الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……………

Centre Universitaire
Abd elhafid boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie **Département de Mathématiques et Informatique**

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Licence
En: Filière mathématiques

La solution singulière de problème mêle pour le bilaplacien dans un polygone plan.

Préparé par :

1. **Bouhaloufa Roukia**
2. **Dif Naima**
3. **Makouf Aida**
4. **Lehchili Nor Elhouda**

Encadrer par :
Benhabiles Hanane

Année universitaire : 2014/2015

REMERCIEMENTS

Nous remercions d'abord et avant tout le bon Dieu qui m'a donné le courage et la patience pour réaliser ce travail.

Nous remerciement M^{elle} Benhabiles Hanane qui encadre ce mémoire et nous dirigeons et nous encourageons tout le long du travaille

Sans oublier tous les enseignants qui ont contribué a notre formation durant notre vie scolaire surtout les enseignant de l'institut (S-T).

Nous voudrons dire toute notre reconnaissance à nos parents pour leur dévouement sans limite et pour tout ce qu'ils nous ont donné sur tous les plants, et remercier nos familles et nos amis.

ROUKAIA ***AIDA***

NAIMA ***HOUDA***

Table des matières

Notations géométriques

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$:	ouvert borné.
$\partial\Omega = \Gamma$:	frontière de Ω ; ds mesure de longure sur Γ.
Γ_i :	une partie (segment) de Γ ; $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{\Gamma}_i$.
ω_j :	l'ouverture de l'angle que font Γ_j et Γ_{j+1} vers l'intérieur de Ω.
S_i :	les sommets de Γ.
f :	la densité des forces volumiques données.
η :	le vecteur unitaire normal sortant.
L :	opérateur différentiel.
$\frac{\partial u}{\partial \eta}$:	dérivée normale.
υ :	le coéfficient de poisson des plaques.
∇ :	le gradient.
div :	divergence.
Δ :	le laplacien.
Δ^2 :	bilaplacien.

Espaces fonctionnels

$D(\Omega)$:	l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans Ω.
$D'(\Omega)$:	l'espace des distributions sur Ω.
C^k :	l'espace des fonctions k fois continument différentiables.
$L^p(\Omega)$:	l'espace des fonctions de puissances p-ième intégrable sur Ω pour la mesure de Lebsgue.
$L^\infty(\Omega)$:	l'espace des fonctions (classes) essentiellement bornées.
$W_p^s(\Omega)$:	l'espace de Sobolev d'ordres $(W_2^s(\Omega) = H^s(\Omega))$.
$H^s(\Omega)$:	l'espace de Sobolev d'ordres, $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.
$H_0^s(\Omega)$:	l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^s(\Omega)$.
$H_0^s(\bar{\Omega})$:	l'espace des restrictions à Ω des éléments de $H^s(\mathbb{R}^n)$.
$\widetilde{H^s}(\Omega)$:	un sous-espace de $H^s(\Omega)$ formé des fonctions dont le prolongement $\tilde{u}$ par zéro hors de Ω appartient à $H^s(\mathbb{R}^n)$.
$H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$:	l'espace des fonctions $u \in L^2(\Gamma)$ telque :

$$\iint_{\Gamma\Gamma} |u(x) - u(y)|^2 \frac{ds(x)\, ds(y)}{\|x-y\|^2} < +\infty.$$

Introduction générale

L'équation biharmonique dans un domaine polygonal décrit l'équation d'équilibre d'une plaque mince, à frontière polygonale, déformée par les forces extérieures. Pour cette équation, différents types de conditions aux bord peuvent être considérées. Le cas le plus simple est celui d'une plaque encastrée, qui se traduit par les conditions aux limites de Dirichlet :

$$u = \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Un autre cas se présente, celui d'une plaque à bord libre, ceci correspond aux conditions de Neumann :

$$M\left(u\right) = N\left(u\right) = 0$$

où

$$\begin{array}{l} M\left(u\right) = \upsilon \Delta u + \left(1 - \upsilon\right) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \\ N(u) = -(\frac{\partial}{\partial n} \Delta u + \left(1 - \upsilon\right) \frac{\partial^3 u}{\partial \eta \partial_s s^2}). \end{array}$$

Le troisième cas est celui d'une plaque simplement supportée qui se traduit par les conditions :

$$u = M\left(u\right) = 0.$$

Il est plus intéressant de considérer les conditions de Dirichlet-Neumann. Dans la pratique, les conditions de Dirichlet, dans le cas de la fissure étant des conditions artificielles. Le calcul des solutions singulières (y compris le cas de la fissure), constitue l'objet de notre travail.

Ce travail ce décompose en deux chapitres :

Le premier chapitre, est consacré essentiellement aux rappels des résultats principaux sur les espaces de Sobolev classiques pour mieux comprendre le continu de ce travail. A la fin de ce chapitre, on rappelle quelques résultats théoriques généraux que nous utiliserons.

Dans deuxième chapitre, on se propose d'étudier le comportement singulier de la solution du problème mêlé gouverné par l'opérateur bilaplacien dans un domaine de $\mathbb{R}^2$. Plus précisement, on considère Ω un corps homogène, élastique et isotrope occupant un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, à frontière polygonale rectiligne $\Gamma = \overset{J}{\underset{j=1}{\cup}} \bar{\Gamma}_j$. Les Γ_j sont des segments de droites ouverts. Le côté $]S_{j-1},\ S_j[$ est noté Γ_{j-1} et éventuellement, L'ouvert défini ainsi est un domaine polygonale. Par suite, tout les résultats sur ce type de domaine sont valable. Il est commode, en coordonnées polaires, de travailler à l'origine. Donc, par translation suivie d'une rotation, on peut ramener S_j, Γ_j et Γ_{j-1} respectivement à O, O_x et O_{y_w} où ω est l'angle que font O_x et O_{y_w} vers l'intérieur de Ω. Le problème que l'on considère est restreint à un secteur de rayon ρ, noté Ω_ω, de sommet O et de frontière $\Gamma = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_\omega \cup \bar{\Gamma}_\rho$. Sur l'arc Γ_ρ nous aurons pas besoin de conditions aux limites étant donnée que les fonctions sont à support compact.

η, τ sont respectivement la normale unitaire sortante et la tangente unitaire dans le sens positif sur la frontière Γ.

On étudie toutes les fonctions u appartenant à $H^2(\Omega)$ solutions du problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta^2 u = f \text{ dans } \Omega, \\ \left.\begin{array}{c} u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \end{array}\right\} \text{ sur } \Gamma_{0,} \\ \left.\begin{array}{c} M(u) = 0 \\ N(u) = 0 \end{array}\right\} \text{ sur } \Gamma_\omega. \end{array}\right. \tag{0.0.1}$$

où les opérateurs frontières sont :

$$\begin{array}{l} M(u) = \upsilon\Delta u + (1-\upsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \\ N(u) = -(\frac{\partial}{\partial n}\Delta u + (1-\upsilon)\frac{\partial^3 u}{\partial \eta \partial_s s^2}). \end{array}$$

Les dérivées normale et tangentielle sont données par :

$$\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} n_2. \\ \frac{\partial}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial x_1} n_2 + \frac{\partial}{\partial x_2} n_1. \end{array}$$

où υ est le coefficient de Poisson des plaques : $0 < \nu < 1$.

Physiquement, $M(u)$ est le moment de flexion, $N(u)$ est la force transversale composée de la force de cisaillement et du moment de torsion, u étant le déplacement perpendiculaire à la plaque au point x (sous l'hypothèse de petits déplacement), f est la densité de forces volumique et $u = \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ signifie que la plaque est encastrée au bord (pas de déplacement des points de cette partie du bord).

La section (2.1) est consacrée aux notations principales et a formulation de problème. Dans la section (2.2), on étudie l'existence et l'unicité de la solution du problème (0.0.1). On démontre que le comportement singulier de solution du problème (0.0.1) est gouverné par l'équation transcendante :

$$\sin^2(\alpha-1)\omega = \frac{4}{(1-\upsilon)(3+\upsilon)} - \frac{(1-\upsilon)}{(3+\upsilon)}(\alpha-1)^2 \sin\omega. \tag{0.0.2}$$

Enfin, on calcul les solutions singulières de notre problème dans le but de complété le tableau de P. Grisvard.

