ce dernier terme tends vers 0 quant j tends vers $+\infty$ car c'est la reste d'une série convergente donc: $P(\lim_{n\to\infty} sup_{n\in\mathbb{N}}(X_n)) = 0.$

# 2. Mode de convergences

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires et soit $X$ une variable aléatoire. On définit les modes de convergence suivants:

## 2.1. Converge en loi

### 2.1.1. Définition

**Définition 1:**

On note $F_{X_n}$ la fonction de répartition de $X_n$et $F_X$ la fonction de répartition de $X$. On dit que la suite$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $X$ si:

$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ pour tout $x$ point de continuité de $F_X$ et on note

$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

**Définition 2:**

On note $\varphi_{X_n}$la fonction caractéristique de $X_n$ et $\varphi_X$ la fonction caractéristique de $X$. On dit que la suite$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $X$ si:

$\forall t \in \mathbb{R}\ \lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t)$.

**Exemple 1:**

La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant:

$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ et $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$ converge en loi vers $X$.

En effet pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $F_{X_n}(x) = P(X_n \leq x) = \begin{cases} 0 & ,\quad si\ x < 0 \\ 1 - \frac{1}{n} & ,0 \leq x < 1 \\ 1 & ,\ si\ x \geq 1 \end{cases}$

Et $F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1 & sinon \end{cases}$

$F_X$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et pour $x \in \mathbb{R}^*$ on a :

Si $x < 0$ alors $F_{X_n}(x) = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 = F_X(x)$

Et si $0 < x < 1$ alors $F_{X_n}(x) = 1 - \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 = F_X(x)$

Et si $x \geq 1$ alors $F_{X_n}(x) = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 = F_X(x)$

Donc: $\forall x \in \mathbb{R}^* \; F_{X_n}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F_X(x)$i.e $X_n \overset{\mathcal{L}}{\to} X$.

## 2.1.2. Propriétés sur la convergence en loi

**Proposition 1:**

Si $(X_n)$ converge en loi vers $X$, pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, $aX_n + b$ convergence en loi vers $aX + b$.

**Démonstration:**

Si $(X_n)$ converge en loi vers$X$, pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, $aX_n + b$ convergence en loi vers $aX + b$.

$$X_n \overset{\mathcal{L}}{\to} X \Leftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R} \;\; \varphi_{X_n}(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi_X(t)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_{aX_n+b}(t) = \lim_{n\to+\infty} E\{e^{it(aX_n+b)}\}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{itb} E\{e^{i(at)X_n}\}$$

$$= e^{itb} \lim_{n\to+\infty} \varphi_{X_n}(at)$$

$$= e^{itb} \varphi_X(at)$$

$$= \varphi_{aX+b}(t)$$

**Proposition 2: (Théorème de Slutsky)**

Soients$(X_n, X)_n$ , $(X_n)_n$ deux suites de variables aléatoires et $a$ une constante si: $X_n \overset{\mathcal{L}}{\to} X$ et $Y_n \overset{p}{\to} a$

On a:

i. $X_n + Y_n \overset{\mathcal{L}}{\to} X + a$.
ii. $X_n Y_n \overset{\mathcal{L}}{\to} Xa$.
iii. $\frac{X_n}{Y_n} \overset{\mathcal{L}}{\to} \frac{X}{a}$ avec $Y_n \neq 0$ p.s et $a \neq 0$

**Remarque: (lemme de Slutsky)**
Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de variables aléatoires, et $X, Y$ deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, E, P)$ telles que $X_n \to X$ en loi et $Y_n \to Y$ en loi et $X_n$et $Y_n$ sont indépendantes pour tout $n \geq 1$ et $X$ et $Y$ sont indépendantes donc $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi.

**Démonstration:**

On a: $$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t), \forall t \in \mathbb{R} \text{ et}$$
$$Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \phi_{Y_n}(z) = \phi_Y(z), \forall z \in \mathbb{R}$$

