الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Nº Réf :……………

Centre Universitaire
Abd elhafid boussouf Mila

Institut des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: - Filière Mathématiques

- Spécialité Mathématiques Fondamentales et Appliquées

Application de la quasi-réversibilité à un problème parabolique

Préparé par :

- KRIBA Chahrazed
- TABCHOUCHE Messaouda

Soutenue devant le jury :

Président : Mme LAOUIRA widad — M. A .A
Examinateur : Mr LABED Boudjama — M. A. A
Encadrer par : Mme AHMED YEHIA Rakia — M. A. A

Année universitaire : 2014/2015

Remerciement

Premièrement, on remercie le bon Dieu qui nous a donné
La confiance en nous, la santé, la force et la volonté pour
Pouvoir terminer ce travail
D'une part on remercie bien l'enseignant Mne AHMED
YAHIA Rakia qui était chargé de l'encadrement de ce
mémoire et d'autre part on remercie pour ce que
nous avons acquit de lui en matière d'orientation et conseils.
Espérant bien que nos enseignants d'université reçoivent non
Remerciements avec satisfaction et joie pour ce qu'ils
nous donné durant la période d'étude à l'université.
On remercie également les membres qui ont participé du début
Jusqu'à fin de ce travail notamment : Messaouda et Chahra zad
Pour leurs volontés et leurs efforts à fin d' arriver à
ce travail sans oublier tout ceux qui nous ont bien
participé avec nous durant nos études pratique Merci infiniment.

Application de la quasi-réversibilité à un problème parabolique

Tabchouche messaouda et Kriba chahrazad

23 mai 2015

Table des matières

Notation

H : Espace de Hilbert.
$\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels.
A : Opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert.
A^* : opérateur auto-adjoint de l'opérateur A.
λ : valeur propre de l'opérateur A.
$D(A)$: Domaine de définition de l'opérateur A.
$\rho(A)$: Ensemble résolvant de A.
$\sigma(A)$: Spectre d'un opérateur A.
$S(t)$: Semi-groupe.
$\langle ., . \rangle$: Produit scalaire dans l'espace de Hilbert.

Introduction Générale

Les problèmes directes sont caractérisesés par l'existence d'une solution unique qui est stable aux perturbations par rapport aux conditions initiales ou aux limites.

Il est usuel d'appeler de tels problèmes directs des problèmes bien-posés, la notion d'un problème bien-posé est formulée dans un article célèbre de Jacque Hadamard en 1902. Il était convaincu que les modèles mathématiques des phénomènes physiques devaient avoir les propriétés suivantes :

- L'éxistence d'une solution .
- L'unicité de la solution .
- La dépendance continue de la solution par rapport aux données.

Un tel problème est dit bien-posé. Un problème qui n'est pas bien-posé est dit mal-posé.

Ce mémoire, est consacré à l'étude d'une certaine classe de problèmes mal-posés définis par une équation aux dérivées partielles, Il est composé d'une introduction et trois chapitres.

Dans le premier chapitre, On présente des généralités en Analyse fonctionnelle (L'espace de Hilbert, les opérateurs linéaires) et l'équation de la chaleur .

Le deuxième chapitre, traite la définition d'un problème mal-posé et certaines méthodes de régularisations : la méthode de régularisation de Fourier, de Mellification, le principe de Morosov et la méthode de quasi-réversibilité.

Au troisième chapitre, on étude un problème parabolique par la méthode des quasi-valeur aux limites.

Chapitre 1

Généralités

Dans ce chapitre, on appelle quelques définitions et résultats sur les espaces de Hilbert, les opérateurs linéaires et leurs propriétés dans l'espace de Hilbert, les semi-groupes et l'équation de la chaleur.

1.1 Espaces de Hilbert

1.1.1 Quelques définitions

Définition 1.1 *: Soit* E *un* $\mathbb{k}-$*espace vectoriel. un produit scalaire sur E est une forme hermitienne définie positive sur E. Autrement dit, un produit scalaire sur E est une application :*

$$\begin{array}{rcl} \langle , \rangle : E \times E & \longrightarrow & \mathbb{k} \\ (x, y) & \longrightarrow & \langle x, y \rangle \end{array}$$

vérifiant, pour tous $x, \acute{x}, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{k}$, les propriétés suivantes :
1. $\langle x + \acute{x}, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle \acute{x}, y \rangle$ *et* $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$, $\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \, \langle x, y \rangle$
2. $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$
3. $\langle x, x \rangle \geq 0$
4. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
Le nombre $\langle x, y \rangle$ appelé le produit scalaire des x et y

Définition 1.2 *: Un espace de Hilbert $(E, \langle ., . \rangle)$ sur $\mathbb{k}$ est un $\mathbb{k}$-espace vectoriel x muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ tel que l'espace vectoriel normé $(x, \|.\| = \sqrt{\langle ., . \rangle})$ soit complet.*

Exemple 1.1 *: Tout espace euclidien ou hermitien est complet car de dimension finie c'est donc un espace de Hilbert !*

Proposition 1.1 *: Soit $(E, \langle,\rangle)$ un $\mathbb{k}-$espace préhilbertien, muni de la norme associée au produit scalaire, alors : $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ est une application continue de $E \times E$ dans $\mathbb{k}$.*

Proposition 1.2 *: Le complète d'un espace préhilbertien est un espace de Hilbert.*

1.1.2 Bases Hilbertiennes

Définition 1.3 *: Soit $(H, \langle,\rangle)$ un espace préhilbertien. Une famille orthonormale totale de E est appelée base hilbertienne de $(H, \langle,\rangle)$.*

Théorème 1.1 ***(Égalité de Parseval)*** *:*
Soient $(H, \langle,\rangle)$ un espace préhilbertien et $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormale dans H. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de H.

2) Pour tout $x \in H$, la famille $\left(|\langle x, e_i\rangle|^2\right)_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2$$

3) Pour tout $x \in H$, la famille $(\langle x, e_i\rangle e_i)_{i\in I}$ est sommable dans H et on a :

$$x = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i$$

4) Pour tout $x \in H$, la famille $\left(\langle x, e_i\rangle \overline{\langle y, e_i\rangle}\right)_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{k}$ et on a :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle \overline{\langle y, e_i\rangle}$$

1.2 Opérateurs linéaires

Définition 1.4 *: Un opérateur linéaire A de E dans F est une application linéaire A définie sur un sous-espace vectoriel $D(A)$ de E appelé domaine de A défini par :*

$$D(A) = \{u, Au \in E\}.$$

Ainsi, $A : D(A) \subset E \to F$.
On dit que A est borné s'il existe $C \geq 0$ telle que :

$$\forall u \in D(A), |Au|_E \leq C\, |u|_E.$$

On dit sinon que A est borné.

Définition 1.5 *: On dit qu'un opérateur A sur un espace de Hilbert H est positif s'il vérifie $(x, Ax) > 0$ pour tout $x \in H$. On écrit $A \geq B$ si $A - B$ est positif .*

Théorème 1.2 *: Tout opérateur positif A admet un unique opérateur positif B tel que : $A = B^2$. De plus, B commute avec tout opérateur qui commute avec A $\dot{O}$n appelle B la racine carré de A et on note par $\sqrt{A}$.*

Définition 1.6 *: On appelle opérateur compact de E dans F tout élément $T \in \ell(E, F)$ pour lequel l'image de toute partie bornée de E est relativement compacte dans F. On note $K(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F ou simplement $K(E)$ si $E = F$.*

Proposition 1.3 *: L'ensemble des opérateurs compacts est un sous-espace vectoriel fermé de $L(H)$.*

Théorème 1.3 *: Tout opérateur compact est limite d'opérateurs de rang fini.*

Proposition 1.4 *: La composition dans n'importe quel sens d'un opérateur borné et d'un opérateur compact donne un opérateur compact .*

Soient H un espace de Hilbert

Définition 1.7 *: L'opérateur $A \in \ell(H)$ s'appelle auto-adjoint (ou hermitien) si $A^* = A$ (i.e : si A se confond avec son adjoint) ; Conformément à cette définition, A est un opérateur auto-adjoint si pour deux élémens quelconques :*

$$x, y \in H \quad \text{on a} \ \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$$

La possibilité d'envoyer A d'un facteur à l'autre permet d'étudier en détail la classe des opérateurs auto-adjoint. cette possibilité est d'autant plus précieuse que les opérateurs auto-adjoints se trouvent des emplois trés nombreux, notamment en mécanique quantique.

Définition 1.8 *: Soient E et F des espaces de Hilbert.*

1) Un opérateur $U \in \ell(E, F)$ est dit auto-adjoint si l'on a $T^* = T$. On dit aussi symétrique si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou hermitien si $\mathbb{k} = \mathbb{C}$.

2) Un opérateur $U \in \ell(E, F)$ est dit positif s'il est auto-adjoint et si pour tout $x \in E$, on a $\langle T(x), x \rangle \in \mathbb{R}_+$

Proposition 1.5 *: Soient $(H, \langle, \rangle)$ un espace de Hilbert et $T \in \ell(H)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1) Pour tout x, $y \in H$, on a $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle T^*(x), T^*(y) \rangle$.

2) Pour tout $x \in H$, on a $\|T(x)\| = \|T^*(x)\|$.

3) L'opérateur T est normal.

Proposition 1.6 *: Soient* $(H, \langle,\rangle)$ *un espace Hilbert et* $T \in \ell(H)$*. pour tout* x*,* $y \in H$*, on pose* $f(x,y) = \langle T(x), y\rangle$ *:*

1) Si $T = T^*$*, alors pour tout* $x \in H$*, on a* $\langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R}$*.*

2) On a $T = T^*$*si seulement si* f *est une forme hermitienne.*

3) Si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$*, alors* $T = T^*$*si seulement si* f *est une forme bilinéaire symétrique.*

4) Si $\mathbb{k} = \mathbb{C}$*, alors* $T = T^*$ *si et seulement si pour tout* $x \in H$*, on a* $\langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R}$*.*

5) On suppose que $T = T^*$*.Alors* $T(H)$ *est dense dans* H *si et seulement si* f *est non dégénérée.*

Proposition 1.7 ***(Lax- Milgram)*** *:*
Soient $(H, \langle,\rangle)$ *un* $\mathbb{R}-$*espace de Hilbert et* $T \in \ell(H)$*. On suppose qu'il existe* $c > 0$ *tel que pour tout* $x \in H$*, on ait* $c\|x\|^2 \leq |\langle T(x), x\rangle|$*. Alors* T *est bijectif et on a* $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{C}$*.*

1.3 Spectre d'un opérateur

Définition 1.9 *: Soient* E *un* $\mathbb{k}-$*espace vectoriel,* $T : E \to E$ *une application linéaire et* $\lambda \in \mathbb{k}$*. s'il existe un vecteur non nul* $x \in E$ *tel que* $T(x) = \lambda x$*, on dit que :*

1) λ *est une valeur propre de* T*.*

2) x *est un vecteur propre de* T *associé à la valeur propre* λ*.*

Dans ce cas, on appelle sous-espace propre associé à la valeur λ *le sous-espace vectoriel :*

$$\ker(T - \lambda Id_H) = \{x \in H; T(x) = \lambda x\}$$

Autrement dit, le sous-espace propre associé à λ *est l'ensemble de tous les vecteurs propres associés à* λ*.*

Proposition 1.8 *: Soient* $(H, \langle,\rangle)$ *un espace de Hilbert et* $T \in \ell(H)$*.*

1) Si T *est unitaire, alors toutes les valeurs propres de* T *sont de module* 1*.*

2) Si T *est auto-adjoint, alors toutes les valeurs propres de* T *sont réelles.*

3) Si T *est positif, alors toutes les valeurs propres de* T *sont réelles positives.*

Proposition 1.9 *: Soient* $(H, \langle,\rangle)$ *un espace de Hilbert et* $T \in \ell(H)$ *un opérateur normal. Alors on a les propriétés suivantes :*

1) On a $\ker(T) = \ker(T^*)$*.*

2) Pour tout $\lambda \in \mathbb{k}$*, on a* $\ker(T - \lambda Id_H) = \ker\left(T^* - \overline{\lambda} Id_H\right)$*. Autrement dit, soient* $x \in H$ *et* $\lambda \in \mathbb{k}$ *alors on a* $T(x) = \lambda x$ *si et seulement si* $T^*(x) = \overline{\lambda} x$*.*

3) Si λ *et* μ *sont deux valeurs propres distinctes de* T*, alors leurs sous-espace propres associés sont orthogonaux. Autrement dit, on a :*

$$\ker(T - \lambda Id_H) \perp \ker(T - \mu Id_H)$$

Définition 1.10 *: Soit $T \in \ell(E)$ le spectre de T est la partie de $\mathbb{C}$ définie par :*

$$\delta(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, T - \lambda I \text{ n'est pas inversible dans } \ell(E)\ \}$$

les éléments de $\delta(T)$ sont appelés valeurs spectrales.

Définition 1.11 *: Soit X un espace de Banach, $A \in L(X)$,l'ensemble résolvant est :*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{R}; (A - \lambda I) \text{ est bijectif de } X \text{sur } X\}$$

le spectre $\delta(A)$ est le complémentaire de l'ensemble résolvant, $\delta(A) = \mathbb{R} \backslash \rho(A)$.

Définition 1.12 *: On dit que λ est valeur propre, et on note $\lambda \in Vp(A)$ si :*

$$N(A - \lambda I) \neq 0$$

$N(A - \lambda I)$ est l'espace propre associé à λ.

Théorème 1.4 *: Si H est un espace de Hilbert séparable et A un opérateur auto-adjoint compact sur H, alors H admet une base hilbertienne formée de vecteur propres de A.*

1.4 Rappel sur les équations aux dérivées partielles

Une équation aux Dérivées Partielles (EDP) est une équation fonctionnelle qui met en relation des dérivées partielles. Typiquement, si

$$u : \mathbb{R}^n(\Omega \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n\ ) \rightarrow\ \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow\ u(x)$$

est de la forme :

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x), \ldots, D^pu(x)) = 0$$

avec n et p des entiers strictement positives donnés et désigne une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

- L'ordre d'une équation aux dérivées partielles est le plus haut degré de dérivation présent dans l'équation

- La dimension d'une équation aux dérivées partielles est le nombre de variables indépendantes dont dépend la fonction inconnue u.

- Résoude l'EDP consiste donc a déterminer toutes les fonctions u définies sur Ω satisfaisant l'équation .

1.4.1 Classification des EDP

On distingue trios grandes catégories d'équations aux dérivées partielles :

- Les équations de type elliptique dont le prototype est l'équation de poisson donnée par :

$$-\Delta u(x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = f(x),$$

pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$,où $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée l'inconnue et la fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

- Les équations de type paraboliques dont le prototype est l'équation de la chaleur donnée par :

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - \Delta T(x,t) = 0$$

pour tout $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $t > 0$. L'inconnue est la fonction $T : \Omega \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$.

- Les équations de type hyperbolique dont, les prototypes sont :

- L'équation de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + a\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0$$

pour tout $x \in \Omega \subset \mathbb{R}$, tout $t > 0$ et où $a \in \mathbb{R}$ est donné.

- L'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0$$

pour tout $x \in \Omega \subset \mathbb{R}$, tout $t > 0$.

1.4.2 Semi-groupes d'opérateurs linéaires

Définition 1.13 *: Soit X un espace de Banach et soit $(s(t))_{t\geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires continus sur X. On dit que $S(t)$ est un semi-groupe C^0 (ou semi-groupe fortement continu) si :*

a) $S(0) = Id$

b) Pour tout $(t, s) \geq 0, S(t+s) = S(t)S(s)$.

c) Pour tout $x \in X, t \to S(t)x$ est continue de $\mathbb{R}_+$ dans X .

Proposition 1.10 *: Soit $(s(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe C^0, il existe $M \geq 1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\forall t \geq 0, \|S(t)\|_{\ell(X)} \leq Me^{(\lambda t)}$$

Définition 1.14 *: On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe* $(s(t))_{t\geq 0}$ *l'opérateur linéaire (non borné)* , $A : D(A) \to X$ *défini par :*

$$D(A) = \left\{ x \in X, \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \text{ existe dans } X \right\}$$

$$Ax = \lim \frac{1}{t}(S(t)u - u).$$

Proposition 1.11 *: Soit* $S(t)$ *un semi-groupe* C^0 *de générateur infinitésimal* A *alors :*

1) Pour tout $u_0 \in X$, $\int_0^t S(s)\, u_0 \in D(A)$ *et*

$$A \left(\int_0^t S(\tau)\, u_0 d\tau \right) = S(t)\, u_0 - u_0$$

2) Si $u_0 \in D(A)$, *alors* $S(t)u_0 \in D(A)$ *pour tout* $t \geq 0$, $S(t)u_0$ *est de classe* C^1*et*

$$\frac{d}{dt} S(t)u_0 = AS(t)u_0 = S(t)Au_0$$

Théorème 1.5 *: Soit* $S(t)$ *un semi-groupe* C^0, *alors son générateur infinitésimal* A *est fermé et son domaine* $D(A)$ *est dense dans* X.

Théorème 1.6 *: Si* $S(t)$ *et* $T(t)$ *sont deux semi-groupes de même générateur infinitésimal* A, *alors* $S(t) = T(t)$. *On notera souvent* $S(t) = e^{(-At)}$ *l'unique semi-groupe assosié à* A.

Théorème de Hille-yosida

Théorème 1.7 *: Un opérateur* A *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe* $S(t)$ *sur* X *vérifiant* $\|S(t)\| \leq e^{(wt)}$ *avec* $w \in \mathbb{R}$ *si et seulement si :*

1) A *est fermé et de domaine dense,*

2) L'ensemble résolvant de A *contient la demi-droite* $]w, +\infty[$ *et :*

$$\forall \lambda \in \,]w, +\infty[\,, \quad \left\| (A - \lambda Id)^{-1} \right\|_{\ell(X)} \leq \frac{1}{\lambda - w}.$$

Proposition 1.12 *: Un opérateur linéaire* A *est dissipatif si et seulement si*

$$\forall \lambda > 0, \; \forall x \in D(A), \;\; \|(\lambda Id - A)x\| \geq \lambda \|x\|$$

1.4.3 Équation de la chaleur

Considérons l'équation :
$y \in L^2([0,T];H_0^1[0,l]) \cap C([0,T];L^2[0,l])$

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} = 0 & \text{dans } [0,T] \times [0,l], \\ y(0,t) = y(l,t) = 0 & \text{dans } [0,T], \\ y(x,0) = y_0(x) & \text{dans } [0,l]. \end{cases} \tag{1.1}$$

où $T > 0, l > 0$ et $y_0 \in L^2[0,l]$. Nous pouvons récrire l'équation sous la forme : $y \in L^2([0,T];H_0^1[0,l]) \cap C([0,T];L^2[0,l])$ et $\frac{\partial y}{\partial t} \in L^2([0,T];H^{-1}[0,l])$,

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = Ay & \text{dans } L^2([0,T];H_0^1[0,l]), \\ y(0) = y & \text{dans } L^2[0,l]. \end{cases} \tag{1.2}$$

où $A \in \ell(H_0^1[0,l];H^{-1}[0,l])$ est défini par :

$$\langle Ay, z \rangle = -\int_\Omega \nabla_y \nabla_z dx.$$

On peut aussi définir A comme opérateur non borné dans $L^2[0,l]$, en posant :

$$D(A) = H^2[0,l] \cap H_0^1[0,l], \quad Ay = y_{xx}$$

L'équation (1.2) est de la forme :

$$x' = Ax \tag{1.3}$$

Nous souhaiterions donc écrire la solution de l'équation (1.2) sous la forme :

$$y(t) = e^{(At)}y_0$$

Mais A étant un opérateur non borné dans $L^2[0,l]$, l'opérateur $e^{(At)}$ ne peut pas être défini. Essayant de trouver une autre définition pour $e^{(At)}$. pour cela remarquons que la famille $(\Phi_k)_{k\geq 1}$ définie par :

$$\Phi_k = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\frac{k\pi x}{L})$$

est une base hilbertienne de $L^2\,[0,l]$, formée de fonction propres de l'opérateur $(A, D(A))$. Recherche la solution de l'équation (1.1) sous la forme :

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t)\Phi_k(x)$$

Si l'équation (1.3) est vérifie au sens des distributions dans $[0,l] \times [0,T]$, alors g_k vérifie :

$$\acute{g}_k + \frac{k^2\pi^2}{l^2} g_k = 0 \quad \text{dans } [0,T]\,, g_k(0) = y_{0k} = (y_0, \Phi_k)$$

on a donc :

$$g_k(t) = y_{0k} e^{(\frac{-k^2\pi^2 t}{l^2})}$$

on pose :

$$s(t)y_0 = \sum_{k=1}^{\infty} (y_0, \Phi_k) e^{(\frac{-k^2\pi^2 t}{l^2})} \Phi_k(x)$$

Les condition (a) et (b) sont vérifiées par la famille d'opérateur $(s(t))_{t\geq 0}$. D'autre part on a :

$$\lim_{t \to O} \|S(t)y_0 - y_0\|_{L^2[0,l]} = 0$$

Ce sont ces propriétés qui permettent d'étendre la notion d'exponentielle d'opérateur au cas des opérateurs non bornés .