Chapitre 1

Les définitions de base et les propriétés des espace de Sobolev

Résumé : Il n'y a pas de doute que les espaces de Sobolev sont les epaces fonctionnels les plus appropriés pour une description précise des proprietés qualitatives des solutions des équations elliptiques avec des conditions aux limites. Le but principal de ce chapitre et de mettre l'accent sur les principales propriétés de ces espaces lorsqu'ils sont définis sur des polygones.

1.1 Notations

Soit Ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ de point générique $(x_1, x_2, ..., x_n)$. on note $L^2(\Omega)$ L'espace de toutes les fonctions de carré intégrable sur Ω par rapport à la mesure de Lebesgue dx dans $\mathbb{R}^n$. On note aussi par $D(\Omega)$ $\left(resp.\ D\left(\overline{\Omega}\right)\right)$ l'espace de toutes les fonctions indéfiniment continûment différentiables et à support compact dans Ω (resp. l'espace des restrictions à Ω des fonctions de $D(\mathbb{R}^n)$). On note aussi par ∂_i la dérivé partielle par rapport à la variable x_i, $1 \leq i \leq n$ et pour tout $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in N^n$ on a $D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}...\partial_n^{\alpha_n}$.

On note $D'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω comme étant l'espace dual de $D(\Omega)$, i.e. l'espace des formes linéaires continues sur $D(\Omega)$.

Pour tout entier positif k, on désigne par $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ l'espace des restrictions à $\overline{\Omega}$ des fonctions de classe C^k sur $\mathbb{R}^n$ et par $C_0^k\left(\overline{\Omega}\right)$ le sous-espace de $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ formé par les fonctions ayant un support borné dans Ω (rappelons que Ω peut être non borné).

Soit $S(\mathbb{R}^n) = S = \left\{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n); \forall\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, x^\alpha\partial^\beta u \to 0 \text{ quand } |x| \to +\infty\right\}$. S est l'espace des fonctions de classe C^∞ à décroissance rapide à l'infini.

On désigne par $S'(\mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur $S(\mathbb{R}^n)$.

1.2 Classification des domaines

Définition 1.2.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que sa frontière Γ est continue (resp. lipschitzienne, continûment différentiable, de classe $C^{k,1}$, m fois continûment différentiable "k, m des entiers ≥ 1 peuvent prendre la valeur $+\infty$") si pour tout $x \in \Gamma$, il existe un voisinage V de x dans $\mathbb{R}^n$ et des nouveaux axes de coordonnées orthogonaux $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ tels que :*
1.V est un cube dans les nouveaux axes de coordonnées :

$$V = \{(y_{1,...,}y_n) \mid -a_j < y_j < a_j, 1 \leq j \leq n\};$$

2.Il existe une fonction continue (resp. lipschitzienne, continûment différentiable, de classe $C^{K,1}$, m fois continûment différentiable) φ, définie dans

$$V' = \{(y_{1,...,}y_{n-1}) \mid -aj < yj < aj, 1 \leq j \leq n-1\}$$

et telle que :

$$\begin{aligned}
|\varphi(y')| &\leq \frac{a_n}{2} \text{ pour tout } y' = (y_{1,\ldots,}y_{n-1}) \in v', \\
\Omega \cap V &= \{y = (y', y_n) \in V | y_n < \varphi(y')\}, \\
\Gamma \cap V &= \{y = (y', y_n) \in V | y_n < \varphi(y')\}.
\end{aligned}$$

En d'autres termes, dans un voisinage de x, la frontière Γ est le graphe de φ. Nous rappelons que dire que φ est de classe $C^{K,1}$ signifie qu'elle est continûment différentiable et ses dérivées d'ordre k sont lipschitziennes continues.
Si un ouvert Ω a une frontière continue Γ, alors Ω est d'un seul côté de Ω en tout point de Γ. Par exemple, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ n'a pas une frontière continue au sens de la Définition (1.2.1)*.*
De même un domaine avec une fissure ne vérifie pas les conditions de la Définition (1.2.1)*.consulter* [13] *pour plus de détails.*

1.3 Les espaces de Sobolev $H^s(\Omega)$

Définition 1.3.1 *On note $H^s(\Omega)$ l'espace des distributions u définies dans Ω telles que :*

1.$D^\alpha u \in L^2(\Omega)$ pour $|\alpha| \leq m$ lorsque $s = m$ est un entier positif.

2.$u \in H^m(\Omega)$ et

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\sigma}} dxdy < +\infty$$

pour $|\alpha| = m$ lorsque $s = m + \sigma$ est non entier et positif avec m entier et σ la partie fractionnaire de s, $0 < \sigma < 1$.

On munit $H^s(\Omega)$ de la norme (naturelle)

$$\|u\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

dans le cas 1 et

$$\|u\|_{s,\Omega} = \left(\|u\|_{m,\Omega}^2 + \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\sigma}} dxdy \right)^{\frac{1}{2}}$$

dans le cas 2.

Proposition 1.3.2 *$H^s(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme $\|.\|_{s,\Omega}$.*

Remarque 1.3.3 *dans le cas où Ω est $\mathbb{R}^n$ tout entier, la définition équivalente via la transformation de Fourier est donnée par*

$$H^S(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in s' : \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}u(\varepsilon)|^2 \left(1 + |\varepsilon|^2\right)^s d\varepsilon < +\infty \right\},$$

où $\mathcal{F}u$ désigne la transformée de Fourier de u. De plus l'application

$$u \mapsto \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}u(\varepsilon)|^2 \left(1 + |\varepsilon|^2\right)^s d\varepsilon \right\}^{\frac{1}{2}}$$

définie une norme équivalente sur $H^S(\mathbb{R}^n)$.

Définition 1.3.4 *$H_0^S(\Omega)$ note l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^S(\Omega)$.*

Remarque 1.3.5 *$H_0^S(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme $\|.\|_{s,\Omega}$, car $H_0^S(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $H^S(\Omega)$ donc complet.*

Définition 1.3.6 *pour $s < 0$, $H^S(\Omega)$ est le dual de $H_0^{-S}(\Omega)$.*

Théorème 1.3.7 *(Inégalité de poincaré) On suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une constante $C(\Omega)$ qui ne dépend que du diamètre de Ω telle que*

$$\|u\|_{0,\Omega} \leq C(\Omega) \left\{ \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |\partial_i u(x)|^2 \, dx \right\}^{\frac{1}{2}} \text{ pour tout } u \in H_0^1(\Omega).$$

Corollaire 1.3.8 *soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, on a :*

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq \sqrt{1+c^2(\Omega)} \left(\sum_{i=1}^{n} \|\partial_i u\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \quad \textit{pour tout } u \in H_0^1(\Omega),$$

où $c(\Omega)$ est la constante de l'inégalité de poincaré.

Corollaire 1.3.9 *soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, la semi-norme*

$$|u|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^{n} \|\partial_i u\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme induite par $\|.\|_{1,\Omega}$.

Corollaire 1.3.10 *L'espace $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme $|.|_{1,\Omega}$ est un espace de Hilbert .*

Afin de pouvoir donner un sens aux traces d'une fonction près d'un sommet, nous introduisons encore les espaces suivants :

Définition 1.3.11 *On note $\widetilde{H}^s(\Omega)$ le sous-espace de $H^s(\Omega)$ des fonctions u dont le prolongement $\widetilde{u}$ par zéro hors de Ω appartient à $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Théorème 1.3.12 *Si υ est une fonction de $H_0^1(\Omega)$, la fonction $\widetilde{\upsilon}$, prolongement de υ par 0 dans $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$, apprtient à $H^1(\mathbb{R}^n)$.*

Remarque 1.3.13 *Si le domaine Ω est lipschitzien, la Définition (1.3.11) est équivalente à*

$$\widetilde{H}^s(\Omega) = \left\{ u \in H_0^s(\Omega) \,|\, \frac{D^\alpha u}{\rho^\sigma} \in L^2(\Omega), |\alpha| = m \right\},$$

où $\rho(x)$ désigne la distance de x à la frontière Γ de Ω, et $s = m + \sigma$ pour un entier m et $\sigma \in [0,1]$ (voir Corollary 1.4.4.10 dans [8]). par conséquent, on peut définir une norme sur $\widetilde{H}^s(\Omega)$ par

$$\|u\|_{\sim,s,\Omega} = \left(\|u\|_{s,\Omega}^2 + \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x)|^2}{\rho(x)^{2\sigma}} dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.4 Multiplication

Théorème 1.4.1 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*. soit* $\varphi \in \mathbb{C}_0^k\left(\overline{\Omega}\right)$ *tel que* $K \geq |s|$ *alors* $\varphi u \in H^s(\Omega)$ *(resp.* $H_0^s(\Omega), \widetilde{H}^s(\Omega)$*) pour tout* $u \in H^s(\Omega)$ *(resp.* $H_0^s(\Omega), \widetilde{H}^s(\Omega)$*) et il existe une constante* $K = K(\varphi, s)$ *telle que :*

$$\|\varphi u\|_{s,\Omega} \leq K \|u\|_{s,\Omega}.$$

1.5 Résultats de densité

Nous rappelons ici les principaux résultats de densité. Remarquons que les résultats n'ont été établis que dans le cas d'un domaine à frontière Lipschitzienne.