Donc $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, Y) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \psi_{(X_n,Y_n)}(t,z) = \psi_{(X,Y)}(t,z)$

$$\begin{aligned}\psi_{(X_n,Y_n)}(t,z) &= \mathrm{E}\{e^{itX_n+izY_n}\}\\ &= \mathrm{E}\{e^{itX_n}e^{izY_n}\}\\ &= \mathrm{E}\{e^{itX_n}\}\mathrm{E}\{e^{izY_n}\} = \varphi_{X_n}(t)\phi_{Y_n}(z)\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \psi_{(X_n,Y_n)}(t,z) = \lim_{n\to+\infty} \varphi_{X_n}(t) \lim_{n\to+\infty} \phi_{Y_n}(z)$$

donc

$$\begin{aligned}\psi_{(X,Y)}(t,z) &= \varphi_X(t)\phi_Y(z)\\ &= \mathrm{E}\{e^{itX_n}e^{izY_n}\}\\ &= \mathrm{E}\{e^{itX_n}\}\mathrm{E}\{e^{izY_n}\} = \varphi_{X_n}(t)\phi_{Y_n}(z)\end{aligned}$$

**Proposition 3:**
Soient $(X_n, X)_n$ et $(Y_n, Y)_n$ deux suites de variables aléatoires telle que :

$$X_n \xrightarrow{p} Y_n$$

Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ alors $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

# 1.4. Convergence en probabilité

## 2.2.1 Définition

On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $X$ si :

$$\forall \varepsilon > 0: \lim_{n\to\infty}\left(P(|X_n - X| > \varepsilon)\right) = 0$$

On note: $X_n \xrightarrow{p} X$.

**Exemple:**

Soit $X_n$ une variable aléatoire définie par

$$X_n = \begin{cases} 1 \ \ avec\ une\ probabilté\ \dfrac{1}{n}. \\ 0\ avec\ une\ probabilté\ \ 1 - \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

On démontre que $X_n \overset{p}{\rightarrow} 0$.

$$\forall\ \varepsilon > 0, P(|X_n - 0| > \varepsilon) = P(|X_n| > \varepsilon) = P(X_n > \varepsilon) = P(X_n = 1) = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'où $X_n \overset{p}{\rightarrow} 0$.

### 2.2.2 Propriétés sur la convergence en probabilité

**Proposition 1: (unicité de la limite en probabilité)**

Si $X_n \overset{p}{\rightarrow} X$ et $X_n \overset{p}{\rightarrow} Y$ alors $X = Y$

**Démonstration:**

Pour tout $\varepsilon > 0$ on a :

$$\{|X - Y| \geq \varepsilon\} \subset \left\{|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{|X_n - Y| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

Et

$$P(|X - Y| > \varepsilon) \leq P\left(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(|X_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Et on déduit que $\mathrm{X_n} \overset{\mathrm{p}}{\rightarrow} \mathrm{X}$ et $\mathrm{X_n} \overset{\mathrm{p}}{\rightarrow} \mathrm{Y}$. $\forall\ \varepsilon > 0: P(|\mathrm{X} - \mathrm{Y}| > \varepsilon) = 0$.

On a alors: $P(\mathrm{X} \neq \mathrm{Y}) = P\left(\bigcup_{\mathrm{k}\geq 1}\left\{|\mathrm{X} - \mathrm{Y}| > \frac{1}{\mathrm{k}}\right\}\right) = 0$.

D'où $X = Y$.Donc l'unicité de la limite en probabilité.

**Proposition 2:**

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de variables aléatoires avec

$X_n \overset{p}{\rightarrow} X\ et\ Y_n \overset{p}{\rightarrow} Y$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ alors:

$\mathrm{X_n} \pm \mathrm{Y_n} \overset{\mathrm{p}}{\rightarrow} \mathrm{X} \pm \mathrm{Y}$.

**Proposition 3:**

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de variables aléatoires

1. $X_nY_n \xrightarrow{p} XY$.
2. $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{p} \frac{X}{Y}$ avec $Y_n \neq 0$ et $Y \neq 0$ (presque sûre)

**Proposition 4:**

Soit$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoire, soit $X$ une variable aléatoire et $g$ application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$X_n \xrightarrow{p} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{p} g(X)$$

**Démonstration:**

$$X_n \xrightarrow{p} X \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ P(|\ X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$g$ Continues-en$x_0$ ,

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ x, |x - x_0\,| < \delta \Longrightarrow |g(x) - g(x_0\,)|$$

$$< |g(x) - g(x_0\,)| > \varepsilon \Longrightarrow |x - x_0\,| > \delta$$

$g(X_n) \xrightarrow{p} g(X) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ P(|g(X_n) - g(X)| > \varepsilon) \xrightarrow[\mathrm{n}\to+\infty]{} 0.$

Donc $0 \leq P(|g(X_n) - g(X)| > \varepsilon) \leq P(|\ \mathrm{X_n} - \mathrm{X}| > \delta) \xrightarrow[\mathrm{n}\to+\infty]{} 0.$

## 2.3. Convergence presque sûre

### 2.3.1. Définition

On dit que la suite $X_n$ converge vers $X$ presque sûre si :

$$P\left(\left\{\omega\epsilon E, \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1$$

Dans ce cas on note: $X_n \overset{p.s}{\rightarrow} X$

**Exemple :**

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des variables aléatoires et $X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$.On montre que $\frac{X_n}{n^2}$ converge presque sûre vers 0. En effet l'ensemble $E = \{0 \leq |X_n| \leq n, pour\ tout\ n\}$ et telle que $P(E) = 1$.

