الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……………

Centre Universitaire
Abd elhafid boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Licence

En: - Filière mathématiques

Théme

Analyse Statistique Bayésienne

Préparé par :

- **Boucherma Meriem**
- **Bouhannache Houda**
- **Kebieche Hadjer**
- **Belkessour Roqiya**

Encadrer par : Zerari Amel

Année universitaire : 2014/2015

Remerciement

nous remercierons Dieu le tout puissant qui ma donné courage, patience et force jusqu'à la fin de la réalisation de ce modeste travail

Nous tenons à exprimer Un remerciement particulier à notre Encadreur « Zerari Amel » pour avoir dirigé ce travail, pour sa Présence, son aide et surtout pour ses précieux conseils

Mille merci nos trop chères familles,pour leur efforts exceptionnels et pour nous soutenir d'une facon remarquble pendant la realisation de ce projet de mémoire

Nous remercierons particulièrement à tout le personnel de l'institut des sciences et de la technologie surtout les enseignants qui nous ont formé durant les années d'étude

Table des matières

Introduction Générale

Dans ce travail est porte sur l'étude d'annalyse statistique bayésienne,avant d'expliquer ce sujet nous donnons une petit définition sur la sience de statistique et sa relation avec la sience de bayes.

confirme certains scientifiques et beaucoup historiens des mathématiques qui le mot statistiques ont émergé depuis les deux mille ans avant JC, par les Egyptiens et avec le passage du temps a évolué vers une connaissance de base des théories et applications invoqués dans plusieurs domaines et de la recherche scientifique, il considéré comme un ensemble des méthodes scientifiques qui peut étre utilisé pour la collecte des données.led utilise de la sience des statistique dans plusieurs domaines de la vie a l'attention des chercheurs qui etudent cette sience,au fil de temps est née de cette études scolaires bayesienne qui dépend dans le style l'annalyse et les conclusions sur les informations fourniers par la connaissance de statistique.bayes école se distingue des autres écoles traitées comme paramétre dans les distribution de probabilité que des variable aléatoire par cette concept nous constatons que la théoréme de bayes est principalement liée a la science appellé annalyse statistique bayésienne.

annalyse statistique bayésienneest un ensemble de techniques statistique utilisé pour donner les solutions des problémes de les loi probabilité il est dévellopper par cristian robert elle est cohérente avec la théorie de probabilitées et résult d'une simple application du théoreme de bayes L'analyse statistique permet d'utiliser ces connaissances a priori et de les combiner avec l'information apportée par les données pour obtenir une information a posteriori.il est également très utilisée dans les analyses, qui mettent ensemble plusieurs études réalisées dans des conditions parfois différentes pour en extraire de l'information avec une meilleure précision.

Ce mémoire est divisé en deux chapitre :

la premier chapitre,nous présentons une concept générale sur l'approche bayésienne par donné les aventage était la base du développement de l'école en termes de précision dans les résultats et la capacité de ses prévisions pour l'avenir et les Inconvénients et aussi donné quelques définitions et propriétés des lois qui servent cette approche surtout la priori et la posteriori

la deuxième chapitre a été consacré à la présentation la simulation et rappel sur les loi de probabiliter Ce chapitre a appliqué le premier chapitre, en utilisant le programme MAPLE 13, ce qui me aide à résoudre une série exemples (binomial,poisson, gamme,béat.......) donnant courbes pour illustrer comment le travail de ces possibilités

Chapitre 1

l'approche bayésienne

1.1 Introduction

L'objet principal de la statistique est de faire, à partir d'observations d'un phénomène aléatoire, une inférence au sujet de la loi générant ces observations en vue d'analyser le phénomène ou de prévoir un événement futur.Pour réduire la complexité du phénomène étudié, deux approches statistiques sont utilisées dans la statistique :approche non paramétrique(classique) et paramétrique(bayésienne),dans la premier approche non paramétrique on considère que l'inférence statistique doit prendre en considération la complexité autant que possible et donc on cherche la distribution de l'ensemble du phénomène, mettant en oeuvre des fonctionnelles et les données observées sont considérées comme des observations de variables aléatoires. Elle servent alors à faire porter l'inférence sur les paramètres θ ayant leur mécanisme de génération Autrement dit, l'information provenant des données observéesest l'unique source d'information le paradigme classique n'offre pas l'equivalent de la distribution predictive a posteriori

la démarche statistique classique repose essentiellement sur un principe de vraisemblance qui consiste a considérer l'observation mais l'observation ne fournit qu'une image et celle ci peut étre mauvaise et donné une valeur inconnu cette incovénient Est la principale raison de l'émergence de l'école bayésienne

L'analyse bayésienne des problémes statistiques propose d'introduire dans la démarche d'inférence,l'information dont dispose a priori le praticien. dans le cadre de la statistique paramétrique ceci se traduira par le choix d'un loi sur le paramétre d'intérét. dans l'approche Bayésienne,le modéle statistique ayant un a priori sur le paramétre modélisé par une densité de probabilité que nous noterons $\pi(\theta)$, cet a priori au vu de l'observation en calculant la densité a posteriori $\pi(\theta \mid x)$

1.2 l'école bayésienne

Le statisticien bayésien raisonne différemment puisqu'il considére que le paramétre du modéle statistique, $[y/\theta]$ est incertain. II va donc chercher a quantifier son incertitude en mobilisant toutes les informations disponibles.C'est ce qui fait toute la différence puisque cela revient a conférer au paramétre θ Ie statut de variable aléatoire, Dés lors, il y a un sens a lui attribuer une distribution de probabilité a priori qui décrit le savoir actuel sur ce paramétre.Cette distribution de probabilité, souvent appelée prior, est notée $[\theta]$. II faut bien comprendre que le prior quantifie l'état de connaissance d'un expert sur le probléme en main. Cela signifie que l'expert parie plus volontiers sur certaines valeurs de θ que sur d'autres. Cette information a d'autant plus de valeur que les données sont rares. II doit etre clair que le savoir de l'expert encodé dans le prior doit étre tout a fait indépendant de l'échantillon en main, sinon la méme source d'information interviendrait deux fois, ce qui ne serait pas cohérent

1.2.1 le paradigme bayésiene

Etant donné un modèle paramétrique d'observation $x \sim f(x/\theta)$ où $\theta \epsilon \Theta$un espace de dimension finie, l'analyse statistique bayésienne vise à exploiter le plus efficacement possible l'information apportée par x sur le paramètreθpour ensuite construire des procédures d'inférence surθ.l'information fournie par l'observation x est contenue dans la densité $f(x/\theta)$, que l'on représente classiquement sous la forme inversée de vraisemblance

$$L(\theta/x) = f(x/\theta)$$

pour traduire qu'il s'agit d'une fonction deθqui est inconnu, dépendant de la valeur observéex.L'inversion des rôles de$x$ et deθ par rapport à la modélisation probabiliste reflète le but premier de la statistique qui est de reconstruire le paramètreθ au vu de la réalisation aléatoire x.C'est donc pourquoi elle est naturellement liée au théorème de Bayes qui formalise l'inversion des conditionnements dans les probabilités :
Si A et Esont des événements tels que

$$p(A/E) = \frac{p(E/A)\,p(A)}{p(E/A)\,p(A) + p(E/A^c)\,p(A^c)}$$

Une version continue de ce résultat permet d'inverser les densités conditionnelles, à savoir,

$$g(y/x) = \frac{f(x/y)\,g(y)}{\int f(x/y)\,g(y)\,dy}$$

On considère ainsi que l'incertitude sur le paramètreθd'un modèle peut être décrite par une distribution de probabilitéπsurΘappelée distribution a priori par opposition à la distribution a posteriori qui inclut l'information contenue dans l'observation$x$ce qui revient à supposer que est distribué suivant$\pi(\theta)$ que$x$ ne soit généré suivant $f(x/\theta)$,le conditionnement implicite dans cette notation prenant alors tout son sens.

1.2.2 les aventage de l'école bayésienne

Un avantage de l'approche bayésienne est la capacité de considérer les probabilités non encore

- flexibilité concernant les hypothéses de départ et la taille de l'échantillon

- connaissance exacte de la distribution de probabilité a posteriori de θ qui permet de guider l'action clinique

- Possibilité de formuler des prédictions pour le futur

- Cette approche peut exprimer la probabilité

d'événements uniques et d'événements répétables

1.2.3 les Inconvénients

Une des critiques les plus courantes à l'encontre de la méthode bayésienne est justement sa subjectivité ; le but de la science étant d'obtenir des résultats indépendants du scientifique. Nous pensons que cette subjectivité a néanmoins l'avantage d'être explicite, obligeant l'utilisateur à établir clairement quels sont ses a priori.l'approche bayésienne est difficile à suivre d'une façon parfaitement rigoureuse pour deux raisons. D'abord les connaissances a priori d'un agent sont souvent floues, mal formulées et leur traduction en un modèle probabiliste numérique est très difficile.Ce problème est spécialement critique lorsqu'il faut formuler des a priori en grande dimension, car l'intuition y est souvent mise en défaut. C'est pourquoi il est recommandé de mettre en place un cycle modélisation inférence évaluation permettant d'améliorer progressivement les modèles. Si le bon modèle n'a pas été considéré dès le départ, les inférences ne l'inventeront pas. Pour être parfaitement rigoureux,il faudrait considérer tous les modèles possibles avant de voir les données,afin d'être certain de ne pas en avoir oublié. Car oublier de considérer un modèle est équivalent à lui assigner une probabilité a priori nulle et donc une probabilité a posteriori tout aussi nulle, quelle que soit sa vraisemblance.

Le troisième grand problème de l'approche bayésienne est la difficulté calculatoire des inférences. Il est très tentant de définir un beau modèle génératif pour un problème, mais si il n'existe pas d'algorithme efficace suffisamment précis, ce modèle n'a pas beaucoup de valeur. Tout l'art est de trouver un compromis entre biais du modèle et faisabilité des inférences. Pour des problèmes difficiles, il faudrait en fait penser à la méthode d'inférence dès la phase de modélisation.