Théorème 1.5.1 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *à frontière Lipschitzienne. Alors* $D\left(\overline{\Omega}\right)$ *est dense dans* $H^s(\Omega)$ *quel que soit* $s \geq 0$.

Théorème 1.5.2 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *à frontière Lipschitzienne. Alors* $D(\Omega)$ *est dense dans* $\widetilde{H}^s(\Omega)$ *quel que soit* $s \geq 0$.

Théorème 1.5.3 *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *à frontière Lipschitzienne. Alors* $D(\Omega)$ *est dense dans* $H^s(\Omega)$ *quel que soit* $s \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, *autrement dit* $H^s(\Omega) = H_0^s(\Omega)$.

Proposition 1.5.4 $H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ *est dense dans* $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ *pour tout entier* $m \geq 2$.

1.6 Propriété du prolongement, compacité et immersions

Le théoréme de prolongement est une propriété fondamontale des espaces de Sobolev qui permet de prolonger une fonction de $H^s(\Omega)$ à travers la frontière de Ω en une fonction de $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 1.6.1 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière Lipschitzienne. Alors, quel que soit $s > 0$ il existe un opérateur linéaire et continu P_s de $H^s(\Omega)$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ tel que :*

$$P_s u_{|\Omega} = u \forall u \in H^s(\Omega),$$

où $P_s u_{|\Omega}$ est la restriction de u sur Ω au sens des distributions.
On trouve une démonstration de ce théorème dans [13]. *Le théorème de prolongement permet de généraliser certains résultats valables sur $\mathbb{R}^n$ à des ouverts à frontière Lipschitzienne. Ainsi, on retrouve les théorèmes d'injection habituels.*

Théorème 1.6.2 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière Lipschitzienne. Alors, l'injection de $H^s(\Omega)$ dans $H^t(\Omega)$ est compacte pour $s > t \geq 0$.*

Théorème 1.6.3 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière Lipschitzienne. Alors,*

$$H^s(\Omega) \subseteq C^k\left(\overline{\Omega}\right) \text{ si } k < s - \frac{n}{2}.$$

Le théorème suivant précise le lien entre les espaces $H_0^S(\Omega)$ et $\widetilde{H^s}(\Omega)$.

Théorème 1.6.4 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière Lipschitzienne. Alors pour $u \in H_0^S(\Omega)$ et $|\alpha| \leq s$ avec $s - \frac{1}{2}$ est un non entier, on a :*

$$\frac{D^\alpha u}{\rho^{s-|\alpha|}} \in L^2(\Omega).$$

De plus :

$$\widetilde{H}^s(\Omega) = H_0^S(\Omega) \text{ si } s - \frac{1}{2} \geq 0 \text{ n'est pas un entier et} \tag{1.6.1}$$

$$\widetilde{H}^s(\Omega) = H^S(\Omega) = H_0^S(\Omega) \text{ si } 0 \leq s < \frac{1}{2}. \tag{1.6.2}$$

si $s - \frac{1}{2}$ est un entier, l'espace $\widetilde{H}^s(\Omega)$ est caractérisé par : l'espace des fonctions $u \in H_0^m(\Omega)$ telles que : $\frac{D^\alpha u}{\sqrt{\rho}} \in L^2(\Omega)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ avec m est la partie entière de s et $|\alpha| = m$, i. e.

$$\widetilde{H}^s(\Omega) = \left\{ u \in H_0^m(\Omega) \,|\, \frac{D^\alpha u}{\sqrt{\rho}} \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Remarque 1.6.5 *La situation se complique lorsque* $s - \frac{1}{2}$ *est un entier : dans ce cas-là,* $\widetilde{H}^s(\Omega)$ *est un espace strictement inclus mais non fermé dans* $H_0^1(\Omega)$ $(D(\Omega)$ *étant à la fois dense dans* $\widetilde{H}^s(\Omega)$ *et* $H_0^S(\Omega))$. *par ailleurs, on avait dit Définition* (1.3.6) *que, pour* $s \geq 0$, $H^{-s}(\Omega)$ *était le dual de* $H_0^S(\Omega)$. *Evidemment, d'après* (1.6.1), *c'est aussi le dual de* $\widetilde{H}^s(\Omega)$ *si* $s - \frac{1}{2}$*n'est pas un entier, par contre, on aura besoin d'introduire une autre notation justement pour le dual de* $\widetilde{H}^s(\Omega)$ *dans le cas où* $s - \frac{1}{2} \in \mathbb{N}$. *On note alors* $\widetilde{\widetilde{H}}^s(\Omega)$ *cet espace qui contient l'espace* $\widetilde{\widetilde{H}}^s(\Omega)$.

Fonctions ayant une singularité isolée

Nous donnons ici un critère qui permet de vérifier si ou non une fonction appartient à un espace de Sobolev donné.

Proposition 1.6.6 *Soit* Ω *un polygone du plan. Supposons que* $0 \in \Gamma$. *soit* V *un voisinage de* 0 *tel que :*

$$V \cap \overline{\Omega} = \{(x, y)\} = r(\cos\theta, \sin\theta)\,|0 \leq r \leq R, a \leq \theta \leq b$$

pour un réel positif R *et* $b - a < 2\Pi$. *Soit enfin* u *une fonction régulière dans* $\overline{\Omega}\backslash\{0\}$ *qui coïncide avec* $r^\alpha\varphi(\theta)$ *dans* $V \cap \overline{\Omega}$, φ *appartenant à* $H^{S0}(]a, b[)$. *Alors, quel que soit* $s < s_0$, *on a :*

$$U \in H^S(\Omega) \;\; si\ \alpha < s - 1 \tag{1.6.3}$$

$$u \notin H^S(\Omega) \;\; si\ \alpha \leq s - 1 \;\; et\ r^\alpha\varphi(\theta) \notin \mathbb{R}[x, y], \tag{1.6.4}$$

où $\mathbb{R}[x, y]$ *désigne l'anneau des polynômes en coordonnées cartésiennes* x *et* y.

1.7 La géométrie polygonale

Nous allons donner dans ce paragraphe les notations concernant les domaines polygonaux de $\mathbb{R}^2$. Nous appelons "polygone du plan" un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ à frontière Lipschitzienne et polygonale (ce qui exclut un domaine contenant une fissure ou coupure). La frontière Γ est constituée des segments Γ_j, $J = 1, ..., N$ où les Γ_j sont deux à deux disjoints. On note M_j le sommet commun aux arêtes Γ_j et Γ_{j+1} qui forment l'angle ω_j vers l'intérieur de Ω. Enfin, n_j désigne la normale orientée vers l'extérieur de Ω et τ_j la tangente dans le sens direct. Il est clair qu'un domaine polygonal vérifie les conditions de la Définition (1.2.1) puisque chaque arête Γ_j peut être représentée par une fonction $f : x \to ax + b$, f est Lipschitzienne car :

$$|f(x) - f(y)| = |a|\,|x - y|\,.$$

Coordonnées locales

Dans la suite, nous serons souvent amenés à regarder le comportement d'une fonction localement au voisinage d'un sommet Mj. A cet effet, il est utile d'introduire des coordonnées polaires locales par rapport à M_j : soit M un point quelconque du plan, on note r_j la distance de M à Mj et θ_j l'angle entre Γ_{j+1} et $\overline{M_j M}$. Par conséquent, Γ_j est supporté par le demi-axe $\theta_j = \omega_j$ et Γ_{j+1} se trouve sur le demi-axe $\theta_j = 0$. Les coordonnées cartésiennes locales sont alors définies par

$$x_j = r_j \cos \theta_j \text{ et } y_j = r_j \sin \theta_j.$$

et Γ_{j+1} est un segment de la droite de l'equation $y_j = 0$.

