الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Nº Réf :……………

Centre Universitaire

Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et de la Technologie **Département de Mathématique et Informatique**

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

en: **Mathématiques**

Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées

Introduction aux Fonctions Symétriques

Préparé par : Zouaghi Asma
Khaled Bochra

Soutenue devant le jury

Encadré par	**Boubellouta khadidja ………………..**	**M.A.B**
Président	**Boufelgha Nabila …………………....…**	**M.A.B**
Examinateur	**Laib Hafida ………..………................**	**M.A.B**

Année Universitaire : 2015/2016

Remerciement

Avant tout, nous remercions ALLAH tout puissant de nous avoir donné la volonté et le courage de mener ce travail.

Nos remerciements à nos très chers parents, frères, soeurs, collègues et amis respectives qui nous ont encouragés, soutenu durant tout notre parcours.

*Un remerciement particulier à notre encadreur Mme **Boubellouta khadidja** pour sa présence, son aide et surtout pour ses précieux conseils qui nous ont assistés pour l'accomplissement de notre projet .*

*Nous adressons également les membres du jury Mme **Boufelgha Nabila** et Mme **Laib Hafida** pour avoir accepter de présider et d'examiner ce modeste travail.*

Un grand remerciement a mes enseignants au département des sciences et technologie surtout, les enseignants des mathématique et informatique et tous les membres du département des sciences et technologie du centre universitaire de Mila.

Enfin nous remercions toutes personnes qui ont contribué de prés ou de loin à l'achèvement de ce travail.

Asma, Bochra

Dédicace

En guise de remerciement et en termes de gratitude, je dédie ce modeste travail, Aux personnages les plus chers du monde et les plus chers à mon cœur, qui ont été si généreux, si patients, si noble avec moi pendant mes années d'étude.

Un remerciment special pour mes grands parents alah yrhamhwm : mon grand-père ***Abd Erahmane*** *et ma grand-mère* ***zohra***

A mon père ***Messaoud*** *source de force et de courage, qui n'a jamais cessé de donner de sa sympathie et son éducation.*

A l'exemple de ma vie ma mére ***Akila*** *qui toujours présente à mes coté, avec sa tendresse et son amour.*

A mes chérs fréres : ***Amine et Abd Errahim****.*

A mes soeurs : ***Khadidja et Oumaima****.*

Je voudrais remercier également Mon fiancailles ***Djalal Khelil*** *pour ses encouragement et sa famille qui sera être ma deuxiéme famille.*

*A tous mes amies :****Wafa,Hassna,Mounira, Safa et Sana....***

A toutes les familles ***Zouaghi et khelil****.*

A mon binôme ***Bochra*** *qui je la souhaite une vie plaine de joie et de prospérité.*

A tous qui occupe une place dans ma vie, dans mon coeur et surtout aux étudiants de master deux mathématiques appliqués et fondamentales.

Asma

Dédicace

En guise de remerciement et en termes de gratitude, je dédie ce modeste travail, Aux personnages les plus chers du monde et les plus chers à mon coeur, qui ont été si généreux, si patients, si noble avec moi pendant mes années d'étude.

*A mon père **Mohammed** source de force et de courage, qui n'a jamais cessé de donner de sa sympathie et son éducation.*

*A l'exemple de ma vie ma mére **Houria** qui toujours présente à mes coté, avec sa tendresse et son amour.*

*A mon chére frére : **Issam**.*

*A mes soeurs : **Nawal, Sara,Rima,Lobna ,Feryal.***

*à La fille de ma soeur **Assil**.*

*A toutes les familles **Khaled**.*

*A mon binôme **Asma** qui je la souhaite une vie plaine de joie et de prospérité. A tous qui occupe une place dans ma vie, dans mon coeur et surtout aux étudiants de master deux mathématiques appliqués et fondamentales .*

BOCHRA

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Les fonctions symétriques se situent dans le domaine du combinatoire algébrique ou la motivation principale est le calcule de certaines identités issues des mathématiques discrètes ou de la physique, à l'aide des objets combinatoires.

De nos jours, l'étude des fonctions symétriques se situe à la croisée de la combinatoire, de la physique et de l'algèbre.

Ce mémoire présenté une étude théorique et pratique sur les fonctions symétriques organisée en quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, nous rappelons les notions générales, telles que les définitions des séries formelles, ainsi que les relations de récurrences.