Chapitre 2

Quelques méthodes de régularisation d'un problème parabolique

On représente dans ce chapitre les notions de problèmes bien-posés au sens de Hadamard, quelque exemples de problèmes mal-posés, puis, on donne des méthodes de régularisation connues comme la méthode de Fourier, la méthode de Morosov, la méthode de mellification et la méthode de quasi-réversibilité.

2.1 Problèmes mal-posés

On dit que le problème :

$$Ax = y \tag{2.1}$$

est bien-posé au sens de Hadamard si l'opérateur A a un inverse continue de Y sur X où X et Y sont des espaces vectoriels normé és, s'il vérifie les conditions suivantes :

1) Existence : pour tout $y \in Y$, il existe une solution $x \in X$.

2) Unicité : pour tout $y \in Y$, il n'y a qu'une seule solution $x \in X$

3)Stabilité : La solution x dépend continuûment de la donnée y

Si l'une des conditions n'est pas satisfaite, le problème précédant est dit mal-posé au sens de Hadamard.

Exemple 2.1 *: On considère une matrice A sur $\mathbb{R}$ qui a $p \in \mathbb{N}^*$ lignes et $n > p$ colonnes. le problème du calcul de $x \in \mathbb{R}^n$, en résolvant l'équation $Ax = y$, est un problème mal-posé. Premièrement, il n'est pas du tout sûr qu'il existe une solution à ce problème : pour garantir l'existence il faut supposer que $y \in Im(A)$. Ensuite, la solution n'est pas unique puisque l'application linéaire associée à la matrice A*

n'est pas une bijection. Dans ce cas, il y a une infinité des solutions puisqu'il suffit de rajouter un élément de $\ker(A)$ *pour en obtenir une autre.*

Exemple 2.2 *: Considérons l'espace de Hilbert* l^2 *de la dimension infinie tel que :*

$$x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \ldots) \in l^2 \Rightarrow \left(\sum_{i\geq 1}^{+\infty} x_i^2\right) < +\infty, \;\; et \;\; \|x\|_{l^2} = \left(\sum_{i\geq 1}^{+\infty} x_i^2\right)$$

Soit $A : l^2 \to l^2$ *un opérateur diagonal dans* l^2 *tel que :*

$$Ax = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \cdots, \frac{x_n}{n}, \cdots)$$

Considérons le problème :

$$Ax = y$$

l'inverse A^{-1} *de* A *est donné par :*

$$A^{-1}y = (y_1, 2y_2, \cdots, ny_n, \cdots)$$

Donc on a l'existence de la solution de ce problème pour un certain $y \in l^2$*, et on peut encore montrer facilement l'unicité de la solution. Prenons maintenant :*

$$y_n = (0, 0, \cdots, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, \cdots)$$

donc

$$A^{-1}y_n = (0, 0, \cdots, \sqrt{n}, 0, \cdots)$$

$\|y_n\|_{l^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ *lorsque* n *tend vers* $+\infty$ *, mais* $\left\|A^{-1}y_n\right\|_{l^2} = \sqrt{n} \to +\infty$ *lorsque* n *tend vers* $+\infty$*. Donc on a pas la stabilité de la solution d'où le problème est mal-posé.*

Exemple 2.3 *: Soit le problème suivant :*

$$Au = f$$

$A \in \ell(H, F)$*,* H*,* F *des espaces de Hilbert.*

Si A *est compact et* $R(A)$ *non fermé alors, le problème est mal-posé.*

$R(A)$ *est non fermé* $\Rightarrow$ A^{-1}*est non borné* $\Rightarrow$ *la troisième condition n'est pas donc vérifie. Le problème reste mal posé.*

Exemple 2.4 *: Soit l'équation différentielle*

$$\begin{cases} \grave{u}(x) = u(x) - 1 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Cette équation admet comme solution

$$u(x) = 1 - e^{(x)}$$

Si la condition initiale est donnée par $u(0) = \varepsilon$, *la solution est alors :*

$$v(x) = 1 - (1 - \varepsilon)e^{(x)}$$

De sorte que la différence s'écrit :

$$v(x) - u(x) = \varepsilon e^{(x)}$$

Si x *varie dans l'intervalle* $[0, 30]$, *on a :*

$$v(30) - u(30) = \varepsilon e^{(30)} \simeq 10^{13}\varepsilon$$

Si la précision des calculs est de 10^{-10}, *le problème est numériquement mal-posé, que mathématiquement bien posé.*

2.2 Méthode de régularisation de Fourier

On a utilisé la régularisation de Fourier pour les problèmes mal-posés suivants :
1) Le problème de la chaleur rétrograde homogène.
2) Le problème de la chaleur rétrograde non homogène.

En général la solution de ces problèmes existe avec des conditions restrictives sur l'état final. On trouve la solution exacte et on recherche la solution approchée par la méthode de régularisation de Fourier, et on donne une estimation de l'erreur, et sous certaines conditions on obtient une estimation du type Hölder.

2.2.1 Problème de la chaleur rétrograde homogène sur l'intervalle infini

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}\ , \qquad -\infty < x < +\infty,\ \ 0 \le t < T \\ u(x,T) = \varphi_T(x), \quad -\infty < x < +\infty \end{cases} \tag{2.2}$$

Il est facile de voir que la solution u de ce problème est donnée par la transformation de Fourier :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(i\xi x)} e^{(\xi^2(T-t))} \hat{\varphi}_T(\xi) d\xi \tag{2.3}$$

où $\hat{\varphi}_T$ désigne la transformée de Fourier de φ_T.

Démonstration :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(x,T) = \varphi_T(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \\ u(x,T) = \varphi_T(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right)_{(\xi)} = F(0)_{(\xi)} = 0 \\ F(u(x,T))_{(\xi)} = F(\varphi_T(x))_{(\xi)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)_{(\xi)} - F\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right)_{(\xi)} = F(0)_{(\xi)} = 0 \\ F(u(x,T))_{(\xi)} = F(\varphi_T(x))_{(\xi)} \end{cases}$$

On a :

$$F(u(x,t))_{(\xi)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{(-i\xi x)} u(x,t) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-i\xi x)} u(x,t) dx$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)_{(\xi)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-i\xi x)} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{(-i\xi x)} u(x,t)\right) dx \\ &= \frac{\partial}{\partial t} F(u(x,t))_{(\xi)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t))_{(\xi)} = \frac{\partial}{\partial t} F(u(x,t))_{(\xi)} \tag{2.4}$$

Dans la transformation de Fourier on choisit $supp(u) \in \mathbb{R} \Longrightarrow \exists\, R > 0,\, supp(u) \subset\ [-R, R]$. Donc :

$$F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right)_{(\xi)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} e^{(-i\xi x)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) dx$$

On intègre par parties on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} e^{(-i\xi x)} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\left[e^{(-i\xi x)} u(x,t)\right]_{-R}^{R} + i\xi \int_{-R}^{R} e^{(-i\xi x)} u(x,t) dx \right]$$

Comme :

$$u(R,t) = u(-R,t) = 0$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)_{(\xi)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-R}^{R} e^{(-i\xi x)}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i\xi \int\limits_{-R}^{R} e^{(-i\xi x)}u(x,t)dx$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)_{(\xi)} = i\xi F\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)_{(\xi)}$$

$$F(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t))_{(\xi)} = -\xi^2 F(u(x,t))_{(\xi)} \tag{2.5}$$

Soit le problème :

$$\begin{cases} F\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)_{(\xi)} - F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right)_{(\xi)} = 0 \\ F(u(x,T))_{\xi} = F(\varphi_T(x))_{\xi} \end{cases}$$

De (2.4) et (2.5) On a :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}F(u(x,t))_{(\xi)} + \xi^2 F(u(x,t))_{(\xi)} = 0 \\ F(u(x,T))_{\xi} = F(\varphi_T(x))_{\xi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_t \hat{u}(\xi,t) + \xi^2 \hat{u}(\xi,t) = 0 \\ \hat{u}(\xi,T) = \hat{\varphi}_T(\xi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\hat{u}(\xi,t))' + \xi^2\hat{u}(\xi,t) = 0 \Rightarrow \frac{(\hat{u}(\xi,t))'}{\hat{u}(\xi,t)} = -\xi^2 \Rightarrow (\ln(\hat{u}(\xi,t)))' = -\xi^2$$

$$\Rightarrow \ln(\hat{u}(\xi,t)) = \int -\xi^2 dt$$

Donc

$$\hat{u}(\xi,t) = e^{(-\xi^2 t)}c(\xi) \Rightarrow \begin{cases} \hat{u}(\xi,T) = e^{(-\xi^2 T)}c(\xi) \\ \text{et } \hat{u}(\xi,T) = \hat{\varphi}_T(\xi) \end{cases} \Rightarrow c(\xi) = e^{(\xi^2 T)}\hat{\varphi}_T(\xi).$$

D'où on obtient

$$\hat{u}(\xi,t) = e^{(\xi^2(T-t))}\hat{\varphi}_T(\xi)$$

Où $\hat{u}(\xi,t)$ est la transformation de Fourier de $u(x,t)$ et $\hat{u}(\xi,0) = e^{(\xi^2 T)}\hat{\varphi}_T(\xi)$, ainsi :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{(i\xi x)}\hat{u}(\xi,t)d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{(i\xi x)}e^{(\xi^2(T-t))}\hat{\varphi}_T(\xi)d\xi$$

Alors :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{(i\xi x)}e^{(\xi^2(T-t))}\hat{\varphi}_T(\xi)d\xi$$

est la solution du problème.

Régularisation de Fourier et estimation de l'erreur

Pour $t = T$ on prend $\varphi_T(x)$ la solution exacte et $\varphi_T^\delta(x)$ la solution approchée de $\varphi_T(x)$, Il existe une constante $\delta > 0$ telle que :

$$\left\| \varphi_T - \varphi_T^\delta \right\| \leq \delta \tag{2.6}$$

On note :$\varphi_0(x) = u(x, 0)$ et E une constante telle que :

$$\|\varphi_0\|_{H^s} = (\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\varphi}_0(\xi)|^2 (1 + \xi^2)^s d\xi)^{\frac{1}{2}} \leq E, \forall s \geq 0 \tag{2.7}$$

On a $\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R})}$. où $u(x, t)$ est donnée par (2.3) est une solution exacte , et :

$$u_{\delta,\xi\,\max}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(i\xi x)} e^{(\xi^2(T-t))} \hat{\varphi}_T^\delta(\xi) x_{\max} d\xi \tag{2.8}$$

est une solution approchée de la solution exacte u où $\xi_{\max}$ est une constante positive. L'intervalle $[-\xi_{\max}, \xi_{\max}]$ compact est tel que $u_{\delta,\xi\,\max}(x, t)$ existe et est unique et stable, $x_{\max}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[-\xi_{\max}, \xi_{\max}]$.

Lemme 2.1 *: On a*

$$\|u(x, t) - u_{\delta,\xi\,\max}(x, t)\|$$

$$\leq E^{1-\frac{t}{T}} \delta^{\frac{t}{T}} \left(\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)\right)^{\frac{-(T-t)s}{2T}} \left[1 + \left(\frac{\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)}{\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E}{\delta}\right) + \ln\left(\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)\right)^{\frac{-s}{2T}}} \right)^{\frac{s}{2}} \right] \tag{2.9}$$

où $u(x, t)$ et $u_{\delta,\xi\,\max}(x, t)$ sont donnés par (2.3) et (2.8) où :

$$\xi_{\max} = (\ln((\frac{E}{\delta})^{\frac{1}{T}} (\ln(\frac{E}{\delta})^{\frac{-s}{2T}}))^{\frac{1}{2}} \tag{2.10}$$

Démonstration : On a

$$\|u(x, t) - u_{\delta,\xi\,\max}(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\hat{u}(x, t) - \hat{u}_{\delta,\xi\,\max}(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$= \left\| e^{(\xi^2(T-t))}\hat{\varphi}_T(\xi) - e^{(\xi^2(T-t))}\hat{\varphi}_T(\xi)x_{\max} + e^{(\xi^2(T-t))}\hat{\varphi}_T(\xi)x_{\max} - e^{(\xi^2(T-t))}\hat{\varphi}_T^\delta(\xi)x_{\max} \right\|$$

$$\leq \left\| e^{(\xi^2(T-t))}\hat{\varphi}_T(\xi) - e^{(\xi^2(T-t))}\hat{\varphi}_T(\xi)x_{\max} \right\| + \left\| e^{(\xi^2(T-t))}\hat{\varphi}_T(\xi)x_{\max} - e^{(\xi^2(T-t))}\hat{\varphi}_T^\delta(\xi)x_{\max} \right\|$$

$$= \left(\int\limits_{|\xi|>\xi_{\max}} \left| e^{(\xi^2(T-t))} e^{(-\xi^2 T)} \hat{\varphi}_0(\xi) \right|^2 \frac{(1+\xi^2)^s}{(1+\xi^2)^s} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int\limits_{|\xi|\le\xi_{\max}} \left| e^{(\xi^2(T-t))} (\hat{\varphi}_T^\delta(\xi) - \hat{\varphi}_T(\xi)) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

Puisque :

$$\begin{cases} \hat{\varphi}_T(\xi) = e^{(-\xi^2 T)} \hat{u}(\xi,0) = e^{(-\xi^2 T)} \hat{\varphi}_0(\xi) \\ \text{et } \ \hat{\varphi}_0(\xi) = \hat{u}(\xi,0) \\ \hat{\varphi}_T(\xi)_{x_{\max}} = \begin{cases} \hat{\varphi}_T(\xi) \,; & |\xi| \le \xi_{\max} \\ 0 \,; & |\xi| > \xi_{\max} \end{cases} \end{cases}$$

Alors :

$$\left(\int\limits_{|\xi|>\xi_{\max}} \left| e^{(\xi^2(T-t))} e^{(-\xi^2 T)} \hat{\varphi}_0(\xi) \right|^2 \frac{(1+\xi^2)^s}{(1+\xi^2)^s} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int\limits_{|\xi|\le\xi_{\max}} \left| e^{(\xi^2(T-t))} (\hat{\varphi}_T^\delta(\xi) - \hat{\varphi}_T(\xi)) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int\limits_{|\xi|>\xi_{\max}} \left| e^{(-\xi^2 t)} \hat{\varphi}_0(\xi) \right|^2 \frac{(1+\xi^2)^s}{(1+\xi^2)^s} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int\limits_{|\xi|\le\xi_{\max}} \left| e^{(\xi^2(T-t))} (\hat{\varphi}_T^\delta(\xi) - \hat{\varphi}_T(\xi)) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \sup_{|\xi|>\xi_{\max}} \frac{e^{(-\xi^2 t)}}{|\xi|^s} \left(\int\limits_{|\xi|>\xi_{\max}} |\hat{\varphi}_0(\xi)|^2 (1+\xi^2)^s d\xi \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sup_{|\xi|\le\xi_{\max}} e^{(\xi^2(T-t))} \right) \left(\int\limits_{|\xi|\le\xi_{\max}} \left| \hat{\varphi}_T^\delta(\xi) - \hat{\varphi}_T(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

Puisque :

$$\begin{cases} \|\varphi_0\|_{H^s} = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\varphi}_0(\xi)|^2 (1+\xi^2)^s d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ \text{et } \ \|\varphi_0\|_{H^s} \le E. \end{cases}$$

Donc

$$\sup_{|\xi|>\xi_{\max}} \frac{e^{(-\xi^2 t)}}{|\xi|^s} \left(\int\limits_{|\xi|>\xi_{\max}} |\hat{\varphi}_0(\xi)|^2 (1+\xi^2)^s d\xi \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sup_{|\xi|\le\xi_{\max}} e^{(\xi^2(T-t))} \right) \left(\int\limits_{|\xi|\le\xi_{\max}} \left| \hat{\varphi}_T^\delta(\xi) - \hat{\varphi}_T(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \sup_{|\xi|>\xi_{\max}} \frac{e^{(-\xi^2 t)}}{|\xi|^s} \|\varphi_0\|_{H^s} + \sup_{|\xi|\le\xi_{\max}} e^{(\xi^2(T-t))} \left\| \varphi_T(\xi) - \varphi_T^\delta(\xi) \right\|$$

Comme

$$\begin{cases} \|\varphi_0\|_{H^s} \le E. \\ \text{et } \ \left\| \hat{\varphi}_T(\xi) - \hat{\varphi}_T^\delta(\xi) \right\| = \left\| \varphi_T(\xi) - \varphi_T^\delta(\xi) \right\| \le \delta \end{cases}$$

Alors

$$\sup_{|\xi|>\xi_{\max}} \frac{e^{(-\xi^2 t)}}{|\xi|^s} \|\varphi_0\|_{H^s} + \sup_{|\xi|\le\xi_{\max}} e^{(\xi^2(T-t))} \left\| \varphi_T(\xi) - \varphi_T^\delta(\xi) \right\|$$

$$\leq \frac{e^{(-\xi_{\max}^2 t)}}{|\xi_{\max}|^s}E + e^{(\xi_{\max}^2(T-t))}\delta.$$

Tel que :

$$\xi_{\max} = (\ln((\frac{E}{\delta})^{\frac{1}{T}}(\ln(\frac{E}{\delta}))^{-\frac{S}{2T}}))^{\frac{1}{2}}$$

$$= (\frac{E}{\delta})^{\frac{-t}{T}}(\ln(\frac{E}{\delta}))^{-\frac{S(T-t)}{2T}} E \left(\frac{\ln(\dfrac{E}{\delta})}{\dfrac{1}{T}\ln(\dfrac{E}{\delta})\ln(\ln(\dfrac{E}{\delta}))^{-\dfrac{S}{2T}})} \right)^{\frac{s}{2}} + E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}}(\ln(\frac{E}{\delta}))^{-\frac{S(T-t)}{2T}}$$

Puisque : $(\ln(\dfrac{E}{\delta}))^{\frac{St}{2T}}(\ln(\dfrac{E}{\delta}))^{\frac{-St}{2T}} = 1$, et $\dfrac{St}{2T} - \dfrac{S}{2T} = -\dfrac{S(T-t)}{2T}$ et $(\dfrac{1}{\delta})^{\frac{(T-t)}{T}}\delta = (\dfrac{1}{\delta})^{1-\frac{t}{T}}\delta = \delta^{\frac{t}{T}}$.
Donc :

$$= E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}}(\ln(\frac{E}{\delta}))^{-\frac{S(T-t)}{2T}} \left(\frac{\ln(\frac{E}{\delta})}{\frac{1}{T}\ln(\frac{E}{\delta})\ln(\ln(\frac{E}{\delta}))^{-\frac{S}{2T}})} \right)^{\frac{s}{2}} + E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}}(\ln(\frac{E}{\delta}))^{-\frac{S(T-t)}{2T}}$$

$$= E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}}(\ln(\frac{E}{\delta}))^{-\frac{S(T-t)}{2T}} \left[\left(\frac{\ln(\frac{E}{\delta})}{\frac{1}{T}\ln(\frac{E}{\delta})\ln(\ln(\frac{E}{\delta}))^{-\frac{S}{2T}})} \right)^{\frac{s}{2}} + 1 \right]$$

Ainsi (2.9) est démontrée.

