الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……………

Centre Universitaire
Abd elhafid boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Licence

En : Filiere Mathematiques

Thème

Planification d'un Problème du Transport

PREPARE PAR :

-Arfi Merieme

- Ben Mounah Messaouda

Encadrer par : *Mr. Zaidi Ali*

Année Universitaire : 2014/2015

Table des matières

Introduction

Le problème de transport, souvent observè dans diffèrents domaines de l'industrie, est introduit pour la premiére fois par Hitchcock en 1941, traitè et ètudiè en dètail par Koopmans en 1947, Kantorovitch et Savourine en 1949 et puis Dantzig en 1951. Le problème de transport largement ètudiè dans la littèrature, est un modéle gènèrique pour les problèmes d'affectation et peut être formulè comme un programme linèaire avec une structure spèciale des contraintes. Dans sa forme classique, le probléme de transport consiste à minimiser le coût de transport des marchandises disponibles en m sources (nœds des disponibilités) et demandès pour n destinations (nœds des de mandes). Ensuite, l'étude est prolongèe au problème à un nombre d'indices supèrieur à deux. Depuis les annèes soixante, plusieurs ètudes ont ètè publièes sur le problème de transport à trois indices et plus gènèral, sur celui à indices multiples sans capacitès. Dèterminer une solution initiale est un pas important dans la rèsolution du problème de transport, c'est pour cette raison que les chercheurs se sont intèressès à trouver une mèthode d'initialisation permettant de trouver une solution la plus prés possible de la solution optimale. Dans ce travail, on va prèsenter trois mèthodes les plus connues a ce jour pour trouver une solution initiale d'un problème de transport (classique).

Ce mèmoire est compos de trois chapitres. Dans le premier chapitres est consacrè à la programmation linèaire et ètude la mèthode de simplex.

Le deuxième chapitre est consacrè à l'ntroduction du problème d'optimisation combinatoire et les problèmes classiques d'optimisation combinatoire (problème d'affectation ,le problème du voyageur de commerce ,problème d'ordonnancement)..

Le troixième chapitre est consacrè à la prèsentation du problème de transport et contient aussi la description de quelques mèthodes d'initialisation les plus connues (matrice minimale, Coin Nord-Ouest, Vogel) avec des exemples correspond.

Chapitre 1

Programmation linéaire

1.1 Introduction

En mathématiques, les problémes de programmation linéaire (PL) sont des problémes d'optimisation ou la fonction objectif et les contraintes sont linéaires. Aujourd'hui, ils existent Beaucoup d'applications industrielles de la Programmation Linéaire dans les domaines pétrolier, agroalimentaire, l'industrie lourde, le transport et la nance.

1.2 Formes générales d'un programme linéaire

1.2.1 Forme canonique

la forme canonique s'écrit :

$$\begin{cases} \min_{(x_1;x_2\ldots x_n)}[F(x_1,x_2\ldots x_n)=c_1x_1+c_2x_2\ldots+c_nx_n=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j] \\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\geq b_i;\forall i=1,\ldots,m \\ x_j\geq 0,\forall j=1,\ldots,n \end{cases}$$

et l'écriture matriciélle est de la forme canonique est :

$$\begin{cases} \min c^t x \\ ax\geq b \\ x\geq 0 \end{cases}$$

1.2.2 Forme standart

la forme standard s'ecrit :

$$\begin{cases} \min_{(x_1,\ldots x_n)}[F(x_1,\ldots x_n)=c_1x_1+\ldots+c_nx_n=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j] \\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\forall i=1,\ldots,m \\ x_j\geq 0,\forall j=1,\ldots,n \end{cases}$$

Preuve : Tout PL sous forme standard secrit de façon equivalente en un PL sous forme canonique et inversement.

1.3 Equivalence de deux programmes mathématiques

Deux programmes mathématiques (en particulier deux programmes linéaires) sont dits "équivalents" si á toute solution réalisable de l'un on sait faire correspondre une solution réalisable de l'autre, de telle sorte que les fonctions objectives soient égales pour cette paire de solution.

1.4 Dualité

1.4.1 La dualité en programmation linéaire

A chaque programme linéaire est associé un autre programme linéaire appelé dual.

Définition 1 *: Soit le programme linéaire écrit sous forme standard :*

$$\begin{cases} minc^t x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \\ c, x \in \mathbb{R}, A \in M_{m,n}(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

On appellé dual du (primal) le programme linéaire :

$$\begin{cases} \ maxb^t y \\ A^t y \leq c \\ x \geq 0 \\ y \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

1) Le dual du dual est le primal.

2) partir de la relation primale-duale définie pour la forme standard, il est possible de retrouver le programme dual de tous les programmes linéaires non formulés sous cette forme.

3) les variables du dual sont en bijection avec les contraintes du primal.

4) les contraintes du dual sont en bijection avec les variables du primal.

Soit le probléme linéaire suivant, considéré comme étant le primal.

$$\begin{cases} min(x_1 + x_2) \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Le dual de ce programme s'écrira :

$$\begin{cases} maxy_2 \\ y_1 + y_2 \leq 1 \\ y_2 - y_1 \leq 1 \\ y_2 \leq 0 \\ y \in \mathbb{R}^n \} \end{cases}$$

Exemple soit le programme suivant :

$$\begin{cases} minc^t x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

la dual de ce programme est :

$$\begin{cases} max b^t y \\ A^t y \leq c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Proposition 1 *(dualité faible)*
Si x est primal réalisable et y est dual réalisable alors $b^t y \leq c^t x$

Proposition 2 *(dualité forte)*
Si x est optimal pour le programme primal, alors le programme dual a une solution optimal y telle que $b^t y = c^t x$

Proposition 3 *Soit x primal réalisable et y dual réalisable avec $s = c - A^t y$, alors on a : $c^t x - b^t y = s^t x$*

Remarque :
Si l'objectif d'un probléme (dual ou primal) n'est pas borné, l'autre probléme n'admet pas de solution réalisabl

1.4.2 Application de la dualité

terminons ce paragraphe en signalant l'importance de la dualité aussi bien sur le plan pratique que théorique. en effet, en plus de l'éclairage qu'elle apporte sur certains points d'ordre théorique permettant de mieux caractériser les propriétés du probléme donné, les résultats précé dents montrent qu'en résolvant un programme linéaire primal, on résout en même temps son dual.

1.5 Méthode du simplexe ou methode de G. B Dantzing

Cette méthode est la plus souple et la plus universelle ; elle s'applique á la résolution de tout programme linéaire. Mais elle est plus compliquée et exige plus de temps. Le fondement mathématique de cette méthode garantit une grande précision des résultats. Les fondements de la méthode simplexe ont été énoncés en 1949 et publiés en 1959 par G. B. Dantzig.

La méthode du simplexe consiste en une suite d'étapes : On trouve d'abord une solution de base, puis on regarde si cette solution est optimale. Si elle ne l'est pas, on remplace une des variables de la base par une autre variable. On obtient ainsi une nouvelle base. Si ce n'est pas encore une solution optimale, on recommence, et ainsi de suite, tant que cela est nécessaire.

Par conséquent, le probléme se réduit trouver une solution de base quelconque et á améliorer cette solution, tant qu'elle n'est pas optimale.