En fin on définit les séries génératrices utilisées pour obtenir des formules explicites des suites définies par récurrence linéaire par exemple pour les suites des nombres de Lucas, de Pell- Lucas, Jacobsthal et Jacobsthal-lucas.

Dans le deuxième chapitre, nous introduisons les fonctions symétriques ainsi que leurs propriétés.

Dans le troisième chapitre on introduit les fonctions de Schur S_λ puisqu'elles forment au même titre que les fonctions monomiales, homogènes et élémentaire, une base sur les fonctions symétriques.

Dans le dernier chapitre nous présentons des nouveaux résultats obtenus sur les fonctions génératrices des produits des nombres de Lucas et Pell-Lucas, et le produits de nombres de Jacobsthal et Jacobsthal-Lucas.

Une liste de références, une conclusion et des mots clés sont donnés a la fin de ce mémoire.

CHAPITRE 1

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous rappelons des notions générales, nous commençons par définir les séries formelles, Ensuite les Relations de Récurrence . Enfin nous introduisons la notion des fonctions génératrices associées aux suites : (Lucas, Pell-Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas).

1.1 Séries Formelles

1.1.1 Anneau des séries formelles

Définition 1. *Un anneau est un ensemble A muni de deux lois internes notées* $+$ *et* $\times$*, et deux éléments notés* 0 *et* 1*, tels que :*
(1) $(A, +, .)$ *est un groupe commutatif,*
(2) la loi $\times$ *est associative et* 1 *est neutre pour cette loi,*
(3) la loi $\times$ *est distributive à droite et gauche pour* $+$ *:* $\forall(a, b, c) \in A^3, a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ *et* $(b + c) \times a = b \times a + c \times a$*.*

Définition 2. *Un anneau est dit intègre s'il est non nul et ne possède pas de diviseurs de zéro .*

Définition 3. *Les éléments de l'ensemble* $A[[X]] \equiv \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j, a_j \in A \right\}$ *s'appellent les séries formelles (à une indéterminée)à coefficients dans* A.
Pour $j \in \mathbb{N}, x^j$ *s'appelle le monôme de degré* j *et* a_j *est son coefficients.*

Définition 4. [9] *Soient* $u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ *et* $v(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ *deux séries formelles.*
On peut définir leur somme et leur produit comme suit :

$$(u+v)(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (a_j + b_j)\, x^j. \tag{1.1}$$

$$(u.v)(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{j} a_k . b_{j-k} \right) x^j. \tag{1.2}$$

Cette seconde loi définit le produit de convolution (ou produit de Cauchy) de deux séries formelles (selon l'usage, ce produit sera également noté $u.v$ *ou* uv*).*

1.1.2 Autres opérations sur les séries formelles

a)Multiplication par un scalaire : $v = \sum_{j=0}^{\infty} k a_j x^j$ est le produit de $u = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ par le scalaire k.

b)Dérivation : $v = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) a_{j+1} x^j$ est le résultat de la dérivation de $u = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ par rapport à x.

On utilise aussi la notation dérivation, On a immédiatement :

$$(u+v)^{'} = u^{'} + v^{'}.$$

Et pour tout scalaire k :

$$(k.u)^{'} = k.u^{'}.$$

On a encore la formule habituelle :

$$(u.v)' = u'.v + u.v'.$$

On a pour tout entier $n \geq 1$:

$$(u^n)' = nu^{n-1}.u'.$$

c)Division : Soient u et v deux séries formelles telles que $v \neq 0$, v divise u si et seulement s'il existe une série formelle w telle que :

$$u = v.w.$$

1.1.3 Séries inversibles

Définition 5. *On dit que la série* $\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ *est l'inverse de la série* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$*,*
Si :

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right) = 1. \tag{1.3}$$

Proposition 1.1.1. [22] *Une série formelle* $u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ *est inversible si et seulement si* $a_0 \neq 0$*.*

Démonstration. Soient $u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ et $v(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ deux séries formelles telle que :

$$u(x)v(x) = 1.$$

Donc nécessairement :

$$a_0 b_0 = 1 \text{ et } \forall j \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k} = 0.$$

Alors le coefficient $a_0 \neq 0$ réciproquement, supposons que $a_0 \neq 0$, alors le système triangulaire d'équations :

$$\begin{cases} a_0 b_0 = 1. \\ a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0. \\ \vdots \\ a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_0 b_n = 0. \end{cases}$$

a une unique solution. □

1.1.4 Substitution d'une série formelle dans une autre

Définition 6. *Soit* $v(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ *telle que* $u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$.