Le choix de $\xi_{\max}$

Pour trouver une estimation de stabilité de type Hölder, On choisit $\xi_{\max}$ par la formule (2.10), c'est-a-dire :

$$\xi_{\max} = (\ln((\frac{E}{\delta})^{\frac{1}{T}}(\ln(\frac{E}{\delta}))^{-\frac{S}{2T}}))^{\frac{1}{2}}, \text{ ou } \ln(\frac{E}{\delta}) > 1, \ \forall s > 0$$

Démonstration : D'après le lemme (2,1), on a :

$$\|u(x,t) - u_{\delta,\xi\max}(x,t)\| \leq \sup_{|\xi|>\xi_{\max}} \frac{e^{(-\xi^2 t)}}{|\xi|^s}E + \sup_{|\xi|\leq\xi_{\max}} e^{(\xi^2(T-t))}\delta$$

$$\leq \frac{e^{(-\xi_{\max}^2 t)}}{|\xi_{\max}|^s}E + e^{(\xi_{\max}^2(T-t))}\delta = e^{(-t\xi_{\max}^2)}\left(\frac{E}{\xi_{\max}^s} + e^{(\xi_{\max}^2 T)}\delta\right)$$

$$\leq \frac{E}{\xi_{\max}^s} + e^{(\xi_{\max}^2 T)}\delta, \quad \text{puisque } \ e^{(-t\xi_{\max}^2)} < 1$$

Donc :

$$\|u(x,t) - u_{\delta,\xi\,\max}(x,t)\| \leq \frac{E}{\xi_{\max}^{s}} + e^{(\xi_{\max}^{2} T)}\delta \tag{2.11}$$

Et par Hölder on a :

$$\|u(x,t) - u_{\delta,\xi\,\max}(x,t)\| \leq 2E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}} \tag{2.12}$$

Par (2.11) (2.12) On trouve que :

$$\frac{E}{\xi_{\max}^{s}} + e^{(\xi_{\max}^{2} T)}\delta \leq 2E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}} = E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}} + E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}}$$

Donc :

$$\frac{E}{\xi_{\max}^{s}} \leq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} \quad \text{et} \quad e^{(\xi_{\max}^{2} T)}\delta \leq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}$$

On pose $M = e^{(\xi_{\max}^{2} T)}\delta$

$$M = e^{(\xi_{\max}^{2} T)}\delta \Rightarrow e^{(\xi_{\max}^{2} T)} = \frac{M}{\delta} \Rightarrow \xi_{\max}^{2} T = \ln\left(\frac{M}{\delta}\right)$$

$$\Rightarrow \xi_{\max}^{2} = \frac{1}{T}\ln\left(\frac{M}{\delta}\right) \Rightarrow \xi_{\max} = \left(\ln\left(\frac{M}{\delta}\right)^{\frac{t}{T}}\right) \tag{2.13}$$

1)

$$\frac{E}{\xi_{\max}^{s}} \leq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} \Rightarrow \frac{1}{\xi_{\max}^{s}} \leq \left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} \Rightarrow \xi_{\max}^{s} \geq \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{t}{T}}$$

$$\Rightarrow T\xi_{\max}^{2} \geq T\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{sT}} \Rightarrow e^{(T\xi_{\max}^{2})} \geq e^{(T\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{sT}})} \Rightarrow M = e^{(T\xi_{\max}^{2})}\delta \geq e^{(T\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{sT}})}\delta$$

$$M \geq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2}\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{s}} \geq E\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{2}\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{s}}$$

Tel que :

$$\frac{\delta}{E} \geq \ln\frac{\delta}{E} \Rightarrow \left(\frac{\delta}{E}\right)^{2} \geq \left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{2}$$

Puisque :

$$\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{2} = \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{2}$$

Donc :

$$M \geq E\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{2}\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{s}}$$

Comme :

$$\frac{E}{\delta} \geq \ln\frac{E}{\delta} \Rightarrow \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{s}} \geq \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{s}}$$

On a

$$M \geq E\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^2\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{s}} \geq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^2\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{s}} = E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{s}+2}$$

Puisque

$$M \geq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{2(\frac{t}{s}+1)} \geq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}$$

Donc

$$M \geq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}} \quad \text{et } M = e^{(T\xi_{\max}^2)}\delta$$

$$\Rightarrow e^{(T\xi_{\max}^2)}\delta \geq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}} \tag{2.14}$$

2)

$$e^{(T\xi_{\max}^2)}\delta \leq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{t}{T}} \Rightarrow M \leq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{t}{T}} \text{ tel que : } M = e^{(T\xi_{\max}^2)}\delta$$

Puisque

$$\frac{\delta}{E} \geq \ln\frac{\delta}{E} \Rightarrow \left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s} \geq \left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{2s} \Rightarrow \left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{-2s} \geq 1$$

Donc

$$M \leq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} 1 \leq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}\left[\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{-2s}\right]$$

$$M \leq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}\left[\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{2s}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{-2s}\right]$$

$$\text{tel que : } \left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{-2s} = \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2s}$$

Puisque

$$\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^2 = \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^2 \Rightarrow \left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{-2s} = \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2s}$$

Alors

$$M \leq E \left(\ln \frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}} \left[\left(\ln \frac{E}{\delta}\right)^{2s} \left(\ln \frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} \left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s} \left(\ln \frac{E}{\delta}\right)^{-2s}\right]$$

$$\leq E \left(\ln \frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}} \left[\left(\frac{\delta}{E}\right)^{-2s} \left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}\right]$$

Puisque

$$\begin{cases} \dfrac{t}{T} > 0 > -2s \\ \text{et : } \dfrac{\delta}{E} < 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} \leq \left(\frac{\delta}{E}\right)^{-2s}$$

Alors

$$\begin{cases} M \leq E \left(\ln \dfrac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}} \\ \text{et : } M = e^{(T\xi_{\max}^2)}\delta \end{cases} \Rightarrow M = e^{(T\xi_{\max}^2)}\delta \leq E \left(\ln \frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}} \tag{2.15}$$

En utilisant (2.14) et (2.15), on a :

$$M = e^{(T\xi_{\max}^2)}\delta \leq E \left(\ln \frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}$$

par (2.13) on a :

$$\xi_{\max} = (\ln((\frac{E}{\delta})^{\frac{1}{T}}(\ln(\frac{E}{\delta}))^{-\frac{S}{2T}}))^{\frac{1}{2}} \quad \text{pour } \ln(\frac{E}{\delta}) > 1. \left(\text{donc : } \frac{E}{\delta} > 1\right) \text{ ; } \forall s > 0$$

Remarque 2.1 *: Il y a plusieurs solutions qui approchent la solution exacte mais pour trouver la solution qui est trés proche il faut choisir $\xi_{\max}$ qui donne l'estimation de type Hölder pour laquelle on a la stabilité.*

2.2.2 Problème de la chaleur rétrograde non homogène

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(x,t) ; \quad -\infty < x < \infty, \ 0 \leq t < T \\ u(x,T) = \varphi_T(x) \end{cases} \tag{2.16}$$

Il est facile de voir que la solution u de ce problème est donnée par

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(i\xi x)} \left(e^{(\xi^2(T-t))}\hat{\varphi}_T(\xi) + \int_t^T e^{(\xi^2(s-t))}\hat{f}(s)ds\right) d\varepsilon \tag{2.17}$$

En effet

Preuve 1 *: En utilisant la transformation de Fourier on a*

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - f(x,t)\right) = 0 \\ (u(x,T))_{(\xi)} = (\varphi_T(x)_{(\xi)} \end{cases}$$

Donc par (2.5) et (2.6) on a

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u}(\xi,t) + \xi^2 \hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(x,t) \\ et : \quad \hat{u}(\xi,T) = \hat{\varphi}_T(\xi) \end{cases} \tag{2.18}$$

On pose : $y(t) = \hat{u}(\xi,t)$*, donc*

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u}(\xi,t) + \xi^2 \hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(x,t) \\ et : \quad \hat{u}(\xi,T) = \hat{\varphi}_T(\xi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'(t) + \xi^2 y(t) = \hat{f}(t) \\ y(T) = \hat{\varphi}_T(\xi) \end{cases}$$

On recherche la solution de l'équation par la méthode de variation des constantes :

$$y'(t) + \xi^2 y(t) = \hat{f}(t)$$

On pose :

$$y(t) = W(t)V(t)$$

$$y(t) = W(t)V(t) \Rightarrow \acute{y}(t) = W\frac{dV}{dt} + V\frac{dW}{dt}$$

Alors :

$$y'(t) + \xi^2 y(t) = \hat{f}(t) \Rightarrow \left(W\frac{dV}{dt} + V\frac{dW}{dt}\right) + \xi^2 W(t)V(t) = \hat{f}(t)$$

$$\Rightarrow W(t)\left(\frac{dV}{dt} + \xi^2 V(t)\right) + V(t)\frac{dW}{dt} - \hat{f}(t) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dV}{dt} + \xi^2 V(t) = 0 \\ V(t)\frac{dW}{dt} = \hat{f}(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} + \xi^2 V(t) = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = -\xi^2 V(t) \Rightarrow \frac{dV}{V} = -\xi^2 dt \Rightarrow V(t) = e^{(-\xi^2 t)} \tag{2.19}$$

$$et \ : V(t)\frac{dW}{dt} = \hat{f}(t) \Rightarrow \frac{dW}{dt} = \frac{\hat{f}(t)}{V(t)} \Rightarrow dW = \frac{\hat{f}(t)}{V(t)}dt = e^{\left(\xi^2 t\right)}\hat{f}(t)\,dt$$

$$\Rightarrow dW = e^{\left(\xi^2 t\right)}\hat{f}(t)\,dt \Rightarrow W(t) = C + \int e^{\left(\xi^2 t\right)}\hat{f}(t)\,dt \tag{2.20}$$

Donc :

$$y(t) = e^{\left(-\xi^2 t\right)}\left(C + \int e^{\left(\xi^2 s\right)}\hat{f}(s)\,ds\right) \Rightarrow y(t) = e^{\left(-\xi^2 t\right)}\left(C + \int_t^T e^{\left(\xi^2 s\right)}\hat{f}(s)\,ds\right)$$

$$et \;\; y(T) = e^{\left(-\xi^2 T\right)} \left(C + \int_t^T e^{\left(\xi^2 s\right)} \hat{f}(s)\, ds \right)$$

$$= \hat{\varphi}_T(\xi) \Rightarrow C = e^{\left(\xi^2 T\right)} \hat{\varphi}_T(\xi)$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{\left(\xi^2 (T-t)\right)} \hat{\varphi}_T(\xi) + \int_t^T e^{\left(\xi^2 (s-t)\right)} \hat{f}(s)\, ds$$

On aura :

$$y(t) = \hat{u}(\xi, t) \Rightarrow \hat{u}(\xi, t) = e^{\left(\xi^2 (T-t)\right)} \hat{\varphi}_T(\xi) + \int_t^T e^{\left(\xi^2 (s-t)\right)} \hat{f}(s)\, ds$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(i\xi x)} \left(e^{\left(\xi^2 (T-t)\right)} \hat{\varphi}_T(\xi) + \int_t^T e^{\left(\xi^2 (s-t)\right)} \hat{f}(s)\, ds \right) d\xi$$

Régularisation de Fourier et estimation de l'erreur :

Comme :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(i\xi x)} \left(e^{\left(\xi^2 (T-t)\right)} \hat{\varphi}_T(\xi) + \int_t^T e^{\left(\xi^2 (s-t)\right)} \hat{f}(s)\, ds \right) d\xi, \quad \text{et } u(x,t) = \varphi_T(x).$$

$$u_{\delta,\xi_{\max}}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(i\xi x)} \left(e^{\left(\xi^2 (T-t)\right)} \hat{\varphi}_T(\xi)\, \chi_{\max} + \int_t^T e^{\left(\xi^2 (s-t)\right)} \hat{f}(s)\, \chi_{\max} ds \right) d\xi.$$

$$\text{Soit } \left\| \hat{g} - \hat{g}^\delta \right\| \leq \beta \text{ où } \hat{g}(\xi, t) = \int_t^T e^{\left(\xi^2 (s-t)\right)} \hat{f}(s) \tag{2.21}$$

Lemme 2.2 *: Si on choisit $\xi_{\max}$ par la formule (2.10) et (2.21) et $\left\| \hat{g} - \hat{g}^\delta \right\| \leq \beta$ alors :*

$$\left\| u(x,t) - u_{\delta,\xi_{\max}}(x,t) \right\|_2$$

$$\leq E \left(\ln \frac{E}{\delta} \right)^{-\frac{s}{2}} \left[\left(\frac{\ln \frac{E}{\partial}}{\frac{1}{T} \ln \left(\frac{E}{\delta} \right) + \ln \left(\ln \frac{E}{\delta} \right)^{-\frac{s}{2T}}} \right)^{\frac{s}{2}} + 1 + \frac{\beta}{E} \left(\ln \frac{E}{\delta} \right)^{\frac{s}{2}} \right] \tag{2.22}$$

Preuve 2 *:*

$$\|u(x,t)-u_{\partial,\xi_{\max}}(x,t)\| = \|\hat{u}(x,t)-\hat{u}_{\partial,\xi_{\max}}(x,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$= \left\| e^{\left(\xi^2(T-t)\right)}\hat{\varphi}_T(\xi) + \int_t^T e^{\left(\xi^2(s-t)\right)}\hat{f}(s)\,ds - e^{\left(\xi^2(T-t)\right)}\hat{\varphi}_T^{\delta}(\xi)\,\chi_{\max} - \int_t^T e^{\left(\xi^2(s-t)\right)}\widehat{f^{\delta}}(s)\,\chi_{\max} ds \right\|$$

$$= \left\| e^{\left(-\xi^2 t\right)}\left(e^{\left(\xi^2 T\right)}\hat{\varphi}_T(\xi) + \int_t^T e^{\left(\xi^2 s\right)}\hat{f}(s)\,ds \right) - e^{\left(-\xi^2 t\right)}\left(e^{\left(\xi^2 T\right)}\hat{\varphi}_T(\xi)\,\chi_{\max} - \int_t^T e^{\left(\xi^2 s\right)}\hat{f}(s)\,\chi_{\max} ds \right) \right.$$

$$+ e^{\left(-\xi^2 t\right)}\left(e^{\left(\xi^2 T\right)}\hat{\varphi}_T(\xi)\,\chi_{\max} - \int_t^T e^{\left(\xi^2 s\right)}\hat{f}(s)\,\chi_{\max} ds \right)$$

$$\left. - e^{\left(-\xi^2 t\right)}\left(e^{\left(\xi^2 T\right)}\hat{\varphi}_T^{\delta}(\xi)\,\chi_{\max} - \int_t^T e^{\left(\xi^2 s\right)}\hat{f}^{\delta}(s)\,\chi_{\max} ds \right) \right\|$$

$$\leq \left\| e^{\left(-\xi^2 t\right)}\left(e^{\left(\xi^2 T\right)}\hat{\varphi}_T(\xi) - e^{\left(\xi^2 T\right)}\hat{\varphi}_T(\xi)\,\chi_{\max} \right) + e^{\left(-\xi^2 t\right)}\left(\int_t^T e^{\left(\xi^2 s\right)}\left(\hat{f}(s) - \hat{f}(s)\,\chi_{\max}\right) ds \right) \right\|$$

$$+ \left\| e^{\left(\xi^2(T-t)\right)}\hat{\varphi}_T^{\delta}(\xi)\,\chi_{\max} - e^{\left(-\xi^2 t\right)}e^{\left(\xi^2 T\right)}\hat{\varphi}_T(\xi)\,\chi_{\max} + e^{\left(-\xi^2 t\right)}\int_t^T e^{\left(\xi^2 s\right)}\left(\hat{f}(s)\,\chi_{\max} - \hat{f}^{\delta}(s)\,\chi_{\max}\right) ds \right\|$$

$$\leq \left(\int_{|\xi|>\xi_{\max}} \left| e^{\left(\xi^2 T\right)}\hat{\varphi}_T(\xi) + \int_t^T e^{\left(\xi^2 s\right)}\hat{f}(s)\,ds \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \left(\int_{|\xi|>\xi_{\max}} \left| e^{\left(-\xi^2 t\right)}e^{\left(-\xi^2 T\right)}\left(\hat{\varphi}_T^{\delta}(\xi) - \hat{\varphi}_T(\xi)\right) + e^{\left(-\xi^2 t\right)}\int_t^T e^{\left(\xi^2 s\right)}\left(\hat{f}(s) - \hat{f}^{\delta}(s)\right) ds \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq e^{\left(-\xi_{\max}^2 t\right)}\left(\int_{|\xi|>\xi_{\max}} \left| e^{\left(\xi^2 T\right)}\hat{\varphi}_T(\xi) + \int_t^T e^{\left(\xi^2 s\right)}\hat{f}(s)\,ds \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ e^{\left(-\xi_{\max}^2 (T-t)\right)}\left(\int_{|\xi|\leq\xi_{\max}} \left| \hat{\varphi}_T^{\delta}(\xi) - \hat{\varphi}_T(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{|\xi|\leq\xi_{\max}} \left| e^{\left(-\xi^2 t\right)}\int_t^T e^{\left(\xi^2 s\right)}\left(\hat{f}(s) - \hat{f}^{\delta}(s)\right) ds \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

Soit

$$l_1 = e^{\left(-\xi_{\max}^2 t\right)}\left(\int_{|\xi|>\xi_{\max}} \left| e^{\left(\xi^2 T\right)}\hat{\varphi}_T(\xi) + \int_t^T e^{\left(\xi^2 s\right)}\hat{f}(s)\,ds \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$l_2 = e^{\left(\xi_{\max}^2 (T-t)\right)} \left(\int\limits_{|\xi| \leq \xi_{\max}} \left| \hat{\varphi}_T^\delta (\xi) - \hat{\varphi}_T (\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$l_3 = \left(\int\limits_{|\xi| \leq \xi_{\max}} \left| e^{\left(-\xi^2 t\right)} \int\limits_t^T e^{\left(\xi^2 s\right)} \left(\hat{f}(s) - \hat{f}^\delta (s) \right) ds \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

1)

$$l_1 = e^{\left(-\xi_{\max}^2 t\right)} \left(\int\limits_{|\xi| > \xi_{\max}} \left| e^{\left(\xi^2 T\right)} \hat{\varphi}_T (\xi) + \int\limits_t^T e^{\left(\xi^2 s\right)} \hat{f}(s)\, ds \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq e^{\left(-\xi_{\max}^2 t\right)} \left(\int\limits_{|\xi| > \xi_{\max}} \left| e^{\left(\xi^2 T\right)} \hat{\varphi}_T (\xi) + \int\limits_0^T e^{\left(\xi^2 s\right)} \hat{f}(s)\, ds \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$puisque: \int\limits_0^T = \int\limits_0^T + \int\limits_t^T \Rightarrow \int\limits_t^T \leq \int\limits_0^T$$

$$\leq e^{\left(-\xi_{\max}^2 t\right)} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(0,\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} .tel\ que\ : \hat{u}(0,\xi) = e^{\left(\xi^2 T\right)} \hat{\varphi}_T (\xi) + \int\limits_0^T e^{\left(\xi^2 s\right)} \hat{f}(s)\, ds$$

$$\leq e^{\left(-\xi_{\max}^2 t\right)} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(0,\xi)|^2 \frac{(1+\xi^2)^s}{(1+\xi^2)^s} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{e^{\left(-\xi_{\max}^2 t\right)}}{(1+\xi_{\max}^2)^{\frac{s}{2}}} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(0,\xi)|^2 \left(1+\xi^2\right)^s d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow l_1 \leq \frac{e^{\left(-\xi_{\max}^2 t\right)}}{\xi_{\max}^s} \left\| \hat{u}(0,\xi) \right\|_{H^S} \leq \frac{e^{\left(-\xi_{\max}^2 t\right)}}{\xi_{\max}^s} E.$$

Ainsi on a :

$$l_1 \leq \frac{e^{\left(-\xi_{\max}^2 t\right)}}{\xi_{\max}^s} E. \tag{2.23}$$

2)

$$l_2 = e^{\left(\xi_{\max}^2 (T-t)\right)} \left(\int\limits_{|\xi| \leq \xi_{\max}} \left| \hat{\varphi}_T^\delta (\xi) - \hat{\varphi}_T (\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq l_2 = e^{\left(\xi_{\max}^2 (T-t)\right)} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{\varphi}_T^\delta (\xi) - \hat{\varphi}_T (\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \leq e^{\left(\xi_{\max}^2 (T-t)\right)} \left\| \varphi_T - \varphi_T^\delta \right\| \leq \delta$$

$$\Rightarrow l_2 \leq e^{\left(\xi_{\max}^2 (T-t)\right)} \delta. \tag{2.24}$$

3)

$$l_3 = \left(\int_{|\xi| \leq \xi_{\max}} \left| e^{\left(-\xi^2 t\right)} \int_t^T e^{\left(\xi^2 s\right)} \left(\hat{f}(s) - \hat{f}^\delta (s) \right) ds \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int_{|\xi| \leq \xi_{\max}} \left| \int_t^T e^{\left(\xi^2 (s-t)\right)} \hat{f}(s) - e^{\left(\xi^2 (s-t)\right)} \hat{f}^\delta (s) \, ds \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{g}(\xi, t) - \hat{g}^\delta (\xi, t) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} = \left\| \hat{g} - \hat{g}^\delta \right\| \leq \beta$$

$$l_3 \leq \beta \tag{2.25}$$

Par (2.23), (2.24) et (2.25), on a :

$$\| \hat{u}(x,t) - \hat{u}_{\delta, \xi_{\max}} (x,t) \|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{e^{\left(-\xi_{\max}^2 t\right)}}{\xi_{\max}^s} E + \beta + e^{\left(\xi_{\max}^2 (T-t)\right)} \delta$$

Puisque :

$$e^{\left(-\xi_{\max}^2 t\right)} \frac{E}{\xi_{\max}^s} + \beta + e^{\left(\xi_{\max}^2 (T-t)\right)} \delta \leq \frac{E}{\xi_{\max}^s} + \beta + e^{(\xi_{\max}^2 T)} \delta$$

Alors :

$$\| \hat{u}(x,t) - \hat{u}_{\delta, \xi_{\max}} (x,t) \|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{E}{\xi_{\max}^s} + \beta + e^{(\xi_{\max}^2 T)} \delta. \tag{2.26}$$

De (2.10), on a :

$$\| \hat{u}(x,t) - \hat{u}_{\delta, \xi_{\max}} (x,t) \|$$

$$= E \left[\frac{1}{\ln \left(\frac{E}{\delta} \right)^{\frac{1}{T}} + \ln \left(\ln \frac{E}{\delta} \right)^{-\frac{S}{2T}}} \right]^{\frac{s}{2}} + \left(\frac{E}{\delta} \right)^{\frac{T}{T}} \left(\ln \frac{E}{\delta} \right)^{-\frac{sT}{2T}} \delta + \beta$$

$$\| \hat{u}(x,t) - \hat{u}_{\delta, \xi_{\max}} (x,t) \|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$\leq E \left(\ln \frac{E}{\delta} \right)^{-\frac{S}{2}} \left[\left[\frac{\ln \frac{E}{\delta}}{\frac{1}{T} \ln \left(\frac{E}{\delta} \right) + \ln \left(\ln \frac{E}{\delta} \right)^{-\frac{S}{2T}}} \right]^{\frac{s}{2}} + \frac{\beta}{E} \left(\ln \frac{E}{\delta} \right)^{-\frac{s}{2}} + \frac{1}{\delta} \delta \right]$$

Ainsi (2.22) est démontrée.