En un nombre ôni d'itérations, on détermine ainsi la solution optimale parmi les solutions de base. Deux autres cas peuvent aussi se présenter : la fonction objective prend des valeurs inônies ou bien les contraintes sont incompatibles L'étude des problémes de programmation linéaires par la méthode du simplexe fait l'objet du prochain paragraphe. Les étape de l'algorithme :

Pour pouvoir appliquer l'algorithme du simplexe il est nécessaire de connaótre une base réalisable. On suppose donc que l'on dispose d'une telle base de départ. A itération$k$, soit B la base courante, J l'ensemble des indices de B, ceux-ci sont placés dans un vecteur ligne noté (col(1) ; col(2) ;. . . ; col(m)) :

Les différentes étapes sont les suivantes :
`Étape1` : calculer :
B^{-1} (la matrice inverse de B)
$\pi = cjB^{-1}$ (les multiplicateurs du simplexe)
`Étape2` : Calculer : $c_{\overline{J}} = c_J - \pi R$ (les coûts réduits)
`Étape3` : Déterminer s de $\overline{J}$ tel que : $c_s = max_{j \in J} cj$
S'il existe plusieurs indices, choisir le plus petit.
Si $C' \leq 0$; Arrêt : l'optimum est atteint.
Sinon
`Étape4` : calculer la colonne A'_s par la formule :$A'_s = B^{-1} A_s$.
Étape5 : Déterminer l'ensemble $I = \{i / a'_{is} > 0\}$
Si $I = \Phi$; Arrêt : optimum non borné.
Sinon :
`Étape6` : calculer b' par la formule $b' = B^{-1} b$
`Étape7` : déterminer l'indice r tel que : $\frac{b'_r}{a_{rs}} = Min_{i \in I} \{\frac{b'_s}{a_{is}}\}$
S'ils existent plusieurs indices qui vérifient la condition choisir le plus petit.
`Étape8` : Mise á jour de la base :
$J' = J \cup \{s\} - col(r), col(r) = s$
la colonne dont l'indice est $col(r) = s$ est remplacée par la colonne A^s.
`Étape9` : retourner á étape 1.
Exemple :Considérons le programme linéaire :

$$\begin{cases} MaxZ = 4x_1 + 5x_2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 7 \qquad \text{(p)} \\ x_2 + x_3 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Écrit sous forme canonique par rapport á la base réalisable dont les colonnes forment l'ensemble $J = \{3; 4; 5\}$ et on a col(l) = 3 , col(2) = 4, col(3) = 5 La solution de base est : $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 8, x_4 = 7, x_5 = 3$. Les conditions d'application du théorèeme d'optimalitée ne sont pas réunies puisque $c_1 = 4 > 0; c_2 = 5 > 0$ On voit qu'on a intérêt á augmenter x2 (puisque c2=5>c1=4) pour faire croître z , donc : s = 2. Le domaine de variation de x_2 est :

$$D = \{x_2 / 0 \leq x_2 \leq Min[\frac{8}{1}, \frac{7}{2}, \frac{3}{1}]\}$$

$$D = \{x_2 / 0 \leq x_2 \leq 3\}$$

C'est la troisième contrainte :

$$\frac{b_3}{a_{321}} = Min_{i \in I} \{b_i / a_{i2}\}$$

qui limite l'augmentation x_2, la2^{eme} colonne entre dans la base et la 5^{eme} en sort.

La nouvelle base est alors formée par les colonnes 3 ; 4 et 2 c'est à dire que : $J' = J \bigcup \{2\} - \{5\} = \{3, 4, 2\} et col(3) = 2$ Écrivons (P) sous forme canonique par rapport àJ'.

$$\begin{cases} MaxZ = 4x_1 - 5x_5 + 15 \\ 2x_1 + x_3 - x_5 = 5 \\ x_1 + x_4 - 2x_5 = 1 \qquad\qquad x_i \geq 0 \text{ (p1)} \\ x_2 + x_5 = 3 \end{cases}$$

La base $B^{'}$ dont les colonnes sont 3; 4 et 2 n'est pas optimale puisque $c_1 = 4 > 0$ et s = 1. Cherchons l'indice d'entrée r :

$$Min_{i\in I}\{\frac{b_i}{a_{is}}\} = Min_{i\in I}\{\frac{b_i}{a_{i1}}\} = Min\{\frac{5}{2}, \frac{1}{1}\}$$

D'ùo r = 2

Par conséquent l'ensemble des indices des colonnes devient

$$J'' = J.\{1\} - \{col(2)\} = \{3, 1, 2\} et col(2) = 1$$

Écrivons le probléme(P) sous forme canonique par rapport à la nouvelle base dont les colonnes sont 3; 1 et 2.

$$\begin{cases} MaxZ = -4x_4 + 3x_5 + 19 \\ x_3 - 2x_1 + 3x_5 = 5 \\ x_1 + x_4 - 2x_5 = 1 & \qquad x_i \geq 0 \text{ (p2)} \\ x_2 + x_5 = 3 \end{cases}$$

La base n 'est pas optimale puisque $c_5 = 3 > 0$. On applique le même processus l'indice r :

$$Min_{i\in I}\{\frac{b_i}{a_{is}}\} = Min_{i\in I}\{\frac{b_i}{a_{is}}\} = Min\{\frac{3}{3}, \frac{3}{6}\} = \frac{b_1}{a_{15}}$$

donc r=1 et par conséquent la lere colonne de la base sort (puisque r=1), et la colonne $A_s = A_5$ entre dans la base. L'ensemble des indices devient alors :

$$J''' = \{5, 1, 2\} et col(1) = 5$$

La base en question est alors constituée des colonnes 5; 1 et2 Écrivons encore une fois (P) sous forme canonique par rapport á cette nouvelle base.

$$\begin{cases} MaxZ = -x_3 - 2x_4 + 22 \\ \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 = 3 & \qquad \text{(p3)} \\ x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

On a :

$$Z = 22 + 0x_1 + 0x_2 - x_3 - 2x_4 + 0x_5 = -x_3 - 2x_4 + 22$$

cest á dire que :

$$c_1 = c_2 = c_5 = 0, c_3 = -1, c_4 = -2$$

Le vecteur coût est nègatif ou nul par consèquent la base courante est optimale. La solution optimale est :

$$X^* = (3, 2, 0, 0, 1) et Z^* = 22$$

Chapitre 2

Optimisation combinatoir

2.1 Introduction

Un probléme d'optimisation combinatoir, consiste minimiser une fonction f de domaine S fni. C'est-à-dire trouver un minimum selon le contexte, f est la fonction de coût, la fonction économique ou la fonction objectif.

2.1.1 Formulations mathématique

Fonction Objectif

Maximiser ou minimiser

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n$$

Contraints

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n(\leq, =, \geq)b_1 \\ a_{21}x_1 +_{22} ax_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n(\leq, =, \geq)b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n(\leq, =, \geq)b_m \end{cases} \quad (1)$$

Contraintes de non-négativité

$X_j \geq 0; j = 1; 2; 3; \ldots; n$ avec X_j variables de décision (inconnues)
$a_{ij}; b_i; c_j$ paramètres du programme linéaire

2.2 Problèmes classiques d'optimisation combinatoire

Un problème d'optimisation consiste à chercher une instanciation d'un ensemble de variables soumises à des contraintes, de façon à maximiser ou minimiser un critère. Lorsque les domaines de va leurs des variables sont discrets, on parle alors des problèmes d'optimisation combinatoire. Nous présentons rapidement ici quatre problèmes classiques d'optimisation combinatoire : le problème d'affectation, le problème du voyageur de commerce et le problème d'ordonnancement.

2.2.1 Le problème d'affectation

Le problème connu dans la littèrature sous le nom de problème d'affectation est souvent prèsentè dans le cadre du scènario suivant ; n personnes doivent être affectèes à n travaux, chaque personne doivent affecter un travail (ou une tâche) et un seul, le coût de formation de la i éme personne lorsqu'elle est affectèe au j éme travail est c_{ij} Il s'agit d'affecter les personnes aux travaux de sorte que le coût total de formation soit minimum, ce problème peut se formuler comme un programme linèaire en variables bivalentes en posant :

$x_{ij} =$

$$\begin{cases} 1 & \text{si la } i \text{ éme personne est affectèe à la } j \text{ éme tâche.} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Formulation du problème d'affectation

$$minZ = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

s.c

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$$

$$i = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$$

$$j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, n$$

Les n premiéres contraintes du problème expriment que chaque tâche est prise en charge par un personne exactement ; les n contraintes suivantes expriment que chaque personne s'est vue affecter à un travail.