On appelle composée de u *par* v *et on note* $u(v)$ *(ou* $u \circ v$*) la série formelle*

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i v^i.$$

On dit que $u \circ v$ *est obtenue par substitution de* v *à* x *dans* u.

Proposition 1.1.2. [9] *Soit* v *une série sans terme constant.*
L'application $u \mapsto u \circ v$ *est un homomorphisme de A[[X]] dans lui-même.*
En d'autres termes, on a :

$$(u + w) \circ v = u \circ v + w \circ v. \tag{1.4}$$

$$(u.w) \circ v = (u \circ v).(w \circ v). \tag{1.5}$$

Et donc :

$$u^n \circ v = (u \circ v)^n \qquad (n \geq 1). \tag{1.6}$$

De plus

$$1 \circ v = 1. \tag{1.7}$$

1.2 Fonctions Génératrices

1.2.1 Fonctions génératrices ordinaires

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres, on associe à cette suite la série génératrice ordinaire (SGO) suivante :

$$S(u)(x) = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n, \tag{1.8}$$

La fonction définie par cette série est appelée fonction génératrice ordinaire associée à $(U_n)_{n\geq 0}$.

Proposition 1.2.1. *Pour toute entier $n \geq 0$, On a :*

$$(1+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n$$

Si l'on écrit le développement en série entier à l'origine de $(1-z)^{-n}$, On obtient pour $|z| < 1$,

$$(1-z)^{-n} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-n)(-n-1)...(-n-k+1)}{k!}(-z)^k$$

1.2.2 Fonctions génératrices associées à la suite Fibonacci

Considérons la suite de Fibonacci définie par[18] :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2. \end{cases}$$

Posons :

$$S(F)(x) = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n,$$

$$\begin{aligned}
g(x) &= F_0 + F_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(F_{n-1} + F_{n-2}\right) x^n \\
&= 0 + x + x\left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n - F_0\right) + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^{n-2} \\
&= x + x g(x) + x^2 g(x).
\end{aligned}$$

Donc :

$$g(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} \tag{1.9}$$

1.2.3 Fonctions génératrices associées à la suite Lucas

Considérons la suite de Lucas définie par[18] :

$$\begin{cases} L_0 = 2 \\ L_1 = 1 \\ L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, n \geq 2. \end{cases}$$

Posons :

$$S(L)(x) = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n.$$

$$\begin{aligned}
g(x) &= L_0 + L_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(L_{n-1} + L_{n-2}\right) x^n \\
&= 2 + x + x\left(\sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n - L_0\right) + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} L_{n-2} x^{n-2} \\
&= 2 - x + x g(x) + x^2 g(x).
\end{aligned}$$

Donc :

$$g(x) = \frac{2 - x}{1 - x - x^2} \tag{1.10}$$

1.2.4 Fonctions génératrices associées à la suite Pell-Lucas

Considérons la suite de Pell-Lucas définie par [18] :

$$\begin{cases} Q_0 = 2 \\ Q_1 = 2 \\ Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}, n \geq 2. \end{cases}$$

Posons :

$$S(Q)(x) = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n.$$

$$\begin{aligned} g(x) &= Q_0 + Q_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(Q_{n-1} + Q_{n-2}\right) x^n \\ &= 2 + 2x + x\left(\sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n - Q_0\right) + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} Q_{n-2} x^{n-2} \\ &= 2 - 2x + 2xg(x) + x^2 g(x). \end{aligned}$$

Donc :

$$g(x) = \frac{2 - 2x}{1 - 2x - x^2} \tag{1.11}$$

1.2.5 Fonctions génératrices associées à la suite Jacobsthal

Considérons la suite de Jacobsthal définie par [18] :

$$\begin{cases} J_0 = 0 \\ J_1 = 1 \\ J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, n \geq 2. \end{cases}$$

Posons :

$$S(J)(x) = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n x^n.$$

$$\begin{aligned}
g(x) &= J_0 + J_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(J_{n-1} + 2J_{n-2}\right) x^n \\
&= x + x\left(\sum_{n=0}^{\infty} J_n x^n - J_0\right) + 2x^2 \sum_{n=2}^{\infty} J_{n-2} x^{n-2} \\
&= x + xg(x) + 2x^2 g(x).
\end{aligned}$$