Donc pour $\omega \in E$ on a que $0 \leq \left|\frac{X_n(\omega)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n}$ ce qu`implique que $\lim_{n\to\infty} \frac{X_n(\omega)}{n^2} = 0$.

Pour $\omega \in E$ et donc que:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{X_n(\omega)}{n^2} = 0\right) = 1.$$

Qui montre la convergence presque sûre.

### 3.3.2. Propriétés sur la convergence presque sûre

**Proposition 1:**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles

1. Si pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_{n=0}^{+\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) < +\infty$ alors $X_n \overset{p.s}{\rightarrow} X$.
2. Si les variables aléatoires $X_n$ sont indépendantes alors $X_n \overset{p.s}{\rightarrow} 0$ ssi pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} P(|X_n| \geq \varepsilon) < +\infty$.

**Proposition 2:**

Soit $f$ est une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de variables aléatoires réelles convergeant presque sûre respectivement vers les v.a.r $X$et $Y$, alors la suite de v.a.r $\big(f(X_n, Y_n)\big)_n$ converge presque sûre vers la v. a. r $f(X, Y)$.

**Proposition 3:**

Soit $(X_n, X)$ et $(Y_n, Y)$ deux suites de variables aléatoires réelles alors:

$$(X_n, Y_n) \overset{p.s}{\rightarrow} (X, Y) \Leftrightarrow \left( X_n \overset{p.s}{\rightarrow} X,\ Y_n \overset{p.s}{\rightarrow} Y\right)$$

Si $X_n \overset{p.s}{\rightarrow} X$ et $Y_n \overset{p.s}{\rightarrow} Y$ lorsque alors:

i. $X_n + Y_n \overset{p.s}{\rightarrow} Y + X$
ii. $X_n\, Y_n \overset{p.s}{\rightarrow} YX$
iii. $\frac{X_n}{Y_n} \overset{p.s}{\rightarrow} \frac{X}{Y}$ avec $Y_n \neq 0\ et\ Y \neq 0$ (presque sûre).

## 2.4 La convergence dans l'espace $\mathbb{L}^p$

### Convergence dans $\mathbb{L}^1$ (en moyenne)

$$\mathrm{X_n} \xrightarrow{\mathbb{L}^1} \mathrm{X} \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \mathrm{E}(|X_n - X|) = 0$$

### Convergence dans $\mathbb{L}^2$(en moyenne quadratique)

$$\mathrm{X_n} \xrightarrow{\mathbb{L}^2} X \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \mathrm{E}(|X_n - X|^2) = 0$$

### 2.4.1 Définition

On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $X$ dans $\mathbb{L}^p$ pour $p \geq 1$, si $X_n$ et $X$ sont dans $\mathbb{L}^p$et $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(|X_n - X|^p) = 0$.

On notera: $X_n \xrightarrow{\mathbb{L}^p} X$.

### 2.4.2. Propriétés sur la convergence dans l'espace $\mathbb{L}^p$

**Propriété 1:**

Si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{L}^p$ vers la variable aléatoire réelle $X$, alors la suite des esperances $\left(\mathrm{E}(X_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ vers $\mathrm{E}(X)$.

**Propriété 2:**

Si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûre vers la variable aléatoire réelle $X$ et si pour tout entier naturel $n, X_n \geq 0$, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{L}^1$ vers la v.a.r $X$ si et seulement si, $\left(\mathrm{E}(X_n)\right)_n$ converge dans $\mathbb{R}$ versE$(X)$.