1.8 Un résultat de densité pour les fonctions s'annulant aux singularités

Nous énonçons dans ce paragraphe un résultat de densité pour les fonctions de $H^1(\Omega)$ qui s'annulent au voisinage des singularités géométrique.

Lemme 1.8.1 *Soit Ω un polygone du plan. Le sous-espace de $H^1(\Omega)$, constitué des fonctions qui s'annulent au voisinage des coins, est dense dans $H^1(\Omega)$.*

Du Lemme (1.8.1), *on déduit facilement le résultat suivant pour les espaces de traces correspondants. On désigne par $\Pi_{j=1}^N D(\Gamma_j)$ l'espace des fonctions définies sur Γ dont la restriction à chaque Γ_j appartient à $D(\Gamma_j)$, Γ_j étant une arête du bord de Ω.*

Corollaire 1.8.2 *L'espace $\Pi_{j=1}^N D(\Gamma_j)$, Γ_j est dense dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.*

1.9 Théorèmes de traces sur un domaine polygonal

A partir de maintenant, on s'intéresse à des domaines polygonaux de $\mathbb{R}^2$. Nous allons, dans un premier temps, caractériser les traces sur Γ des fonctions de $H^1(\Omega)$. Nous adoptons la notation ds pour la mesure de longueur sur Γ. Conformément à la Définition (1.3.1), on introduit l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$:

Définition 1.9.1 *On note $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ l'espace des fonctions $f \in L^2(\Gamma)$ telles que :*

$$\int_\Gamma \int_\Gamma \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^2} ds(x) ds(y) < +\infty. \tag{1.9.1}$$

Théorème 1.9.2 *L'application "trace" $u \mapsto u_{|\Gamma}$ qui est bien définie sur $C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ se prolonge par densité en un opérateur linéaire continu surjectif, γ de $H^1(\Omega)$ sur $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, dont le noyau est l'espace $H_0^1(\Omega)$.*

Afin de mieux caractériser l'espace des traces $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, on considère la restriction à chacune des arêtes Γ_j des éléments de $H^1(\Omega)$. Comme chaque Γ_j est un ouvert de R, la restriction $f_j = f_{|\Gamma_j}$ d'un élément de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ appartient à $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$ au sens de la Définition (1.3.1).

Au voisinage des sommets, les éléments de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ satisfont certaines conditions de raccord qui sont précisées dans la proposition suivante.

Proposition 1.9.3 *la fonction f appartient à $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ si et seulement si $f_j \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ pour tout j et si en plus (pour ε assez petit)*

$$\int_0^\varepsilon |f_j(x_j(-\sigma)) - f_{j+1}(x_j(+\sigma))|^2 \frac{d\sigma}{\sigma} < +\infty \forall 1 \leq j \leq N, \tag{1.9.2}$$

où, la notation $x_j(+\sigma)$ (resp. $x_j(-\sigma)$) désigne le point de Γ_{j+1} (resp. Γ_j) à distance σ du sommet M_j.
On peut dire que la condition (1.9.2) *exprime le fait que les fonctions f_j et f_{j+1} se raccordent en M_j en un sens faible, et on écrit, pour alléger les notations,*

$$f_j = f_{j+1} \text{ en } M_j.$$

Efin, on introduit encore l'opérateur linéaire continu surjectif de $H^1(\Omega)$ sur $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$ qui définit la trace d'une fonction sur Γ_j par

$$\gamma_j u = (\gamma u)_{\setminus \Gamma_j}. \tag{1.9.3}$$

Corollaire 1.9.4 *L'application*

$$u \mapsto \left\{\gamma_j u\right\}_{j=1}^N$$

est linéaire continue et surjective de $H^1(\Omega)$ *sur le sous-espace de* $\Pi_{j=1}^{N} H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$ *définie par les conditions de raccord suivantes :*

$$\gamma_j u = \gamma_{j+1} u \text{ au point } M_j, \forall_j = \overline{1, N}.$$

Traces des éléments de $H^m(\Omega)$

La situation se revèle plus compliquée si on s'intéresse aux traces des fonctions appartenant à l'espace $H^m(\Omega)$ pour $m > 1$. Dans la suite, nous n'aurons besoin de donner un sens à ces traces que si $m = 2$. Ainsi, nous allons caractériser l'espace des traces dans ce cas spécifique et nous renvoyons à [9] pour un entier m quelconque.

Considérons dans un premier temps les traces d'une fonction de $H^2(\Omega)$ sur une seule arête Γ_j.

Proposition 1.9.5 *Soit Ω un polygone du plan. Alors, quel que soit j, l'application*

$$u \mapsto \left\{\gamma_j u, \gamma_j \partial_{nj} u\right\}$$

qui est définie pour $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ se prolonge de façon continue en une application linéaire et surjective de $H^2(\Omega)$ sur $H^{\frac{2}{3}}(\Gamma_j) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$.

Remarque 1.9.6 *Si Ω est un domaine régulier (de classe $C^{1,1}$ au moins), on peut identifier $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ à l'espace des traces sur Γ des éléments de $H^2(\Omega)$. en revanche, dans le cas d'un polygone, on se heurte à la difficulté que l'on ne sait définir $H^s(\Gamma)$ que si $s \leq 1$ (la définition de $H^s(\Gamma)$ pour $s > 1$ nécessitant une surface Γ plus réguliere). L'espace des traces de $H^2(\Omega)$ n'est donc pas un espace de Sobolev usuel, d'où l'idée de travailler face par face en précisant las conditions de raccord aux sommets. Pour comprendre l'origine de ces conditions, considérons l'espace des fonctions continûment dérivables, $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$. Si Γ est régulière, il est clair que l'application*

$$u \mapsto \left(u_{|\Gamma}, \partial_n u_{|\Gamma}\right)$$

envoie $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ sur $C^1\left(\overline{\Omega}\right) \times C^0(\Gamma)$. Supposons maintenant que Γest décomposée en morceaux Γ_j. Alors, l'image de $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ par l'application

$$u \mapsto \left(u_{|\Gamma_j}, \partial_n u_{|\Gamma_j}\right) j$$

est le sous-espace de $\Pi_j C^1(\Gamma_j) \times C^0(\Gamma_j)$ constitué des éléments $\{g_j, h_j\}$; qui satisfant en plus les conditions de raccord

$$g_j(M_j) = g_{j+1}(M_j), \tag{1.9.4}$$

$$g_j^{\prime}(M_j) = g_{j+1}^{\prime}(M_j), \tag{1.9.5}$$

$$h_j(M_j) = h_{j+1}(M_j), \tag{1.9.6}$$

aux points d'intersection de Γ_j et Γ_{j+1}.

Dans le cas d'un polygone, on écrit ces mêmes relations en tenant compte du changement de repère (n, τ) *sur les différentes faces* Γ_j.