Donc :

$$g(x) = \frac{x}{1 - x - 2x^2} \tag{1.12}$$

1.2.6 Fonctions génératrices associées à la suite Jacobsthal-Lucas

Considérons la suite de Jacobsthal-Lucas définie par [18] :

$$\begin{cases} j_0 = 2 \\ j_1 = 1 \\ j_n = j_{n-1} + 2j_{n-2}, n \geq 2. \end{cases}$$

Posons :

$$S(j)(x) = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} j_n x^n.$$

$$\begin{aligned}
g(x) &= j_0 + j_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(j_{n-1} + j_{n-2}\right) x^n \\
&= 2 + x + x\left(\sum_{n=0}^{\infty} j_n x^n - j_0\right) + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} j_{n-2} x^{n-2} \\
&= 2 - x + xg(x) + 2x^2 g(x).
\end{aligned}$$

Donc :

$$g(x) = \frac{2 - x}{1 - x - 2x^2} \tag{1.13}$$

1.3 Relations de Récurrence

1.3.1 Relation de récurrence linéaire homogène

Définition 7. *Une relation de récurrence est dite linéaire homogène d'ordre k à coefficients constants, si elle est de la forme :*

$$u_n + d_1 u_{n-1} + d_2 u_{n-2} + \cdots + d_k u_{n-k} = 0. \tag{1.14}$$

Où $d_1, d_2, \cdots, d_k \in \mathbb{R}, d_k \neq 0.$

Remarque 1.3.1. $u_n = 0$ *est une solution de l'équation* (1.14)*, elle s'appelle solution triviale .*

Remarque 1.3.2. $u_n = x^n$ *est solution de l'équation* (1.14)*, avec* $u_n \neq 0$*, vérifie*

$$x^n + d_1 x^{n-1} + d_2 x^{n-2} + \cdots + d_k x^{n-k} = 0 \Leftrightarrow x^k + d_1 x^{k-1} + d_2 x^{k-2} + \cdots + d_k = 0. \tag{1.15}$$

Cette dernière équation est l'équation caractéristique de la relation de récurrence.

1.3.2 Polynôme caractéristique

Définition 8. *Soit* $u_n + d_1 u_{n-1} + d_2 u_{n-2} + \cdots + d_k u_{n-k} = 0$*, le polynôme caractéristique qui lui correspond est :*

$$P(x) = x^k + d_1 x^{k-1} + d_2 x^{k-2} + \cdots + d_k. \tag{1.16}$$

Remarque 1.3.3. *L'équation caractéristique associée à la relation de récurrence est obtenue en annulant le polynôme caractéristique de cette dernière. Les racines du polynôme caractéristique sont appelées les racines caractéristiques.*

Théorème 1.3.1. [24] *Soient* $d_1, d_2, \cdots, d_k$ *des nombres réels tels que* d_k *est non nul. Supposons que le polynôme caractéristique* $P(x)$ *admet* k *racines distinctes*

$x_1, x_2, \cdots, x_k$, alors u_n est une solution générale de la relation de récurrence si et seulement si

$$u_n = c_1x_1^n + c_2x_2^n + \cdots + c_kx_k^n. \tag{1.17}$$

Avec $c_1, c_2, \cdots, c_k$ des constantes réelles.

Exemple 1.3.1. *Soit la récurrence de la suit de Pell :*

$$\begin{cases} P_n - 2P_{n-1} - P_{n-2} = 0, n \geq 2 \\ P_0 = 0 \text{ et } P_1 = 1 \end{cases}$$

Son équation caractéristique est :

$$x^2 - 2x - 1 = 0,$$

qui a pour racines simples :

$$x_1 = 1 - \sqrt{2} \text{ ou } x_2 = 1 + \sqrt{2}$$

La solution générale est donnée par :

$$P_n = c_1x_1^n + c_2x_2^n$$

Chercher c_1, c_2 sur la base de la relation suivante :

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 & Si\ n = 0 \\ c_1x_1 + c_2x_2 = 1 & Si\ n = 1 \end{cases}$$

Par suite :

$$\begin{cases} c_1 = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ c_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

Alors :

$$P_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right].$$

Théorème 1.3.2. [24] *Soient $d_1, d_2, \cdots, d_k$ des nombres réels tels que d_k est non nul. Supposons que le polynôme caractéristique $P(x)$ admet r racines $x_1, x_2, \cdots, x_r$ de multiplicité $m_1, m_2, \cdots, m_r$ telles que $m_i \geq 1, i \in \overline{1.r}$ et $\sum_{i=0}^{r} m_i = k$, alors u_n est une solution générale de la relation de récurrence si et seulement si*

$$u_n = \sum_{i=0}^{r} \left(c_{i1} + c_{i2}n + \cdots + c_{im_i} n^{mi-1}\right) x_i^n \tag{1.18}$$

Avec c_{ij} des constantes réelles $\forall i, j$ tels que $1 \leq i \leq r$ et $0 \leq j \leq m_r$.