# 3. Liens entre les différents modes de convergences

### Proposition 1: (Convergences en probabilité et en loi)

La convergence en probabilité implique la convergence en loi.

$$X_n \xrightarrow{p} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$$

**Démonstration:**

$(\Omega, E, P)$ est un espace probabilisé

$$X_n \overset{p}{\to} X \ \ n \to +\infty \ \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, P(\mid X_n - X \mid > \varepsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$X_n \overset{\mathcal{L}}{\to} X \ n \to +\infty \ \Leftrightarrow F_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} F(x), \forall x \in \complement(F)$$

$$E \subset \Omega \ , P(X_n \leq x) = P\big(X_n \leq x, (X > x + \varepsilon \ \ ou \ \ X \leq x + \varepsilon)\big)$$

$$\leq P(X_n \leq x, X > x + \varepsilon) + P(X \leq x + \varepsilon)$$

$$F_n(x) \leq P(\mid X_n - X \mid > \varepsilon) + F(x + \varepsilon)$$

$$P(X \leq x - \varepsilon) = P\big(X \leq x - \varepsilon, (X_n \geq x \, ou \, X_n \leq x)\big)$$

$$\leq P(X \leq x - \varepsilon, X_n \geq x) + P(X_n \leq x)$$

$$F(x - \varepsilon) \leq P(\mid X_n - X \mid > \varepsilon) + F_n(x)$$

$$\Longrightarrow F_n(x) \geq F(x - \varepsilon) - P(\mid X_n - X \mid > \varepsilon)$$

Lorsque $n \to +\infty$

$$F(x - \varepsilon) \leq \liminf F_n\,(x) \leq \limsup F_n(x) \leq F(x + \varepsilon)$$

Lorsque $\varepsilon \to 0$

Donc:$X_n \overset{p}{\to} X \Longrightarrow X_n \overset{\mathcal{L}}{\to} X$

**Proposition 2:**

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoires et $a$ un réel. Alors $X_n$ converge en probabilité vers $a$ si et seulement si $X_n$ converge en loi vers $a$.

$$X_{\,n} \overset{\mathcal{L}}{\to} a \Leftrightarrow X_n \overset{p}{\to} a$$

**Démonstration :**

On suppose que $X_n \overset{\mathcal{L}}{\to} X \equiv a$

Soit $F_X$ la fonction de répartition de $X$ définit par :

$$F_X(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 \; si \; x < a \\ 1 \; sinon \end{cases}$$

$F_X$ est continue sur $\mathbb{R} - \{a\}$ donc on a $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F_{X_n}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F_X(x).$$

On montre que

$X_n \xrightarrow{p} a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\text{: } \lim_{n\to\infty} P(|X_n - a| > \varepsilon) = 0.$

Soit $\varepsilon > 0$ on a

$$\begin{aligned} P(|X_n - a| > \varepsilon) &= 1 - P(|X_n - a| \le \varepsilon) \\ &= 1 - P(-\varepsilon \le X_n - a \le \varepsilon) \\ &= 1 - P(a - \varepsilon \le X_n \le a + \varepsilon) \\ &= 1 - \left(F_{X_n}(a+\varepsilon) - F_{X_n}(a-\varepsilon)\right) \\ &= 1 - F_{X_n}(a+\varepsilon) + F_{X_n}(a-\varepsilon). \end{aligned}$$

Or $\quad a + \varepsilon > a \Rightarrow F_{X_n}(a+\varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F_X(a+\varepsilon) = 1$

$$a - \varepsilon < a \Rightarrow F_{X_n}(a-\varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F_X(a-\varepsilon) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(|X_n - a| > \varepsilon) = 1 - 1 + 0 = 0.$$

Donc $X_n \xrightarrow{p} a$.

## Proposition 3:(Convergences $\mathbb{L}^p$ et probabilité)

Si $(X_n)$ et $X$ sont dans $\mathbb{L}^p$ alors la convergence en $\mathbb{L}^p, X_n \xrightarrow{\mathbb{L}^p} X$ entraine la convergence en probabilité $X_n \xrightarrow{p} X$.

**Démonstration:**

Il suffit d'appliquer l'inégalité de Markov : Soit $\varepsilon > 0$

$$P(|X_n - X| \ge \varepsilon) = P(|X_n - X|^p \ge \varepsilon^p) \le \frac{\mathrm{E}[|X_n - X|^p]}{\varepsilon^p}$$

$$= \frac{\| X_n - X \|_p^p}{\varepsilon^p} \to 0, n \to +\infty$$

**Proposition 4**: **(Converge en probabilité et presque sûre)**
Si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûre vers $X$, elle converge en probabilité (et donc aussi en loi) vers $X$.