Propriété

la relaxation linéaire du problème est toujours entière.

-exemple(Méthode hongroise) :

Un père propose 3 travaux à ses enfants : tondre la pelouse, peindre le garage et laver la voiture. Il demande à chaque enfant combien il voudrait être payé pour chaque travail.

	tondre	piendre	laver
john	15	10	9
karen	9	15	10
terri	10	12	8

- Sélectionner le prix minimum dans chaque ligne.

	tondre	piendre	laver	
john	15	10	9	9
karen	9	15	10	9
terri	10	12	8	8

-Soustraire ce prix de chaque ligne et sélectionner le prix minimum dans chaque colonne.

	tondre	piendre	laver	
john	6	1	0	9
karen	0	6	1	9
terri	2	4	0	8
	0	1	0	

-Soustraire ce prix de chaque colonne.

	tondre	piendre	laver	
john	6	0	0	9
karen	0	5	1	9
terri	2	3	0	8
	0	1	0	

- Les "0" en bleu donnent une affectation admissible optimale.
- L'optimalité est assurée par la valeur des variables duales (en rouge).
- Nombre d'opérations :$O(n^2)$
- Il arrive que les valeurs nulles du tableau ne permettent pas de trouver de solution admissible.

1	4	6	3
6	7	10	9
4	5	11	7
8	7	8	5

0	3	2	2	1
2	0	0	2	7
0	1	4	3	4
3	2	0	0	5
0	0	3	0	

-Sélectionner un nombre minimum de lignes et colonnes couvrant tous les 0.

0	3	2	2	1
2	0	0	0	7
0	1	4	3	4
3	2	0	0	5
0	0	3	0	

-Sélectionner le plus petit élément non couvert, le soustraire à tous les éléments non couverts et l'ajouter aux intersections

0	2	1	1	2
3	0	0	2	7
0	0	3	2	5
4	2	0	0	5
-1	0	3	0	

- Répéter jusqu'à trouver une solution admissible.

2.2.2 Problème d'ordonnancement

Le problème d'ordonnancement consiste à séquencer et placer dans le temps un ensemble d'activités (entités élémentaires de travail), compte tenu de contraintes temporelles (délais, contraintes d'en chaînement,...) et de contraintes portant sur l'utilisation et la disponibilité des ressources requises par les activités. Posé ainsi, il s'agit d'un probléme de satisfaction de contraintes qui trouve ses applications dans domaines (gestion de projets, ateliers de production,...) et qui fait l'objet de travaux de recherche d'un point de vue de l'aide à la décision, notamment par des approches par contraintes. Dans un contexte d'optimisation, on cherche de plus à minimiser (ou maximiser) un critère, comme par exemple la durée totale de réalisation des activités (minimisation du Mazepa).

2.2.3 Le problème du voyageur de commerce (pvc)

Le problème du voyageur de commerce, étudie de puis le 19 siècle, est l'un des plus connus dans le domaine de la recherche opérationnelle. Jouez à trouver le meilleur parcours possible...et découvrez différentes méthodes informatique proposes pour ré soudre ce problème :

- mèthode de rèsolution du pvc : Un voyageur de commerce doit visiter un certain nombre de ville.

- il doit visiter chaque ville une et une seule fois étant donnè des distances entre chaque paire de villes, il doit minimiser la distance totale par courue.

- On peut reprèsenter ce problème par un graphe : Chaque ville correspond à un sommet et chaque arête à une paire de villes pouvant être visitées l'une à la suite de l'autre. Le problème correspond à trouver un tour complet (circuit Hamiltonien) dans ce graphe qui minimise la somme des distances.

Chapitre 3

Probléme de transport

3.1 Introduction

C'est en 1941 que Frank L. Hitchcock a formulé pour la premiére fois le probléme de transport, qui consiste á minimiser le coût de transport total d'un plan d'expédition. Le fait de minimiser à la fois la distance totale et le coût de transport fait partie de la théorie des flux de réseaux ; il ne sera pas abordé ici. Le problème de transport "classique" est en fait un cas particulier d'un probléme de flux de réseaux.

3.2 Formulation du probléme de transport

On peut d'écrire un probléme de transport de la façon suivante. Une quantité donnée d'un produit uniforme est disponible à chacune des origines (par exemple des dépôts). Il s'agit d'en envoyer des quantités spécifiées á chacune des destinations (par exemple des points de vente). Onconnaîtlecoût de transport d'une unité de l'une des origines vers l'une des destinations. En supposant qu'il est possible d'expédier des produits depuis n'importe quelle origine vers n'importe quelle destination, il s'agit de déterminer le coût de transport minimum des origines vers les points de destination.

Nous supposerons qu'il y a m origines et n destinations. La variable x_{ij} représentera le nombre d'unités expédiées de l'origine i vers la destination j . $x_{ij} \geq 0$ pour tout i, j . Pour chaque origine i donnée, il y a n valeurs de j possibles ; cela implique qu'il y a $(m \times n)$ x_{ij} diférents.

On note par a_i la quantité disponible du produit á l'origine i , et par b_j la quantité requise á la destination j .

3.3 Équations

Le total reçu par chacune des destinations est la somme des quantités reçues de chaque origine. Les besoins des destinations sont satisfaits si :

$$\{ \ \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \quad (1)$$

Si c_{ij} est le coût de transport d'une unité de l'origine i vers la destination j , exprimé en francs, alors le coût total de l'expédition se traduit par l'équation :

$$\begin{cases} Z = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ = (c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n}) + \ldots + (c_{m1}x_{m1} + \ldots + c_{mn}x_{mn}) \quad (2) \end{cases}$$

Dans le cas d'un probléme de transport équilibré selon l'équation (3.1), nous devons donc résoudre le programme linéaire :

$$Minimiser Z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

sous les contraintes :

$$\begin{array}{lll} x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \ldots, m & & \text{et} \quad j = 1 \ldots, n \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & i = 1, \ldots, m & \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & j = 1, \ldots, n & \end{array}$$

Outre les $n \times m$ contraintes de non négativité, le premier ensemble de m contraintes garantit que la quantité envoyée depuis le dépôt i est égale au stock disponible á cette origine. L'ensemble de n contraintes garantit que chaque destination recoit la quantité demandée.

Ceci est un probléme de programmation linéaire avec $m \times n$ variables et $m + n$ contraintes.

Nous ne faisons pas la restriction $a_i, b_j \geq 0$ car les variables x_{ij} son ≥ 0. Nous admettons cependant que les coûts c_{ij} sont négatifs. Ainsi, notre probléme de transport peut aussi représenter des problémes de maximisation car :

$$Maximiser Z = \sum_{i,j} c_{ij}x_{ij}$$

est équivalent á :

$$Minimiser Z = \sum_{i,j} (-c_{ij})x_{ij}$$

Notons encore que le probléme de transport posséde toujours une solution réalisable, le lecteur pourra vérifier qu'elle est donnée par :

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{T} \forall i et j$$

oú

$$T = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Les contraintes sont celles décrites ci-dessus. En outre, á cause de la non négativité, chaque variable est bornée vers le haut et vers le bas

$$0 \leq x_{ij} \leq min\{a_i; b_j\}$$

Ainsi, le probléme ne peut pas être illimité et une solution optimale doit exister.