On est maintenant en mesure de caractériser de façon complète l'espace des traces de $H^2(\Omega)$ *:*

Proposition 1.9.7 *L'image de* $H^2(\Omega)$ *par l'application*

$$u \mapsto \{g_j, h_j\}_{j=1}^N$$

Où l'on a posé $g_j = \gamma_j u$ *et* $h_j = \gamma_j(\partial_{nj} u)$, *est le sous-espace de*

$$\prod_{j=1}^N H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_j) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j),$$

défini par les conditions de raccord

$$g_j(M_j) = g_{j+1}(M_j) \, \forall 1 \leq j \leq N, \tag{1.9.7}$$

$$g_j^{\prime} \equiv -\cos(\omega_j) g_{j+1}^{\prime} + \sin(\omega_j) h_{j+1} \text{ en } M_j \forall 1 \leq j \leq N, \tag{1.9.8}$$

$$h_j \equiv -\cos(\omega_j) h_{j+1} - \sin(\omega_j) g_{j+1}^{\prime} \text{ en } M_j \forall 1 \leq j \leq N. \tag{1.9.9}$$

Remarque 1.9.8 *Ce résultat est en fait un cas particulier du théorème des traces des fonctions de* $H^m(\Omega)$ *pour* m *entier.*

1.10 Une formule de Green sur un polygone

Rappelons d'abord les formules de Green usuelles qui sont valides dans tout domaine Lipschitzien borné suivant Nečas :

Théorème 1.10.1 *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *de frontière Lipschitzienne* Γ. *Alors pour* u, $\upsilon \in H^1(\Omega)$, *on a :*

$$\int_\Omega \upsilon \partial_i u dx = -\int_\Omega u \partial_i \upsilon dx + \int_\Gamma \gamma u \gamma \upsilon n^i d\sigma. \tag{1.10.1}$$

Ici, n^i désigne la i ème composante du vecteur normal à Γ orienté vers l'extérieur de Ω. par conséquent, sous les mêmes hypothèses sur Ω, on a la demi-formule de Green

$$\int_\Omega u\Delta \upsilon dx + \int_\Omega \bigtriangledown u \nabla \upsilon dx = \int_\Gamma \gamma u \gamma\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial n}\right) d\sigma \forall u \in H^1(\Omega) \ \ et\ \upsilon \in H^2(\Omega),$$

ainsi que la formule de Green

$$\int_\Omega u \bigtriangleup \upsilon dx - \int_\Omega \upsilon \bigtriangleup u dx = \int_\Gamma \gamma u \gamma\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial n}\right) d\sigma - \int_\Gamma \gamma \upsilon \gamma\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma \forall u, \upsilon \in H^2(\Omega).$$

Lorsque Ω est un ouvert polygonal borné de $\mathbb{R}^n$, les formules de Green s'énoncent de la façon suivant :

$$(u, \bigtriangleup \upsilon)_\Omega + (\bigtriangledown u, \bigtriangledown \upsilon)_\Omega = \sum_j \left(\gamma_j u, \gamma_j \partial_{nj} \upsilon\right)_{\Gamma_j} \forall u \in H^1(\Omega) \ \ et\ \upsilon \in H^2(\Omega), \qquad (1.10.2)$$

$$(u, \bigtriangleup \upsilon)_\Omega - (\upsilon, \bigtriangleup u)_\Omega = \sum_j \left\{\left(\gamma_j u, \gamma_j \partial_{n_j} \upsilon\right)_{\Gamma_j} - \left(\gamma_j \upsilon, \gamma_j \partial_{n_j} u\right)_{\Gamma_j}\right\} \forall u, \upsilon \in H^2(\Omega), \quad (1.10.3)$$

où $(.,.)_\Omega$ et $(.,.)_{\Gamma j}$ désignent; le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ et $L^2(\Gamma_j)$.

Lemme 1.10.2 *pour toute fonction $u \in H^2(\Omega)$, on a l'estimation suivante :*

$$\|\bigtriangleup u\|_{0,\Omega} \leq \sqrt{2}\, \|u\|_{2,\Omega}. \qquad (1.10.4)$$

Par conséquent, l'opérateur $\bigtriangleup$ est continu de $H^2(\Omega)$, dans $L^2(\Omega)$.

Théorème 1.10.3 *soit Ω un polygone du plan. Alors, l'appliction*

$$\upsilon \longmapsto \left\{\gamma_j \upsilon, \gamma_j \partial_{n_j} \upsilon\right\}$$

se prolonge de façon unique et continue en un opérateur de $D\left(\bigtriangleup, L^2(\Omega)\right)$ dans

$$\widetilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_j) \times \widetilde{H}^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_j).$$

Proposition 1.10.4 *soit $\upsilon \in D\left(\Delta, L^2(\Omega)\right)$. Alors, on a :*

$$(u, \Delta\upsilon)_\Omega - (\upsilon, \Delta u)_\Omega = \sum_j \left\{ \left\langle \gamma_j \partial_{n_j} \upsilon, \gamma_j u \right\rangle_{-\frac{3}{2},\tilde{}} - \left\langle \gamma_j \upsilon, \gamma_j \partial_{n_j} u \right\rangle_{-\frac{1}{2},\tilde{}} \right\} \tag{1.10.5}$$

qelle que soit $u \in H^2(\Omega)$, telle que $\gamma_j u \in \widetilde{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma_j)$ et $\gamma_{n_j} u \in \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$ pour $1 \leq j \leq N$.

Proposition 1.10.5 *Soit $\upsilon \in H^1(\Omega)$ et $\Delta\upsilon \in L^2(\Omega)$. Alors, l'application*

$$\upsilon \mapsto \gamma_j \partial_{n_j} \upsilon$$

qui est bien définie pour les fonctions dans $H^2(\Omega)$ permet un prolongement unique et continu en une application de l'espace $E\left(\Delta, L^2(\Omega)\right)$ dans $\widetilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$. De plus, on a :

$$(\Delta\upsilon, u)_\Omega = -(\nabla\upsilon, \nabla u)_\Omega + \sum_{j=1}^{N} \left\langle \gamma_j \partial_{n_j} \upsilon, \gamma_j u \right\rangle_{-\frac{1}{2},\tilde{}} \tag{1.10.6}$$

quel que soit $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\gamma_j u \in \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$ pour tout $1 \leq j \leq N$.

Chapitre 2

Calcul des solutions singulieres

(*lorsque la séparation de variables est possible en coordonnées polaires)*

Résumé : Dans ce travail on donnera une description explicite de la singularité du la solution faible de problème mélé pour le bilaplacien dans un polygone plan borné. On montre que le compotement singulier de la solution est gouverné par une équation transcendante.

2.1 Formulation du problème

On considère ici un problème gouverné par l'opérateur bilaplacien. Etant donné $f \in L^2(\Omega)$, on cherche u si possible dans $H^4(\Omega)$ solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f \text{ dans } \Omega, \\ u = \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ M(u) = N(u) = 0 \text{ sur } \Gamma_\omega. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

2.2 Transformation du problème

Dans notre étude, on va supposer que la solution $u \in H^2(\Omega_\omega)$. On s'intéresse donc au comportement de la solution du problème (2.1.1). Ici, il suffit de considéré le problème homogène et de séparé les variables en coordonnées polaires. Soit donc

$$u = r^\alpha \psi_\alpha(\theta).$$

On cherche donc les nombres complexes α pour lesquels $r^\alpha \psi_\alpha(\theta)$ est dans $H^2(\Omega_\omega)$ mais n'est pas dans $H^4(\Omega)$. En outre la régularité de u dépend essentiellement de la partie réelle de α solution de l'équation transcendante du problème considéré.

2.2.1 Passage en coordonnées polaires

Dans ce genre de problèmes, il est commode de travailler en coordonnées pôlaires. En coordonnées polaires, on a :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r^3}\frac{\partial^3}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial^4}{\partial r^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{r^4}\frac{\partial^4}{\partial \theta^4} + \frac{4}{r^4}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

En coordonnées polaires, $M(u)$ et $N(u)$ s'écrivent :

$$M(u) = \upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$
$$N(u) = -\frac{1}{r}\frac{\partial^3 u}{\partial \theta \partial^2 r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3} - (1-\upsilon)\left[-\frac{2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2 \partial \theta}\right].$$

Preuve. En coordonnées cartiusiennes, on a :

$$M(u) = \upsilon \Delta u + (1-\upsilon) M_0(u).$$
$$N(u) = -\frac{\partial}{\partial n}\Delta u - (1-\upsilon)\frac{\partial}{\partial s}N_0(u).$$