$$X_n \overset{ps}{\to} X \Longrightarrow X_n \overset{p}{\to} X$$

**Démonstration:**

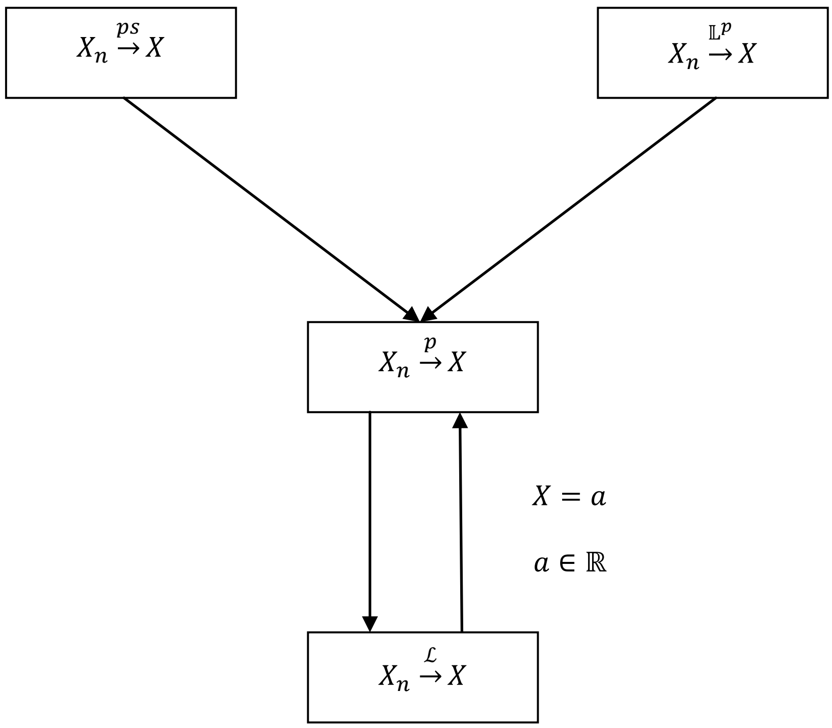
Soit $\varepsilon > 0$ fixé .on pose $f_n = 1_{\{\,|X_n - X\,|>\varepsilon\}}$ les fonctions $f_n$ sont mesurables positives et majorées par 1. Par ailleurs d'après la convergence presque sure pour presque tout $\omega \in E$ il existe $n_0$ tel que pour tout $n \geq n_0$

$$|X_n(\omega) - X(\omega)\,| \leq \varepsilon$$

C'est-à-dire $f_n(\omega) = 0$ pour tout $n \geq n_0$. On a donc écrit que la suite $f_n$ converge presque sûre vers 0. D'après le théorème de convergence dominée

$$P(|\,X_n(\omega) - X(\omega)\,|\geq \varepsilon) = \mathrm{E}[f_n] \to \mathrm{E}\left[\lim_{n\to\infty} f_n\right] = \mathrm{E}[0] = 0.$$

Les liens entre les différentes convergences sont donnés par le diagramme suivant :



# 4. Application de mode de convergence

## Exercice1:

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$une suite de variables aléatoires réelles indépendantes telles que pour $n \geq 1$, $X_n$suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_n = n$.

a) Calculer la fonction de répartition de $Y_n = min\{X_1, \dots, X_n\}$ pour $n \geq 1$.
b) Montrer que $Y_n \overset{p}{\rightarrow} 0$.
c) Montrer que $Y_n \overset{p.s}{\rightarrow} 0$.

## Exercice 2:

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$

On a : $P(X_n = -1) = 1 - \frac{1}{n^2}$ et $P(X_n = n^2 - 1) = \frac{1}{n^2}$.

a) Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers$-1$ en probabilité.
b) Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers$-1$.

## Exercice 3:

Soient $X_i$ des variables aléatoires indépendantes suivantes une loi uniforme sur[0,1].

A partir des $X_i$ nous définissons la suivante suit des variables aléatoires :

$$Z_n = n \min_{i=1,\dots,n} X_i$$

Montrer que $Z_n$ est converge en loi vers $Z$.

# Les solutions

## Solution 1:

a. $F_{Y_n}(y) = P(Y_n \leq y) = 1 - P(Y_n > y)$

$$= 1 - P(X_1 > y, \dots, X_n > y)$$

$$= 1 - exp\left(-y \sum_{k=1}^{n} k\right)$$

$= 1 - exp\left(\frac{-yn(n+1)}{2}\right)$.