3.4 Exemple illustratif

Une fabrique de conserves expédie des caisses vers des dépôts. Nous voulons que le programme d'expédition des caisses minimise le coût de transport total des usines vers les dépôts. Pour simplifier, nous supposerons qu'il y a deux usines I et II et trois dépôts A, B et C. Les disponibilités en caisses dans les usines a_i et les besoins des dépôts b_j sont représentées dans le tableau 3.1.

a_i	b_j
350 caisses à l'usine I	300 caisses au dépôt A
550 caisses à l'usine II	300 caisses au dépôt B
	300 caisses au dépôt C

Table 3.1 – Disponibilités des usines

On voit tout de suite que la condition (3.1) est vérifié, puisque :

$$\sum_{i=1}^{2} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j = 900$$

Le coût d'expédition, par caisse, entre chaque usine et chaque dépôt est consigné dans le tableau 3.2 ci-dessous.

Origines	Destinations		
	A	B	C
I	25	17	16
II	24	18	14

Table 3.2 – Coûts d'expédition (en francs par caisse

Le problème consiste à déterminer le nombre de caisses que chacune des usines doit expédier vers chacun des dépôts de facon á ce que le coût de transport total soit le plus faible possible. La fonction objectif á minimiser est :

$$Minimiser Z = 25x_{11} + 17x_{12} + 16x_{13} + 24x_{21} + 18x_{22} + 14x_{23}$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 350 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 550 \quad \text{(dues aux origines)} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 300 \\ x_{12} + x_{22} = 300 \\ x_{13} + x_{23} = 300 \quad \text{(dues aux destinations)} \end{cases}$$

3.5 Résolution du probléme

Le tableau .3 du probléme de transport sert á exposer tous les éléments essentiels, constantes et variables, d'un probléme de transport. Chaque ligne, á l'exception de la derniére, est associée á une origine, chaque colonne, á l'exception de la derniére, á une destination. Le coût unitaire c_{ij} est entré dans la partie supérieure gauche de la case, ou cellule, qui se trouve á l'intersection de la ligne i et de la colonne j . Par la suite, nous nous référerons á cette cellule $(i; j)$. On peut représenter une solution réalisable donnée au probléme de transport en écrivant la valeur de chaque variable x_{ij} dans la partie inférieure droite de la cellule $(i; j)$. Nous déciderons par convention que, lorsqu'une solution réalisable de base est exposée dans un tableau de transport, la valeur d'un x_{ij} particulier n'y est effectivement rentrée que si et seulement si x_{ij} est dans la base. Comme les variables non-basiques (dont la valeur est zéro) ne sont pas montrées dans le tableau, l'apparition d'un ou de plusieurs zéros indique que la base est dégénérée. Finalement, les différentes offres et demandes sont respectivement inscrites dans la colonne la plus á droite et la ligne du bas. Ainsi, on peut tout de suite déterminer si une solution réalisable de base satisfait toutes les contraintes en sommant tous les x_{ij} sur les lignes et les colonnes. Les éléments $\hat{u}_i$ et $\hat{v}_i$

seront étudiés plus tard.

	$\hat{v}_1$	$\hat{v}_2$	...	$\hat{v}_n$	
$\hat{u}_1$	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1
$\hat{u}_2$	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
$\hat{u}_m$	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mm}	a_m
	b_1	b_2	...	b_n	

TABLE 3.3 – Modéle du tableau de transport

Définition 2 *Uneséquence de quatre cellules différentes, ou plus, dans un tableau de transport est appelée une boucle, si elle posséde les propriétés suivantes :*

- *deux cellules consécutives doivent se trouver soit sur la même ligne, soit sur la même colonne.*
- *il ne doit pas y avoir trois cellules consécutives dans la même ligne ou la même colonne.*

3.6 Boucles et dépendances linéaires

Dans cette section, nous allons établir les fondements théoriques du développement de l'algorithme de transport et de l'algorithme de Stepping Stone qui en dérive. Comme cela deviendra évident plus tard, cet algorithme est essentiellement une adaptation de la méthode du simplexe, qui utilise la notion de boucle pour effectuer des pivots directement sur le tableau de transport. Nous remarquons premièrement qu'un ensemble S de cellules d'un tableau de transport est dit contenant une boucle si les cellules de S ,ouunsous ensemble parmi elles, peuvent être rangées de sorte à former une boucle. Voyons le théorème .1.

Théorème 1 *Soit S représentant un ensemble de colonnes de la matrice A d'un problème de transport. Les colonnes de S sont linéairement dép endantes si et seulement si leurs cellules correspondantes dans le tableau de transport contiennent une boucle. Il découle du théorème .1 qu'une solution contenant $m + n - 1$ variables réelles est une solution réalisable si et seulement si ses cellules correspondantes dans le tableau de transport ne contiennent pas de boucle.*

Théorème 2 *Soit les colonnes $b_1, \ldots, b_{m+n11}$, constituant une base réalisable pour le problème de transport. Dans la représentation d'une colonne non basique a_{pq} comme combinaison linéaire des vecteurs de base :*

$$a_{pq} = \sum_{k=1}^{m+n-1} Y_{kpq} b_k$$

chaque élément Y est -1, 0 ou 1.

Dans l'exposé du théorème, le symbole b_k représente la k^{eme} colonne dans la base, qui est bien sûr une des colonnes a_{ij} de la matrice des contraintes.

3.7 Recherche de la solution réalisable de base initiale

3.7.1 Méthode de la matrice minimale (Minimum Entry Method)

`Étape 1` : Trouver la cellule $(p; q)$, telle que c_{pq} est le plus petit coût de tout le tableau

`Étape 2` : Envoyer le maximum d'unités pour la cellule $(p; q)$.Ainsi x_{pq} est initialisé comme étant le min$\{a_p; b_q\}$. Ajuster ensuite $a_p et b_q$,entenantcompte du montant x_{pq} à expédier. Exprimons cette phrase à l'aide d'inégalités :

$$x_{pq} = min\{a_p, b_q\}$$

$$a_p^{'} = a_p - x_{pq}$$

$$b_q^{'} = b_q - x_{pq}$$

Entourer(ou mettre en évidence d'une autre manière) le coût c_{pq} Àla fin de cette étape, soit $a_p^{'}$,soit $b_q^{'}$ estnul,soit les deux.

`Étape 3` :

(a) Si $a_p^{'} = 0$ et $b_q^{'} \geq 0$,ce la signifie que l'origine p a été "vidée". Il faut donc éliminer la ligne p du tableau.

(b) Si $b_q^{'} = 0$ et $a_p^{'} > 0$, cela signifie que la destination q est entièrement satisfaite et qu'il reste des marchandises dans le dépôt p.Ilfaut donc éliminer la colonne q du tableau.

(c) Si $a_p^{'} = 0$ et $b_q^{'} = 0$, nous nous trouvons dans un cas dégénéré. On élimine alors la ligne p, à moins qu'elle ne soit la seule ligne restante du tableau ; auquel cas il faut éliminer la colonne q.

`Étape 4` :

(a) S'il reste un total de deux ou plusieurs lignes et colonnes non encore éliminées, reprendre à l'étape 1.

(b) S'il ne reste qu'une ligne non éliminée, la solution réalisable de base initiale est déterminée par les cellules entourées. Appliquons cette méthode à notre problème de référence. Le tableau de transport initial est :

origines	destinations			offre
	1	2	3	
1	25	17	16	350
2	24	18	14	550
demande	300	300	300	900

Table 3.4 – Tableau de transport initial

Pour des raisons pratiques dues à l'utilisation d'un traitement de texte, nous utiliserons les notations suivantes pour la suite de ce travail :

- ♣ à gauche d'une ligne ou en haut d'une colonne pour montrer que cette ligne ou cette colonne a été éliminée ;
- □ montrer qu'une cellule $(p;q)$ fait partie de la base ;
- ♭ pour mettre en évidence la nouvelle valeur de a_p ou b_q.

`Étape 1` : La cellule $(p;q)$ choisie est la cellule (2 ;3) dont le coût (14) est le plus petit de l'ensemble du tableau.