1.3 Annalyse statistique bayésienne

On nomme annalyse statistique bayésienne la démarche logique permettant de calculer ou réviser la probabilité Cette dé-marche est régie par l'utilisation de règles strictes de combinaison des probabilités, des quelles dérive le théorème de Baye

1.4 la régle de Bayes

Ainsi, dans sa forme la plus simple, la régle de Bayes est la conséquence mathématique directe du théoreme des probabilités conditionnelles :

$$[y/\theta][\theta] = [y, \theta] = [\theta/y][y] \Rightarrow [\theta/y] = \frac{[y/\theta][\theta]}{[y]}$$

Avant l'observation, $[y]$ est la distribution prédictive a priori

$$[y] = \int_{\Theta} [y, \theta] \, d\theta = \int_{\Theta} [y/\theta] \, [\theta] \, d\theta$$

une fois que l'on dispose des données, l'intégrale fournit un nombre réel,la constante de normalisation, qui garantit que le posterior $[\theta/y]$ est bien une distribution de probabilité.

1.5 la loi prioir et posterioir

1.5.1 La loi a priori :

Le choix de la a priori est une étape fondamentale dans l'analyse bayésienne. Ce choix peut avoir différentes motivations. Les stratégies sont diverses. Elle peuvent se baser sur des expériences du passé ou sur un intuition,une idée que le particien a du phénomène aléatoire qu'il est en train desuivre. Elles peuvent être également motivées par des aspects calculabilité .

Enfin, ces stratégies peuvent également tenir compte du fait qu'on ne sait rien par le truchement des lois non informatives

1.5.2 La loi a posteriori :

La loi a posteriori C'est la loi conditionnelle de θ sachant x, Sa densité est noté $\pi\left(\theta/x\right)$, En vertu de la formule de Bayes,et on a aussi

-La loi du couple (θ,x) : Sa densité est notée $h\left(\theta,x\right)$. On a donc :

$$h\left(\theta,x\right)=f\left(x/\theta\right)\pi\left(\theta\right)$$

-La loi marginale de x. Sa densité est notée $m\left(x\right)$, On a donc :

$$m\left(x\right)=\int_{\Theta}f\left(x/\theta\right)\pi\left(\theta\right)d\theta$$

Exemple :

$$\pi\left(\theta\right)\sim Beta\left(\alpha,\beta\right)$$

$$\pi\left(\theta\right)=\theta^{\alpha-1}\left(1-\theta\right)^{\beta-1}$$

$$f\left(x/\theta\right)=\theta^{x}\left(1-\theta\right)^{n-x}$$

$$\pi\left(\theta/x\right)=\frac{f\left(x/\theta\right)\pi\left(\theta\right)}{\int f\left(x/\theta\right)\pi\left(\theta\right)d\theta}$$

$$\pi\left(\theta/x\right)=\frac{\theta^{x}\left(1-\theta\right)^{n-x}\dfrac{1}{Beta\left(\alpha,\beta\right)}\theta^{\alpha-1}\left(1-\theta\right)^{\beta-1}}{{}_{0}\int^{1}\theta^{x}\left(1-\theta\right)^{n-x}\dfrac{1}{Beta\left(\alpha,\beta\right)}\theta^{\alpha-1}\left(1-\theta\right)^{\beta-1}d\theta}$$

$$={}_{0}\int^{1}\theta^{x+\alpha-1}\left(1-\theta\right)^{\beta+n-x-1}$$

$\pi\left(\theta/x\right)\sim B\acute{e}ta\left(x+\alpha,\beta+n-x\right)$

1.6 le probléme de choix a priori

L'aspect de l'analyse bayésienne le plus critiqué et le plus délicat est certainement le choix de la loi a priori des paramètres ; en particulier, le recours à des lois usuelles comme la loi normale, gamma, bêta, ne peut pas être défendu comme approche systématique plus aisée. La détermination de la loi a priori donc est basée sur l'information a priori.

1.6.1 lois subjective

Précisons tout d'abord que cette démarche n'est pas forcément facile dans la pratique. L'idée est d'utiliser les données antérieures. Par exemple, dans un cadre paramétrique, cela revient à choisir une valeur particulière du paramètre. Dans un cas concret, il peut être judicieux de baser son raisonnement sur les dires d'experts, notamment à l'aide de questionnaires. Il est alors nécessaire de veiller à ce que les questions soient compréhensibles par exemple en prenant comme base les quantiles plutôt que les moments.Pour plusieurs experts, il peut être utile de pondérer leurs réponses et d'utiliser des modèles hiérarchiques.Ainsi, la difficulté ici n'est pas mathématique mais plus psychométrique pour réduire les biais sur les réponses fournies. Nous allons nous concentrer sur le second aspect de la détermination.

1.6.2 la loi conjuguée

Une des difficultés de l'approche bayésienne est le calcul de la loi a posteriori.ce calcul est facilité lorsque loi a priori et loi a posteriori ont la même forme.Dans ce cas,on parle de loi a priori conjuguée.

définition

Une famille F de lois surΘ est dite conjuguée si,pour tout appartenant à cette famille,la loi$\pi\left(\theta/x\right)$ appartient également à celle-ci Dans ce cas,le praticien induit directement la forme dès qu'il a choisi sa loi a priori.

Exemple :

$\pi\left(\theta\right)$	$f\left(x/\theta\right)$	$\pi\left(\theta/x\right)$
$G\left(n,\theta\right)$	$G\left(\alpha,\beta\right)$	$G\left(\alpha+n,\beta+x\right)$
$B\left(n,\theta\right)$	$b\acute{e}at\left(\alpha,\beta\right)$	$B\acute{e}at\left(\alpha+n,\beta+x\right)$
$P\left(\theta\right)$	$G\left(\alpha,\beta\right)$	$G\left(\alpha+x,\beta+1\right)$

1.7 la vraisemblance

L'inférence statistique cherche a apprendre sur la valeur dans la population d'un paramétre θ a partir d'un échantillon de données x Inférence traditionnelle connu, $l(x/\theta)$ (fonction de vraisemblance) quantifie a quel point certaines valeurs de θ sont compatibles avec les valeurs observées x, $l(x/\theta)$résume toute l'information que les données fournissent sur le paramétre θ .

1.7.1 principe de vraisemblence

la vraisemblances de y est une valeur qui contiennent toute l'information qui peut être extraite des données.L'information apporteé par une observation de $x$sur θ est entiérement contenue dans la fonction de vraisemblance $l\left(x/\theta\right)$ De plus , si $x_1$et x_2 sont deux observations qui dépendent du même paramétre θ , et telles qu'il existe une constante c satisfaisant

$$l_1\left(x/\theta\right)=cl_2\left(x/\theta\right)$$

Pour tout , elles apportent la même information sur θ et doivent conduire à la même inférence.

1.8 la loi prédictive

nous nous sommes concentrés sur l'inférence concernant la vraie valeur d'un paramètre. Cependant, dans beaucoup de situations, le but d'une analyse est de prévoir des valeurs d'un futur échantillon. Cependant, dans la pratique nous ne connaissons pas la valeur de θ Nous savons seulement la distribution a posteriori de θ. Dans ce cas, la probabilité prédictive de y est donnée à partir de la distribution a posteriori $\pi\left(\theta\right)=x$et $y\sim g\left(y/\theta\right)\pi\left(\theta/x\right)$comme suit

$$g\left(y/x\right)={}_0\int^1 g\left(y/\theta\right)\pi\left(\theta/x\right)d\theta$$

1.8.1 La distribution predictive a posteriori

L'inférence bayésienne quantifie l'incertitude sur θ en mobilisant deux sources d'information : l'expertise et les données. On souhaite maintenant quantifier l'incertitude sur une observation future y^*conditionnellement a l'échantillon déja observé y. La distribution de probabilite de l'observabley^* est obtenue en multipliant sa densitéd'échantillonnage $[y^*/\theta]$ par la distribution a posteriori$[\theta/y]$et en intégrant ce produit par rapport a θ

$$[y^*/y] = \int_\Theta [y^*, \theta/y]\, d\theta$$

$$= \int_\Theta [y^*/\theta, y]\, [\theta/y]\, d\theta$$

$$= \int_\Theta [y^*/\theta]\, [\theta/y]\, d\theta$$

La derniere égalite vient parce que l'observable y^* est conditionnellement indépendante des observations passées quand on dispose de θ

1.9 la loi informative

la loi informative est le point le plus délicat de l'analyse bayésienne.Il exite plusieurs procédés pour obtenir des lois informatives.Nous donnons la déscription de l'un des plus intéressant des procédés qui est celui des familles naturelles conjuguées.

1.10 loi non informative

Une loi non informative est une loi qui porte une information sur le paramètre à dont le poids dans l'inférence est réduit. Certains auteurs la définissent également comme une loi a priori qui ne contient aucune information sur ou encore comme une loi qui ne donne pas davantage de poids à telle ou telle valeur du paramètre. Par exemple, supposons un ensemble fini de taille q, une loi a priori non informative pourra être une loi de la forme

$$\pi(\theta) = 1/q$$

1.10.1 la loi jeffreys

Jeffreys (1946, 1961) propose une approche intrinsèque qui évite effectivement le besoin de prendre en compte une structure d'invariance potentielle,tout en étant souve compatible lorsque cette structure existe Les lois a priori non informatives de Jeffreys sont fondées sur l'information de Fisher,donnée par $I(\theta) = E_\theta\left[\left(\frac{\partial \log f(x/\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right]$ dans le cas unidimensionnel.Sous certaines conditions de régularité,cette information est aussi égale à

$I(\theta) = -E_\theta\left[\left(\frac{\partial^2 \log f(x/\theta)}{\partial\theta^2}\right)\right]$.