Choix de $\xi_{\max}$:

Pour trouver une estimation de stabilité du type Hölder. On choisit :

$$0 < \beta \leq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{S}{2}}. \tag{2.27}$$

Preuve 3 *: Par le lemme (2.2) et l'estimation de (2.26) et par l'estimation de Hölder (2.12). On a*

$$\left(\frac{E}{\xi_{\max}^{s}} + \beta\right) + e^{\left(\xi_{\max}^{2}T\right)}\delta \leq 2E^{1-\frac{t}{T}}\delta = E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}}$$

Alors

$$\frac{E}{\xi_{\max}^{s}} + \beta \leq E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}} \tag{2.28}$$

et

$$e^{\left(\xi_{\max}^{2}T\right)}\delta \leq E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}} \tag{2.29}$$

1) *Comme*

$$0 < \beta \leq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{S}{2}}, \tag{2.30}$$

On a

$$\frac{\delta}{E} < 1 \Rightarrow \frac{\delta}{E} \geq \left(\frac{\delta}{E}\right)^{2} \Rightarrow \left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} \geq \frac{\delta}{E} \geq \left(\frac{\delta}{E}\right)^{2} \geq \left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{2} = \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} \geq \left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{2} \geq \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}; -\frac{s}{2} < 0 < 2$$

$$\Rightarrow \left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} \geq \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}$$

Donc

$$\beta \leq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{S}{2}} \leq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} = E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}} \Rightarrow \beta \leq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} = E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}}$$

$$\Rightarrow E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}} - \beta \leq E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}}$$

Et on a

$$\frac{E}{\xi_{\max}^{s}} + \beta \leq E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}} \Rightarrow \frac{E}{\xi_{\max}^{s}} \leq E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}} - \beta \leq E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}}$$

Alors

$$\frac{E}{\xi^s_{\max}} \leq E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}} = E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} \Rightarrow \frac{1}{\xi^s_{\max}} \leq \left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} \Rightarrow \xi^s_{\max} \geq \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{t}{T}}$$

$$T\xi^s_{\max} \geq T\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{ST}} \Rightarrow e^{(T\xi^s_{\max})} \geq e^{\left(T\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{ST}}\right)}$$

On pose

$$M = e^{(T\xi^s_{\max})}\delta \Rightarrow M = e^{(T\xi^s_{\max})}\delta \geq \delta e^{\left(T\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{ST}}\right)} = \delta\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{S}} \tag{2.31}$$

$$M \geq \delta e^{\left(T\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{ST}}\right)} = E\left(\frac{\delta}{E}\right)\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{S}}$$

$$\Rightarrow M \geq E\left(\frac{\delta}{E}\right)\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{S}} \geq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^2\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{S}} \;.\; \textit{puisque}\ \frac{\delta}{E} \geq \left(\frac{\delta}{E}\right)^2$$

$$\Rightarrow M \geq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^2\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{S}} \geq E\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^2\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{S}} = E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^2\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{S}}$$

$$\textit{puisque}\ \left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^2 = \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^2$$

$$\Rightarrow M \geq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^2\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{S}}$$

$$\Rightarrow M \geq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^2\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{S}} = E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{S}+2} = E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{2\left(\frac{t}{S}+1\right)}$$

$$\Rightarrow M \geq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{2\left(\frac{t}{S}+1\right)} \geq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{S}{2}}$$

$$\textit{Puisque}\ \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{2\left(\frac{t}{S}+1\right)} \geq \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{S}{2}}$$

On a

$$\begin{cases} M \geq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{S}{2}} \\ et\ \ M = e^{(T\xi^s_{\max})}\delta \end{cases} \Rightarrow e^{(T\xi^s_{\max})}\delta \geq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{S}{2}} \tag{2.32}$$

2) *Par (2.29) on a*

$$M = e^{(T\xi^s_{\max})}\delta \leq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}$$

$$\Rightarrow M \leq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} 1 \leq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}\left(\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{-2s}\right) \text{ puisque } \left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{-2s} \geq 1$$

$$M \leq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}\left(\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{-2s}\right)$$

$$= E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{S}{2}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{S}{2}}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}\left(\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{-2s}\right)$$

$$\Rightarrow M \leq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{S}{2}}\left(\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{2s}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{-2s}\right) \text{ tel que : } \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{2s} \geq \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{S}{2}}$$

$$\Rightarrow M \leq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{S}{2}}\left(\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{2s}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{-2s}\right)$$

$$\Rightarrow M \leq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{S}{2}}\left(\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}\right)$$

$$\text{Tel que : } \left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{-2s} = \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2s}$$

Puisque

$$\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} \leq \left(\frac{\delta}{E}\right)^{-2s}$$

$$\Rightarrow M = e^{\left(T\xi_{\max}^2\right)}\delta \leq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{S}{2}} \tag{2.33}$$

Donc par (2.32) et (2.33) on a :

$$e^{\left(T\xi_{\max}^2\right)}\delta = E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{S}{2}} \Rightarrow e^{\left(T\xi_{\max}^2\right)} = \frac{E}{\delta}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{S}{2}}$$

$$\Rightarrow \xi_{\max}^2 = \frac{1}{T}\ln\left(\frac{E}{\delta}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{S}{2}}\right)$$

d'où

$$\Rightarrow \xi_{\max} = \left(\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E}{\delta}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{S}{2}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

pour : $\ln\frac{E}{\delta} > 1,\ \forall s > 0.$

Ainsi le choix de $\xi_{\max}$ *est prouvé.*

Remarque 2.2 *:*
1) Pour trouver une estimation de type Hölder il faut choisir β *tel que :*

$$0 < \beta \leq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{S}{2}} \tag{2.34}$$

sous les conditions du lemme (2.2).
2) Si : $s = 0$ *alors d'après l'estimation (2.22), on a*

$$\Rightarrow \|u(x,t) - u_{\delta,\xi_{\max}}(x,t)\|_2 \leq E\left[2 + \frac{\beta}{E}\right]$$

$$\Rightarrow \|u(x,0) - u_{\delta,\xi_{\max}}(x,0)\|_2 \leq E\left[2 + \frac{\beta}{E}\right] = 2E + \beta$$

Donc l'estimation d'erreur est bornée par : $2E + \beta$.
3) Soit : $t = 0$ *et* $\delta \to 0^+$ *et* $s > 0$. *Alors*

$$\delta \to 0^+ \Rightarrow \frac{E}{\delta} \to +\infty \Rightarrow \ln\frac{E}{\delta} \to +\infty \Rightarrow \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}} \to 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\delta\to 0^+}\left(\frac{\ln\frac{E}{\delta}}{\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E}{\delta}\right) + \ln\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2T}}}\right)^{\frac{s}{2}} = T^{\frac{s}{2}}$$

$$E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}\left(1 + \left(\frac{\ln\frac{E}{\delta}}{\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E}{\delta}\right) + \ln\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2T}}}\right)^{\frac{s}{2}}\right) \to 0$$

$$\delta \to 0^+ \text{ et } s > 0.$$

Donc la solution est stable pour $t = 0$ *et* $\delta \to 0^+$, $s > 0$.

2.3 Méthode de Tikhonov

2.3.1 Principe de Morosov

On donne ici un exemple de méthode de choix à posteriori du paramètre de régularisation. On expose la plus classique de celles-ci, "the discrepancy principle" de Morosov ou le principe de décalage de Morosov. D'après Kirsch, on présente un principe basé sur la méthode de régularisation de Tikhonov. On assume que $A : X \to Y$ est un opérateur compact et injectif défini entre les deux espaces de Hilbert X et Y avec une image dense $Im(A) \subset Y$.

En étudie encore l'équation $Ax = y$, $y \in Y$. On calcule maintenant le paramètre de régularisation $\alpha = \alpha(\delta) > 0$ tel que la solution de Tikhonov correspondante est la solution de l'équation :

$$\alpha x^{\alpha,\delta} + A^*Ax^{\alpha,\delta} = A^*y^\delta$$

et elle est le minimum de :

$$J_\alpha(x) = \|Ax - y\|^2 + \alpha\|x\|^2$$

qui satisfait à l'équation :

$$Ax^{\alpha,\delta} - y^\delta = \delta$$

On note que le choix du principe de "discordance " garantie d'une part que l'erreur δ est minimum, d'autre part, α est trés petit.

Théorème 2.1 *: soit $A : X \to Y$ est un opérateur linéaire et compact avec une image dense dans Y. soit :*

$$Ax = y, x \in X, y \in Y, y^\delta \in Y \text{ tels que} : \left\|y - y^\delta\right\| \leq \delta < \left\|y^\delta\right\|$$

soit $x^{\alpha(\delta)}$ la solution de Tikhonov satisfaisant $\left\|Ax^{\alpha(\delta)} - y^\delta\right\| = \delta$ pour tout $\delta \in (0, \delta_0)$. Alors :

a) *$x^{\alpha(\delta),\delta} \to x$ pour $\delta \to 0$. Donc "the discrepancy principle" est admissible .*

b) *soit $x = A^*s \in A^*(Y)$ avec $\|s\| \leq E$ alors*

$$\left\|x^{\alpha(\delta),\delta} - x\right\| \leq 2\sqrt{\delta E}$$

Pour cela "the discrepancy principle" est une stratégie de régularisation optimale sous condition $\|(A^*)^{-1}x\| \leq E$.

La détermination de $\alpha(\delta)$ est équivalente au problème de trouver la racine de la fonction inclusion de la forme

$$c_1\delta \leq \left\|Ax^{\alpha(\delta),\delta} - y^\delta\right\| \leq c_2\delta$$

est suffisante pour prouver les assertions du théorème précédent.

Dans le théorème suivant, on prouve que l'ordre de convergence $O\sqrt{\delta}$ est meilleur pour le principe de décalage de Morosov.

Théorème 2.2 *: Soit A un opérateur compact et soit $\alpha(\delta)$ choisit par le principe de décalage. On assume que pour tout $x \in Im(A^*A)$, $y = Ax \neq 0$ et pour toute $\delta_n \rightsquigarrow 0$ et $y^{\delta_n} \in Y$, tel que :*

$$\left\|y - y^{\delta_n}\right\| \leq \delta_n \text{ et } \left\|y^{\delta_n}\right\| > \delta_n$$

pour tout n. La solution Tikhonov correspondante $x^n = x^{\alpha(\delta_n),\delta_n}$ converge vers x plus vite que $\sqrt{\delta_n}$ vers zéro,

$$\frac{1}{\sqrt{\delta_n}} \|x^n - x\|_{n\to\infty} \to 0$$

alors l'image $Im(A)$ est de dimension fini.

2.4 Méthode de mollification

On considère le problème de la chaleur rétrograde homogène suivant :

$$\begin{cases} u_t^v = u_{xx}^v \text{ . tq : } x \in \mathbb{R} \text{ ,} t \in (0,T) \\ \text{et} \quad \|u(.,T) - \varphi(.)\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq \varepsilon. \end{cases} \tag{2.35}$$

$$\|u(.,0)\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq E. \tag{2.36}$$

Ce problème est un problème mal posé.

On associe au problème (2.35) et (2.36) le problème de mollification suivant :

$$\begin{cases} u_t^v = u_{xx}^v ; x \in \mathbb{R} \text{ ,} t \in (0,T) \\ u^v(x,T) = s_v(\varphi)(x) \end{cases} \tag{2.37}$$

C'est un problème bien-posé. Par un choix adéquat du paramètre de mollification on établit une estimation d'erreur du type Hölder. En réalité pour $p = 2$ la méthode de mollification n'est autre que la méthode de la transformée de Fourier à support compact.

2.4.1 Résultats auxiliaires

Pour la méthode de mollification on utilise les résultats auxiliaires suivants :

a) On rappelle que la transformation de Fourier de $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ est définie par

$$F[\varphi](\xi) = \hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{(-i\xi x)} dx$$

b) $\forall K \in L_1(\mathbb{R})$ et $f \in L_1(\mathbb{R})$; $1 \leq p \leq \infty$ on a :

$$K * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y) f(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} K(y) f(y-x) dy$$

$$K \in L_1(\mathbb{R}) \text{ et } f \in L_p(\mathbb{R}) \Rightarrow K * f \in L_p(\mathbb{R}) \text{ et } \|K * f\|_p \leq \|K\|_1 \|f\|_p$$

On note : $\|.\|_{L_p(\mathbb{R})}$ par $\|.\|_p$.

Définition 2.1 *: La fonction $g(z), z \in \mathbb{C}$, est une fonction entière exponentielle de type υ, si elle vérifie les conditions suivantes :*
1) C'est une fonction entière c'est à dire $g(z) = \sum\limits_{k\geq 0} a_k z^k$, à coefficients a_k , et la série converge absolument, $\forall z \in \mathbb{C}$.
2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A_\varepsilon$ un nombre positif ,$\forall z \in \mathbb{C}$, tel que $g(z) \leq A_\varepsilon e^{((\upsilon+\varepsilon)|z|)}$.

Définition 2.2 *: On note $m_{\upsilon,p} = m_{\upsilon,p}(\mathbb{R})$, $(1 \leq p \leq \infty)$, l'ensemble de fonctions entières exponentielles de type υ, de la variable réelle $x \in \mathbb{R}$, à valeurs dans $L_P(\mathbb{R})$.*

Théorème 2.3 *: Si $f \in m_{\upsilon,p} \Rightarrow \hat{f}$ est a un support dans $[-\upsilon, \upsilon]$.*

Théorème 2.4 ***(L'inégalité de Bernstein-NiKol'sKii)*** *:*

$$Si\ f \in m_{\upsilon,p} \Rightarrow \left\| f^{(n)} \right\|_p \leq \upsilon^n \|f\|_p , n = 1, 2, \dots$$

Théorème 2.5 ***(Le Noyau de Dirichlet)*** *:*

$D_\upsilon(x) = \dfrac{\sin(\upsilon x)}{x}$ *dit noyau de Dirichlet vérifie les conditions suivantes :*

1) c'est une fonction entière exponentielle de type υ, dans l'espace $L_p(\mathbb{R})$ telle que : $D_\upsilon(x) \in m_{\upsilon,p} \subset L_2(\mathbb{R})$.

2)

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \hat{D}_\upsilon(x) = \begin{cases} 1;\ sur\ [-\upsilon, \upsilon] \\ 0;\ à\ l'extèrieur\ de\ [-\upsilon, \upsilon] \end{cases}$$

3) $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D_\upsilon(x)\, dx = 1 \quad (\upsilon > 0)$.

4) Pour $f \in L_p(\mathbb{R}) ; p \in (1, \infty)$; la convolution :

$$s_\upsilon(f)(x) = \frac{1}{\pi} D_\upsilon * f = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D_\upsilon(y) f(x-y)\, dy$$

vers $m_{\upsilon,p}$ et $\left\| \frac{1}{\pi} D_\upsilon * f \right\| \leq c_p \|f\|_p$, où : c_p est une constante dépendante seulement de p

5) Si : $\omega \in m_{\upsilon,p} \Rightarrow s_\upsilon(\omega) = \omega$.

6) $F[D_\upsilon * f] = \hat{f}$ sur $[-\upsilon, \upsilon]$.

7) $\|f - s_\upsilon(f)\|_p \leq (1 + c_p) E_\upsilon(f)_p$.

Ici : $E_\upsilon(f)_p = \inf_{g \in m_{\upsilon,p}} \|f - g\|_p$ est une bonne approximation de f dans $m_{\upsilon,p}$.

Théorème 2.6 ***(Noyau de La Vallée Poussin**) :*
La fonction : $V = \frac{1}{\upsilon}\frac{\cos(\upsilon x) - \cos(2\upsilon x)}{x^2}$ *, où* υ *est un nombre positif; est dit noyau de La Vallée Poussin et vérifie les conditions suivantes :*

1) Elle est une fonction entiére du type exponentiel du type 2υ *dans l'espace des fonctions bornées et sommables sur* $\mathbb{R}$.

2) $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|V_\upsilon(x)|\,dx < 2\sqrt{3}$.

3) Pour $f \in L_p(\mathbb{R})$ *, la convolution* $M_\upsilon^1(f)(x) = \frac{1}{\pi}V_\upsilon * f = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}V_\upsilon(y)\,f(x-y)dy$ *appartient à* $m_{2\upsilon,p}$

2.4.2 Méthode de mollification et stabilité

Soit φ^υ une mollification de φ par convolution avec un noyau du type Dirichlet

$$\varphi^\upsilon = s_\upsilon(\varphi)(x) = \frac{1}{\pi}D_\upsilon * \varphi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}D_\upsilon(y) * \varphi(x-y)\,dy.$$

Si $\varphi \in L_p(\mathbb{R}) \Rightarrow \varphi^\upsilon = s_\upsilon(\varphi)(x) \in m_{\upsilon,p}$. Soit le problème de mollification suivant :

$$\begin{cases} u_t^\upsilon = u_{xx}^\upsilon; x \in \mathbb{R}\ ,t \in (0,T) \\ u^\upsilon(x,T) = s_\upsilon(\varphi)(x) \end{cases} \tag{2.38}$$

Estimation de la stabilité

Théorème 2.7 *: Soit* $\varphi \in L_p(\mathbb{R})$ *avec* $p \in (1,\infty)$ *; alors le problème (2.38) admet une solution unique et* $\forall t \in [0,T]$*, la fonction* $u^\upsilon(.,t) \in m_{\upsilon,p}$ *et on a* $\|u^\upsilon(.,t)\|_p \leq \frac{c_p}{\pi}e^{\left((T-t)\upsilon^2\right)}\|\varphi\|_p$*. Si on choisit :* $\upsilon = \sqrt{\frac{1}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}}$ *dans le problème (2.38), alors :*

$$\|u^\upsilon(.,t) - u(.,t)\|_p \leq \left(\frac{c_p}{\pi} + \widetilde{c}_p\right)\varepsilon^{\frac{t}{T}}E^{1-\frac{t}{T}}, \forall t \in [0,T] \tag{2.39}$$

où : $\widetilde{c}_p = (1+c_p)\left(1+2\sqrt{3}\right)e^{\left(\frac{3}{2}\right)}$*, avec* u *solution du problème (2.35) (2.36) et* $u^\upsilon(.,t) = e^{\left((t-T)d^2/dx^2\right)}s_\upsilon(\varphi)(x)$.