`Étape 2` : Calculons x_{23} , $a_2^{'}$et $b_3^{'}$.

$$x_{23} = min\{550; 300\} = 300$$

$$a_2^{'} = a_2 - x_{23} = 550 - 300 = 250$$

$$b_2^{'} = b_3 - x_{23} = 300 - 300 = 0$$

`Étape 3` : Comme $a_2^{'} = 250$ et $b_3^{'} = 0$, il faut éliminer la colonne 3.

`Étape 4` : Ilreste deux lignes (1et2) et deux colonnes (1et2),il faut donc choisir un nouvel x_{pq} qui entrera à son tour dans la solution réalisable de base initiale. Rédigeons d'abord le tableau après cette première itération.

origines	destinations			offre
	1	2	3 ♣	
1	25	17	16	350
2	24	18	14 □ 300	550 ♭ 250
demande	300	300	300 ♭ 0	900

Table 3.5 – Tableau après la première itération

Reprenons nos calculs à l'étape (1) avec un tableau réduit aux lignes 1 et 2 et aux colonnes 1 et 2.

`Étape 1` : Le coût minimum sur ce tableau est 17, soit celui de la cellule (1 ;2) ; on va donc initialiser x_{12}

`Étape 2` :

$$x_{12} = min\{a_1; b_2\} = min\{350; 300\} = 300$$

$$a_1^{'} = a_1 - x_{12} = 350 - 300 = 50$$

$$b_2^{'} = b_1 - x_{12} = 300 - 300 = 0$$

origines	destinations			offre
	1	2 ♣	3 ♣	
1	25	17 □ 300	16	350 ♭ 50
2	24	18	14 □ 300	550 ♭ 250
demande	300	300	300 ♭ 0	900

Table 3.6 – tableau apré l'étape 2

`Étape 3` : $a_1^{'} = 50$ et $b_2^{'} = 0$, il faut donc éliminer la colonne 2. Comme il reste deux lignes et une colonne, nous n'avons pas terminé, nous cherchons alors le troisième x_{pq} à entrer dans la base.

`Étape 1` : Le coût minimum sur la ligne 1, la ligne 2 et la colonne 1 est 24, soit le coût de la cellule (2 ;1).

`Étape 2` :

$$x_{21} = min\{a_2; b_1\} = min\{250; 300\} = 250$$

$$a_2^{'} = a_2 - x_{21} = 250 - 250 = 0$$

$$b_1^{'} = b_1 - x_{21} = 300 - 250 = 50$$

`Étape 3` : $a_2^{'} = 0$ et $b_1^{'} = 50$, on élimine donc la ligne 2.

`Étape 4` : Il reste une ligne (1) et une colonne (1), il faut donc procéder à une quatrième itération.

origines	destinations			offre
	1	2 ♣	3 ♣	
1	25	17 □ 300	16	350 ♭ 50
2 ♣	24	18	14 □ 300	550 ♭ 250
demande	300 ♭50	300	300	900

Table 3.7 – tableau aprés la troisiéme itération

`Étape 1` : Le seul x_{pq} qui peut encore entrer dans la base est x_{11}.
`Étape 2` :

$$x_{11} = min\{a_1; b_1\} = min\{50; 50\} = 50$$
$$a_1^{'} = a_1 - x_{11} = 50 - 50 = 0$$
$$b_1^{'} = b_1 - x_{11} = 50 - 50 = 0$$

`Étape 3` :$a_1^{'} = 0$ et $b_1^{'} = 0$, la ligne 1 est la dernière des lignes, on élimine donc la colonne 1.
`Étape 4` : Il ne reste que la ligne 1, nous avons donc terminé !

origines	destinations 1	2 ♣	3 ♣	offre
1 ♣	25 □50	17 □ 300	16	350 ♭ 50
2 ♣	24 □250	18	14 □ 300	550 ♭
demande	300 ♭0	300 ♭ 0	300 ♭ 0	900

TABLE 3.8 – tableau aprés la quatrieme itération

À l'aide de cet exemple, nous pouvons vérifier les affirmations formulées précédemment. Tout d'abord, en raison de la redondance, on trouve une

solution réalisable de base initiale avec $(m + n - 1)$ variables, ici 2+3 - 1=4. Ensuite, à chaque itération, une seule contrainte est satisfaite, ce qui se voit facilement sur le tableau. La dernière contrainte est automatiquement satisfaite à la dernière itération ; donc, si après la quatrième itération l'une des origines ou des destinations avait eu une valeur non-nulle, cela aurait signifié qu'il n'existe pas de solution réalisable. Nous pouvons maintenant calculer le coût de transport total de ce plan d'expédition :

$$Z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} = 25(50) + 17(300) + 24(250) + 14(300) = 16550$$

Il ne s'agit pas encore du coût minimum ; il sera déterminé lors de la recherche de la solution réalisable optimale.

3.7.2 Méthode du coin nord-ouest (Northwest Corner Rule)

De même que la méthode que nous verrons plus loin, cette méthode ne diffère de la précédente que par le critère appliqué à l'étape (1), exposée ici, les étapes (2), (3) et (4) restant les mêmes. Nous présenterons les calculs complets des diférentes itérations, ainsi que les tableaux obtenus. De cette manière, le lecteur pourra juger des diférences entre chacune des méthodes.

`Étape 1` : Localiser la cellule $(p; q)$ qui se trouve dans le coin nord-ouest, c'està-dire en haut à gauche, de la partie non-éliminée du tableau de transport. Voyons immédiatement à l'aide de notre exemple quels sont les résultats obtenus. Nous repartons du tableau initial.

origines	destinations			offre
	1	2	3	
1	25	17	16	350
2	24	18	14	550
demande	300	300	300	900

TABLE 3.9 – tableau initial

`Étape 2` : Le tableau restant se compose de deux lignes et de trois colonnes ; son coin nord-ouest est la cellule (1 ;1), x_{11} entre donc dans la base.

$$x_{11} = min\{a_1; b_1\} = min\{350; 300\} = 300$$
$$a_1^{'} = a_1 - x_{11} = 350 - 300 = 50$$
$$b_1^{'} = b_1 - x_{11} = 300 - 300 = 0$$

`Étape 3` : $a_1^{'} = 50$ et $b_1^{'} = 0$, on élimine donc la colonne 1.

`Étape 4` : Il nous reste deux lignes et deux colonnes, nous n'avons donc pas terminé.

origines	destinations			offre
	1 ♣	2	3	
1	25 $\square$300	17	16	350 $\flat$ 50
2	24	18	14	550
demande	300 $\flat$50	300	300	900

TABLE 3.10 – tableau aprés la premiére itération

`Étape 1` : Le tableau restant se compose des lignes 1 et 2 ainsi que des colonnes 2 et 3 ; son coin nord-ouest est donc le cellule (1 ;2).

`Étape 2` :

$$x_{12} = min\{a_1; b_2\} = min\{50; 300\} = 50$$
$$a_1^{'} = a_1 - x_{12} = 50 - 50 = 0$$
$$b_2^{'} = b_2 - x_{12} = 300 - 50 = 250$$

`Étape 3` : $a_1^{'} = 0$ et $b_2^{'} = 250$, on élimine donc la ligne 1.

`Étape 4` : Il reste une ligne et deux colonnes, il faut donc reprendre la démarche à l'étape (1) afin d'opérer une troisième itération.

origines	destinations			offre
	1 ♣	2	3	
1 ♣	25 ☐ 300	17 ☐ 50	16	350 ♭ 0
2	24	18	14	550
demande	300 ♭ 0	300 ♭ 250	300	900

TABLE 3.11 – tableau aprés la deuxiéme itération

`Étape 1` : Le tableau est maintenant constitué des colonnes 2 et 3 et de la ligne 2, son coin nord-ouest est donc la cellule (2 ;2).