La loi de Jeffreys est $\pi(\theta) = \sqrt{I(\theta)}$, définie à un coefficient de normalisation prés quand est propre. Elle vérifie effectivement l'exigence d'invariance par reparamétrisation .Le choix d'une loi dépendant de l'information de Fisher se justifie par le fait que $I(\theta)$est largement accepté comme un indicateur de la quantité d'information apportée par le modèle sur θ (Fisher, 1956). Par conséquent, au moins à un niveau qualitatif, il paraît intuitivement justifié que les valeurs de pour lesquelles $I(\theta)$est plus grande doivent être plus probables a priori.En d'autres termes, $I(\theta)$ mesure la capacité du modèle à discriminer entre θ via la pente moyenne de $\log f(x/\theta)$. Favoriser les valeurs de θ pour lesquelles $I(\theta)$ est plus grande équivaut à minimiser l'influence de la loi a priori et est donc aussi non informatif que possible. En fait, la loi de Jeffreys est fréquemment impropre.

Exemple

Si

$$x \sim B(n, \theta)$$

$$f(x/\theta) = \theta^x (1-\theta)^{n-x}$$

on a

$$I(\theta) = -\, E_\theta \left[\left(\frac{\partial^2 \log f(x/\theta)}{\partial \theta^2} \right) \right].$$

$$\frac{\partial \log f(x/\theta)}{\partial \theta} = \frac{x}{\theta} - \frac{n-x}{1-\theta}$$

$$\frac{\partial^2 \log f(x/\theta)}{\partial \theta^2} = \left(-\frac{x}{\theta^2} + \frac{n-x}{(1-\theta)^2} \right)$$

on pose $E(x) = n\theta$

donc

$$-E_\theta \left[\left(\frac{\partial^2 \log f(x/\theta)}{\partial \theta^2} \right) \right] = \frac{n\theta}{\theta^2} + \frac{n-n\theta}{(1-\theta)^2} = n\theta^{-1}(1-\theta)^{-1}$$

$I(\theta) = \theta^{-1}(1-\theta)^{-1}$

donc la loi de Jeffreys pour ce modèle est :

$$\pi(\theta) = [\theta(1-\theta)]^{-\frac{1}{2}}$$

Dans le cas ou' θ est un paramètre multidimensionnel, on définit la matrice d'information de Fisher, pour $\theta \in \left(\mathbb{R}^k\right)$, et $I(\theta)$ aux éléments suivants :

$$I_{ij}(\theta) = -E_\theta \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \log f(x/\theta) \right) \right] \qquad i,j = 1........K$$

et la loi non informative de Jeffreys est alors définie par :

$$\pi(\theta) = [\det I(\theta)]^{\frac{1}{2}}$$

et est alors propre, car il s'agit de la distribution Bêta$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

1.11 Facteur de bayes

L'idée à l'origine de cette notion est de limiter l'importance du choix a priori de a_0 et $a_0$introduits ci dessus.Le facteur de bayes est défini par

$$B_{0/1} = \frac{P^{\pi}(\Theta_0/X)\,\pi(\Theta_1)}{P^{\pi}(\Theta_1/x)\,\pi(\Theta_0)}$$

Chapitre 2

la simulation de les lois probabilités

2.1 Introduction

Ce chapitre compléter le premier chapitre propose une d'applications sur les lois de la probabilité en utilisant programme avancé à partir qui calcul les expressions mathématiques difficile et donner un graphiques pour illustrer

2.2 loi binomial

Exemple :

la loi prioir est donné par :

$$\pi(\theta) \sim B\hat{e}ta(\alpha, \beta)$$

Rappele : Soient αet $\beta\in \mathbb{R}_{+}^{*}$. On appelle loi Beta de paramétresα et βla loi de probabilité absolument continue dont une densité est donnée par :

$$p(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} : x \in \mathbb{R}$$

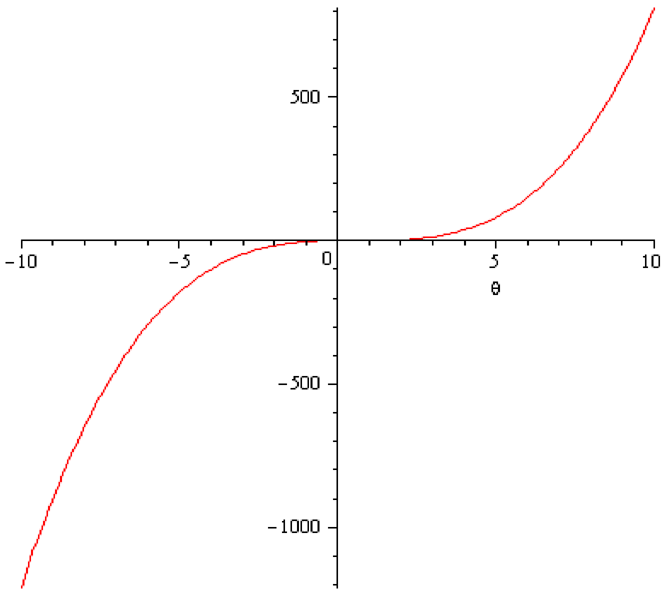
Cette mesure est identifiée par la notation$B\hat{e}ta(\alpha, \beta)$

on :

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx.$$

Donc :

$$\pi(\theta) = \frac{1}{B\hat{e}ta(\alpha,\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}$$



priori $B\hat{e}ta(2,3)$

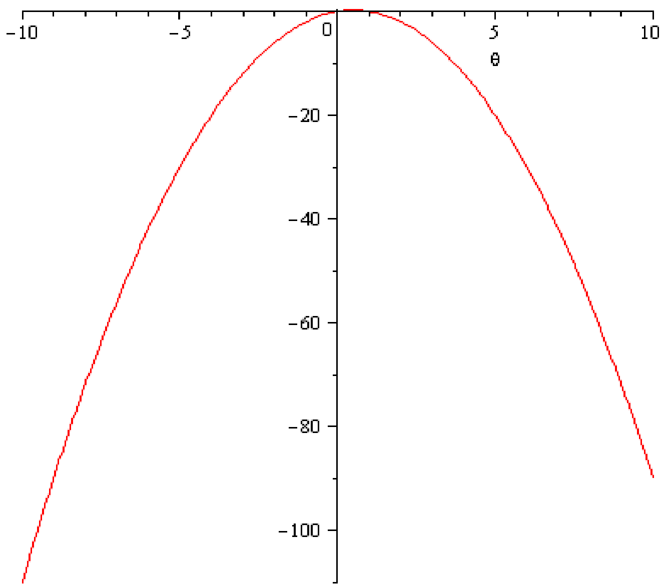
la vraisemblance est donné par :

$$f(x/\theta) \sim Bin(n,\theta)$$

Rappele : Soient $n \in \mathbb{N}^*$et $p \in [0,1]$ On appelle la loi binomiale de paramétres n et P la loi de probabilité discréte p telle que $p(x) = p^x(1-p)^{n-x}$

Cette mesure est identifiée par la notation $B(n,p)$

$$f(x/\theta) = \theta^x(1-\theta)^{n-x}$$



$$vraisemblence\ Bin\left(2,\theta\right), x=1$$

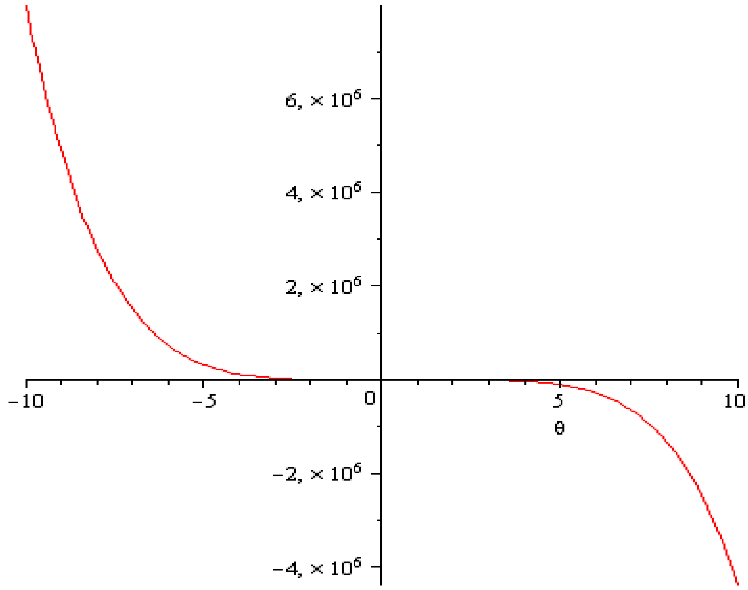
la loi de posteriori est donné par :

$$\pi\left(\theta/x\right)=\frac{\theta^{x}\left(1-\theta\right)^{n-x}\dfrac{1}{B\hat{e}ta\left(\alpha,\beta\right)}\theta^{\alpha-1}\left(1-\theta\right)^{\beta-1}}{{}_{0}\int^{1}\theta^{x}\left(1-\theta\right)^{n-x}\dfrac{1}{B\hat{e}ta\left(\alpha,\beta\right)}\theta^{\alpha-1}\left(1-\theta\right)^{\beta-1}d\theta}$$

$$\pi\left(\theta/x\right)=\frac{\theta^{x}\left(1-\theta\right)^{n-x}\theta^{\alpha-1}\left(1-\theta\right)^{\beta-1}\Gamma\left(\alpha+n+\beta\right)}{\Gamma\left(\alpha+x\right)\Gamma\left(\beta+n+x\right)}$$

$$=\frac{1}{B\hat{e}ta\left(\alpha+x,\beta+n-x\right)}\theta^{\alpha+x-1}\left(1-\theta\right)^{\beta+n-x-1}$$