Preuve 4 *: puisque* $\varphi \in L_p(\mathbb{R})$ *donc* $\varphi \in m_{\upsilon,p}$*, alors le probléme de Cauchy dans* $m_{\upsilon,p}$ *a une solution unique , et* $u^\upsilon(x,t) = e^{\left((t-T)d^2/dx^2\right)}s_\upsilon(\varphi)(x)$*. Par l'inégalité de Bernstein-Nikolski on aura*

$$\|u^\upsilon(x,t)\|_p = \left\|e^{\left((t-T)d^2/dx^2\right)}s_\upsilon(\varphi)(x)\right\|_p = \left\|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(T-t)^n}{n!}\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}s_\upsilon(\varphi)\right\|_p$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T-t)^n}{n!} \left\| \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} s_\upsilon(\varphi) \right\|_p \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T-t)^n}{n!} \upsilon^{2n} \left\| s_\upsilon(\varphi) \right\|_p$$

On a d'après le théorème (2.4) : $\left\| f^{(n)} \right\|_p \leq \upsilon^n \|f\|_p$ *, si* $f \in m_{\upsilon,p}$*. D'où on a :*

$$s_\upsilon(\varphi) \in m_{\upsilon,p} \Rightarrow \left\| \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} s_\upsilon(\varphi) \right\|_p \leq \upsilon^{2n} \left\| s_\upsilon(\varphi) \right\|_p .$$

Donc, en prenant $s_\upsilon(\varphi) = \frac{1}{\pi} D_\upsilon * \varphi$ *dans cette inégalité, on obtient :*

$$\|u^\upsilon(.,t)\|_p \leq \left\| \frac{1}{\pi} D_\upsilon * \varphi \right\|_p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left((T-t)\upsilon^2\right)^n}{n!}$$

Comme d'après le théorème (2.5), on a $\|D_\upsilon * \varphi\|_p \leq c_p \|\varphi\|_p$ *, alors :*

$$\|u^\upsilon(.,t)\|_p \leq \frac{c_p}{\pi} \|\varphi\|_p e^{\left((T-t)\upsilon^2\right)} \tag{2.40}$$

Considérons maintenant le problème suivant :

$$\begin{cases} \omega_t^\upsilon = \omega_{xx}^\upsilon; x \in \mathbb{R} \ , t \in (0,T) \\ \omega^\upsilon(x,T) = s_\upsilon(u(.,T))(x) \in m_{\upsilon,p} \end{cases} \tag{2.41}$$

Il est clair que ce problème est bien-posé : .

$$\|u^\upsilon(.,t) - u(.,t)\|_p \leq \|u^\upsilon(.,t) - \omega^\upsilon(.,t)\|_p + \|\omega^\upsilon(.,t) - u(.,t)\|_p \tag{2.42}$$

Comme $\omega^\upsilon(x,t) - u^\upsilon(x,t)$ *est une solution de problème (2.38) où* $s_\upsilon(\varphi)$ *, est remplacée par* $s_\upsilon(u(.,T) - \varphi(.))$ *, vu que :* $\|u(.,T) - \varphi(.)\|_p \leq \varepsilon$*. Donc par (2.42), on obtient :*

$$\|\omega^\upsilon(.,t) - u^\upsilon(.,t)\|_p \leq \frac{c_p}{\pi} e^{\left((T-t)\upsilon^2\right)} \|u(.,T) - \varphi(.)\|_p$$

$$\leq \frac{c_p}{\pi} e^{\left((T-t)\upsilon^2\right)} \varepsilon \ \forall t \in [0,T] \ \text{ où : } \|u(.,T) - \varphi(.)\|_p \leq \varepsilon.$$

Alors :

$$\|\omega^\upsilon(.,t) - u^\upsilon(.,t)\|_p \leq \frac{c_p}{\pi} e^{\left((T-t)\upsilon^2\right)} \varepsilon, \ \forall t \in [0,T] \tag{2.43}$$

Il reste à prouver l'estimation $\|\omega^\upsilon(.,t) - u^\upsilon(.,t)\|_p$ *, pour cela on pose :*

$$K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{\left(\frac{-x^2}{4t}\right)}, \forall t > 0 \tag{2.44}$$

Si $u(x,t)$ *est solution de l'équation de chaleur et* $u(.,0) \in L_p(\mathbb{R}), 1 < p \leq \infty$ *on a :*

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,t)\, u(y,0) dy, \ \forall t \in [0,T]$$

Puisque : $u(.,t) \in L_p(\mathbb{R}), 1 < p < \infty$. *et :* $\omega^{\upsilon}(x,t) = s_{\upsilon}(u(x,t))$. *Par la condition (7) du noyau de Dirichlet on trouve :*

$$\|u(.,t) - \omega^{\upsilon}(.,t)\|_p = \|u(.,t) - s_{\upsilon}(u(.,t))\|_p \leq (1 + c_p) E_{\upsilon}(u(x,t))_p$$

car : $\|f - s_{\upsilon}(f)\|_p \leq (1 + c_p) E_{\upsilon}(f)_p$. *Estimons* $E_{\upsilon}(u(x,t))_p$. *On note que* h *est une fonction arbitraire dans* $m_{\upsilon,1}$. *Alors toutes les fonction* $\Psi \in L_p(\mathbb{R}), 1 \leq p \leq \infty$ *; la fonction* $h * \Psi \in m_{\upsilon,p}$. *Donc :*

$$\forall h \in m_{\upsilon,1} \Rightarrow E_{\upsilon}(u(x,t))_p = \inf_{g \in m_{\upsilon,p}} \|u(.,t) - g\|_p . \text{ puisque : } h * u(.,0) \in m_{\upsilon,p}$$

$$E_{\upsilon}(u(x,t))_p = \inf_{g \in m_{\upsilon,p}} \|u(.,t) - g\|_p \leq \|K(.,t) * u(.,0) - h * u(.,0)\|_p$$

$$\leq \|K(.,t) - h\|_1 \|u_0\|_p \leq E_{\upsilon}(K(.,t))_1 E, \text{ car } \|u_0\|_p \leq E$$

$$\Rightarrow E_{\upsilon}(u(x,t))_p \leq E_{\upsilon}(K(.,t))_1 E$$

D'autre part on a :

$$E_{\upsilon}(K(.,t))_1 \leq \left(1 + 2\sqrt{3}\right) e^{\left(\frac{3}{2}\right)} e^{\left(-\upsilon^2 t\right)}$$

Alors

$$\|u(.,t) - \omega^{\upsilon}(.,t)\|_p \leq \tilde{c}_p e^{\left(-\upsilon^2 t\right)} E, \text{ avec : } \tilde{c}_p = \left((1 + c_p)\left(1 + 2\sqrt{3}\right) e^{\left(\frac{3}{2}\right)}\right) \quad (2.45)$$

Ainsi à partir de (2.42) (2.43) et (2.45) on déduit :

$$\|u^{\upsilon}(.,t) - u(.,t)\|_p \leq \frac{c_p}{\pi} e^{\left((T-t)\upsilon^2\right)} \varepsilon + \tilde{c}_p e^{(-\upsilon^2 t)} E, \forall t \in [0,T]$$

Si $\upsilon = \sqrt{\frac{1}{T} \ln \frac{E}{\varepsilon}}$ *Alors*

$$\|u^{\upsilon}(.,t) - u(.,t)\|_p \leq \frac{c_p}{\pi} \frac{E}{\varepsilon} \left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{-t}{T}} \varepsilon + \tilde{c}_p \left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{-t}{T}} E = \left(\frac{c_p}{\pi} + \tilde{c}_p\right) E \left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{-t}{T}}$$

Ainsi (2.39) démontrée.

Proposition 2.1 *: Si* $0 < \upsilon < \sqrt{\frac{3}{2t}}$ *alors* $E_{\upsilon}(K(.,t))_1 \leq \left(1 + 2\sqrt{3}\right) e^{\left(\frac{3}{2}\right)} e^{\left(-\upsilon^2 t\right)}$, υ *est un nombre positif.*

Proposition 2.2 *Pour* $\upsilon \geq \sqrt{\frac{3}{2t}} \Rightarrow E_{\upsilon}(K(.,t))_1 \leq \frac{4}{\pi} e^{\left(-t\upsilon^2\right)}$

Remarque 2.3 *: Le théorème (2.7) affirme que le problème de mollification est un problème bien-posé. Si on choisit correctement le paramètre de mollification on trouve l'estimation d'erreur de type Hölder.*

Théorème 2.8 *: Soit $p \in (1.\infty)$ et u_1 et u_2 deux solutions du problème (2.35) et (2.36) alors :*

$$\|u_1(.,t) - u_2(.,t)\|_p \leq 2\left(\frac{c_p}{\pi} + \widetilde{c_p}\right)\varepsilon^{\frac{t}{T}} E^{1-\frac{t}{T}}. \quad \forall t \in [0,T]$$

Démonstration : Soient u solution de problème (2.35) et (2.36) et u_1^v solution du problème (2.38). D'après le théorème (2.7) :

$$\begin{cases} \|u_1^v(.,t) - u_1(.,t)\|_p \leq \left(\frac{c_p}{\pi} + \widetilde{c_p}\right)\varepsilon^{\frac{t}{T}} E^{1-\frac{t}{T}}.\forall t \in [0,T] \\ \text{et } \|u_2^v(.,t) - u_2(.,t)\|_p \leq \left(\frac{c_p}{\pi} + \widetilde{c_p}\right)\varepsilon^{\frac{t}{T}} E^{1-\frac{t}{T}}.\forall t \in [0,T] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|u_1(.,t) - u_2(.,t)\|_p = \|u_1(.,t) - u_2(.,t) - u_1^v(.,t) + u_1^v(.,t)\|_p$$

Puisque le problème (2.38) admet une solution unique donc $u_1^v(.,t) = u_2^v(.,t)$, et on a :

$$\begin{aligned} \|u_1(.,t) - u_2(.,t)\|_p &\leq \|u_2^v(.,t) - u_2(.,t)\|_p + \|u_1^v(.,t) - u_1(.,t)\|_p \\ &\leq \left(\frac{c_p}{\pi} + \widetilde{c_p}\right)\varepsilon^{\frac{t}{T}} E^{1-\frac{t}{T}} + \left(\frac{c_p}{\pi} + \widetilde{c_p}\right)\varepsilon^{\frac{t}{T}} E^{1-\frac{t}{T}} \\ &= 2\left(\frac{c_p}{\pi} + \widetilde{c_p}\right)\varepsilon^{\frac{t}{T}} E^{1-\frac{t}{T}} \end{aligned}$$

Alors :

$$\|u_1(.,t) - u_2(.,t)\|_p \leq 2\left(\frac{c_p}{\pi} + \widetilde{c_p}\right)\varepsilon^{\frac{t}{T}} E^{1-\frac{t}{T}}.\forall t \in [0,T]$$

Remarque 2.4 *: Dans [10] on utilise la mollification par convolution avec un noyau du type de la Vallée Poussin. Le théorème (2.8) est une amélioration importante du résultat suivant : Il existe une constante c^*, telle que :*

$$\|u_1(.,t) - u_2(.,t)\|_p \leq 4\sqrt{3}\left((c^*E)^{1-\frac{t}{T}}\varepsilon^{\frac{t}{T}} + (c^*E)^{1-\frac{t}{4T}}\varepsilon^{\frac{t}{4T}}\right), \quad \forall t \in [0,T].$$

Remarque 2.5 *: La stabilité dans les théorèmes (2.7) et (2.8) ne donne pas l'information sur la dépendance continue de la solution en $t = o$. Pour cela on prend la condition du théorème (2.7) où $\widetilde{E}$, γ sont deux constantes finies positives et $\omega(u(.,0),h)_p \leq \widetilde{E}h^\gamma, \forall h > 0$. Ici $\omega(u(.,0),h)_p$ est le module de continuité de la fonction $u(.,0) \in L_p(\mathbb{R})$, au sens de la métrique de l'espace $L_p(\mathbb{R})$. On pose que* *si* $t = 0 \Rightarrow E_{\upsilon}\left(u\left(.,t\right)\right)_{p} = \omega\left(u\left(.,0\right),h\right)_{p}$, *tel que* h *dépend seulement de* υ. *Le théorème (2.9) suivant affirme que pour* $t = 0$ *et si on pose :*

$$\omega\left(u\left(.,0\right),h\right)_{p} \leq \widetilde{E}h^{\gamma}, \forall h > 0$$

et

$$\left\|u(.,t) - \omega^{\upsilon}\left(.,t\right)\right\|_{p} \leq \left(1 + c_{p}\right) E_{\upsilon,p}\left(u\left(.,t\right)\right)_{p}$$

et si on pose : $\omega^{\upsilon}\left(x,t\right) = S_{\upsilon}\left(u\left(.,t\right)\left(x\right)\right)$ *; alors :*

$$\left\|u(.,0) - \omega^{\upsilon}\left(.,0\right)\right\|_{p} \leq \left(1 + c_{p}\right) E_{\upsilon,p}\left(u\left(.,0\right)\right)_{p} \leq \widetilde{c}\widetilde{E}\frac{1}{\upsilon^{\gamma}}$$

et

$$\left\|u^{\upsilon}(.,0) - u\left(.,0\right)\right\|_{p} \leq \left\{\frac{c_{p}}{\pi}e^{\left(T\upsilon^{2}\right)}\varepsilon + \widetilde{c}\widetilde{E}\frac{1}{\upsilon^{\gamma}}\right\}$$

Si $\upsilon = \sqrt{\beta\frac{1}{T}\ln\frac{\widetilde{E}}{\varepsilon}}$ *, tel que* β *est nombre dans l'intervalle* $[0.1]$ *alors :*

$$\left\|u^{\upsilon}(.,0) - u\left(.,0\right)\right\|_{p} \leq \frac{c_{p}}{\pi}\widetilde{E}^{\beta}\varepsilon^{1-\beta} + \widetilde{c}\widetilde{E}\left(\beta\frac{1}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{\gamma}{2}}$$

Théorème 2.9 *: Sous les conditions du théorème (2.7) , et soit* $\beta \in (0,1)$

1) Si u *est une solution de problème (2.35) et (2.36) , et si dans le problème (2.35) on choisit* $\upsilon = \sqrt{\beta\frac{1}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}}$. *Alors :*

$$\left\|u^{\upsilon}(.,t) - u\left(.,t\right)\right\|_{p} \leq \left(\frac{c_{p}}{\pi}E^{\beta-1}\varepsilon^{1-\beta} + \widetilde{c}_{p}\right)\varepsilon^{\beta\frac{t}{T}}E^{1-\frac{\beta t}{T}}, t \in [0,T]$$

2) S'il existe deux constantes $\widetilde{E}$ *,* γ *telles que*

$$\omega\left(u\left(.,0\right),h\right)_{p} \leq \widetilde{E}h^{\gamma}, \forall h > 0$$

On aura pour $t = 0$ *:*

$$\left\|u^{\upsilon}(.,0) - u\left(.,0\right)\right\|_{p} \leq \frac{c_{p}}{\pi}E^{\beta}\varepsilon^{1-\beta} + \widetilde{c}_{p}\widetilde{E}\left(\beta\frac{1}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{\gamma}{2}}$$

Preuve 5 *:*

1) *D'après le théorème (2.7) on a :*

$$\left\|u^{\upsilon}(.,t) - u\left(.,t\right)\right\|_{p} \leq \frac{c_{p}}{\pi}e^{\left((T-t)\upsilon^{2}\right)}\varepsilon + \widetilde{c}_{p}e^{\left(-t\upsilon^{2}\right)}E = \left(\frac{c_{p}}{\pi}e^{\left(T\upsilon^{2}\right)}\frac{\varepsilon}{E} + \widetilde{c}_{p}\right)e^{\left(-t\upsilon^{2}\right)}E$$

Si $v = \sqrt{\beta \frac{1}{T} \ln \frac{E}{\varepsilon}}$

$$\|u^{v}(.,t) - u\,(.,t)\|_{p} \leq \left(\frac{c_{p}}{\pi} E^{\beta-1}\varepsilon^{1-\beta} + \widetilde{c}_{p}\right) E^{1-\frac{\beta t}{T}} \varepsilon^{\frac{\beta t}{T}}, t \in [0,T]$$

2) *Si*

$$t = 0 \Rightarrow E_{v}\left(u\,(.,0)\right)_{p} = \omega\left(u\,(.,0)\,,h\right)_{p} \leq \widetilde{E}h^{\gamma}, \forall h > 0$$

Par le théorème (2.7) on a

$$\|u(.,t) - \omega^{v}\,(.,t)\|_{p} \leq (1 + c_{p})\, E_{v}\left(u(.,t)\right)_{p}$$

Si

$$t = 0 \Rightarrow \|u(.,0) - \omega\,(.,0)\|_{p} \leq (1 + c_{p})\,\omega\left(u\,(.,0)\,,h\right)_{p} \leq \widetilde{E}h^{\gamma}, \forall h > 0$$

Où $\omega\left(u\,(.,0)\,,h\right)_{p} \leq \widetilde{E}h^{\gamma}$ *et on a*

$$\begin{aligned} \|u^{v}(.,0) - u\,(.,0)\|_{p} &\leq \|u^{v}(.,0) - \omega^{v}\,(.,0)\|_{p} + \|\omega^{v}\,(.,0) - u\,(.,0)\|_{p} \\ &= \frac{c_{p}}{\pi} e^{\left(Tv^{2}\right)}\varepsilon + (1 + c_{p})\,\widetilde{E}h^{\gamma} \\ &\leq \frac{c_{p}}{\pi} E^{\beta}\varepsilon^{1-\beta} + \widetilde{c}_{p}\widetilde{E}h^{\gamma} \end{aligned}$$

Si $h = \frac{1}{v}$

$$\|u^{v}(.,0) - u\,(.,0)\|_{p} \leq \frac{c_{p}}{\pi} E^{\beta}\varepsilon^{1-\beta} + \widetilde{c}_{p}\widetilde{E}\left(\frac{1}{v}\right)^{\gamma}$$

Si $v = \sqrt{\beta \frac{1}{T} \ln \frac{E}{\varepsilon}}$

$$\|u^{v}(.,0) - u\,(.,0)\|_{p} \leq \frac{c_{p}}{\pi} E^{\beta}\varepsilon^{1-\beta} + \widetilde{c}_{p}\widetilde{E}\left(\beta \frac{1}{T} \ln \frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{\gamma}{2}}$$

Notation 2.1 *: Le cas $p = 2$ est simple, On utilise la transformation de Fourier dans $L_{2}(\mathbb{R})$, et on a la stabilité dans ce cas. Le cas $p \neq 2$ est trés difficile et généralement la transformation de Fourier pour les fonctions dans l'espace $L_{p}(\mathbb{R})$ où $p > 2$ est une distribution.*

Théorème 2.10 *: Si $p = 2$, u est une solution du problème (2.35) et (2.36) et u^{v} est une solution du problème (2.38) alors :*

1) *Si*

$$v = \sqrt{\frac{1}{T} \ln(\frac{E}{\varepsilon})} \tag{2.46}$$

Alors
$$\left\| \frac{\partial^{m+n} u^v(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} - \frac{\partial^{m+n} u(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} \right\|_2$$
$$\leq \begin{cases} 2\varepsilon^{\frac{t}{T}} E^{1-\frac{t}{T}} (\frac{1}{T}\ln(E))^{\frac{m+2n}{2}} \text{ ; } si\ m+2n \leq 2t\ ,\forall t\in[0,T] \\ \left(1+(\frac{m+2n}{2})^{\frac{m+2n}{2}}\right)(\frac{1}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon}))^{\frac{m+2n}{2}} \varepsilon^{\frac{t}{T}} E^{1-\frac{t}{T}} \text{ ; } si\ m+2n > 2t\ ,\ \forall t\in[0,T] \end{cases}$$
tel que : $n\ ,m \in \mathbb{N}$ *et* $\|u(.,0)\|_2 \leq E$

2) *pour* $s > 0$ *et* $E_s > 0$, *et*
$$\|u(.,0)\|_{H^s} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(\xi,0)|^2 (1+\xi^2)^s d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \leq E_s \tag{2.47}$$
Si on choisit
$$v = \sqrt{\ln\left(\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{T}} \left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2T}} \right)} \tag{2.48}$$
Alors
$$\left\| \frac{\partial^{m+n} u^v(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} - \frac{\partial^{m+n} u(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} \right\|_2$$
$$\leq \begin{cases} \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{m}{2}+n} \varepsilon^{\frac{t}{T}} E_s^{1-\frac{t}{T}} \left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{-(T-t)\frac{s}{2T}+n+\frac{m}{2}} \left(1+T^{\frac{s}{2}}+O(1)\right) \\ Si\ m+2n-s \leq 2t,\ \forall t\in[0,T] \\ \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{m}{2}+n} \varepsilon^{\frac{t}{T}} E_s^{1-\frac{t}{T}} \left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{-(T-t)\frac{s}{2T}+n+\frac{m}{2}} \left(1+T^{\frac{s}{2}}\left(\frac{m+2n-s}{2t}\right)^{\left(\frac{m+2n-s}{2}\right)}+O(1)\right) \\ Si\ m+2n-s > 2t,\ \forall t\in[0,T] \end{cases}$$

Pour démontrer ce théorème on utilise le lemme suivant :

Lemme 2.3 *: Soit* $c > 0$, $p > 0$ *et* $\eta \geq 1$ *on a :*
(1) Si $\frac{p}{c} < 1$, *alors* $\sup_{y\geq\eta}\left(e^{(-cy)}y^p\right) \leq e^{(-cy)}\eta^p$.
(2) Si $\frac{p}{c} \geq 1$, *alors* $\sup_{y\geq\eta}\left(e^{(-cy)}y^p\right) \leq (\frac{p}{c})^p e^{(-cy)}\eta^p$.