Calculons $M_0(u)$ en coordonnées polaires. Sur Γ_ω la normale η a pour composantes $(-\sin\omega, \cos\omega)$, donc :

$$\begin{array}{l}
M_0(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} n_1^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} n_1 n_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} n_2^2 \\
= \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\left(\sin^2\omega\sin^2\omega + 2\cos^2\omega\sin^2\omega + \cos^2\omega\cos^2\omega\right) \\
+ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\sin^2\omega\cos^2\omega - 2\cos^2\omega\sin^2\omega + \sin^2\omega\cos^2\omega\right) + \\
\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\,\partial r}\left(-\sin^2\omega\sin\omega\cos\omega + 2\sin^2\omega\sin\omega\cos\omega\right) + \\
\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r}\sin\omega\cos\omega\cos^2\omega - \frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta} 2\sin\omega\cos\omega\cos^2\omega + \\
\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}\left(2\sin^2\omega\sin\omega\cos\omega - 2\sin\omega\cos\omega\left(\sin^2\omega - \cos^2\omega\right)\right) - \\
\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\left(-\sin^2\omega\sin\omega\cos\omega - 2\cos^2\omega\sin\omega\cos\omega + \sin\omega\cos\omega\cos^2\omega\right) + \\
\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\left(\sin^2\omega\sin^2\omega + 2\cos^2\omega\sin^2\omega + \cos^2\omega\cos^2\omega\right).
\end{array}$$

Donc, après un calcul simple on en déduit :

$$M_0(u) = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r} - \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\right)\left(\cos\omega\sin^3\omega + \cos\omega\cos^3\right)$$

et par suit, vu que $\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r} = \frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}$, on a :

$$M_0(u) = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}.$$

Finalement, on obtient l'expression de $M(u)$ en coordonnées .
Calculons $N_0(u)$:

$$\begin{array}{l}
N_0 u = -\left\{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)n_1 n_2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}(n_1^2 - n_2^2)\right\} \\
= -\left[\begin{array}{c}
\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\left(\sin^2\theta - \cos^2\theta\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) - \frac{2}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r}\sin\theta\cos\theta + \\
\frac{4}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}\sin\theta\cos\theta - \frac{2}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\left(\sin^2\theta - \cos^2\theta\right)
\end{array}\right] \times (\sin\theta\cos\theta) \\
- \left[\begin{array}{c}
-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r}\sin^2\theta + \\
\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}(\sin^2\theta - \cos^2\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\cos^2\theta - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\sin\theta\cos\theta
\end{array}\right] \times \left(\sin^2\theta - \cos^2\theta\right) \\
= \frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}
\end{array}$$

Donc après un calcul simple on en déduit l'expréssion de $N(u)$. ■

2.2.2 Séparation des variables en coordonnées polaires

Nous cherchons la solution de notre problème (2.1.1) sous la forme :

$$u(r,\theta) = r^\alpha \psi(\theta) \tag{2.2.1}$$

où α est un nombre complexe.

En substituant (2.2.1) dans la formule de bilaplacien en coordonnées polaires, nous obtenons pour $\psi(\theta)$ une équation différentielle ordinaire dépend analytiquement d'un paramètre complexe α :

$$\psi^{(4)}(\theta) + (2\alpha^2 - 4\alpha + 4)\psi^{(2)}(\theta) + (\alpha^4 - 4\alpha^3 + 4\alpha^2)\psi(\theta) = 0 \tag{2.2.2}$$

Cherchons d'abord une solution générale de (2.2.2). L'équation caractéristique de (3.2.2) s'écrit sous la forme :

$$\lambda^4 + (2\alpha^2 - 4\alpha + 4)\lambda^2 + (\alpha^4 - 4\alpha^3 + 4\alpha^2) = 0 \tag{2.2.3}$$

dont les racines sont :

$$\lambda_{1,2} = \pm i\alpha \text{ et } \lambda_{3,4} = \pm i(\alpha - 2).$$

Donc pour $\alpha \notin \{0, 1, 2\}$, une solution générale de (2.2.2) est la suivante :

$$\psi(\theta) = \sin\alpha\theta c_1 + \cos\alpha\theta c_2 + \sin(\alpha - 2)\theta c_3 + \cos(\alpha - 2)\theta c_4. \tag{2.2.4}$$

Pour $\alpha \in \{0, 2\}$, l'équation (2.2.2) devient :

$$\psi^{(4)}(\theta) + 4\psi^{(2)}(\theta) = 0.$$

Le polynome caracteristique est : $P(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 + 4)$, dont les racines sont :

$$\lambda_{1,2} = 0 \text{ et } \lambda_{2,3} = \pm 2i.$$

Donc la solution générale est :

$$\psi(\theta) = c_1 + \theta c_2 + \cos 2\theta c_3 + \sin 2\theta c_4. \tag{2.2.5}$$

Pour $\alpha = 1$, l'équation (2.2.2) devient :

$$\psi^{(4)}(\theta) + 2\psi^{(2)}(\theta) + \psi(\theta) = 0.$$

Le polynome caracteristique est : $P(\lambda) = (\lambda^2 + 1)^2$, dont les racines sont :

$$\lambda_{1,2} = \pm i \text{ sont des racines double.}$$

Donc la solution générale est :

$$\psi(\theta) = \cos\theta c_1 + \theta\cos\theta c_2 + \sin\theta c_3 + \theta\sin\theta c_4 \tag{2.2.6}$$

Pour définir les constantes c_j, $j = 1$ à 4, nous utilisons les conditions aux limites.

2.3 Equation transcendante gouvernant le comportement singulier

On vient de vérifier que ψ est solution d'un problème aux limites homogène pour une équation différentielle ordinaire d'ordre 4 dans $]0, \omega[$, soit :

$$(E)\left\{\begin{array}{l} \psi^{(4)}(\theta) + (2\alpha^2 - 4\alpha + 4)\psi^{(2)}(\theta) + (\alpha^4 - 4\alpha^3 + 4\alpha^2)\psi(\theta) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \left.\begin{array}{l} \psi(\theta) = 0 \\ \psi^{(1)}(\theta) = 0 \end{array}\right\} \text{ sur } \Gamma_0, \\ \left.\begin{array}{l} \psi^{(2)}(\omega) + \left[v\alpha^2 + \alpha(1-v)\right]\psi(\omega) = 0 \\ \psi^{(3)}(\omega) + \left[(2-v)\alpha^2 - 3\alpha(1-v) + 2(1-v)\right]\psi^{(1)}(\omega) = 0 \end{array}\right\} \text{ sur } \Gamma_\omega. \end{array}\right.$$

Ce problème dépend analytiquement du paramètre complexe $\alpha(v)$ où (v est le coefficient de Poisson fixé) : nous allons déterminer $\mathfrak{G}$ l'ensemble de ses valeurs singulières c'est-à-dire les valeurs $\alpha = \alpha(v)$ telles que le problème ait une solution ψ non nulle. $\mathfrak{G}$ étant défini, la règle sera la suivante :

> (**R**) : Toute solution variationnelle $\psi \in H^2\,]0, \omega[$ correspondant à des données régulières, appartient à $H^s(V)$ pour tout $s < \sigma$, où $\sigma - 1$ est la borne inférieure des parties réelles des nombres appartenant à :
>
> $$\mathfrak{G} \cap \{\operatorname{Re}\alpha(\sigma) > 0\}.$$

Autrement dit :

$$\sigma = Inf\,\{\operatorname{Re}\alpha(v)\,;\alpha(v) \in \mathfrak{G}, \operatorname{Re}\alpha > 0\} + 1.$$

De plus, les premiers termes du développement singulier de ψ (donc de $u = r^\alpha\psi(\theta)$) sont multiples des ψ correspondant à $\operatorname{Re}\alpha(v) = \sigma - 1$. La recherche des termes suivant du développement singulier diffère selon que les $\alpha(v) \in \mathfrak{G}$ vérifiant $\operatorname{Re}\alpha(v) = \sigma - 1$ sont des valeurs singulières, semi-simples ou non du problème (E).