Ils'agit d'une loi béat de paramétres $B\hat{e}ta\left(\alpha+x,\beta+n-x\right)$



posteriori $B\hat{e}ta(3,4)$

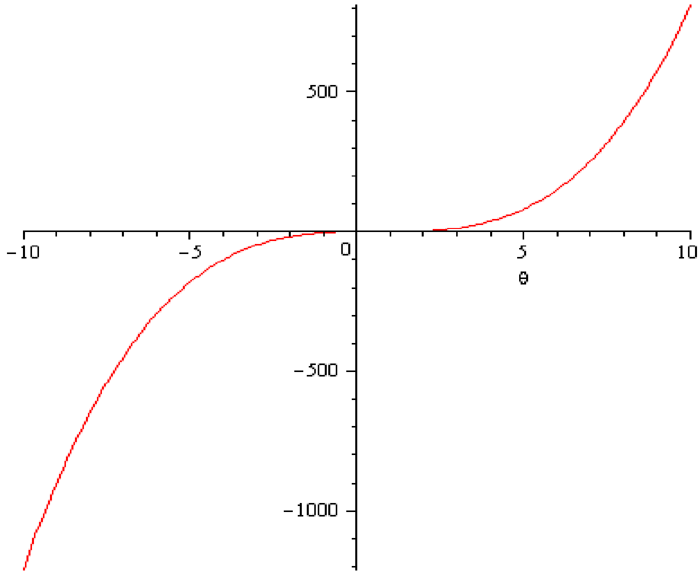
2.3 loi gométrique

Exemple :

la loi de prioir est donné par :

$$\pi(\theta) \sim B\hat{e}ta(\alpha, \beta)$$

$$\pi(\theta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1}$$



priori Bêta $(2,3)$

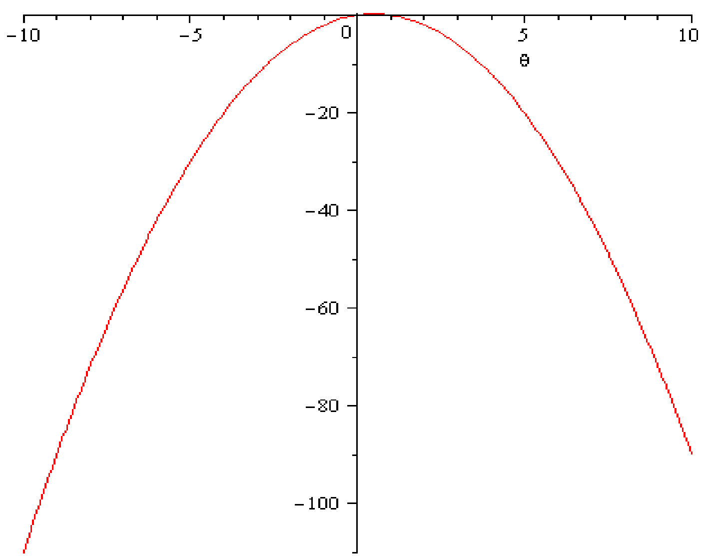
la vraisemblance est donné par :

$$f\left(x/\theta\right)\sim G\left(n,\theta\right)$$

Rappale : Soit $p\in]0,1]$ On appelle loi géométrique de paramétre p la loi de probabilité discréte p de support $\mathbb{N}^{*}$ vérifiant $p\left(n\right)=p\left(1-p\right)^{n-1}$

Cette mesure est identifiée par la notation $G\left(p\right)$
on

$$f\left(x/\theta\right)=\theta\left(1-\theta\right)^{n-1}$$



$$vraisemblense\ G\,(2,\theta)$$

la loi de posteriori est donné par :

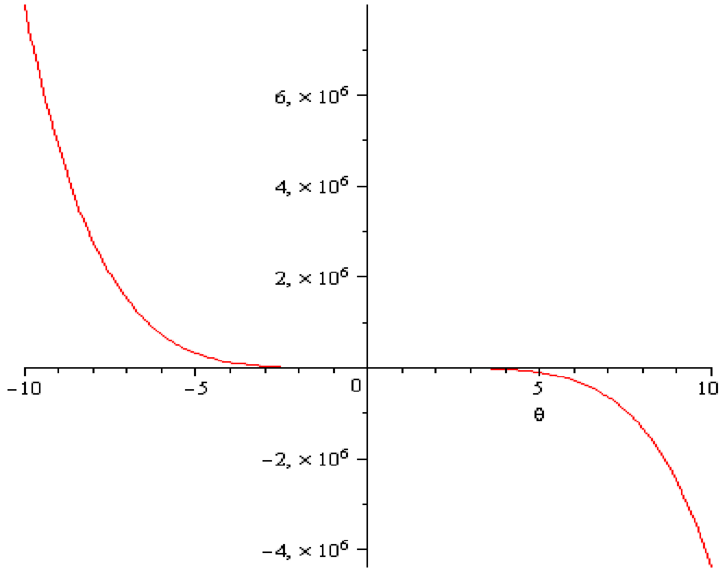
$$\pi\,(\theta/x) = \frac{\theta\,(1-\theta)^{n-1}\,\dfrac{1}{B\hat{e}ta\,(\alpha,\beta)}\theta^{\alpha-1}\,(1-\theta)^{\beta-1}}{{}_0\int^1 \theta\,(1-\theta)^{n-1}\,\dfrac{1}{B\hat{e}ta\,(\alpha,\beta)}\theta^{\alpha-1}\,(1-\theta)^{\beta-1}\,d\theta}$$

$$= \frac{\theta\,(1-\theta)^{n-1}\,\theta^{\alpha-1}\,(1-\theta)^{\beta-1}\,\Gamma(\alpha+n+\beta)}{\Gamma(n+\beta-1)\Gamma(\alpha+1)}$$

$$= \frac{\theta^{\alpha}\,(1-\theta)^{n+\beta-2}\,\Gamma(\alpha+n+\beta)}{\Gamma(n+\beta-1)\Gamma(\alpha+1)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1,n+\beta-1)}\theta^{(\alpha+1)-1}\,(1-\theta)^{(n+\beta-1)-1}$$

Il s'agit d'une loi béta de paramétres $B\hat{e}ta(\alpha+1,n+\beta-1)$



$$posterioriBéta(3,4)$$

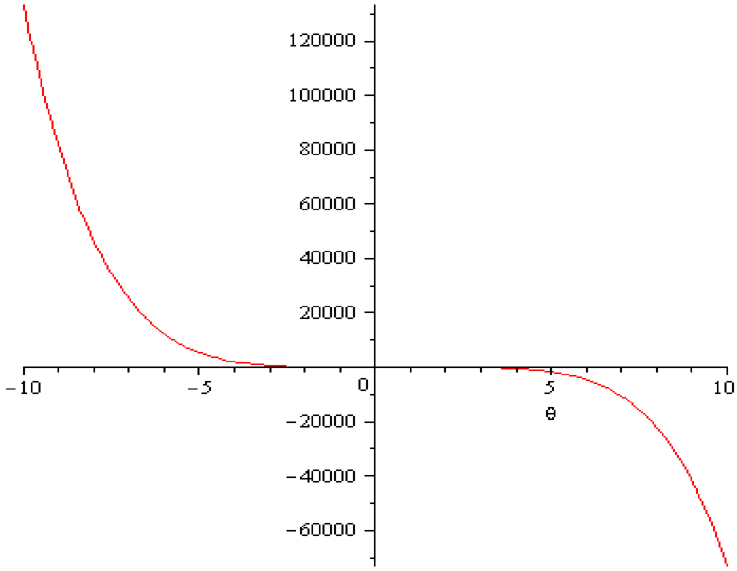
2.4 loi binomil négative

Exemple :

la loi de prioir est donné par :

$$\pi(\theta) \sim Bêta(\alpha, \beta)$$

$$\pi(\theta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1}$$



$$priOir\ B\hat{e}ta\ \ (3,4)$$

la vraisemblance est donne par :

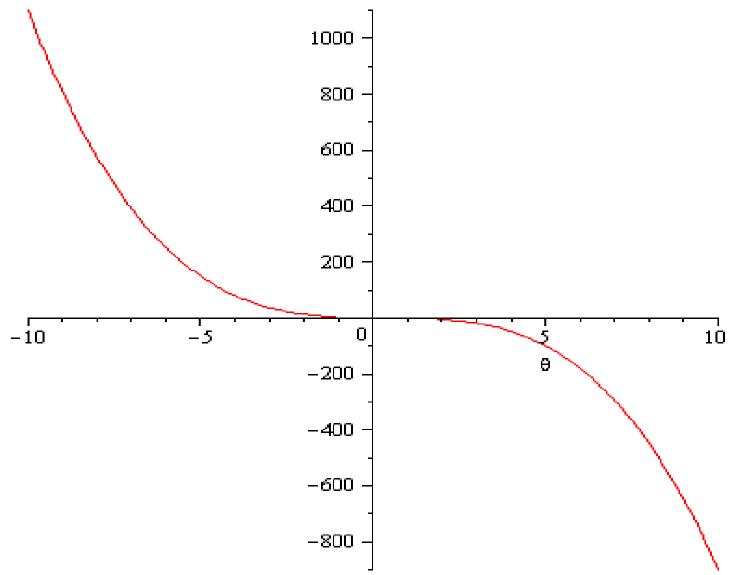
$$f\left(x/\theta\right) \sim Binneg\left(n,\theta\right)$$

Rappale : Soient $p \in]0,1]$ et $k \in \mathbb{N}^{*}$On appelle loi binomiale négative de paramétres k et p la loi de probabilité discréte p vérifiant $p\left(x\right) = p^{n}\left(1-p\right)^{x}$

Cette mesure est identifiée par la notation $Binneg\left(n,p\right)$

Donc :

$$f\left(x/\theta\right) = \theta^{n}\left(1-\theta\right)^{x}$$



$$vraisemblenceBinneg\,(2,1)$$

la loi de posteriori est donne par :

$$\pi\left(\theta/x\right)=\frac{\theta^{n}\left(1-\theta\right)^{x}\dfrac{1}{B\hat{e}ta\left(\alpha,\beta\right)}\theta^{\alpha-1}\left(1-\theta\right)^{\beta-1}}{{}_{0}\int^{1}\theta^{n}\left(1-\theta\right)^{x}\dfrac{1}{B\hat{e}ta\left(\alpha,\beta\right)}\theta^{\alpha-1}\left(1-\theta\right)^{\beta-1}d\theta}$$