Preuve 6 *:*
a) *On montre que*
$$\left\| \frac{\partial^{m+n} u^v(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} - \frac{\partial^{m+n} w^v(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} \right\|_2 \leq v^{m+2n} e^{((T-t)v^2)}\varepsilon, \forall n,m = 0,1,2,\dots$$

Si la solution est donnée par :

$$u(x,t) = e^{(\xi^2(t-T))}u(x,T)$$

Alors :

$$\hat{u}(x,t) = e^{(\xi^2(T-t))}\hat{u}(x,T) = e^{(\xi^2(T-t))}F(u(x,T))$$

$$\begin{cases} u^v(x,t) = e^{(\xi^2(t-T))}u^v(x,T) \\ w^v(x,t) = e^{(\xi^2(t-T))}w^v(x,T),\ \xi \in [-v,v] \end{cases}$$

On a

$$F\left[u^v\right](\xi) = \begin{cases} F\left[u\right](\xi),\ \ pour\ \xi \in [-v,v] \\ 0,\ \ pour\ \xi \notin [-v,v] \end{cases}$$

Donc

$$\left\| \frac{\partial^{m+n}u^v(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} - \frac{\partial^{m+n}w^v(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} \right\|_2 = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{\partial^{m+n}u^v(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} - \frac{\partial^{m+n}w^v(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} \right)(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^n}{\partial t^n}(-i\xi)^m e^{(\xi^2(T-t))} F\left[u^v(.,T) - w^v(.,T)\right](\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| (-i\xi)^m (-\xi^2)^n e^{(\xi^2(T-t))} F\left[u^v(.,T) - w^v(.,T)\right](\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \max(|\xi|^{m+2n}) e^{(\xi^2(T-t))} \left\| F\left[u^v(.,T) - w^v(.,T)\right](\xi) \right\|_2$$

$$= v^{m+2n} e^{(v^2(T-t))} \left\| F\left[\frac{1}{\pi} D_v * (\varphi - u(.,T))\right](\xi) \right\|_2$$

$$= v^{m+2n} e^{(v^2(T-t))} \left\| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \hat{D}_v \left[F\left(\varphi - u(.,T)\right)\right](\xi) \right\|_2$$

$$= v^{m+2n} e^{(v^2(T-t))} \left\| \varphi - u(.,T) \right\|_2$$

Puisque

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \hat{D}_v = \begin{cases} 1,\ \ sur\ \ [-v,v] \\ 0,\ \ hors\ \ [-v,v] \end{cases}$$

$$\leq v^{m+2n} e^{(v^2(T-t))} \varepsilon,\ \ puisque\ \ \left\| \varphi - u(.,T) \right\|_2 \leq \varepsilon$$

Donc

$$\left\| \frac{\partial^{m+n}u^v(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} - \frac{\partial^{m+n}w^v(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} \right\|_2 \leq v^{m+2n} e^{(v^2(t-T))} \varepsilon, \forall n,m = 0,2,\ldots\ et\ \ \forall t \in [0,T] \tag{2.49}$$

b)

$$\left\| \frac{\partial^{m+n} u(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} - \frac{\partial^{m+n} w^v(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} \right\|_2$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{\partial^{m+n} u(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} - \frac{\partial^{m+n} w^v(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} \right)(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\left| \frac{\partial^{m+n}}{\partial t^n \partial x^m} \left(e^{(\xi^2(T-t))} \hat{\varphi}_T(\xi) - e^{(\xi^2(T-t))} \hat{w}^v(x,T) \right)(\xi) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Puisque

$$\hat{u}(\xi,t) = e^{(\xi^2(T-t))} \hat{\varphi}_T(\xi) \Rightarrow \hat{u}(\xi,0) = e^{(\xi^2 T)} \hat{\varphi}_T(\xi)$$

Donc

$$\left\| \frac{\partial^{m+n} u(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} - \frac{\partial^{m+n} w^v(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} \right\|_2 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| (-i\xi)^m (-\xi^2)^n e^{(\xi^2(-t))} (\hat{u}(\xi,0) - \hat{w}^v(\xi,0)) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int_{|\xi| \geq v} \left| (-i\xi)^m (-\xi^2)^n e^{(\xi^2(-t))} \hat{u}(\xi,0) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

puisque

$$\begin{cases} u(.,0) = w^v(.,0)\ ;\ sur\ [-v,v] \\ et\ w^v(.,0) = 0\ ;\ hors\ [-v,v] \end{cases}$$

$$= \left(\int_{|\xi| \geq v} \left| \frac{(-i\xi)^m (-\xi^2)^n}{(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}} e^{(\xi^2(-t))} \hat{u}(\xi,0) (1+\xi^2)^{\frac{s}{2}} \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \max_{|\xi| \geq v} \left[\frac{|\xi|^{m+2n} e^{(\xi^2(-t))}}{(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}} \right] \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(\xi,0)|^2 (1+\xi^2)^s d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \max_{|\xi| \geq v} \left[\frac{|\xi|^{m+2n} e^{(\xi^2(-t))}}{(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}} \right] \|u(.,0)\|_{H^s}, puisque\ \|u(.,0)\|_{H^s} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(\xi,0)|^2 (1+\xi^2)^s d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \max_{|\xi| \geq v} \left[\frac{|\xi|^{m+2n} e^{(\xi^2(-t))}}{(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}} \right] E_s \leq \max_{|\xi| \geq v} (|\xi|^{m+2n-s} e^{(\xi^2(-t))}) E_s \qquad (2.50)$$

par le lemme (2.3), on pose : $p = \frac{m+2n-s}{2}$ *et* $y = |\xi|^2$ *et* $\eta = v^2$ *et* $c = t$.

$$Si\ \frac{p}{c} < 1 \Rightarrow \sup_{y \geq \eta}\left(e^{(-cy)}y^p\right) \leq e^{(-cy)}\eta^p$$

Donc

$$Si\quad \frac{m+2n-s}{2t} \leq 1 \Rightarrow \max_{|\xi|^2 \geq v^2}\left(|\xi|^{m+2n-s}\, e^{(\xi^2(-t))}\right) \leq v^{m+2n-s}e^{(v^2(-t))}$$
$$\Rightarrow \max_{|\xi|^2 \geq v^2}\left(|\xi|^{m+2n-s}\, e^{(\xi^2(-t))}\right) \leq v^{m+2n-s}e^{(v^2(-t))}$$
$$Si\quad \frac{p}{c} \geq 1, \Rightarrow \sup_{y \geq \eta}\left(e^{(-cy)}y^p\right) \leq (\frac{p}{c})^p e^{(-c\eta)}\eta^p$$

Donc

$$Si\quad \frac{m+2n-s}{2t} \geq 1 \Rightarrow \max_{|\xi|^2 \geq v^2}\left(|\xi|^{2\frac{m+2n-s}{2}}\, e^{(\xi^2(-t))}\right) \leq \left(\frac{m+2n-s}{2t}\right)^{\frac{m+2n-s}{2}} v^{2\frac{m+2n-s}{2}}e^{(v^2(-t))}$$

$$\Rightarrow \max_{|\xi|^2 \geq v^2}\left(|\xi|^{m+2n-s}\, e^{(\xi^2(-t))}\right) \leq \left(\frac{m+2n-s}{2t}\right)^{\frac{m+2n-s}{2}} v^{m+2n-s}e^{(v^2(-t))}$$

Alors

$$\max_{|\xi| \geq v}\left[|\xi|^{m+2n-s}\, e^{(\xi^2(-t))}\right] \leq \begin{cases} v^{m+2n-s}e^{(v^2(-t))},\ si\ m+2n-s \leq 2t \\ \left(\frac{m+2n-s}{2t}\right)^{\frac{m+2n-s}{2}} v^{m+2n-s}e^{(v^2(-t))},\ si\ m+2n-s > 2t > 0 \end{cases} \tag{2.51}$$

Donc, d'après (2.49)(2.51), on aura

$$\left\|\frac{\partial^{m+n}u^v(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} - \frac{\partial^{m+n}u(.,t)}{\partial t^n \partial x^m}\right\|_2$$

$$\leq \begin{cases} (i) = v^{m+2n}e^{(v^2(T-t))}\varepsilon + v^{m+2n-s}e^{(v^2(-t))}E_s,\ si\ m+2n-s \leq 2t \\ (ii) = v^{m+2n}e^{(v^2(T-t))}\varepsilon + \left(\frac{m+2n-s}{2t}\right)^{\frac{m+2n-s}{2}} v^{m+2n-s}e^{(v^2(-t))}E_s,\ si\ m+2n-s > 2t > 0 \end{cases} \tag{2.52}$$

1) *Si* $v = \sqrt{\frac{1}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})}$,*et* $s = 0$. *Donc*

$$(i) = v^{m+2n}e^{(v^2(T-t))}\varepsilon + v^{m+2n-s}e^{(v^2(-t))}E_s = \left(\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)\right)^{\frac{m+2n}{2}}\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{t}{T}}\left[\frac{E}{\varepsilon}\varepsilon + E\right]$$

$$= \left(\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)\right)^{\frac{m\ +2n}{2}} \left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{t}{T}} 2E$$

Puisque

$$\begin{cases} v = \sqrt{\frac{1}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})} \Rightarrow v^{m+2n} = \left(\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)\right)^{\frac{m\ +2n}{2}} \\ v^2T = \ln(\frac{E}{\varepsilon}) \Rightarrow e^{(v^2T)} = \frac{E}{\varepsilon}\ \ et\ e^{(-v^2t)} = (\frac{E}{\varepsilon})^{-\frac{t}{T}} \end{cases}$$

Donc

$$(i) = \left(\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)\right)^{\frac{m\ +2n}{2}} \left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{t}{T}}\ 2E$$

$$(i) = 2E^{1-\frac{t}{T}}\varepsilon^{\frac{t}{T}} \left(\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)\right)^{\frac{m\ +2n}{2}}\ \ ,\ si\ m+2n \leq 2t\ ,\ t\in[0,T] \tag{2.53}$$

Et

$$(ii) = v^{m+2n}\left[e^{(v^2(T-t))}\varepsilon^{v^2} + \left(\frac{m+2n}{2t}\right)^{\frac{m+2n}{2}} e^{(v^2(-t))}E\right],\ \ si\ m+2n > 2t > 0$$

$$= \left(\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)\right)^{\frac{m\ +2n}{2}} \left[\frac{E}{\varepsilon}\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{t}{T}}\varepsilon + \left(\frac{m+2n}{2t}\right)^{\frac{m+2n}{2}} \left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{t}{T}} E\right]\ \ où\ :\ v = \sqrt{\frac{1}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})}$$

$$= \left(\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)\right)^{\frac{m\ +2n}{2}} \left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{t}{T}} E\left[1 + \left(\frac{m+2n-s}{2t}\right)^{\frac{m+2n}{2}}\right]$$

$$= \left(1 + \left(\frac{m+2n}{2t}\right)^{\frac{m+2n}{2}}\right)\left(\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)\right)^{\frac{m\ +2n}{2}} E^{1-\frac{t}{T}}\varepsilon^{\frac{t}{T}}$$

Donc

$$(ii) = \left(1 + \left(\frac{m+2n}{2t}\right)^{\frac{m+2n}{2}}\right)\left(\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)\right)^{\frac{m\ +2n}{2}} E^{1-\frac{t}{T}}\varepsilon^{\frac{t}{T}},\ \ si\ m+2n > 2t, t\in[0,T] \tag{2.54}$$

Alors par (2.53) et (2.54) et $s = 0$, *si* $v = \sqrt{\frac{1}{T}\ln(\frac{E}{\xi})}$,*on a :*

$$\left\|\frac{\partial^{m+n}u^v(.,t)}{\partial t^n\partial x^m} - \frac{\partial^{m+n}u^v(.,t)}{\partial t^n\partial x^m}\right\|_2$$

$$\leq \begin{cases} 2E^{1-\frac{t}{T}}\varepsilon^{\frac{t}{T}}\left(\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)\right)^{\frac{m\ +2n}{2}} & ,\ si\ m+2n \leq 2t\ ,\ t\in[0,T] \\ \left(1+\left(\frac{m+2n}{2t}\right)^{\frac{m+2n}{2}}\right)\left(\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)\right)^{\frac{m\ +2n}{2}} E^{1-\frac{t}{T}}\varepsilon^{\frac{t}{T}}, & si\ m+2n-s > 2t > 0,\ t\in[0,T] \end{cases}$$

2) *On pose :*$v = \sqrt{\ln\left(\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{T}}\left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s}{2T}}\right)}$ *, On a*

$$(i) = v^{m+2n}e^{(v^2(T-t))}\varepsilon + v^{m+2n-s}e^{(v^2(-t))}E_s,\ si\ m+2n \leq 2t$$

Si $v = \sqrt{\ln\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{T}}\left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s}{2T}}}$

$$v^{m+2n}e^{(v^2(T-t))}\varepsilon = \left[\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s}{T}}\right)\right]^{\frac{m\ +2n}{2}} e^{(v^2(T-t))}\varepsilon$$

Et

$$v^2(T-t) = \frac{(T-t)}{T}\ln\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s}{2}}\right) \Rightarrow e^{(v^2(T-t))} = \left(\frac{E_s}{\varepsilon}\left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s}{2}}\right)^{\frac{(T-t)}{T}}$$

Donc :

$$v^{m+2n}e^{(v^2(T-t))}\varepsilon = \left[\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s}{2}}\right)\right]^{\frac{m\ +2n}{2}} \varepsilon\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s}{2}}\right)^{\frac{(T-t)}{T}}$$

$$= \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{m\ +2n}{2}}\left[\ln\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s}{2}}\right)\right]^{\frac{m\ +2n}{2}} \varepsilon\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{(T-t)}{T}}\left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s(T-t)}{2T}}$$

$$\leq \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{m\ +2n}{2}}\left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{\frac{m+2n}{2}} \xi\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{(T-t)}{T}}\left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s(T-t)}{2T}}$$

Puisque :

$$\ln\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right) > 1 \Rightarrow \left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s}{2}} \leq 1 \Rightarrow \frac{E_s}{\varepsilon}\left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s}{2}} \leq \frac{E_s}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s}{2}}\right) \leq \ln\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right) \Rightarrow \left[\ln\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s}{2}}\right)\right]^{\frac{m\ +2n}{2}} \leq \left[\ln\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)\right]^{\frac{m\ +2n}{2}}$$

Alors :

$$v^{m+2n}e^{(v^2(T-t))}\varepsilon \leq \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{m\ +2n}{2}} \left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{\frac{m+2n}{2}} \varepsilon \left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{(T-t)}{T}} \left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s(T-t)}{2T}}$$

$$\Rightarrow v^{m+2n}e^{(v^2(T-t))}\varepsilon \leq \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{m\ +2n}{2}} E^{1-\frac{t}{T}}\varepsilon^{\frac{t}{T}} \left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s(T-t)}{2T}+n+\frac{m}{2}} \tag{2.55}$$

$$v = \sqrt{\ln\left(\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{T}} \left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s}{2T}}\right)}$$

$$v^{m+2n-S}e^{(-tv^2)}\varepsilon = \left[\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s}{2}}\right)\right]^{\frac{m\ +2n-s}{2}} \left(\frac{E_s}{\varepsilon}\left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s}{2}}\right)^{-\frac{t}{T}} E_s$$

$$= \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{m}{2}-n+\frac{s}{2}} \left[\ln\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s}{2}}\right)\right]^{\frac{m\ +2n-s}{2}} \left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{t}{T}} \left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{\frac{st}{2T}} E_s$$

$$Puisque\ \left[\ln\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s}{2}}\right)\right]^{\frac{m\ +2n-s}{2}} \leq \left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{\frac{m\ +2n-s}{2}}$$

$$\leq \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{m+2n}{2}} E^{1-\frac{t}{T}}\varepsilon \left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s(T-t)}{2T}+n+\frac{m}{2}} \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{-s}{2}}$$

Donc :

$$v^{m+2n}e^{(-tv^2)}E_s \leq \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{m+2n}{2}} E^{1-\frac{t}{T}}\varepsilon^{\frac{t}{T}} \left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s(T-t)}{2T}+n+\frac{m}{2}} \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{-s}{2}} \tag{2.56}$$

Puisque : $\dfrac{m+2n}{2} - \dfrac{sT}{2T} + \dfrac{st}{2T} = \dfrac{m+2n}{2} - \dfrac{s(T-t)}{2T}$. *par (2.55) et (2.56) on a :*

$$v^{m+2n}e^{((T-t)v^2)}\varepsilon + v^{m+2n}e^{(-tv^2)}E_s \leq \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{m+2n}{2}} E^{1-\frac{t}{T}}\varepsilon^{\frac{t}{T}} \left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s(T-t)}{2T}+\frac{m+2n}{2}} \left[1+\left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{-s}{2}}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{m+2n}{2}} E^{1-\frac{t}{T}}\varepsilon^{\frac{t}{T}} \left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s(T-t)}{2T}+\frac{m+2n}{2}} \left[1+T^{\frac{s}{2}}\right] \tag{2.57}$$

$$(ii) = v^{m+2n}e^{((T-t)v^2)}\varepsilon + \left(\frac{m+2n-s}{2t}\right)^{\frac{m+2n-s}{2}} v^{m+2n-s}e^{(-tv^2)}E_s, si\ m+2n-s > 2t > 0$$

$$v = \sqrt{\ln\left(\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{T}} \left(\ln\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)\right)^{-\frac{s}{2T}}\right)} \Rightarrow v^{m+2n}\left[e^{(v^2(T-t))}\varepsilon + \left(\frac{m+2n-s}{2t}\right)^{\frac{m+2n-s}{2}} v^{-s}e^{(v^2(-t))}E_s\right]$$

$$= \left[\ln\left(\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{T}}\left(\ln\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)\right)^{-\frac{s}{2T}}\right)\right]^{\frac{1}{2}(m+2n)}$$

$$\times\left[\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\left(\ln\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)\right)^{-\frac{s}{2}}\right)^{\frac{(T-t)}{T}}\varepsilon + \left(\frac{m+2n-s}{2t}\right)^{\frac{m+2n-s}{2}}\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\left(\ln\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)\right)^{-\frac{s}{2}}\right)^{-\frac{t}{T}}\right]$$

$$\times E_s\left[\ln\left(\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{T}}\left(\ln\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)\right)^{-\frac{s}{2T}}\right)\right]^{-\frac{s}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{m+2n}{2}}\left[\ln\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s}{2T}}\right)\right]^{\frac{1}{2}(m+2n)}\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{T}}\left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{\frac{st}{2T}}$$

$$\times\left[\frac{E_s}{\varepsilon}\left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s}{2}}\varepsilon + \left(\frac{m+2n-s}{2t}\right)^{\frac{\left(m+2n-s\right)}{2}} E_s\left[\ln\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s}{2T}}\right)\right]^{-\frac{s}{2}}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{m+2n}{2}}\left(\ln\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)\right)^{\frac{1}{2}(m+2n)+\frac{st}{2T}} E^{1-\frac{t}{T}}\varepsilon^{\frac{t}{T}}$$

$$\times\left[\left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s}{2}} + \left(\frac{m+2n-s}{2t}\right)^{\frac{\left(m+2n-s\right)}{2}}\left(\frac{1}{T}\right)^{-\frac{s}{2}}\left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s}{2}}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{m+2n}{2}} E_s^{1-\frac{t}{T}}\varepsilon^{\frac{t}{T}}\left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{\frac{1}{2}(m+2n)+\frac{st}{2T}-\frac{sT}{2T}}\left[1 + T^{\frac{s}{2}}\ \left(\frac{m+2n-s}{2t}\right)^{\frac{m+2n-s}{2}}\right]$$

Donc :

$$v^{m+2n}\left[e^{(v^2(T-t))}\varepsilon + \left(\frac{m+2n-s}{2t}\right)^{\frac{m+2n-s}{2}} v^{-s}e^{(v^2(-t))}E_s\right]$$

$$\leq \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{m+2n}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{T}}E^{1-\frac{t}{T}}\left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{-\frac{(T-t)}{2T}+\frac{m+2n}{2}}\left[1 + T^{\frac{s}{2}}\ \left(\frac{m+2n-s}{2t}\right)^{\frac{\left(m+2n-s\right)}{2}}\right] \quad (2.58)$$

Donc, par (2.57) et (2.58) on a :

$$\left\|\frac{\partial^{m+n}u^v(.,t)}{\partial t^n\partial x^m} - \frac{\partial^{m+n}u(.,t)}{\partial t^n\partial x^m}\right\|_2$$

$$
\leq \begin{cases} \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{m+2n}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{T}} E^{1-\frac{t}{T}} \left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{-\frac{(T-t)}{2T}+\frac{m+2n}{2}} \left[1+T^{\frac{s}{2}} \ +O(1)\right] \\ si\ m+2ns \leq 2t\ ,\ t\in[0,T] \\ \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{m+2n}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{T}} E^{1-\frac{t}{T}} \left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{-\frac{(T-t)}{2T}+\frac{m+2n}{2}} \left[1+T^{\frac{s}{2}} \ \left(\frac{m+2n-s}{2t}\right)^{\frac{m+2n-s}{2}} +O(1)\right], \\ si\ m+2n-s > 2t,\ t\in[0,T] \end{cases} \tag{2.59}
$$

pour : $v = \sqrt{\ln\left(\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{T}} \left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s}{2T}}\right)}$; $s > 0$ *et* $E_s > 0$

et $\|u(.,0)\|_{H^s} = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(\xi,0)|^2 (1+\xi^2)^s d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \leq E_s$ *et* $\varepsilon \to 0$.

Remarque 2.6 *: Ici dans le théorème (2.10) on a des estimations de stabilité pour toutes les dérivées par rapport à x et t.*

1) Le choix de $v = \sqrt{\frac{1}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})}$*, ne donne pas la continuité de la solution en* $t = 0$*. Quand* $\|u(.,0)\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq E$*. Puisque si on choisit* $v = \sqrt{\frac{1}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})}$ *et si* $t = 0$ *dans le théorème (2.10) on a :*

$$m+2n \leq 0 \ : \textit{contradiction où } n,m \in \mathbb{N}$$

Donc : si $v = \sqrt{\frac{1}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})}$ *et si* $t = 0$ *ces condition ne donnent pas la stabilité de la solution en* $t = 0$.

2) Par contre le choix $v = \sqrt{\ln\left(\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{T}} \left(\ln(\frac{E_s}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s}{2T}}\right)}$ *nous garantit la stabilité dans la théorème (2.10) en* $t = 0$*, et* $\|u(.,0)\|_{H^s} = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(\xi,0)|^2 (1+\xi^2)^s d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \leq E_s$, $s > 0$.