Étape 2 :

$$x_{22} = min\{a_2; b_2\} = min\{550; 250\} = 250$$
$$a_2^{'} = a_2 - x_{22} = 550 - 250 = 300$$
$$b_2^{'} = b_2 - x_{22} = 250 - 250 = 0$$

`Étape 3` :$a_2^{'} = 300$ et $b_2^{'} = 0$, on élimine donc la colonne 2.

`Étape 4` : Comme il reste une ligne et une colonne, une quatrième itération est nécessaire.

origines	destinations			offre
	1 ♣	2 ♣	3	
1 ♣	25 ☐ 300	17 ☐ 50	16	350 ♭ 0
2	24	18 ☐ 250	14	550 ♭ 300
demande	300 ♭50	300 ♭ 0	300	900

TABLE 3.12 – tableau aprés la troisiéme itération

`Étape 1` : Il ne reste que la ligne 2 et la colonne 3, donc le coin nord-ouest est la cellule (2 ;3).

`Étape 2` :

$$x_{23} = min\{a_2; b_3\} = min\{300; 300\} = 300$$
$$a_2^{'} = a_2 - x_{23} = 300 - 300 = 0$$
$$b_3^{'} = b_3 - x_{23} = 300 - 300 = 0$$

`Étape 3` : $a_2^{'} = 0$ et $b_3^{'} = 0$, la ligne 2 est la dernière ligne, on élimine donc la colonne 3.

`Étape 4` : Il ne reste que la ligne 2, la solution réalisable de base initiale est trouvée.

origines	destinations			offre
	1 ♣	2 ♣	3 ♣	
1 ♣	25 ☐ 300	17 ☐ 50	16	350 ♭ 0
2	24	18 ☐ 250	14 ☐ 300	550 ♭ 0
demande	300 ♭0	300 ♭ 0	300 ♭ 0	900

TABLE 3.13 – tableau aprés la quatriéme itération

Nous pouvons calculer le coût de transport total de ce plan d'expédition

$$z = 25(300) + 17(50) + 18(250) + 14(300) = 17050$$

On voit tout de suite que la solution trouvée n'est pas optimale. En effet, le coût total de ce plan de transport est plus élevé que celui trouvé à l'aide de la méthode de la matrice minimale, qui était de 16 550.

3.7.3 Méthode de Vogel (Vogel's Approximation Méthod)

Cette méthode est assez proche de celle dite de la matrice minimale, mais elle est un peu plus élaborée. Le critère de choix de x_{pq} est en apparence un peu plus compliqué, mais il est par contre efficace. Le reste de la démarche ne change pas comme nous lŠavions déjà signalé ci-dessus. Ce critère est le suivant : pour chaque ligne $(i = 1, ..., m)$ restant dans le tableau, trouver dans des colonnes non éliminées le plus petit coût et le second plus petit ; calculer leur diférence. Procéder de même pour les colonnes. On choisit ensuite la cellule $(p; q)$,dontle coût est minimum dans la ligne ou la colonne déterminée par une diférence de coûts maximum. Si des lignes ou des colonnes ont une diférence de coûts égale, alors on choisit la ligne ou la colonne en utilisant lŠordre de préférence suivant :

ligne 1, ligne 2,..., ligne m, colonne 1, colonne 2,..., colonne n. Voyons, itération par itération, les résultats obtenus pour notre exemple. Comme précédemment nous présenterons des tableaux à chacune des itérations, en repartant comme il se doit d'un tableau vide.

origines	destinations			offre
	1	2	3	
1	25	17	16	350
2	24	18	14	550
demande	300	300	300	900

TABLE 3.14 – tableau initial

`Étape 1` : Pour la ligne 1, les deux coûts les plus bas sont 16 et 17, leur différence est 1. Pour la ligne 2, on prend 14 et 18, la différence est 4. Pour la colonne 1, la différence est 1. Pour la colonne 2, la différence est 1. Pour la colonne 3, la différence est 2. La différence maximale est celle de la ligne 2 (elle est égale à 4), on cherche donc sur la ligne 2 quel est le coût minimal. Il s'agit de 14, c_{23}. Alors $x_{pq} = x_{23}$

. `Étape 2` :

$$x_{23} = min\{a_2; b_3\} = min\{550; 300\} = 300$$

$$a_2^{'} = a_2 - x_{23} = 550 - 300 = 250$$

$$b_3^{'} = b_3 - x_{23} = 300 - 300 = 0$$

`Étape 3` : $a_2^{'} = 250$ et $b_3^{'} = 0$, il faut donc éliminer la colonne 3.

`Étape 4` : Il reste deux lignes (1et2) et deux colonnes (1et2),il faut donc choisir un nouveau x_{pq} qui entrera á son tour dans la solution réalisable de base initiale.

origines	destinations			offre
	1	2	3 $\clubsuit$	
1	25	17	16	350
2	24	18	14 $\square$ 300	550 $\flat$ 250
demande	300	300	300 $\flat$ 0	900

Table 3.15 – tableau aprés la premiére itération

Reprenons donc nos calculs à l'étape (1) avec un tableau réduit aux lignes 1 et 2 et aux colonnes 1 et 2. `Étape 1` : La différence maximale est obtenue pour la ligne 1 ; elle est égale à 8. Le coût minimum de cette ligne est 17, celui de la cellule (1 ;2) ; on va donc initialiser x_{12}.

`Étape 2` :

$$x_{12} = min\{a_2; b_3\} = min\{550; 300\} = 300$$

$$a_2^{'} = a_2 - x_{12} = 350 - 300 = 50$$

$$b_3^{'} = b_3 - x_{12} = 300 - 300 = 0$$

origines	destinations			offre
	1	2 $\clubsuit$	3 $\clubsuit$	
1	25	17 $\square$ 300	16	350 $\flat$ 50
2	24	18	14 $\square$ 300	550 $\flat$ 250
demande	300	300	300	900

Table 3.16 – Tableau aprés la deuxiéme itération

`Étape 3` : $a_2^{'} = 50$ et $b_3^{'} = 0$, il faut donc éliminer la colonne 2.

`Étape 4` : Comme il reste deux lignes et une colonne, nous n'avons pas terminé, on cherche alors le troisième x_{pq} à entrer dans la base. On revient à l'étape 1 pour la troisième itération.

`Étape 1` : $x_{pq} = x_{11}$ entre dans la base, car la différence de la première ligne est 25, celle de la deuxième ligne 24 et celle de la première colonne 1.

`Étape 2` :

$$x_{11} = min\{a_1; b_1\} = min\{50; 300\} = 50$$

$$a_1^{'} = a_1 - x_{11} = 50 - 50 = 50$$

$$b_1^{'} = b_1 - x_{11} = 300 - 50 = 250$$

`Étape 3` : $a_1^{'} = 0$ et $b_1^{'} = 250$, on élimine donc la ligne 1.

`Étape 4` : Il reste la ligne 2 et la colonne 1, une quatrième itération est nécessaire.

origines	destinations 1	2	3	offre
		♣	♣	
1 ♣	25 ☐ 50	17 ☐ 300	16	350 ♭ 0
2	24	18	14 ☐ 300	550 ♭ 250
demande	300 ♭ 250	300 ♭ 0	300 ♭ 0	900

Table 3.17 – Tableau aprés la troisiém itération

On revient à l'étape 1 par la quatrième itération.

`Étape 1` : Il ne reste que la cellule (2 ;1) qui se trouve à la fois sur une ligne et une colonne non-éliminées.

`Étape 2` :

$$x_{21} = min\{a_2; b_1\} = min\{250; 250\} = 250$$

$$a_2^{'} = a_1 - x_{21} = 250 - 250 = 0$$

$$b_1^{'} = b_1 - x_{21} = 250 - 250 = 250$$

`Étape 3` :$a_2^{'} = 0$ et $b_1^{'} = 0$ on élimine donc la colonne 1, puisque la ligne 2 est la dernière des lignes.