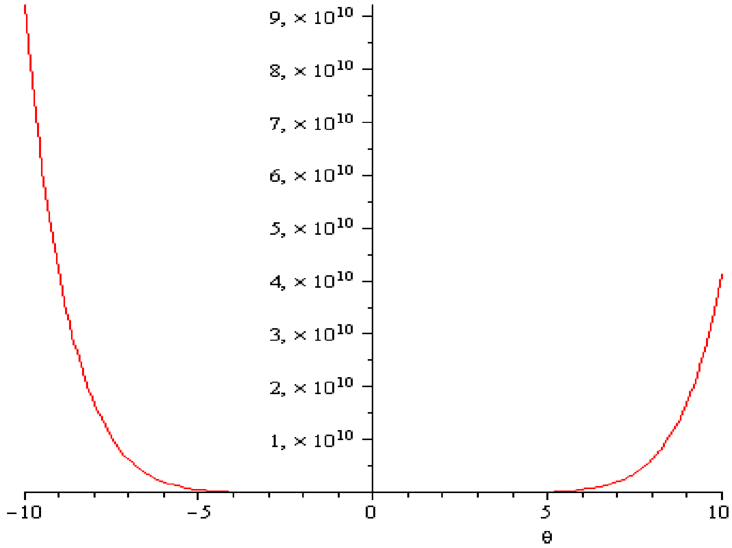
$$=\frac{\theta^{n}\left(1-\theta\right)^{x}\theta^{\alpha-1}\left(1-\theta\right)^{\beta-1}\Gamma(x+\alpha+n+\beta)}{\Gamma(x+\beta)\Gamma(n+\alpha)}$$

$$=\frac{1}{B\hat{e}ta\left(n+\alpha,x+\beta\right)}\theta^{n+\alpha-1}\left(1-\theta\right)^{x+\beta-1}$$

on a :

$$\frac{1}{B\hat{e}ta\left(n+\alpha,x+\beta\right)}=\frac{\Gamma(x+\alpha+n+\beta)}{\Gamma(x+\beta)\Gamma(n+\alpha)}$$

Il s'agit d'une loi béta de paramétres $B\hat{e}ta\left(n+\alpha,x+\beta\right)$



$$posterioriBêta(5,5)$$

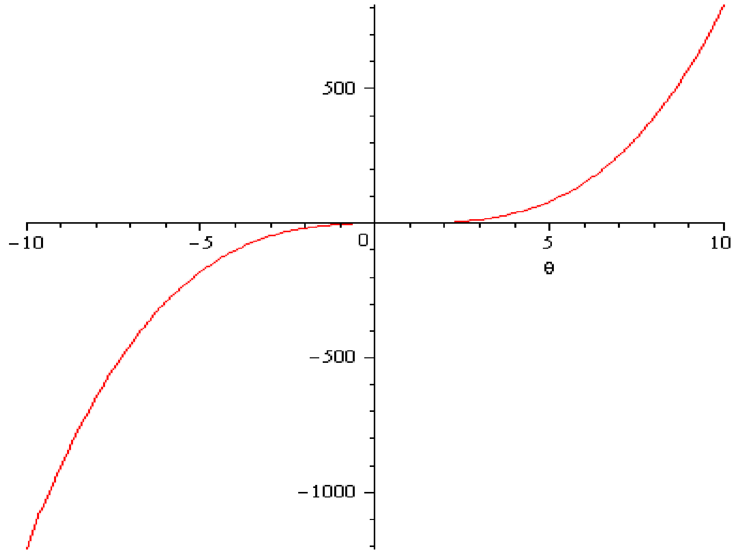
2.5 Lois Bernoulli

Exemple :

la loi de prioir est donné par

$$\pi(\theta) \sim Bêta(\alpha, \beta)$$

$$\pi(\theta) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1}$$



$$priori\ B\hat{e}ta\,(2,3)$$

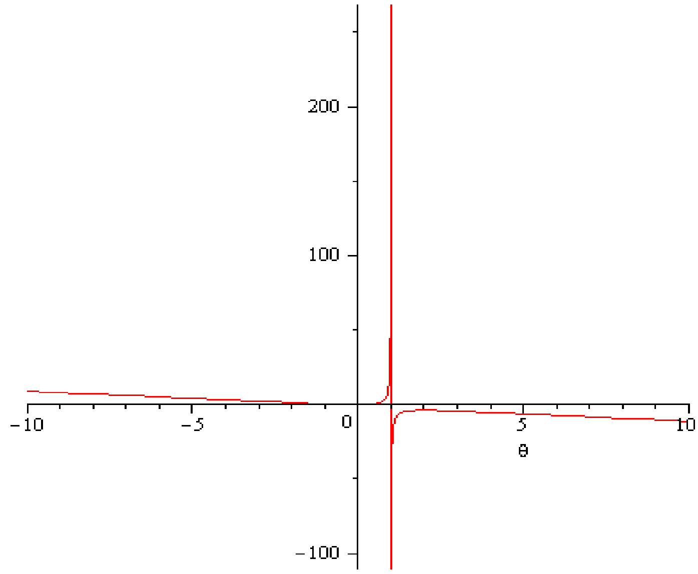
la vraisemblance est donne par :

$$f\,(x/\theta) \sim Ber\,(x,\theta)$$

Rappale : Soit $P \in [0,1]$. On appelle loi de Bernoulli de paramétre p la loi de probabilité discréte$P\,(x)$ vérifiant $P\,(x) = P^x(1-P)^{1-x}$

Cette mesure est identifiée par la notation$Ber\,(1,P)$
on :

$$f\,(x/\theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}$$



$$vraisemblence\ Ber\,(2,\theta)$$

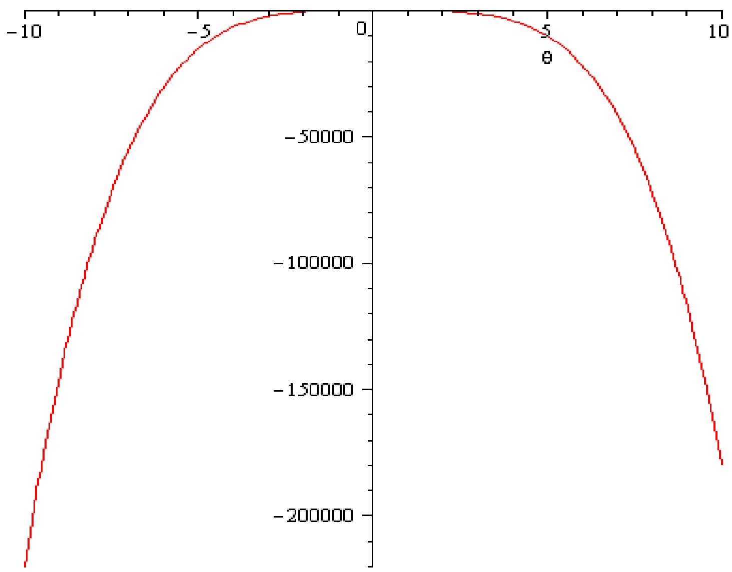
la loi de posteriori est donne par :

$$\pi\,(\theta/x) = \frac{\theta^{x}\,(1-\theta)^{1-x}\,\dfrac{1}{B\hat{e}ta\,(\alpha,\beta)}\theta^{\alpha-1}\,(1-\theta)^{\beta-1}}{{}_{0}\int^{1}\theta^{x}\,(1-\theta)^{1-x}\,\dfrac{1}{B\hat{e}ta\,(\alpha,\beta)}\theta^{\alpha-1}\,(1-\theta)^{\beta-1}\,d\theta}$$

$$= \frac{\theta^{x}\,(1-\theta)^{1-x}\,\theta^{\alpha-1}\,(1-\theta)^{\beta-1}\,\Gamma(\alpha+1+\beta)}{\Gamma(\beta-x+1)\Gamma(x+\alpha)}$$

$$= \frac{1}{B(\beta-x+1,x+\alpha)}\theta^{x+\alpha-1}\,(1-\theta)^{(\beta-x+1)-1}$$

Il s'agit d'une loi béta de paramétres $B\hat{e}ta(\beta-x+1,x+\alpha)$



$$posterioriB\hat{e}ta(2,4)$$

2.6 loi normale

Exemple :

Rappale : Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\delta \in \mathbb{R}_{+}^{*}$. On appelle loi normale de moyenne$m$ et de variance δ^2 la loi de probabilité absolument continue dont une densité est donnée par :

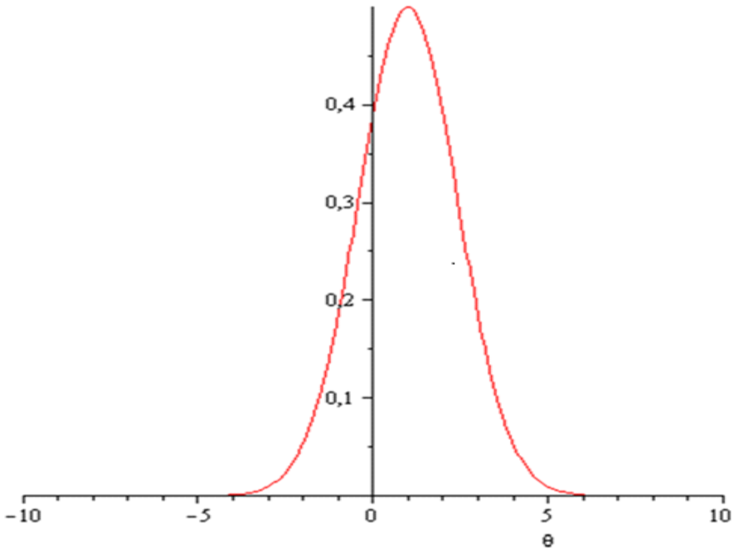
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^2}} \exp - \left((x-m)^2 / 2\delta^2 \right) : x \in \mathbb{R}$$