Théorème 2.11 *: Soit β arbitraire dans l'intervalle [0,1]. Supposons que u est une solution du problème (2.35) et (2.36) et* u^v *est une solution du problème (2.38) et soit* $\|u(.,0)\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq E, s = 0$ *donc :*

1) *Si* $v = \sqrt{\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})}$ *on a*

$$\left\|\frac{\partial^{m+n}u^v\,(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} - \frac{\partial^{m+n}u\,(.,t)}{\partial t^n \partial x^m}\right\|_2$$

$$\leq \begin{cases} \left(\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})\right)^{\frac{m}{2}+n} \varepsilon^{\frac{st}{T}} E^{1-\frac{st}{T}} \left[1+E^{\beta-1}\varepsilon^{1-\beta}\right], \\ si \ \ m+2n \leq 2t, \ t\in[0,T] \\ \left(\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})\right)^{\frac{m}{2}+n} \varepsilon^{\frac{st}{T}} E^{1-\frac{st}{T}} \left[(\frac{m+2n}{2t})^{\frac{m+2n}{2}} + E^{\beta-1}\varepsilon^{1-\beta}\right], \\ si \ \ m+2n > 2t, \ t\in]0,T] \end{cases} \tag{2.60}$$

2) *Si s est une constante positive, on a*

$$\|u(.,0)\|_{H^s} = (\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{u}(\xi,0)|^2 (1+\xi^2)^s d\xi)^{\frac{1}{2}} \leq E_s$$

avec $\upsilon = \sqrt{\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})}$ on a

$$\left\| \frac{\partial^{m+n}u^{\upsilon}(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} - \frac{\partial^{m+n}u(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} \right\|_2$$

$$\leq \begin{cases} \left(\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})\right)^{\frac{m}{2}+n} \varepsilon^{\frac{st}{T}} E^{1-\frac{st}{T}} \left[\frac{E_s}{E}(\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon}))^{-\frac{s}{2}} + E^{\beta-1}\varepsilon^{1-\beta}\right], \\ si \ \ m+2n-s \leq 2t, \ t\in[0,T] \\ \left(\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})\right)^{\frac{m}{2}+n} \varepsilon^{\frac{st}{T}} E^{1-\frac{st}{T}} \left[(\frac{m+2n-s}{2t})^{\frac{m+2n-s}{2}} \frac{E_s}{E}(\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon}))^{-\frac{s}{2}} + E^{\beta-1}\varepsilon^{1-\beta}\right], \\ si \ \ m+2n-s > 2t, \ t\in]0,T] \end{cases}$$

3) *pour $t=0 \Rightarrow m+2n-s<0$ le seul cas. Donc*

$$\left\| \frac{\partial^{m+n}u^{\upsilon}(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} - \frac{\partial^{m+n}u(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} \right\|_2 \leq \left(\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})\right)^{\frac{m}{2}+n-\frac{s}{2}} E_s + \left(\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})\right)^{\frac{m}{2}+n} E^{\beta}\varepsilon^{1-\beta}$$

Preuve 7 *: par (2.52) on a :*

1) *On pose : $\|u(.,0)\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq E$ alors $s=0$, et on choisit $\upsilon = \sqrt{\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})}$. Alors*

$$\left\| \frac{\partial^{m+n}u^{\upsilon}(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} - \frac{\partial^{m+n}u(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} \right\|_2 \leq \begin{cases} \upsilon^{m+2n} e^{(-t\upsilon^2)} \left[e^{(T\upsilon^2)}\varepsilon + E\right], \ si \ m+2n-s \leq 2t \\ \upsilon^{m+2n} e^{(-t\upsilon^2)} \left[e^{(T\upsilon^2)}\varepsilon + \left(\frac{m+2n-s}{2t}\right)^{\frac{m+2n}{2}} E\right], \ si \ m+2n-s > 2t \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})\right)^{\frac{m+2n}{2}} \left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{\beta t}{2}} \left[\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\beta}\varepsilon + E\right] ; \ si \ m+2n \leq 2t. \\ \left(\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})\right)^{\frac{m+2n}{2}} \left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{\beta t}{2}} \left[\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\beta}\varepsilon + \left(\frac{m+2n}{2t}\right)^{\frac{m+2n}{2}} E\right] ; \ si \ m+2n > 2t > 0. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})\right)^{\frac{m+2n}{2}} \varepsilon^{\frac{\beta t}{T}} E^{1-\frac{\beta t}{T}} \left[1+E^{\beta-1}\varepsilon^{1-\beta}\right] ; \ si \ m+2n \leq 2t. \\ \left(\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})\right)^{\frac{m+2n}{2}} \varepsilon^{\frac{\beta t}{T}} E^{1-\frac{\beta t}{T}} \left[\left(\frac{m+2n-s}{2t}\right)^{\frac{m+2n}{2t}} + E^{\beta-1}\varepsilon^{1-\beta}\right] ; \ si \ m+2n > 2t > 0. \end{cases}$$

Donc, si $v=\sqrt{\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})}$. *tel que* β *arbitraire on a :*

$$\left\|\frac{\partial^{m+n}u^v(.,t)}{\partial t^n\partial x^m}-\frac{\partial^{m+n}u(.,t)}{\partial t^n\partial x^m}\right\|_2$$

$$\leq\begin{cases}\left(\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})\right)^{\frac{m+2n}{2}}\varepsilon^{\frac{\beta t}{T}}E^{1-\frac{\beta t}{T}}\left[1+E^{\beta-1}\varepsilon^{1-\beta}\right]\text{ ; si } m+2n\leq 2t.\\ \left(\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})\right)^{\frac{m+2n}{2}}\varepsilon^{\frac{\beta t}{T}}E^{1-\frac{\beta t}{T}}\left[\left(\frac{m+2n}{2t}\right)^{\frac{m+2n}{2t}}+E^{\beta-1}\varepsilon^{1-\beta}\right]\text{ ; si } m+2n>2t>0.\end{cases}$$

2) *On pose*

$$\|u\,(.,0)\|_{H^s}=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|\widehat{u}\,(\xi,0)|^2\left(1+\xi^2\right)^s d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\leq E_s$$

Tel que s *est un constante positive et* $v=\sqrt{\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})}$. *Donc :*

$$\left\|\frac{\partial^{m+n}u^v(.,t)}{\partial t^n\partial x^m}-\frac{\partial^{m+n}u(.,t)}{\partial t^n\partial x^m}\right\|_2$$

$$\leq\begin{cases}(i)=v^{m+2n}e^{(T-t)v^2}\varepsilon+v^{m+2n-s}e^{-tv^2}E_s\text{ , si } m+2n-s\leq 2t\\ (ii)=v^{m+2n}e^{(T-t)v^2}\varepsilon+\left(\frac{m+2n-s}{2t}\right)^{\frac{m+2n-s}{2}}v^{m+2n-s}e^{-tv^2}E_s\text{ , si } m+2n-s>2t>0\end{cases}$$

$$\leq\begin{cases}(i)=\left(\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})\right)^{\frac{m+2n}{2}}e^{-t\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})}\left[e^{T\left(\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})\right)}\varepsilon+\left(\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s}{2}}E_s\right]\text{ ;}\\ \text{si } m+2n-s\leq 2t.\\ (ii)=\left(\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})\right)^{\frac{m+2n}{2}}e^{-t\left(\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})\right)}\left[e^{T\left(\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})\right)}\varepsilon+\left(\frac{m+2n-s}{2t}\right)^{\frac{m+2n-s}{2}}\left(\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s}{2}}E_s\right]\text{ ;}\\ \text{si } m+2n-s>2t>0.\end{cases}$$

$$\leq\begin{cases}(i)=\left(\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})\right)^{\frac{m+2n}{2}}\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{\beta t}{2}}\left[\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\beta}\varepsilon+E_s\right]\text{ ; si } m+2n-s\leq 2t.\\ (ii)=\left(\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})\right)^{\frac{m+2n}{2}}\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{\beta t}{2}}\left[\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\beta}\varepsilon+\left(\frac{m+2n-s}{2t}\right)^{\frac{m+2n-s}{2}}\left(\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s}{2}}E_s\right]\text{ ;}\\ \text{si } m+2n>2t>0.\end{cases}$$

$$
= \begin{cases} (i) = \left(\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})\right)^{\frac{m+2n}{2}} \varepsilon^{\frac{\beta t}{T}} E^{1-\frac{\beta t}{T}} \left[\frac{E_s}{E}\left(\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s}{2}} + E^{\beta-1}\varepsilon^{1-\beta}\right]; \\ \quad si\ m+2n-s \leq 2t,\ t\in[0,T] \\ (ii) = \left(\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})\right)^{\frac{m+2n}{2}} \varepsilon^{\frac{\beta t}{T}} E^{1-\frac{\beta t}{T}} \left[\left(\frac{m+2n-s}{2t}\right)^{\frac{m+2n-s}{2t}} \frac{E_s}{E}\left(\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s}{2}} + E^{\beta-1}\varepsilon^{1-\beta}\right]; \\ \quad si\ m+2n-s > 2t > 0. \end{cases}
$$

Donc

$$
\left\| \frac{\partial^{m+n}u^v(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} - \frac{\partial^{m+n}u(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} \right\|_2
$$

$$
\leq \begin{cases} (i) = \left(\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})\right)^{\frac{m+2n}{2}} \varepsilon^{\frac{\beta t}{T}} E^{1-\frac{\beta t}{T}} \left[\frac{E_s}{E}\left(\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s}{2}} + E^{\beta-1}\varepsilon^{1-\beta}\right]; \\ \quad si\ m+2n-s \leq 2t,\ t\in[0,T] \\ (ii) = \left(\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})\right)^{\frac{m+2n}{2}} \varepsilon^{\frac{\beta t}{T}} E^{1-\frac{\beta t}{T}} \left[\left(\frac{m+2n-s}{2t}\right)^{\frac{m+2n-s}{2}} \frac{E_s}{E}\left(\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})\right)^{-\frac{s}{2}} + E^{\beta-1}\varepsilon^{1-\beta}\right]; \\ \quad si\ m+2n-s > 2t > 0. \end{cases} \tag{2.61}
$$

où $v = \sqrt{\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})}$ *est une constante positive.*

3) *Par (2.61) ; et pour* $t = 0$ *on a un seul cas* $m + 2n - s \leq 0$. *Donc*

$$
\left\| \frac{\partial^{m+n}u^v(.,0)}{\partial t^n \partial x^m} - \frac{\partial^{m+n}u(.,0)}{\partial t^n \partial x^m} \right\|_2 \leq \left(\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})\right)^{\frac{m+2n-s}{2}} E_s + \left(\frac{\beta}{T}\ln(\frac{E}{\varepsilon})\right)^{\frac{m+2n}{2}} + \varepsilon^{1-\beta}E^{\beta}
$$

Remarque 2.7 *: Dans la remarque (2.6) et le théorème (2.11)sont données les estimations d'erreur dans* $L_\infty(\mathbb{R})$*, Pour la méthode mollification. Ce théorème montre que la méthode de mollification donne une bonne estimation d'erreur de type Hölder pour la solution de l'équation de la chaleur rétrograde homogène et aussi pour toutes ses dérivées par rapport à* x *et* t *.*

2.5 Méthode de quasi-réversibilité

Il est important de noter qu'il n'y a nullement unicité de la méthode de quasi-réversibilité, dans tous les exemples que nous avons rencontré, il y a toujours une infinité de méthodes de quasi-réversibilité possibles (toutes relevant de la même idée : on change le système " de façon que le problème qui était mal posé devienne bien posé).

L'idée générale de la méthode est de modifier convenablement les opérateurs aux dérivées partielles intervenant dans le problème. Cette modification se fait par l'introduction de termes différentiels, qui sont :

- soit "petits"(pouvant fortement tendre vers zéro) ;
- soit "dégénérant aux bords" (par exemple pour " éliminer " des conditions aux limites mathématiques gênantes, ou constituant précisément les inconnus à déterminer).

Ces opérateurs ainsi modifiés, sont généralement d'ordre différent de l'opérateur initial et de même nature (elliptique, etc.) ou non.

Exemple 2.5 *: Il est connu que le problème de Cauchy pour l'équation rétrograde de la chaleur est instable vis-à-vis des faibles variations des valeurs initiales. L'instabilité persiste également lorsque la solution est assujettie à certaines conditions accessoires aux limites. La méthode de quasi-réversibilité vise à obtenir une solution stable à de pareils problèmes. Se plaçant dans le cas du problème directe, soit D un domaine fini de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ à n dimensions, des points $x = (x^1, x^2, ..., x^n)$ limité par une surface lisse par morceaux S et t le temps. Soit ensuite (x) une fonction continue définie sur D Le problème directe consiste à trouver la solution $u = u(x,t)$ de l'équation :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \triangle u = 0 \tag{2.62}$$

dans le domaine $G = \{x \in D, t > 0\}$ vérifiant les conditions aux limites :

$$u(x,t) = 0 \text{ pour } x \in S$$

avec les conditions initiales :

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{2.63}$$

Ici :

$$\triangle = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_k}$$

On sait que ce problème a bien une solution. A chaque fonction $\varphi(x) \in C$ (C classe des solutions) répond une solution du problème(2.62) à (2.63), qui sera désignée par $u(x,t;\varphi)$.

Le problème inverse consiste à trouver $\varphi(x)$ à partir de $u(x,t;\varphi)$. Dans les problèmes pratiques, la fonction $u(x,t;\varphi)$ s'obtient en général à la suite d'une série de mesures : on ne la connait donc, approximativement. On admet que $u \in L^2$. Il se peut que cette fonction ne corresponde à aucune fonction initiale $\varphi(x)$ et, par conséquent, il est fort possible de ne pas trouver dans la classe C des fonctions la solution du problème inverse. Pour cette raison, on va s'occuper du problème de recherche d'une certaine solution généralisée du problème inverse.

Soient connues, une quantité $T > 0$ et une fonction $\psi(x)$ définie dans le domaine D, $\psi(x) \in L^2$. On définit sur les fonctions $\varphi(x)$ de la classe C la fonctionnelle :

$$f(\varphi) = \int_D |u(x,T;\varphi) - \psi(x)|^2 \, dx$$

Par solution généralisée du problème inverse, nous entendrons la fonction $\varphi(x)$ sur laquelle on a :

$$f_0 = \inf_{\varphi \in C} f(\varphi)$$

Remarque 2.8 *: L'intuition suggère de choisir la fonction $\varphi(x)$ de telle façon que $f(\varphi) = 0$. Il suffirait pour cela de trouver la solution du problème direct :*

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} - \triangle u = 0 \\ u(x,t) = 0 \text{ pour } x \in S, \; 0 < t < T \\ u(x,T) = \psi(x) \end{gathered} \tag{2.64}$$

et de poser $\varphi(x) = u(x,0)$. Or un tel problème, pour une fonction donnée $\psi(x)$ de L^2, serait en général non résoluble et, en outre, instable vis-à-vis de faibles variations de la fonction $\psi(x)$.

Sur une certaine classe de fonctions généralisées $\varphi(x)$ on a $f_0 = 0$. Il s'agit donc de chercher une valeur approchée de f_0 à une erreur donnée près.

Étant donnée une quantité $\varepsilon > 0$, trouver une fonction $\varphi_\varepsilon(x)$ telle que $f(\varphi_\varepsilon) \leq \varepsilon$. Ce problème se résout justement par la méthode de quasi-réversibilité.

L'idée de la méthode de quasi-réversibilité est de chercher au lieu de l'opérateur de la chaleur $\frac{\partial}{\partial} - \triangle$ un opérateur B_α « voisin » pour lequel le problème rétrograde :

$$B_\alpha u_\alpha = 0, \quad x \in D, \quad 0 < t < T, \alpha > 0;$$

$$u_\alpha(x,T) = \psi(x);$$

$$u_\alpha(x,T)(x,t) = 0 \quad \text{pour} \;\; x \in S, t < T$$

soit stable. Une fois le problème résolu, on pose :

$$\varphi(x) = u_\alpha(x,T)(x,0).$$

Généralement, on prend en quantité d'opérateur B_α l'opérateur :

$$\frac{\partial}{\partial} - \triangle - \alpha \triangle^2$$

et l'on cherche la solution du problème direct :

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} - \triangle u_\alpha - \alpha \triangle^2 u_\alpha = 0, \quad x \in D, \quad t < T, \quad \alpha > 0;$$

$$u_\alpha (x, T) = \psi (x) ;$$

$$u_\alpha (x, t) = 0 \quad pour \quad x \in S, 0 < t \leq T,$$

$$\triangle u_\alpha = 0 \quad pour \quad x \in S, 0 < t \leq T.$$

En suite on pose :

$$\varphi(x) = u_\alpha (x, 0)$$

Notons que, pas plus que l'opérateur de la chaleur, l'opérateur $\left(\frac{\partial}{\partial} - \triangle - \varepsilon\triangle^2\right)$ *n'est pas réversible. Mais, l'un est "bien posé" dans le sens des t croissants, l'autre dans le sens des t décroissants, d'où la terminologie adoptée "quasi-réversibilité".*

La méthode de quasi-réversibilité est applicable à une classe plus étendue de problème se rapportant aux équations dévolution.

Remarque 2.9 *: De façon générale, pour un problème donné relevant de la méthode de quasi-réversibilité, il n'y a pas une méthode Q.R, mais une infinité. Pour le choix de la méthode, on peut se borner le plus souvent à celle qui parait «la plus simple» ou bien à celle qui est susceptible d'interprétation physique, pouvant aider par exemple, au choix numérique de certains paramètres-Bien entendu, en première analyse, on doit déterminer la nature et les propriétés des termes indispensables pour transformer le problème en un problème bien-posé [5], [11], [13], [15], [16], [17], [19], [20], [23].*

Chapitre 3

Étude d'un problème parabolique par la méthode de quasi réversibilité

3.1 Introduction

Nous considérons le problème de la valeur finale suivante :

$$u'(t) + Au(t) = 0, \qquad 0 \leq t < T \tag{3.1}$$

$$u(T) = f \tag{3.2}$$

une certaine valeur finale $f \in H$; où A est un opérateur auto-adjoint positif tel que $0 \in \rho(A)$. Ces problèmes ne sont pas bien posés du fait que même s'il existe une solution unique sur $[0, T]$, elle ne va pas dépendre en permanence de la valeur finale f. Notons que ce type de problèmes aètè considéré par de nombreux auteurs, en utilisant différentes approches : Lattés et Lions [14], Miller [19], Payne [21], Showalter [22] et Lavrentiev [24] ont approchées (F.V.P) en perturbant l'opérateur A.

Dans [1,5,25], Ce même problème est traité d'une manière différente qui consiste à perturber la condition finale et l'approximation du problème (3.1) et (3.2), par :

$$u'(t) + Au(t) = 0, \qquad 0 < t < T \tag{3.3}$$

$$u(T) + \alpha u(0) = f \tag{3.4}$$

Une approche similaire connue sous le nom de méthode de condition aux limites auxiliaires de [12,18] pour équation parabolique aètè pris en compte dans $[2, 3]$.

Dans ce travail, nous avons perturbés la condition finale (3.2) pour former un problème non local approché en fonction d'un petit paramètre avec la condition limite contenant une dérivée du même ordre que l'équation, de la façon suivante :

$$u'(t) + Au(t) = 0, \qquad 0 < t < T \tag{3.5}$$

$$u(T) - \alpha u'(0) = f \tag{3.6}$$

Cette méthode est appelée méthode des quasi-valeurs aux limites, le problème approchés lié est appelé quasi-boundary value problem (Q.B.V.P). Nous montrons que les problèmes approchés sont bien posés et leur solution u_α converge vers u, et nous obtenons des résultats de convergence.

3.2 Le Problème approché

Définition 3.1 *: Une fonction $u(t) : [0,T] \to H$ est appelé une solution classique de problème (V.F.P) (respectivement de (Q.B.V.P)) si $u \in C^1([0,T], H)$, $u \in D(A)$ pour tout $t \in [0,T]$ et satisfait (3.1) et la condition finale (3.2) (respectivement la condition limite (3.6)).*

Pour tout $f \in H$, nous pouvons écrire :

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \varphi_i \tag{3.7}$$

Si le problème (F.V.P) (respectivement (Q.B.V.P)) admet une solution classique u (respectivement solution proche u_α), puis cette solution peut être représente par :

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} e^{((T-t)\lambda_i)} f_i \\ &= e^{((T-t)A)} f \end{aligned} \tag{3.8}$$

respectivement :

$$\begin{aligned} u_\alpha(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{(-\lambda_i t)}}{\alpha\lambda_i + e^{(-\lambda_i T)}} f_i \\ u_\alpha(t) &= S(t)(\alpha A + S(T))^{-1} f \end{aligned} \tag{3.9}$$

3.3 Estimation de la solution du (Q.B.V.P)

Théorème 3.1 *: pour tout $f \in H$, les fonctions u_α donnés par (3.9), sont des solutions classiques au (Q.B.V.P) problème et nous avons l'estimation suivante :*

$$\|u_\alpha(t)\| \leq \frac{T}{\alpha(1+\ln(\frac{T}{\alpha}))} \|f\| \ ,\forall t \in [0,T] \tag{3.10}$$

où $\alpha < eT$.

Preuve 8 *: Si nous supposons que les fonctions u_α donnés à (3.9) sont définis pour tout $t \in [0,T]$, alors ,il est facile de montrer que $u_\alpha \in C^1([0,T], H)$ et :*

$$u'_\alpha(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{-\lambda_i e^{(-\lambda_i t)}}{\alpha\lambda_i + e^{(-\lambda_i T)}} f_i \varphi_i \tag{3.11}$$

$$= -AS(t)(\alpha A + S(T))^{-1} f$$

à partir :

$$\|Au_\alpha(t)\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^2 e^{(-2\lambda_i t)}}{(\alpha\lambda_i + e^{(-\lambda_i T)})^2} f_i^2 \leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=0}^{\infty} f_i^2 = \frac{1}{\alpha^2} \|f\|^2 \tag{3.12}$$

Nous obtenons $u_\alpha(t) \in D(A)$ et $u_\alpha(t) \in C([0,T], D(A))$. Ce qui signifie que la fonction $u_\alpha(t)$ est une solution classique au (Q.B.V.P) problème.