On est ainsi conduit à la proposition suivante :

Le problème (E) détermine ψ (donc u) non nulle lorsque $\alpha \neq (0,1,2)$ est solution de l'équation caractéristique :

$$\sin^2(\alpha-1)\,\omega = \tfrac{4}{(1-\upsilon)(3+\upsilon)} - \tfrac{(1-\upsilon)}{(3+\upsilon)}(\alpha-1)^2\sin\omega \tag{2.3.1}$$

Les valeurs exceptionnelles $\alpha = (0,1,2)$ donnent :

$$\begin{array}{l} \sin^2\omega = \frac{1}{1-\nu} \text{ pour } \alpha = 0,2 \\ \sin^2\omega = \frac{1}{2} \text{ pour } \alpha = 1 \end{array} \tag{2.3.2}$$

Preuve. 1- pour $\alpha\,(\neq 0,\ 1,\ 2)$:

Les conditions aux limites pour $\theta = 0$ sur Γ_0, donnent le système suivant :

$$\begin{cases} c_2 + c_4 = 0 \\ \alpha c_1 + (\alpha-2)\,c_3 = 0 \\ -\alpha(\alpha-1)(1-\upsilon)\sin\alpha\omega c_1 - \alpha(\alpha-1)\,\upsilon\cos\alpha\omega c_2 + (\alpha-1)\left[4-\alpha(1-\upsilon)\right]\times \\ \sin(\alpha-2)\,\omega c_3 + (\alpha-1)\left[4-\alpha(1-\upsilon)\right]\cos(\alpha-2)\,\omega c_4 = 0 \\ \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1-\upsilon)\cos\alpha\omega c_1 - \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1-\upsilon)\sin\alpha\omega c_2 + (\alpha-1)(\alpha-2)\times \\ \left[(\alpha-2)(1-\upsilon)+4\right]\cos(\alpha-2)\,\omega c_3 - (\alpha-1)(\alpha-2)\left[(\alpha-2)(1-\upsilon)-4\right]\times \\ \sin(\alpha-2)\,\omega c_4 = 0 \end{cases}$$

Ce système admet une solution non identiquement nulle si et seulement si son déterminant est nul. Pour calculer le déterminant on pose : $A = -\alpha(\alpha-1)(1-\upsilon)$, $B = (\alpha-1)\left[4-\alpha(1-\upsilon)\right]$, $C = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1-\upsilon)$ et $D = (\alpha-1)(\alpha-2)\left[(\alpha-2)(1-\upsilon)+4\right]$. Donc

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & (\alpha-2) & 0 \\ A\sin\alpha\omega & A\cos\alpha\omega & B\sin(\alpha-2)\,\omega & B\cos(\alpha-2)\,\omega \\ C\cos\alpha\omega & -C\sin\alpha\omega & D\cos(\alpha-2)\,\alpha\omega & -D\sin(\alpha-2)\,\omega \end{vmatrix} = 0$$

qui est équivalent à :

$$-AC(\alpha-2) - BD\alpha + \left[(\alpha-2)\,BC + AD\alpha\right]\cos\alpha\omega\cos(\alpha-2)\,\omega + \left[(\alpha-2)\,AD + BC\alpha\right] \\ \times\sin\alpha\omega\sin(\alpha-2)\,\omega = 0$$

Après un calcul simple, il vient :

$$(A-B)\left[\alpha D-(\alpha-2)\,C\right] - 2\,(AD-BC)\sin^2(\alpha-1)\,\omega + 2\,(\alpha-1)(AD+BC)\sin^2\omega = 0$$

En utilisant A, B, C et D, on en déduit l'équation (2.3.1).

2- Pour $\alpha = 0, 1, 2,$ .les calcles sont simples. ■

On peut maintenant passer à la :

2.4 Solutions singulières du problème (E)

La présence d'un coin dans la frontière du domaine Ω, considéré ici, provoque certainement des singularités du champ de vecteur déplacement u. Ces singularités qui se traduisent généralement par des valeurs "élevées" voire "infinies" de certaines composantes de u, peuvent suivant le cas, être sans importance, utiles ou inutiles.

Il est bien connu pour ce type du problème, que les solution singulières, dans un voisinage V du sommet O du secteur Ω sont de la forme :

$$\mathfrak{U}(r,\theta) = r^{\alpha}\psi(\theta) \text{ ou } \mathfrak{V}(r,\theta) = r^{\alpha}\left[\log r\psi(\theta) + \partial_{\alpha}\psi(\theta)\right]$$

suivant que α est racine simple ou double de l'équation (2.3.1), où $\psi_{\alpha} \in C^{\infty}([0,\omega])$ est une solution du problème homogène correspondant.

Soit α_k une énumération des racines de l'équation (2.3.1), avec $\alpha \notin \{0,1,2\}$; alors la solution singulière de (E) est donnée par :

$$\mathfrak{U}_k(r,\theta) = r^{\alpha_k}\psi(\theta) \tag{2.4.1}$$

et

$$\mathfrak{V}(r,\theta) = \begin{cases} r^{\alpha_k}\left[\log r\psi(\theta) + \partial_{\alpha_k}\psi(\theta)\right] \text{ si } \omega < 2\pi, \\ r^{\alpha_k}\psi(\theta) \text{ si } \omega = 2\pi. \end{cases} \tag{2.4.2}$$

où α_k est tel que : $1 < \operatorname{Re}\alpha_k \leq m + 4 - \frac{2}{p}$, et ψ est de classe C^{∞} sur $[0,\omega]$

a) si $\omega < 2\pi$:

$$\begin{aligned}\psi(\theta) &= \left[\rho_0\cos\alpha\omega - [\rho_0+4]\cos(\alpha-2)\omega\right]\left[\sin\alpha\theta - \frac{\alpha}{\alpha-2}\sin(\alpha-2)\theta\right] + &(2.4.3)\\ &\left[\rho_0\sin\alpha\omega - \frac{\alpha}{\alpha-2}[\rho_0+4]\sin(\alpha-2)\omega\right]\left[\cos\alpha\theta - \cos(\alpha-2)\theta\right] &(2.1)\end{aligned}$$

b) si $\omega = 2\pi$:

$$\psi(\theta) = \sin\alpha\theta + \cos\alpha\theta - \tfrac{\alpha}{\alpha-2}\sin(\alpha-2)\theta - \cos(\alpha-2)\theta \tag{2.4.4}$$

Preuve. Dans le cas où α égal $0, 1$ et 2, la solution de (E) est régulière. On a :

Pour $\alpha = 0, 2$:

$$\psi(\theta) = \cos 2\omega \left(2\theta - \sin 2\theta\right) + \tfrac{1}{2}\sin 2\omega \left(1 + \cos 2\theta\right) \tag{2.4.5}$$

Pour $\alpha = 1$:

$$\psi(\theta) = \cos\omega\left(\theta\cos\theta - \sin\theta\right) + \sin\omega\left(\theta\sin\theta\right) \tag{2.4.6}$$

I) Solution singulières du problème (E) : Dans ce qui suit nous allons déterminer les solutions singulières du problème homogène (E) et par suite celles du problème non homogène correspondant et ceci dans les deux cas : domaine fissuré et domaine non fissuré.

■

Proposition 2.4.1 *a)* $\omega < 2\pi$ *: Soit* α_k *une énumération des racines* ($\neq 0, 1$ *et* 2) *de l'équation* $(2.3.1)$ *dans la bande*

$$1 < \operatorname{Re}\alpha_k \leq m + 4 - \frac{2}{p} \tag{2.4.7}$$

Une solution générale de $(2.2.2)$ *est donnée par* $(2.2.4)$*. En utilisant Les condition au bord, en* $\theta = 0$*, cela implique :*

$$c_3 = -\frac{\alpha}{\alpha - 2}c_1, c_4 = -c_2 \tag{2.4.8}$$

où

$$\rho_0 = -\alpha\left(1 - \upsilon\right), \rho_1 = \left(\alpha - 2\right)\left(1 - \upsilon\right) \tag{\#}$$

et par suite $(2.4.8)$ *donne le système suivant d'inconnues* c_1 *et* c_2 *:*

$$(S_D)\begin{cases} \left[\rho_0 \sin\alpha\omega - \frac{\alpha}{\alpha-2}\left(4 + \rho_0\right)\sin\left(\alpha - 2\right)\omega\right]c_1 + \left[\rho_0\cos\alpha\omega - \left(4 + \rho_0\right)\cos\left(\alpha - 2\right)\omega\right]c_2 = 0, \\ \left[-\rho_0\cos\alpha\omega - \left[\rho_1 + 4\right]\cos\left(\alpha - 2\right)\omega\right]c_1 + \left[\rho_0\sin\alpha\omega + \left[\rho_1 - 4\right]\sin\left(\alpha - 2\right)\omega\right]c_2 = 0. \end{cases}$$