Cette mesure est identifiée par la notation $N\left(m, \delta^2\right)$

la loi de prioir est donné par :

$$\pi(\theta) \sim N\left(\mu, T^2\right)$$

$$\pi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T^2}} \exp - \left((\theta - \mu)^2 / 2T^2 \right)$$

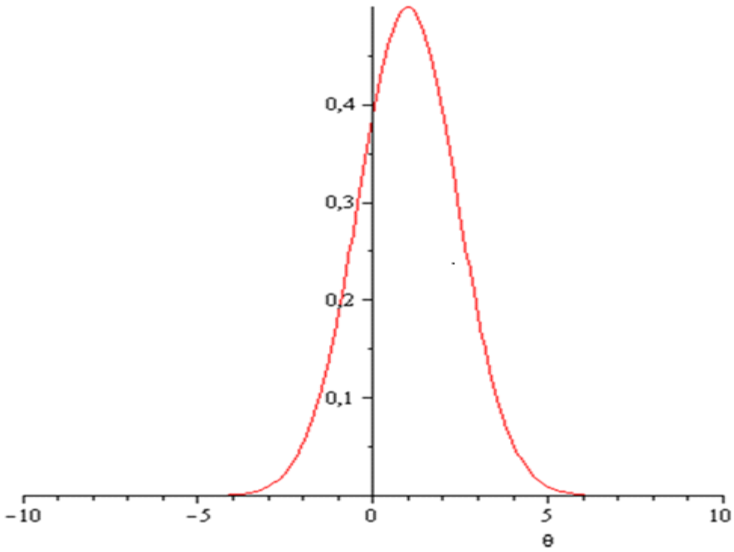


$$prioriN\left(1,2\right),\pi=1$$

la vraisemblance est donné par :

$$f\left(x/\theta\right)\sim N\left(\theta,\sigma^{2}\right)$$

$$f\left(x/\theta\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^{2}}}\exp-\left(\left(x-\theta\right)^{2}/2\sigma^{2}\right)$$



$$vraisemblenceN\left(\theta,1\right),x=3,\pi=1$$

la loi de posteriori est donné par :

$$\pi\left(\theta/x\right)=\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi T^2}}\exp-\left(\left(\theta-\mu\right)^2/2T^2\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^2}}\exp-\left(\left(x-\theta\right)^2/2\sigma^2\right)}{_{-\infty}\int^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi T^2}}\exp-\left(\left(\theta-\mu\right)^2/2T^2\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^2}}\exp-\left(\left(x-\theta\right)^2/2\sigma^2\right)d\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\exp-\left(\left(\theta-\mu\right)^2/2T^2\right)\exp-\left(\left(x-\theta\right)^2/2\sigma^2\right)}{\sqrt{\pi\sigma^2}\sqrt{\pi T^2}\left(1/2\frac{\sqrt{\pi}\sqrt{2}\exp-\frac{\left(\mu^2+x^2-2\mu x\right)}{2\left(\sigma^2+T^2\right)}csgn(\pi T)csgn(\pi\sigma)}{\pi T\pi\sigma\sqrt{\frac{\sigma^2+T^2}{T^2\sigma^2}}}(csgn(\frac{1}{2T^2}+\frac{1}{2\sigma^2}))=1\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\exp-\left(\left(\theta-\mu\right)^2/2T^2\right)\exp-\left(\left(x-\theta\right)^2/2\sigma^2\right)\sqrt{T^2+\sigma^2}}{T\sigma\sqrt{\pi}}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\exp-\frac{1}{2}\left(\left(\theta-\mu\right)^2/T^2+\left(x-\theta\right)^2/\sigma^2\right)\sqrt{T^2+\sigma^2}}{T\sigma\sqrt{\pi}}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\exp-\frac{1}{2}\left(\left(\theta^2+\mu^2-2\theta\mu\right)/T^2+\left(x^2+\theta^2-2x\theta\right)/\sigma^2\right)\sqrt{T^2+\sigma^2}}{T\sigma\sqrt{\pi}}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\exp-\frac{1}{2}(\theta^2(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{T^2})-2\theta(\frac{x}{\sigma^2}+\frac{\mu}{T^2})+(\frac{x^2}{\sigma^2}+\frac{\mu^2}{T^2}))\sqrt{T^2+\sigma^2}}{T\sigma\sqrt{\pi}}$$

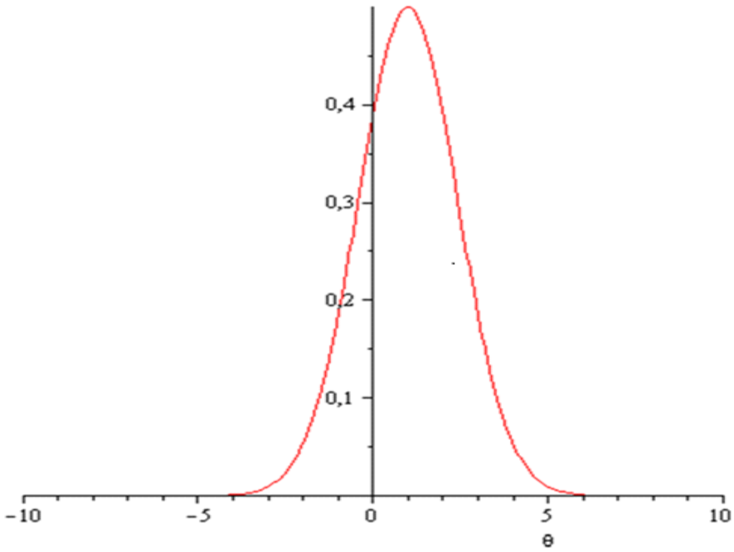
$$=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\exp-\frac{1}{2}(\theta^2-2\theta(\frac{\frac{x}{\sigma^2}+\frac{\mu}{T^2}}{\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{T^2}})+(\frac{\frac{x^2}{\sigma^2}+\frac{\mu^2}{T^2}}{\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{T^2}}))\sqrt{T^2+\sigma^2}}{T\sigma\sqrt{\pi}}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\exp-\frac{1}{2}(\theta-\frac{\frac{x}{\sigma^2}+\frac{\mu}{T^2}}{\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{T^2}})^2\sqrt{T^2+\sigma^2}}{T\sigma\sqrt{\pi}}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\exp-\frac{1}{2}(\theta-\frac{\frac{xT^2+\mu\sigma^2}{\sigma^2T^2}}{\frac{T^2+\sigma^2}{T^2\sigma^2}})^2\sqrt{T^2+\sigma^2}}{T\sigma\sqrt{\pi}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi 2\frac{\sigma^2T^2}{T^2+\sigma^2}}}\exp-(\frac{1}{2}(\theta-\frac{xT^2+\mu\sigma^2}{T^2+\sigma^2})^2)$$

Il s'agit d'une loi normale de paramétres $N\left(\frac{xT^2+\mu\sigma^2}{T^2+\sigma^2},\frac{\sigma^2T^2}{T^2+\sigma^2}\right)$



$$posterioriN\left(\frac{7}{3},\frac{2}{3}\right)$$

2.7 loi gamma

Exemple :

Rappale Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$.On appelle loi Gamma de paramétres $a$et λ laloi de probabilité absolument continue dont une densité est donnée par :

$$p\left(x\right)=\frac{\lambda^a}{\Gamma(\alpha)}x^{a-1}\exp\left(-\lambda x\right)$$

Cette mesure est identifiée par la notation $\Gamma\left(a,\lambda\right)$

Γ est la fonction gamme définie par l'intégrale pour $a>0$:

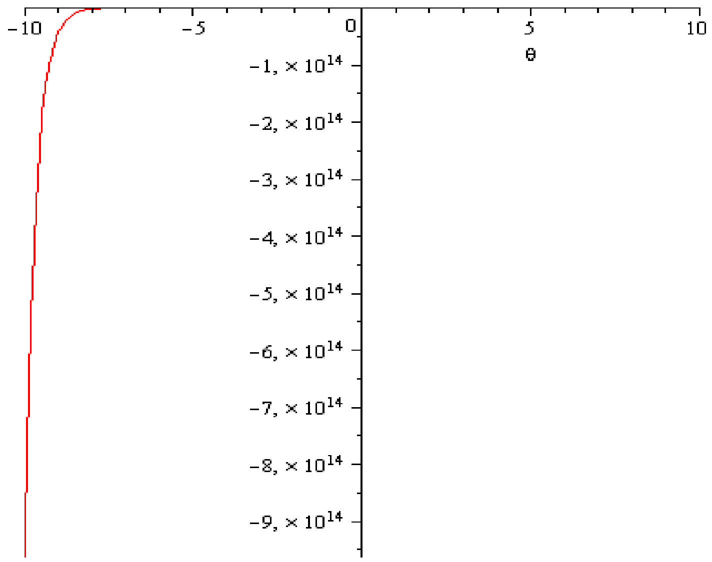
$\Gamma\left(a\right)=\int_0^\infty t^{a-1}\exp\left(-t\right)dt.$

on :

la loi de prioir est donné par :

$$\pi\left(\theta\right)\sim Gam\left(\alpha,\beta\right)$$

$$\pi\left(\theta\right)=\frac{\beta^{a}}{\Gamma(\alpha)}\theta^{a-1}\exp\left(-\beta\theta\right)$$