Maintenant, en utilisant (3.9). nous avons :

$$\|u_\alpha(t)\|^2 \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha\lambda_i + e^{(-\lambda_i T)})^2} f_i^2 \tag{3.13}$$

Si nous mettons :

$$h(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} (\alpha\lambda_i + e^{(-\lambda_i T)})^{-1}. \quad \textit{pour } \lambda > 0 \tag{3.14}$$

puis :

$$\sup_{\lambda>0} h(\lambda) = h(\frac{\ln(\frac{T}{\alpha})}{T}) \tag{3.15}$$

alors :

$$\|u_\alpha(t)\|^2 \leq \left[\frac{T}{\alpha(1+\ln(\frac{T}{\alpha}))}\right]^2 \sum_{i=0}^{\infty} f_i^2 = \left[\frac{T}{\alpha(1+\ln(\frac{T}{\alpha}))}\right]^2 \|f\|^2 \tag{3.16}$$

Cela montre que $u_\alpha(t)$ existe, et que $u_\alpha(t)$ est défini de façon intégral pour tout $t \in [0,T]$ et nous avons l'estimation souhaiteé

Maintenant, nous donnons le résultat de convergence suivant :

Théorème 3.2 *: pour chaque $f \in H$, $u_\alpha(T)$ converge vers f en H, quand α tend vers zéro*

Preuve 9 *: Soit $\varepsilon > 0$, on choisi $i > 0$ pour :*

$$\sum_{n>i}^{\infty} f_i^2 < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.17}$$

A partir (3.9), nous avons :

$$\|u_\alpha(T) - f\|^2 \le \alpha^2 \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i^2}{(\alpha\lambda_i + e^{(-\lambda_i T)})^2} f_i^2 + \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.18}$$

En choisissant α de manière telle que :

$$\alpha^2 < \varepsilon(2\sum_{i=0}^{n} \lambda_i^2 e^{(\lambda_i^2 T)} f_i^2)^{-1} \tag{3.19}$$

nous obtenons le résultat souhaité .

3.4 Convergence de la solution approchée

Théorème 3.3 *: pour tous les $f \in H$, le (F.V.P) a une solution classique u donnée par (3.8), si et seulement si $\left(u'_\alpha(0)\right)_{\alpha>0}$ converge dans H, par ailleurs, nous avons alors que $u_\alpha(t)$ converge vers $u(t)$ dans $C^1([0,T], H)$ quand α tend vers zéro*

Preuve 10 *: Soit $\varepsilon > 0$, tel que :*

$$\sum_{n+1}^{\infty} \frac{\alpha^2 \lambda_i e^{(2\lambda_i T)}}{\alpha^2 \lambda_i^2} f_i^2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

si nous supposons que le (F.V.P) a une solution classique u , alors nous avons

$$\|u'_\alpha(0) - u'(0)\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^2 \lambda_i^4 e^{(2\lambda_i T)}}{\left(\alpha\lambda_i + e^{(-\lambda_i T)}\right)^2} f_i^2$$

$$\le \alpha^2 \sum_{i=0}^{n} \lambda_i^4 e^{(4\lambda_i T)} f_i^2 + \sum_{n+1}^{\infty} \frac{\alpha^2 \lambda_i e^{(2\lambda_i T)}}{\alpha^2 \lambda_i^2} f_i^2 \tag{3.20}$$

$$< \alpha^2 \sum_{i=0}^{n} \lambda_i^4 e^{(4\lambda_i T)} f_i^2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

donc en choisissant α tel que :

$$\alpha^2 < \varepsilon \left(2 \sum_{i=0}^{n} \lambda_i^2 e^{(4\lambda_i T)} f_i^2 \right)^{-1}$$

nous obtenons

$$\left\| u'_\alpha (0) - u' (0) \right\|^2 < \varepsilon \tag{3.21}$$

donc en montre que $\| u'_\alpha (0) - u' (0) \|$ tend vers zéro si α tend vers zéro. De plus

$$\left\| u'_\alpha (t) - u' (t) \right\|^2 \leq \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i^2 \left(\frac{1}{\alpha \lambda_i + e^{(-\lambda_i T)}} - e^{(\lambda_i T)} \right)^2 f_i^2 \tag{3.22}$$

$$= \left\| u'_\alpha (0) - u' (0) \right\|^2$$

alors $u'_\alpha (t)$ converge uniformément vers $u' (t)$ dans $[0, T]$, quand α tend vers zéro. De puis

$$\left\| u_\alpha (0) - u (0) \right\|^2 \leq \alpha^2 \sum_{i=0}^{n} \lambda_i^2 e^{(4\lambda_i T)} f_i^2 + \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.23}$$

pour n assez grand, puis en choisissant α tel que :

$$\alpha^2 < \varepsilon \left(2 \sum_{i=0}^{n} \lambda_i^2 e^{(4\lambda_i T)} f_i^2 \right)^{-1}$$

on obtient :

$$\left\| u_\alpha (0) - u (0) \right\|^2 \leq \varepsilon \tag{3.24}$$

Ainsi $u_\alpha (0)$ converge vers $u (0)$, qui à son tour donne $u_\alpha (t)$ converge uniformément vers $u (t)$ dans $[0, T]$ comme α tend vers zéro combinons tous ces résultats de convergence, nous concluons que $u_\alpha (t)$ converge vers $u (t)$ dans $C^1 ([0, T], H)$.

Maintenant, supposons que $\left(u'_\alpha (0) \right)_{\alpha > 0}$ converge dans H, comme u_α est une solution classique du problème (Q.B.V.P) , alors nous avons :

$$\left\| u'_\alpha (0) \right\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^2}{\left(\alpha \lambda_i + e^{(-\lambda_i T)} \right)^2} f_i^2 \tag{3.25}$$

et il est facile de montrer que :

$$\left\| \lim_{\alpha \to 0} u'_\alpha (0) \right\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i^2 e^{(2\lambda_i T)} f_i^2 \tag{3.26}$$

et ainsi de déduire que la fonction $u\,(t)$ définie par :

$$u\,(t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{((T-t)\lambda_i)} f_i \tag{3.27}$$

est une solution classique au (F.V.P). Ceci termine la preuve du théorème.

Théorème 3.4 *: Si la fonction u donnée par (3.8) est une solution classique du problème (F.V.P) , et u_α^δ est une solution du problème (Q.B.V.P) pour $f = f_\delta$, telle que $\|f - f_\delta\| < \delta$, nous avons*

$$\left\|u(0) - u_\alpha^\delta\,(0)\right\| \leq c\left(1 + \ln\frac{T}{\delta}\right) \tag{3.28}$$

où $c = T(1 + \|Au(0)\|)$.

Preuve 11 *: Supposons que la fonction u donnée par (3.8) est une solution classique pour le problème (F.V.P), et nous allons désigner par u_α^δ a une solution du problème (Q.B.V.P) pour $f = f_\delta$, de telle sorte que*

$$\|f - f_\delta\| < \delta \tag{3.29}$$

en suite, $u_\alpha^\delta\,(t)$ est donnée par :

$$u_\alpha^\delta\,(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{(-\lambda_i t)}}{\alpha\lambda_i + e^{(-\lambda_i T)}} f_{i\delta}\varphi_i, \quad \forall t \in [0, T] \tag{3.30}$$

De (3.8) et (3.30), nous avons :

$$\left\|u(0) - u_\alpha^\delta\,(0)\right\| \leq \triangle_1 + \triangle_2 \tag{3.31}$$

où $\triangle_1 = \|u(0) - u_\alpha\,(0)\|$, et $\triangle_2 = \left\|u_\alpha(0) - u_\alpha^\delta\,(0)\right\|$. En utilisant (3.15), on obtient

$$\triangle_1 \leq \frac{T}{(1 + \ln(T/\alpha))}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i^2 e^{(2\lambda_i T)} f_i^2\right)^{1/2} \tag{3.32}$$

$$\triangle_2 \leq \frac{T}{\alpha\,(1 + \ln(T/\alpha))}\,\|f - f_\delta\|$$

puis :

$$\triangle_1 \leq \frac{T\,\|\lambda_i u(0)\|}{(1 + \ln(T/\alpha))} \tag{3.33}$$

$$\triangle_2 \leq \frac{T\delta}{\alpha\,(1 + \ln(T/\alpha))}$$

de (3.33), on obtient :

$$\left\| u(0) - u_\alpha^\delta(0) \right\|^2 \leq \frac{T \| Au(0) \|}{(1 + \ln(T/\alpha))} + \frac{T\delta}{\alpha(1 + \ln(T/\alpha))} \tag{3.34}$$

alors, pour le choix $\alpha = \delta$, nous obtenons :

$$\left\| u(0) - u_\alpha^\delta(0) \right\|^2 \leq \frac{T(1 + \| Au(0) \|)}{(1 + \ln(T/\alpha))} \tag{3.35}$$

Remarque 3.1 *: à partir de (3.28), pour $T > e^{(-1)}$ nous obtenons :*

$$\left\| u(0) - u_\alpha^\delta(0) \right\| \leq c\left(\ln \frac{1}{\delta}\right)^{-1} \tag{3.36}$$

3.5 Estimation de l'erreur de convergence

Théorème 3.5 *: S'il existe $\varepsilon \in]0, 2[$ de sorte que :*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i^\varepsilon e^{(\varepsilon \lambda_i T)} f_i^2 \tag{3.37}$$

converge, alors $u_\alpha(T)$ converge vers f avec l'ordre $\alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2}$, quand α tend vers zéro.

Preuve 12 *: Soit $\varepsilon \in]0, 2[$ telle que $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \lambda_i^\varepsilon e^{(\varepsilon \lambda_i T)} \|f\|^2$ converge, et soit $\beta \in]0, 2[$. pour λ fixé ($\lambda > 0$), si nous définissons une fonction $g_\lambda(\alpha) = \dfrac{\alpha^\beta}{\left(\alpha\lambda + e^{(-\lambda T)}\right)^2}$.alors nous pouvons montrer que :*

$$g_A(\alpha) \leq g_A(\alpha_0), \qquad \forall \alpha > 0 \tag{3.38}$$

où $\alpha_0 = \dfrac{\beta e^{(-\lambda T)}}{(2 - \beta)\lambda}$. En autre à partir de (3.9), nous avons

$$\| u_\alpha(T) - f \|^2 = \alpha^{2-\beta} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i^2 g_{\lambda_i}(\alpha) f_i^2 \tag{3.39}$$

Ainsi à partir de (3.38) et (3.39), nous obtenons :

$$\| u_\alpha(T) - f \|^2 \leq \alpha^{2-\beta} \left(\frac{\beta}{2 - \beta}\right)^\beta \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i^{2-\beta} e^{((2-\beta)\lambda_i T)} f_i^2 \tag{3.40}$$

Si nous choisissons $\beta = (2-\varepsilon)$, nous avons :

$$\|u_\alpha(T) - f\|^2 \leq \alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2} \left(4 \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i^\varepsilon e^{(\varepsilon AT)} f_i^2\right) \tag{3.41}$$

d'où :

$$\|u_\alpha(T) - f\|^2 \leq c_\varepsilon \alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2} \tag{3.42}$$

avec :

$$c_\varepsilon = 4 \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i^\varepsilon e^{(\varepsilon \lambda_i T)} f_i^2$$

Enfin, nous avons le corollaire suivant :

corollaire 3.1 *: Si il existe un $\varepsilon \in \left]0, 2\right[$ de sorte que :*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i^{(\varepsilon+2\gamma)} e^{((\varepsilon+2\gamma)\lambda_i T)} f_i^2 \tag{3.43}$$

où $\gamma = \overline{0,1}$, converge, alors u_α converge vers u dans $C^1([0,T], H)$ avec l'ordre de convergence $\alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2}$

Preuve 13 *: Si nous supposons que (3.43) est satisfaite, alors :*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i^2 e^{(2\lambda_i T)} f_i^2 \tag{3.44}$$

converge, et ainsi la fonction $u(t)$ donnée par (3.8) est une solution classique du (F.V.P), soient $u_\alpha^{(\gamma)}$,$u^{(\gamma)}$ désignent les dérivées d'ordre $\gamma\,(\gamma = \overline{0,1})$ des fonctions u_α et u , respectivement, en utilisant les inégalités suivantes :

$$\left\|u_\alpha^{(\gamma)}(0) - u^{(\gamma)}(0)\right\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^2\, \lambda_i^{(2+2\gamma)} e^{(2\lambda_i T)}}{\left(\alpha\lambda_i + e^{(-\lambda_i T)}\right)^2} f_i^2 \tag{3.45}$$

$$\leq \alpha^{2-\beta} \left(\frac{\beta}{2-\beta}\right)^\beta \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i^{2+2\gamma-\beta} e^{((4-\beta)\lambda_i T)} f_i^2$$

et en posant, $\beta = (2-\varepsilon)$, dans (3.45), nous obtenons :

$$\left\|u_\alpha^{(\gamma)}(0) - u^{(\gamma)}(0)\right\|^2 \leq c_{\varepsilon,\gamma} \alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2} \tag{3.46}$$

où :

$$c_{\varepsilon,\gamma} = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i^{(\varepsilon+2\gamma)} e^{((\varepsilon+2)\lambda_i T)} f_i^2$$

puisque :

$$\left\|u_\alpha^{(\gamma)}(t) - u^{(\gamma)}(t)\right\|^2 \leq \left\|u_\alpha^{(\gamma)}(0) - u^{(\gamma)}(0)\right\|^2 \tag{3.47}$$

alors $u_\alpha^{(\gamma)}(t)$ converge uniformément vers $u^{(\gamma)}(t)$ dans $[0,T]$, avec l'ordre de convergence $\alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2}$, et ainsi u_α converge vers u dans $C^1([0,T], H)$, avec $\alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2}$.

Conclusion Générale

La régularisation du problème mal-posé montre l'efficacité de la méthode de Quasi-valeur aux limites (Quasi-boundary value method). Pour une certaine classe de problème mal-posé, On a montre que le problème approche était bien-posé. Ce qui permet utilisation de la solution approchée dans beaucoup de domaines

Bibliographie

[1] M. Ababna, Regularisation by nonlocal conditions of the problem of the initial condition for evolution operator-differential equation, Vestnik Belorusskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya1. Fizika, Matematika (1998), no.2, 60-63, 81(Russian).

[2] K.A. Ames and L.E. Payne, Asymptotic behavior for two regularizations of the cauchy problem for the backward heat equation, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences 8 (1998), no. 1,187-202.

[3] K.A. Ames, L.E. Payne, and P.W. Schaefer, onlinear Energy and pointwise bounds in some non-standard parabolic problems, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A. Mathematics 134 (2004), no. 1, 1-9.

[4] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle, TheDiorie et Applications, Masson, Paris, 1983.

[5] G.W. Clark and S.F. Oppenheimer. Qusi-reversibility methods for non well-posed problems, Electronique Journal of Differential Equations, no. 8, pp.1-9, 1994.

[6] R. Dautray, J. L. Lions, Analyse mathématique et calcul numérique, Évolution : semi-groupe, variationnel, vol. 8, Masson, Paris 1988.

[7] M. Denche and K. Bessial, A modified quasi-boundary value method for ill-posed problems, journal of Mathematical Analysis and Applications 301.

[8] M. Denche, S. Djezzar. A modified Quasi-reversibility Value Method for a class of Abstract Parabolic Ill-posed Problems. vol (2006), Article ID 37524, pages 1-8.

[9] Ph. Goldner, Mathématiques des sciences appliquées : Transformation de Fourier, espaces de Hilbert, équations aux dérivées partielles, Directeur de recherche au CNRS Ècole nationale supérieure de chimie de Paris, ISBN 978-2-7298-5278-8 Ellipses Èdition Marketing S.A., 2010, 32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15.

[10] D.N. Hào, A mollification method for ill-posed problems. Numer, Math. 68 (1994) 469-506.

[11] D. Huet, Phénomène de perturbation singulière dans les problèmes aux limites, Anales inst.Fourier, pp.1-96, 1960.

[12] V.K. Ivanov, I.V. Mel'nikova, and A.I. Filinkov, operator-Differential Equations and Ill-Posed problems, Fizmatlit "Nauka", Moscow, 1995.

[13] J. Kohn, L. Nirenberg, Non coercive boundary value problems. Comm. Pure Applied Maths, vol. XVIII, pp, 446-492, 1965.

[14] R. Lattés, J.L. Lions, Méthode de quasi-réversibilité et applications. Dunod. Paris. 1967.

[15] J.L. Lions, Cours C.I.M.E., Varenna, mai 1963.

[16] J.L. Lions, Sur lappriximation des solutions de certains problèmes aux limites. Rend. Sem. Padova, vol. XXXII, pp. 3-54, 1962.

[17] I.V. Mel'nikova, Regularization of ill-posed differential problems, Sibikiĭ Mathematicheskiĭ Zhurnal 33 (1992), no. 2, 125-134, 221 (Russian), translated in Siberian Math. J. 33 (1992), no. 2, 289-298.

[18] K. Miller, Stabilized quasi-reversibility and other nearly best possible methods for non-well posed problems, Symposium on non-well posed problems and logarithmic convexity, Lecture notes in mathematics, 316, Springer Verlag, Berlin, 161-176, 1973.

[19] D.A. Murio, The mollifications method and the numerical solution of ill-posed problems, Wiley, New York, 1993.

[20] R.E. Showalter, The final value problem for evolution equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications 74 (1974), no. 3, 563-572.

[21] U. Tautenhahn, Optimal stable approximation for the sideways heat aquation, J. Inv. Ill-Posed Problems 5 (1997), 287-307.

[22] U. Tautenhahn, T. Schroter , On optimal regularization methods for the backward heat equation, Z. Anal. Anwen-dungen 15 (1996), 475-493.

[23] J. VON. Neumann, R. Richtmyer, A method for the numerical calculations of hydrodinamical shocks, J.Appl, Phys., vol.21, p.232. 1950.

[24] M.M. Lavrentiev, Some Improperly Posed problems of Mathematical Physics, Springer Tracts in Natural Philosophy, vol. 11, Springer, Berlin, 1967.

[25] —, Cauchy problem for hyperparabolic partial differential equation, Trends in the Theory and practice of Nonlinear Analysis (Arlington, Tex, 1984), North-Holland Math. Stud., vol. 110, North-Holland, Amsterdam, 1985, pp. 421-425.

Résumé

Ce travail est consacré à l'étude d'une certaine classe de problèmes mal-posés décrits par une équation différentielle parabolique. On a cité différentes méthodes de régularisation : méthode de Fourier, de mollification, le principe de Morozov et la méthode de quasi-réversibilité. On a fini par utiliser la méthode de quasi-valeurs aux limites pour régulariser un problème parabolique homogène avec un opérateur auto-adjoint positif. On démontre que le problème mal-posé admet une solution classique si seulement si la suite $\left(u_{\propto}'(0)\right)_{\propto>0}$ converge dans *H*.

On montre que le problème approché est bien-posé et que sa solution converge vers la solution classique. On estime l'érreur de convergence.

Mots clés : problème mal-posé, opérateur auto-adjoint, spectre d'un opérateur, méthode de quasi-valeurs aux limites.

Abstract

This work is concerned with the study of a class of ill-posed problems which are parabolic and written as differential equation. They have been explored using different regularization methods : Fourier's Method, Method of Mollification, Morozov's Principle, and the quasi-reversibility Method. This work ends with the use of quasi-boundary value method to regularize the homogeneous parabolic problem with a positive self-adjoint operator. It has been shown that the ill-posed problem admits a classical solution if and only if $\left(u_{\propto}'(0)\right)_{\propto>0}$ converges in *H*.

We show that the approximate problem is well-posed and the solution converges to the classical solution and the convergence error has been estimated.

Keywords: ill-posed problem, self-adjoint operator, spectrum of an operator, quasi-boundary value method.

ملخص

في هذا العمل تطرقنا لدراسة قسم معين من المسائل السيئة الطرح معطاة على شكل معادلات تفاضلية باستعمال طرق مختلفة: طريقة فوربيه، مبدأ موروزوف، شبه قابلية القلب التلطيف، ولقد استخدمنا طريقة القيم الشبه حدية لإيجاد حلول مسألة تكافؤية متجانسة ذات معامل مؤثر قرين ذاتي موجب مع إثبات أن المسألة السيئة الطرح تقبل حل كلاسيكي إذا وفقط إذا كانت المتتالية :

$\left(u_{\propto}'(0)\right)_{\propto>0}$ متقاربة في **H**

نبرهن أن المسألة التقريبية مطروحة جيدا وحلها يتقارب نحو الحل الكلاسيكي ونقوم بتقدير خطأ التقارب

الكلمات المفتاحية: مسألة سيئة الطرح، مؤثر قرين ذاتي، طيف مؤثر، القيم شبه الحدية.