(S_D) *admet une solution non identiquement nulle si et seulement si son déterminant est nul. Cela donne bien l'équation caractéristique* $(2.3.1)$*. Donc pour tout* ($\alpha \neq 0, 1$ *et* 2)*, réelle ou complexe, solution de* $(2.3.1)$ *les solution du système* (S_D) *décrivent bien une droite, (pour voir cela il suffit de remarquer que* (S_D) *est de la forme :*

$$(s)\begin{cases} a_1x + b_1y = 0, \\ a_2x + b_2y = 0. \end{cases}$$

donc si $det(s) = 0$ *alors* $a_1/b_1 = a_2/b_2$ *et par suite* (s) *se réduit évidemment en une seule équation :* $(a_1/b_1)x + y = 0$ *ou* $(a_2/b_2)x + y = 0$*) donc le choix de* c_1*, par exemple,* *détermine bien les autres* c_i, $i = 2$ *à* 4 *; soit*

$$c_1 = \rho_0 \cos \alpha\omega - [\rho_0 + 4] \cos(\alpha - 2)\omega \ (\rho_0 \textit{ donné par } \#)$$

donc

$$c_2 = \rho_0 \sin \alpha\omega - \frac{\alpha}{\alpha - 2} [\rho_0 + 4] \sin(\alpha - 2)\omega$$

c_3 *et* c_4 *(d'après* (2.4.8) *) d'où* (2.4.3) *et par conséquent* (2.4.1) *et* (2.4.2) *dans le cas où* $\omega < 2\pi$ *et* $(\alpha \neq 0, 1, 2)$.

b) $\omega = 2\pi$ *(cas de la fissure) : Dans ce cas la solution générale* (2.4.3) *de* (2.4.2) *devient après utilisation de la condition au limite en* $\theta = 0$

$$\psi(\theta) = \left[\sin \alpha\theta - \frac{\alpha}{\alpha - 2} \sin(\alpha - 2)\theta\right] c_1 + [\cos \alpha\theta - \cos(\alpha - 2)\theta]\, c_2 \tag{2.4.9}$$

reste à utiliser la condition au bord $\theta = 2\pi$, *on a* $\psi(2\pi) = 0$ *équivant à*

$$\left[\frac{-2}{\alpha - 2} \sin 2\alpha\pi\right] c_1 + [0]\, c_2 = 0$$

donc c_1 *ou* c_2 *est non nulle si et seulement si :* $\frac{-2}{\alpha-2} \sin 2\alpha\pi = 0$ *c'est à dire*

$$\sin 2\alpha_k\pi = 0 \tag{2.4.10}$$

les racines de (2.4.10) *sont les nombres* $\alpha_k = \frac{k}{2}$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$.

On passe maintenant à la proposition 7 :

1) $\alpha = 0$ *: Dans ce cas la solution générale est donnée par* (2.2.5)*. Les conditions au bord, en* $\theta = 0$, *donne :*

$$c_3 = -c_1 \textit{ et } c_4 = -\frac{1}{2} c_2 \tag{2.4.11}$$

les conditions au bord en $\theta = \omega$ *et* (2.4.11) *donnent le système suivant (d'inconnues* c_1 *et* c_2*) :*

$$(S_0) \left\{ \begin{array}{c} 2\cos 2\omega c_1 + \sin 2\omega c_2 = 0, \\ -2\,(1+\nu) \sin 2\omega c_1 + (1+\nu)\,[1 + \cos 2\omega] c_2 = 0. \end{array} \right.$$

donc c_1 *ou* c_2 *est non nulle si et seulement si* $\det(S_0) = 0$, *ce qui donne bien*

$$\sin^2 \omega = \frac{1}{1 - \nu} \tag{2.2}$$

d'où (2.3.5) .

2) $\alpha = 1$ *: Dans ce cas la solution générale est donnée par* (2.2.6)*. Les condition au* *bord, en* $\theta = 0$, *donne :*

$$c_1 = 0 \text{ et } c_3 = -c_2 \tag{2.4.12}$$

Les condition au bord, en $\theta = \omega$ *et* (2.4.12) *donnent le système suivant (d'inconnues* c_2 *et* c_4*) :*

$$(S_1) \begin{cases} \cos\omega c_1 + [\omega\cos\omega + 2\sin\omega] c_2 = 0, \\ -\sin\omega c_1 + [3\cos\omega - \omega\sin\omega] c_2 = 0. \end{cases}$$

donc c_2 *ou* c_4 *est non nulle si et seulement si* $\det(S_1) = 0$, *ce qui donne bien*

$$\sin^2\omega = \frac{1}{2}$$

d'où (2.4.6) .

3) $\alpha = 2$ *: Dans ce cas la solution générale est donnée par* (2.2.5). *Les conditions au bord, en* $\theta = 0$, *donne :*

$$c_3 = -c_1 \text{ et } c_4 = -\frac{1}{2} c_2 \tag{2.4.13}$$

Les conditions au bord, en $\theta = \omega$ *et* (2.4.13) *donnent le système suivant (d'inconnues* c_1 *et* c_2*) :*

$$(S_2) \begin{cases} 4\left[1 + (\nu - 1)\sin^2\omega\right] c_1 + [2\omega(1+\nu) - (\nu - 1)\sin 2\omega] c_2 = 0, \\ 0c_1 + c_2 = 0. \end{cases}$$

donc c_1 *ou* c_2 *est non nulle si et seulement si* $\det(S_2) = 0$, *ce qui donne bien*

$$\sin^2\omega = \frac{1}{1 - \upsilon}$$

d'où (5.2) .

Bibliographie

[1] R. ADAMS, Sobolev spaces, Academic Press, (1975).

[2] S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differntiel equations satisfying genéral boundary conditions I, Communications on Pur and Applied Maths, 12, 1959 P.623-727 et II même journal 17, 1964 p.35-92.

[3] H. BLUM et RANNACHER, On the boundary value problem of the biharmonic operator on domains with angular corners, Math. Methods. App. Sc., 2, 1980, P.556-581.

[4] W. CHIKOUCHE, Etude spectrale du problème de bilaplacien, Thèse de Magister à l'université de constantine, Alger, (2000).

[5] M. DERGUINE, Sur la régularité des solution de quelques problèmes aux limites dans des domaines homogènes, Mémoire de Magister à l'université de Farhat abbas, Alger, (2010).

[6] P. GRISVARD, Boundary value problems in plan polygons. Instructions for use, E.D.F., Bulletin de la Diréction des études et Recherche, serie C, Mathématique no.1, 1986, P.21-59.

[7] K. KATO, Perturbation theory for linear operators, Spring Verlag, New-York 1966.

[8] V.A. KONDRATEV, Boundary problems for Elliptic equation in domains with conical or angular points, Trans. Moscow Maths. SOS., 1967, P.227-313.

[9] J. LIONS et E. MAGENES, Problèmes aux limites non homogènes III et IV, Annadi Scuola Normale Seperiore di Pisa, Vol. 15, 1961 p. 39-101 et p.311-326.

[10] M. MAFLAH, Calcul des solutions singulières par le système de Lamé dans un polygone plan, Thèse de Magister à l'université de Ferhat Abbas, Alger, (1995).

[11] M. MERIGOT, Régularité L_p des problèmes elliptique dans un secteur plan. Thèse de Doctorat d'état à l'université de Nice, France, (1974).

[12] B. MEROUANI, Comportements singuliers des solutions du système de l'élasticité dans un polygone, Thèse de Doctorat d'état, U.S.T.H.B, Alger, nov.(1990).

[13] B. MEROUANI, Quelques problèmes aux limites pour le système de Lamé dans un secteur plan, C.R.A.S., t. 304, série I, no. 13, (1987).

[14] M.A. MOUSSAOUI, Etude, dans les espaces de Holder, des problèmes elliptiques dans un secteur plan et dans les espaces de Sobolev d'un problème à dérivée publique dans un polygone plan, Thèse de Doctorat d'état à l'université de Rennes I, (1987).

[15] V. NECAS, Les métodes directes en théorie des équations elliptiques, Masson, Paris (1972).

[16] M. SALMANI, Comportement singulier des solutions du laplacien, bilaplacien et du systeme de Lamé dans un polygone, Thèse de Magister à l'université de Ferhat Abbas, Alger, (1995).

[17] D. TENIOU, Divers Problèmes théoriques et numériques liés au système de l'élasticité dans des Domaines non réguliers, Thèse de Doctorat d'état à l'université de Nice, France, (1977).