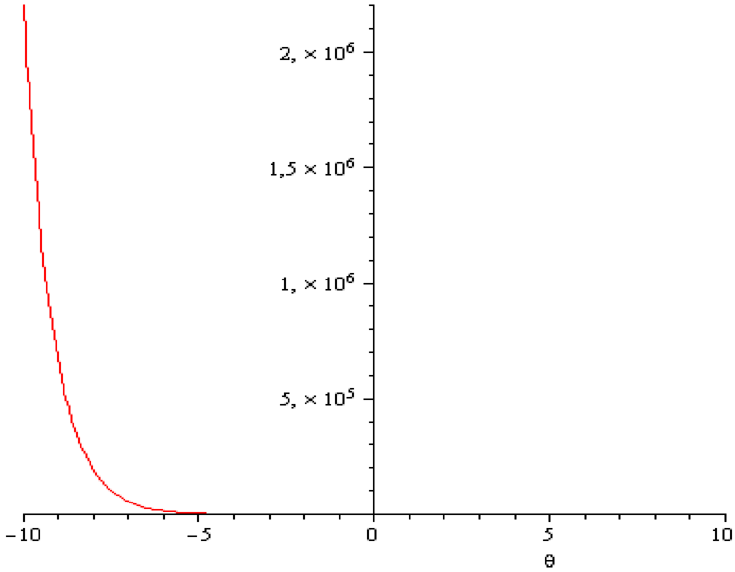


$$priori\ Gam\left(2,3\right)$$

la vraisemblance est donné par :

$$f\left(x/\theta\right)\sim Gam\left(v,\theta\right)$$

$$f\left(x/\theta\right)=\frac{\theta^{v}}{\Gamma(v)}x^{v-1}\exp\left(-x\theta\right)$$



$$vraisemblence\ Gam\,(2,\theta)\,,x=1$$

la loi de posteriori est donné par :

$$\pi\,(\theta/x)=\frac{\dfrac{\theta^{v}}{\Gamma(v)}x^{v-1}\exp\left(-x\theta\right)\dfrac{\beta^{a}}{\Gamma(\alpha)}\theta^{a-1}\exp\left(-\beta\theta\right)}{\int_0^\infty\dfrac{\theta^{v}}{\Gamma(v)}x^{v-1}\exp\left(-x\theta\right)\dfrac{\beta^{a}}{\Gamma(\alpha)}\theta^{a-1}\exp\left(-\beta\theta\right)d\theta}$$

$$=\frac{\theta^{v}x^{v-1}\exp\left(-x\theta\right)\beta^{a}\theta^{\alpha-1}\exp\left(-\beta\theta\right)}{\Gamma(v)\Gamma(\alpha)_0\int^\infty\dfrac{\theta^{v}x^{v-1}\exp\left(-x\theta\right)\beta^{a}\theta^{\alpha-1}\exp\left(-\beta\theta\right)}{\Gamma(v)\Gamma(\alpha)}d\theta}$$

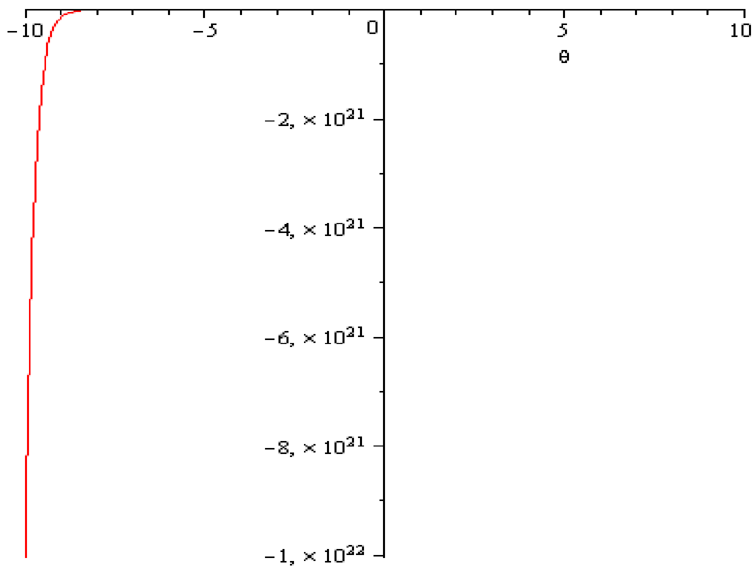
$$=\frac{\exp\left(-\theta(x+\beta)\right)(\theta(x+\beta))^{v+\alpha}}{\theta\Gamma(v+\alpha)}$$

$$=\frac{\exp\left(-\theta\left(x+\beta\right)\right)\theta^{v+\alpha}\left(x+\beta\right)^{v+\alpha}\theta^{-1}}{\Gamma(v+\alpha)}$$

$$=\frac{\left(x+\beta\right)^{v+\alpha}\theta^{v+\alpha-1}\exp\left(-\theta\left(x+\beta\right)\right)}{\Gamma(v+\alpha)}$$

$$=\frac{(x+\beta)^{v+\alpha}}{\Gamma(v+\alpha)}\theta^{v+\alpha-1}\exp\left(-\theta\left(x+\beta\right)\right)$$

Il s'agit d'une loi gamme de paramétres $G\left(v+\alpha, x+\beta\right)$



posteriori $Gam\left(5,3\right)$

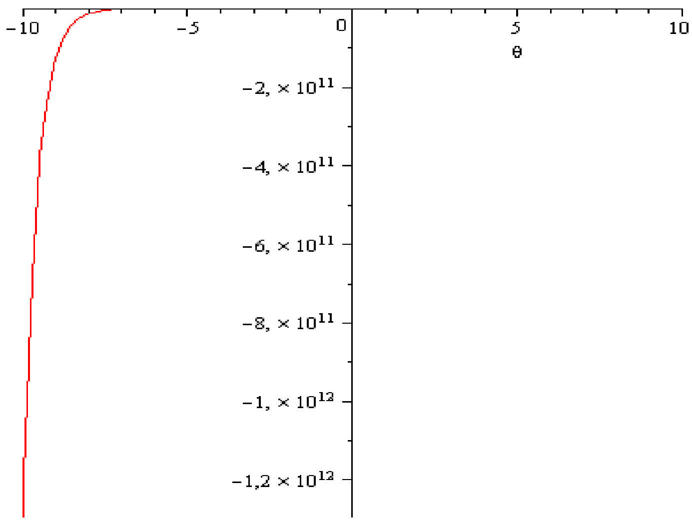
2.8 loi exponetielle

Exemple :

la loi de prioir est donné par :

$$\pi\left(\theta\right)\sim Gam\left(\alpha,\beta\right)$$

$$\pi\left(\theta\right)=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\theta^{\alpha-1}\exp\left(-\beta\theta\right)$$



$$prioriGam\,(4,2)$$

la vraisemblance est donné par :

$$f\,(x/\theta) \sim \exp\,(n,\theta)$$

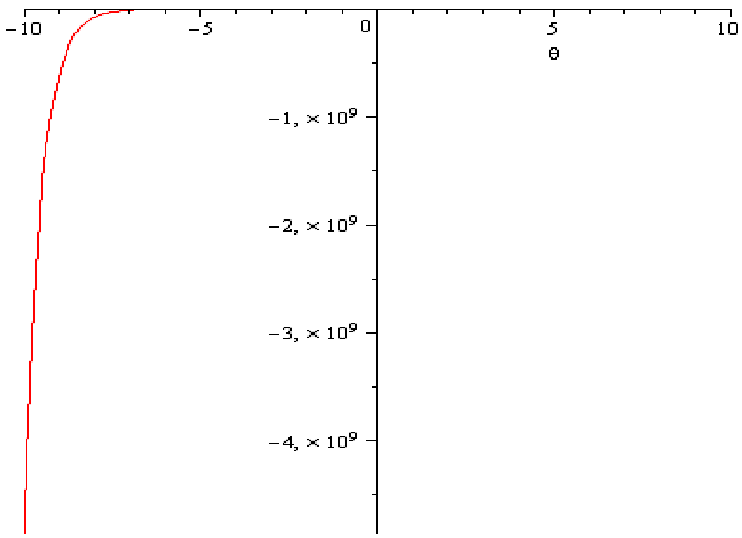
Rappale : Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ On appelle loi exponentielle de paramétre λ la loi de probabilité absolument continue dont une densité est donnée par :

$$p\,(x) = \lambda \exp\,(-\lambda x) : x \in \mathbb{R}$$

Cette mesure est identifiée par la notation $p\,(\lambda)$

Donc :

$$f\,(x/\theta) = \theta^n \exp\,(-\theta x)$$



$$vraisemblence\,\exp(1,\theta)\,,x=2$$

la loi de posteriori est donné par :

$$\pi(\theta/x)=\frac{\theta^n\exp(-\theta x)\,\dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}\exp(-\beta\theta)}{\int_0^\infty\theta^n\exp(-\theta x)\,\dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}\exp(-\beta\theta)\,d\theta}$$

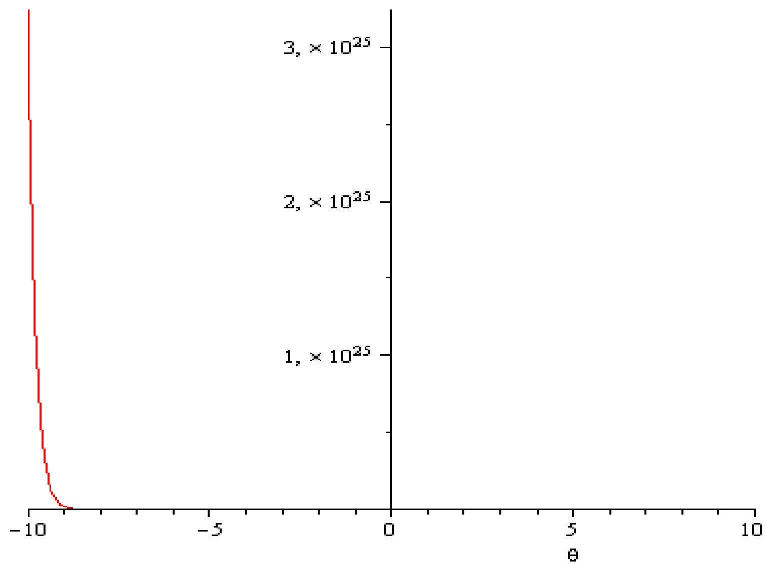
$$=\frac{\theta^n\exp(-\theta x)\,\beta^\alpha\theta^{\alpha-1}\exp(-\beta\theta)}{\int_0^\infty\theta^n\exp(-\theta x)\,\beta^\alpha\theta^{\alpha-1}\exp(-\beta\theta)\,d\theta}$$

$$=\frac{\exp(-\theta(x+\beta))\,(\theta(x+\beta))^{n+\alpha}}{\theta\Gamma(n+\alpha)}$$

$$=\frac{\exp(-\theta(x+\beta))\,\theta^{n+\alpha}(x+\beta)^{n+\alpha}\,\theta^{-1}}{\Gamma(n+\alpha)}$$

$$=\frac{(x+\beta)^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha)}\theta^{n+\alpha-1}\exp(-\theta(x+\beta))$$