`Étape 4` : Il reste une ligne (2), nous avons donc terminé.

	destinations			offre
origines	1 ♣	2 ♣	3 ♣	
1 ♣	25 □ 50	17 □ 300	16	350 ♭ 0
2	24 □ 250	18	14 □ 300	550 ♭ 0
demande	300 ♭ 0	300 ♭ 0	300 ♭ 0	900

TABLE 3.18 – Tableau aprés la quatrièm itération

Nous pouvons maintenant calculer le coût de transport total de ce plan d'expédition :

$$Z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$= 25(50) + 17(300) + 24(250) + 14(300) = 16550$$

On obtient par hasard la même solution réalisable de base initiale qu'avec la première méthode proposée. Ceci est à considérer comme une exception due aux dimensions réduites du problème choisi comme exemple.

Remarques

Les trois méthodes exposées ci-dessus sont équivalentes. Cependant, les résultats obtenus ne le sont pas. La méthode du coin nord-ouest est celle qui demande le moins de temps pour trouver la solution réalisable de base initiale, car son critère de choix à l'étape (1) est très simple. En revanche, elle ne donne en général pas une "bonne" solution de départ ; le coût total du plan de transport généré étant assez éloigné de l'optimum. On le remarque déjà pour notre petit problème. Les deux autres méthodes exigent davantage de temps de calcul, leur étape (1) étant plus longue. En revanche, elles donnent de meilleurs résultats. Le surcroît de temps nécessaire pour trouver la solution réalisable de base initiale est compensé par la suite, car on arrive plus rapidemen t à la solution optimale. On considère que la méthode Vogel donnée les meilleurs résultats.

3.8 Optimisation de la solution

Nous allons maintenant étudier un algorithme permettant de trouver la solution réalisable de base optimale. Cet algorithme utilise la propriètè des boucles.

Algorithme Stepping Stone

Comme dans la méthode du simplexe, il s'agit de faire entrer un nouvel élément, représenté par sa cellule $(p; r)$, dans le tableau, c'est-à-dire dans la base, et d'en faire sortir un autre.

À partir de la solution réalisable de base initiale que nous avons obtenue par la méthode de la matrice minimale, essayons de voir quel effet l'introduction de la cellule (2 ;2), puis de la cellule (1 ;3) dans la base peut avoir sur la fonction objectif. La quantité de marchandises "expédiée" pour cette cellule sera représentée par la lettre s. En partant du tableau final obtenu par la méthode de la matrice minimale (tableau 3.8), on introduit une nouvelle cellule avec un mon tant s. Il faudra faire les corrections suivantes sur la base initiale en parcourant la boucle (le sens de parcours peut se choisir de manière arbitraire) : soustraire s à la cellule adjacente sur la boucle ; additionner s à la cellule suivante sur la boucle. Continuer ainsi alternativement jusqu'à la fin de la boucle. Représentons sur un tableau simplifié l'introduction de la cellule (2 ;2).

origines	destinations 1	2	3	offre
1	25 50+s	17 300-s	16	350
2	24 250-s	18 s	14 300	550
demande	300	300	300	900

TABLE 3.19 – Introduction de la cellule (2 ;2)

Notons que toutes ces opérations ne changent en rien les montants disponibles aux origines ni les montants demandés aux destinations. Il est évident que s doit être positif, donc les expressions $250 - s$ et $300 - s$ doivent, toutes deux, être non-négatives. Ainsi, l'éventail des valeurs possibles pour s est $0 \leq s \leq 250$.

Voyons l'effet obtenu sur la fonction objectif ; z avait auparavant la valeur suivante :

$$z = 25(50) + 17(300) + 24(250) + 14(300)$$

Il vaut maintenant :

$$z = 25(50 + s) + 17(300 - s) + 24(250 - s) + 14(300) + 18s$$

La différence est donc :

$$18s - 24s + 25s - 17s = +2s$$

Ainsi, comme $s < 0$, z augmentera de $2s$; on n'améliore pas la solution initiale en introduisant la cellule (2 ;2) dans la base. Reprenons le même raisonnement pour l'introduction de la cellule (1 ;3) dans la base.

origines	destinations 1	2	3	offre
1	25 50-s	17 300	16 S	350
2	24 250+s	18	14 300-s	550
demande	300	300	300	900

TABLE 3.20 – Introduction de la cellule (1 ;3)

Les valeurs possibles pour s sont $0 \leq s \leq 50$.

L'effet sur z est $16s$ - $25s$ $+24s$ - $14s = s$.

Il n'est pas non plus optimal d'introduire la cellule (1 ;3) dans la base. Avant de formaliser ce que nous venons de voir, rappelons-nous briévement la notion de boucle, vue précédemment dans la section (3.5). Une boucle est définie par les deux critères suivants :

(a) deux cellules consécutives doivent se trouver soit sur la même ligne, soit sur la même colonne,

(b) trois cellules consécutives ne doivent pas se trouver dans la même ligne ou la même colonne.

De plus, la solution réalisable de base ne forme jamais une boucle ; il faut introduire une nouvelle cellule, qui, elle, permettra de former une boucle avec au moins trois cellules de base.

Définition 3 *:*

La valeur d'une boucle, ou évaluation d'une cellule, est déterminée de la façon suivante : soit $B(p;q)$ la boucle unique formée lorsque la cellule $(p;q)$ est introduite dans la base. En partant de $(p;q)$, dans l'une ou l'autre des directions, nous parcourons la boucle en nommant alternativement les cellules soit recevantes, soit cédantes, le tout en considérant $(p;q)$, comme cellule recevante. La valeur de $B(p;q)$,notée $v(p;q)$ est obtenue en additionnant les coûts des cellules recevantes et en soustrayant les coûts des cellules cédantes.

Dans notre exemple, la boucle associée à la cellule (2 ;2) est formée par les cellules (2 ;2), (2 ;1), (1 ;1) et (1 ;2). Elles sont nommées alternativement, recevante, cédante, recevante, cédante. Ainsi la valeur de cette boucle est :

$$v(2;2) = c_{22} - c_{21} + c_{11} - c_{12} = 18 - 24 + 25 - 17 = 2$$

Lorsqu'il faudra choisir les cellules candidates pour entrer dans la base, on sélectionnera celles dont la valeur de boucle associée est négative. Ensuite, on peut appliquer une démarche analogue à celle de la phase 2 du simplexe, à savoir choisir la cellule associée à la valeur de la boucle la plus négative. Voyons maintenant la méthode à suivre pour opérer le changement de base. Les seuls changements à faire concernent les cellules de la base incluses dans la boucle avec la cellule candidate sélectionnée.

Soit x'_{pq} , le montant à déterminer pour la cellule $(p;q)$ entrant dans la base, x_{ij} les montants des cellules dans la base avant le changement et x'_{ij} les montants après le changement de base.

Voici la méthode pour faire entrer une cellule candidate :

(a) $x'_{pq} = \min x_{ij}$ des cellules cédantes de la boucle associée à $(p;q)$;

(b) pour les cellules recevantes $x'_{ij} = x_{ij} + x'_{pq}$,

pour les cellules cédantes $x'_{ij} = x_{ij}$ - x'_{pq} ;

(c) la cellule $(p;q)$ est introduite dans la base et la cellule $(i;j)$ cédante avec x_{ij} minimum est sortie de la base.

Définition 4 *:*

Un problème de transport est dit non dégénéré si pour toute solution réalisable de base nous avons $x_{ij} > 0$ pour les m + n - 1 cellules de la base correspondante.

Le théorème 3.3 est à la base de l'algorithme Stepping Stone.

Théorème 3 *Supposons qu'une solution réalisable de base d'un problème de transport est telle que les valeurs de boucle associée à toutes les cellules hors de la base sont non-négatives. Alors la solution réalisable de base est optimale.*

Il est possible d'exprimer ce théorème différemment.