Donc $F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 1 - exp\left(\frac{-yn(n+1)}{2}\right) & si\ y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

La quatrième égalité résulte de l'indépendance des variables aléatoires et de $P(X_k > y) = exp(-\lambda_k y) = exp(-ky)$

La cinquième de $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

b. Soit $\varepsilon > 0$. $P(|Y_n| > \varepsilon) = P(Y_n > \varepsilon) = exp\left(\frac{-\varepsilon n(n+1)}{2}\right) \rightarrow$ 0 lorsque $\rightarrow +\infty$ , donc $Y_n \overset{p}{\rightarrow} 0$.

c. Soit $\varepsilon > 0$.

$\sum_{n\geq1} P(|Y_n| > \varepsilon) = \sum_{n\geq1} P(Y_n > \varepsilon) = \sum_{n\geq1} exp\left(\frac{-\varepsilon n(n+1)}{2}\right)$

$$\leq \sum_{n\geq1} exp\left(\frac{-\varepsilon n}{2}\right) = \sum_{n\geq1} \left(exp\left(\frac{-\varepsilon}{2}\right)\right)^n < +\infty$$

Donc: $Y_n \overset{p.s}{\rightarrow} 0$.

## Solution 2:

a. Soit $\varepsilon > 0$ un réel. Pour tout $n \geq 1$, on a $P(|X_n + 1| > \varepsilon) = \frac{1}{n^2}$ donc: $\lim_{n\to+\infty} P(|X_n + 1| > \varepsilon) = \frac{1}{n^2} = 0$.

Puisque ceci a lieu pour tout $\varepsilon > 0$, la suite $(X_n)_{n\geq1}$ converge en probabilité vers $-1$.

b. On a, pour tout $n \geq 1$, $P(X_n \neq -1) = \frac{1}{n^2}$ donc $\sum_{n\geq1} P(X_n \neq -1) < +\infty$.

D'après le lemme de Borel-Cantelli, ceci entraine qu'avec probabilité 1, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de $n$ pour lesquelles $X_n$ n'est pas égal à $-1$. Autrement dit, avec probabilité 1, $X_n$ est égal $-1$. à pour $n$ assez grand. En particulier, avec probabilité 1, lasuite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers $-1$.
La suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge donc presque sûre vers $-1$.

## Solution 3:

On a: $Z_n = n \min_{i=1,\dots,n} X_i$

et

$$F_{Z_n}(x) = P(Z_n > x)$$

$$= P\left(\min \mathrm{X_i} > \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{n}}\right)$$

$$= P\left(\left(X_1 > \frac{x}{n}\right) \cap \left(X_2 > \frac{x}{n}\right) \cap \dots \cap \left(X_n > \frac{x}{n}\right)\right)$$

$$= \prod_{i=0}^{n} P\left(X_i > \frac{x}{n}\right) = \prod_{i=0}^{n}\left(1 - P\left(X_i \leq \frac{x}{n}\right)\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{x}{n}\right) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$

Comme$\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = exp(-x)$, il suit :

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n} = P(Z_n \leq x) = 1 - \ exp(-x) = F_Z.$$

Et donc $Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$.

# Bibliographie

[1]Brémaud,Pierre. (2009). Initiation aux Probabilités: et aux chaînes de Markov. France: Springer Science & Business Media, 311p.

[2]Cullmann,Georges.(1975).Initiation aux chaînes de Markov: méthodes et applications. Masson,140p.

[3]Patrick,Gordon.(1965). Théorie des chaînes de Markov finies et ses applications. Dunod,132p.

[4]Erard,Pierre-Jean ; Pontien ,Dé guenon.(1996). Simulation par événements discrets. PPUR presses polytechniques,417p.

[5]Sheldon,M.(2007).Initiation aux probabilités. PPUR presses polytechniques,592p.

[6]Jedrzejewski ,Franck.(2009). Modèles aléatoires et physique probabiliste. Springer Science & Business Media,572p.

[7]Saporta ,Gilbert .(2011).Probabilités, analyse des données et statistique.Editions TECHNIP,622p.

[8]Dariush,Ghorbanzadeh.(sans date). Probabilités.Editions OPHRYS,267p.

[9]Brémaud,Pierre. (1984). Introduction aux probabilités: modélisation des phénomènes aléatoires. Springer Science & Business Media,334p.

[10]Tassi,Philippe ;Legait,Sylvia.(1990). Théorie des probabilités en vue des applications statistiques. Editions TECHNIP,357p.

[11]Caumel, Yves.(2011). Probabilités et processus stochastiques.Springer Science & Business Media,315p.