Il s'agit d'une loi gamme de paramétres $G(n+\alpha,x+\beta)$



posteriori $G\,(5,4)$

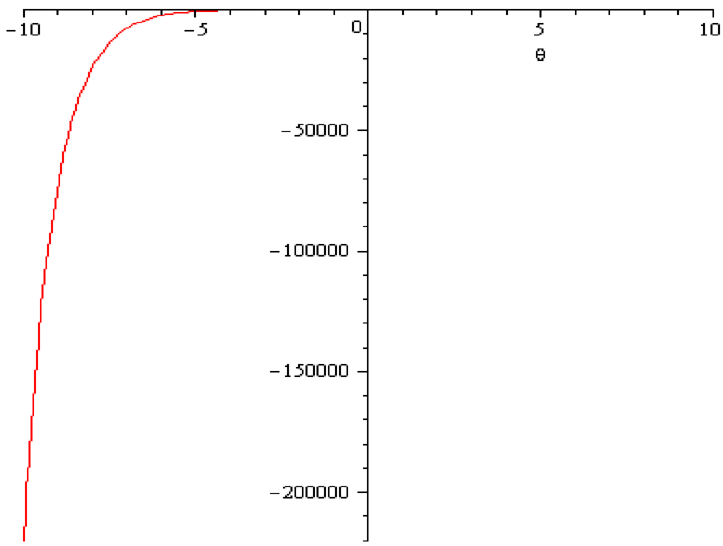
2.9 loi poissan

Exemple :

la loi de prioir est donné par :

$$\pi\,(\theta) \sim Gam\,(\alpha,\beta)$$

$$\pi\,(\theta) = \frac{\beta^{a}}{\Gamma(\alpha)}\theta^{a-1}\exp\,(-\beta\theta)$$



$$priori\ Gam\,(2,1)$$

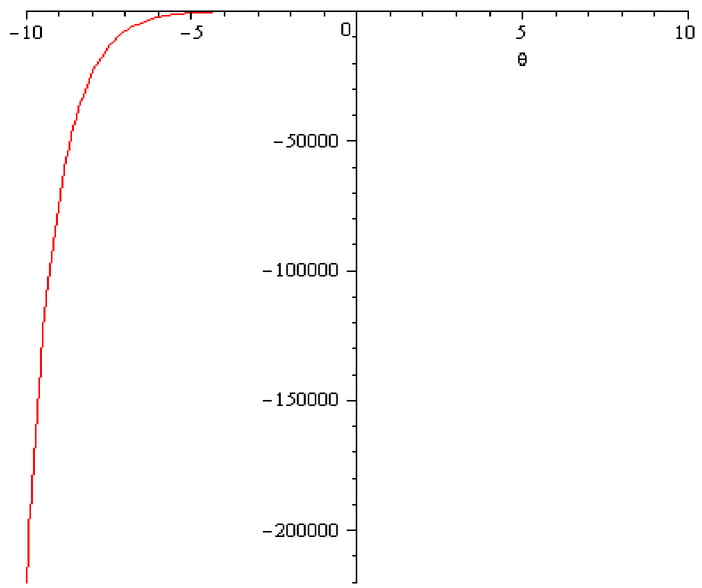
la vraisemblance est donné par :

$$f\,(x/\theta) \sim p(x,\theta)$$

Rappale : Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$ On appelle loi de Poisson de paramétre λ la loi de probabilité discréte $p$de support $\mathbb{N}$ vérifiant $p\,(n) = \frac{\lambda^n}{n!}\exp\,(-\lambda)$

Cette mesure est identifi´ee par la notation $p\,(\lambda)$
Donc :

$$f\,(x/\theta) = \frac{\theta^x}{x!}\exp\,(-\theta)$$



$$vraisemblance\ p(\theta), x = 1$$

la loi de posteriori est donné par :

$$\pi\,(\theta/x) = \frac{\dfrac{\theta^x}{x!}\exp\,(-\theta)\dfrac{\beta^a}{\Gamma(\alpha)}\theta^{a-1}\exp\,(-\beta\theta)}{{}_0\int^\infty \dfrac{\theta^x}{x!}\exp\,(-\theta)\dfrac{\beta^a}{\Gamma(\alpha)}\theta^{a-1}\exp\,(-\beta\theta)d\theta}$$

$$= \frac{\theta^x \exp\,(-\theta)\beta^a\theta^{a-1}\exp\,(-\beta\theta)}{x!\Gamma(\alpha)_0\int^\infty \dfrac{\theta^x}{x!}\exp\,(-\theta)\dfrac{\beta^a}{\Gamma(\alpha)}\theta^{a-1}\exp\,(-\beta\theta)d\theta}$$

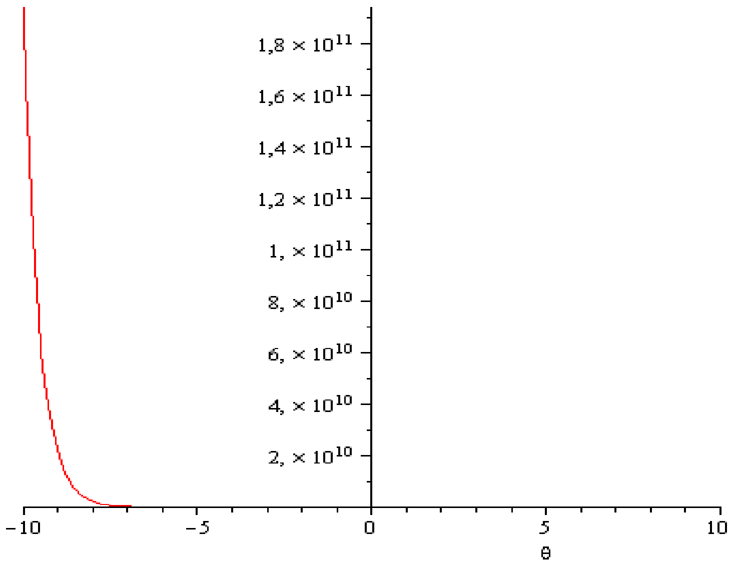
$$= \frac{\exp\,(-\theta(1+\beta))(\theta(1+\beta))^{x+a}}{\theta\Gamma(\alpha+x)}$$

$$= \frac{\exp\,(-\theta(1+\beta))\theta^{x+\alpha}(1+\beta)^{x+a}\theta^{-1}}{\Gamma(\alpha+x)}$$

$$= \frac{\exp\,(-\theta(1+\beta))\theta^{x+\alpha}(1+\beta)^{x+a}\theta^{-1}}{\Gamma(\alpha+x)}$$

$$\pi\left(\theta/x\right) = \frac{\left(1+\beta\right)^{x+a}}{\Gamma(\alpha+x)}\theta^{x+\alpha-1}\exp\left(-\theta(1+\beta)\right)$$

Il s'agit d'une loi gamme de paramétres $G(x+\alpha, 1+\beta)$



$posterioriG(3,2)$

Notation :

$\Gamma(a)$	$fonction\ gamma(a > 0)$
$det\ \ I(\theta)$	*déterminant de la matrice* $I(\theta)$
x, y	*variable aléatoire*
$E_\theta[g(X)]$	*espérance de* $g(x)$ *pour la loi* $f(x\|\theta)$ *sur*x
$x \sim f(x\|\theta)$	x *est distribuée suivant la loi de densité*
P_θ	*loi de probabilité, indexée par le paramétre* θ
Θ	*espace des paramétres*
$I(\theta)$	$information\ de\ Fisher$
$l(\theta\|x)$	*vraisemblance, en tant que* $fonction$ *de* θ, *identique à* $f(x\|\theta)$
$m(x)$	*loi marginale*
$\pi(\theta)$	*loi a priori générique sur*θ
$\pi(\theta/x)$	*loi a posteriori générique sur*θ
θ, λ	*paramétres (lettres grecques minuscules)*
$y*$	*données latentes ou manquantes*
p^π	$facteur$ *de bayes*

Conclusion Générale

Le but de cette mémoire est d'étudier avec l'inférence statistique en utilisant former la recherche Bayes, car il fournit plus d'objectivité dans la méthode statistique Comme nous avons étudié les applications et la simulation numérique pour calculer les probabilités de plusieurs façons

Bibliographie

[1] Christian P Robert (2006). Le choix bayésien Principe et pratique.25-24, 49-48 ,584 ,587.

[2] Jerome Dupuis. (2007). Statistique bayésienne et algorithmes. 5-4

[3] Jean Michel Marin, Christian P Robert. Paris. Les bases de la statistique bayésienne. 4

[4] Judith ROUSSEAU. (2010). STATISTIQUE BAYÉSIENNE. 22, 39.

[5] Christian P Robert (2006).pratique du calcule bayésienne.33-31, 40-34

[6] Mme halil Neé khorsi Rachida .2011.inference bayesienne en series chronologiques.10-11

[7] pierre Bunouf.2006.Lois bayésiennes a priori dans un plan binomial séquentiel 6,9,12.

[8] Christian P Robert, Jean Michel Marin, Gilles CELEUX. SÉLECTION BAYÉIENNEDE VARIABLE EN RÉGRESSION LINÉAIRE. 61.

[9] Laurence GRAMMONT. (2004). COURS DE PROBABILITÉ 2iéme année d'économie et de gestion, semestre 2. 7,8,9,10.

[10] A Mallet, A J Valleron, F Carrat, S Tézenas, V Morice. (2014). Université Pierre et Marie Curie Biostatistique, 100