Théorème 4 *Soit une solution réalisable de base donnée d'un problème de transport non dégénéré. Supposons que pour l'une des cellules hors de la base, la valeur de boucle soit négative. Alors l'introduction d'une telle cellule dans la base permettra de former une nouvelle solution réalisable de base, pour laquelle le coût total de transport sera inférieur à celui de la solution actuelle, qui n'est donc pas optimale.*

Nous disposons maintenant de tous les éléments nécessaires pour formuler l'algorithme Stepping Stone.

`Étape 1` : Établir le tableau de transport initial.

`Étape 2` : Utiliser l'une des méthodes de calcul vues dans la section 3.7, pour obtenir une solution réalisable de base initiale.

`Étape 3` : Calculer les valeurs de boucles associées aux cellules hors de la base.

(a) Si toutes ces valeurs sont non-négatives, la procédure est achevée, la solution réalisable de base courante est optimale.

(b) Si, pour une cellule hors de la base, on obtient une valeur de boucle négative, celle-ci est candidate pour entrer dans la base ; passer alors à la phase 4.

`Étape 4` : Introduire une cellule candidate $(p;q)$ dans la base à l'aide de la méthode d'entrée. Reprendre ensuite à l'étape 3.

Appliquons cet algorithme à notre exemple.

`Étape 1` :

origines	destinations			offre
	1	2	3	
1	25	17	16	350
2	24	18	14	550
demande	300	300	300	900

TABLE 3.21 – Tableau de transport initial

`Étape 2` : À l'aide de la méthode du coin nord-ouest, nous avions obtenu la solution réalisable de base initiale suivante :

origines	destinations			offre
	1	2	3	
1	25 ☐ 300	17 ☐ 50	16 (3)	350
2	24 (-2)	18 ☐ 250	14 ☐ 300	550
demande	300	300	300	900

TABLE 3.22 – Solution réalisable de base initiale

`Étape 3` : Calculons maintenant les valeurs de boucles pour les cellules hors de la base (1 ;3) et (2 ;1).

$$v(1;3) = c_{13} - c_{23} + c_{22} - c_{12} = 16 - 14 + 18 - 17 = 3$$
$$v(2;1) = c_{21} - c_{11} + c_{12} - c_{22} = 24 - 25 + 17 - 18 = -2$$

Ces valeurs sont du reste reportées dans le tableau ci-dessus, à l'endroit réservé aux x_{ij}. C'est ainsi que l'on procédera lors de tout calcul fait à la main. On remarque que $v(2;1) < 0$; par conséquent, la solution actuelle n'est pas optimale.

`Étape 4` : On peut améliorer la solution en faisant entrer (2 ;1) dans la base. Opérons donc le changement de base tel qu'il est décrit dans la méthode d'entrée.

(a) $x'_{21} = min\{x_{11}, x_{22}\} = min\{300; 250\} = 25$

(b)$x'_{12} = x_{12} + x'_{21} = 50 + 250 = 300$

$x'_{11} = x_{11} - x'_{21} = 300 - 250 = 50$

$x'_{22} = x_{22} - x'_{21} = 250 - 250 = 0$

(c) La cellule (2 ;1) entre dans la base ; la cellule (2 ;2) en sort.

Voici le tableau obtenu après le changement de base :

origines	destinations			offre
	1	2	3	
1	25 ☐ 50	17 ☐ 300	16 (1)	350
2	24 ☐ 250	18 (2)	14 ☐ 300	550
demande	300	300	300	900

TABLE 3.23 – Tableau après la première itération

Le calcul des valeurs de boucle pour (1 ;3) et (2 ;2) nous a permis d'obtenir les résultats reportés dans le tableau 3.23. On voit que$v(1;3) = 1$ et$v(2;2) = 2$. Comme toutes deux sont non-négatives, la solution actuelle est la solution réalisable de base optimale du problème.

Une remarque concernant la boucle b(1 ; 3) s'impose. La cellule (1 ;2) ne fait en aucun cas partie de cette boucle, par conséquent, il n'y a pas trois cellules consécutives sur la ligne 1, contrairement à ce que l'on pourrait croire. Lors de la recherche d'une boucle, on peut ignorer toute cellule de base unique sur une ligne ou une colonne.

Revenons à notre solution ; nous remarquons qu'elle est la même que la solution réalisable de base initiale trouvée, soit par la méthode de la matrice minimale, soit par la méthode Vogel, pour lesquelles z =16550. Ceci montre, sur ce petit problème, que ces deux méthodes sont plus efficaces que celle du coin nord-ouest. Il est bien clair que pour des problèmes plus grands que celui envisagé ici, ni la méthode de la matrice minimale, ni la méthode Vogel ne donnent directement la solution réalisable de base optimale.

3.8.1 Exemple

1. Trouver la solution réalisable de base initiale du problème donné cidessous par son tableau à l'aide des trois méthodes exposées (matrice minimale, coin nord-ouest et Vogel) et comparer les résultats.

	1	2	3	4	offre
1	10	2	20	11	15
2	12	7	9	20	25
3	4	14	16	18	10
Demande	5	15	15	15	

solution

`par la mathrice minimale`

	1 ♣	2 ♣	3 ♣	4 ♣	offre
1 ♣	10	2 □ 15	20	11	15 ♭ 0
2 ♣	12	7	9 □ 15	20 □ 10	25 ♭ 0
3 ♣	4 □ 5	14	16	18 □ 5	10 ♭ 0
Demande	5 0 ♭	15 0 ♭	15 0 ♭	15 0 ♭	

$$Z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$= 2(15) + 9(15) + 20(10) + 4(5) + 18(5) = 475$$

`par coin nord-ouest`

	1 ♣	2 ♣	3 ♣	4 ♣	offre
1 ♣	10 □ 5	2 □ 10	20	11	15 ♭ 0
2 ♣	12	7 □ 5	9 □ 15	20 □ 5	25 ♭ 0
3 ♣	4	14	16	18 □ 10	10 ♭ 0
Demande	5 0 ♭	15 0 ♭	15 0 ♭	15 0 ♭	

$$Z = 10(5) + 2(10) + 7(5) + 9(15) + 20(5) + 18(10) = 520$$

`Approximation de Vogel (VAM)`

	1 ♣	2 ♣	3 ♣	4 ♣	offre
1 ♣	10	2 □ 15	20	11	15 ♭ 0
2 ♣	12	7	9 □ 15	20 □ 10	25 ♭ 0
3 ♣	4 □ 5	14	16	18 □ 5	10 ♭ 0
Demande	5 0 ♭	15 0 ♭	15 0 ♭	15 0 ♭	

$$Z = 2(15) + 9(15) + 20(10) + 4(5) + 18(5) = 455$$

alors la méthode Vogel donnée les meilleurs résultats

conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté une étude générale d'un problème de transport.

En présentant la optimisation combinatoire et du programmation linéaire, on a vu aussi la formule d'un problème de transport, et essentilement quelques méthodes de résolution de ce dernier problème avec des exemples correspond.

Bibliographie

[1] C.C RIBEIRO, N. MACULAN (Eds.), Applications of combinatorial optimization Annals of Operations Research 50, 1994.[RIB 94].

[2] Étude générale d'un problème linéaire ,2013-2014.

[3] Fortz Bernard, Recherche opérationnelle et applications, 2012-2013.[31-32]

[4] S. EL BERNOUSSI, Programmation linéaire Methode du simplexe, 2010.

[5] R. Zitouni, Etude qualitative de modèle de transport et localisation, Thèse de doctorat de Mathématique Appliquées, Université Farhat Abbas, Sétif, (2007).

[6] Yadolah Dodge, Optimisation appliquée, Université de Neuchâtel, 2002 Neuchâtel.