Exemple 1.3.2. *Soit la relation de récurrence*

$$\begin{cases} u_0 = 3, u_1 = -7 \\ u_n + 2u_{n-1} + u_{n-2} = 0. \end{cases}$$

Son équation caractéristique est

$$x^2 + 2x + 1 = 0,$$

qui a pour racine double :

$$x = -1$$

La solution générale est donnée par :

$$u_n = (-1)^n (c_1 + c_2 n),$$

chercher c_1, c_2 sur la base de la relation suivante :

$$\begin{cases} c_1 = 3 & Si \quad n = 0 \\ -c_1 - c_2 = -7 & Si \quad n = 1 \end{cases}$$

Par suite :

$$\begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 = 4 \end{cases}$$

Alors :

$$u_n = (-1)^n(3 + 4n).$$

CHAPITRE 2

FONCTIONS SYMÉTRIQUES

Dans ce chapitre nous intéressons aux éléments de base de la théorie des fonctions symétriques, au première section nous rappellerons les notions des équations algébriques de deuxième degré, a la deuxième section nous introduisons les fonctions symétriques élémentaires, complets et sommes de puissances . Dans la troisième section nous rappellerons quelques propriétés des fonctions symétriques .

2.1 Equations du deuxième degré

Considérons l'équation du deuxième degré [19] :

$$x^2 = a_1x + a_2 \qquad \text{telle que} \qquad (a_1, a_2 \in \mathbb{C}).$$

On a alors (formules de Viète) :

$$a_1 = \alpha_1 = \lambda_1 + \lambda_2 \qquad \text{et} \qquad a_2 = -\alpha_2 = -\lambda_1\lambda_2.$$

(où λ_1 et λ_2 sont les deux racines de l'équation, réelles ou complexes, distinctes ou non).

Posons :

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est appelée : "matrice compagnon" du polynôme :

$$P(x) = x^2 - a_1 x - a_2.$$

D'autre part, définissons la suite (u_n) par la relation de récurrences :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix},$$

et par les valeurs initiales : $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$

On a alors :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$$

Donc :

1)$u_{n+1} = a_1 u_n + a_2 u_{n-1}$

2) $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Posons :

$q_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

$q_{n+1} = \dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \dfrac{a_1 u_{n+1} + a_2 u_n}{u_{n+1}} = \dfrac{a_1 u_{n+1}}{u_{n+1}} + \dfrac{a_2 u_n}{u_{n+1}} = a_1 + \dfrac{a_2}{\dfrac{u_{n+1}}{u_n}} = a_1 + \dfrac{a_2}{q_n}$

Si on réitère cette opération, on obtient :

$$q_{n+1} = a_1 + \frac{a_2}{q_n} = a_1 + \cfrac{a_2}{a_1 + \cfrac{a_2}{q_{n-1}}} = a_1 + \cfrac{a_2}{a_1 + \cfrac{a_2}{a_1 + \cfrac{a_2}{q_{n-2}}}} = \ldots$$

On voit apparaître un développement en fraction continue.

De plus, si (q_n) converge vers une limite l, on doit avoir, d'après l'égalité

$q_{n+1} = a_1 + \dfrac{a_2}{q_n}$:

$$l = a_1 + \frac{a_2}{l}$$

Donc :

$$l^2 = a_1 l + a_2$$

Donc :

$$l = \lambda_1 \qquad ou \qquad \lambda_2$$

Nous verrons plus loin, d'une part, les conditions de convergence et d'autre part laquelle des deux racines est la limite effective de la suite . (On verra que c'est la racine qui a le plus grand module.)

Passons à la diagonalisation de la matrice M, recherchons ses valeurs propres :

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - a_1\lambda - a_2$$

Ce déterminant s'annule pour $\lambda = \lambda_1 \quad ou \quad \lambda_2$,

les valeurs propres de la matrice M sont donc les racines de l'équation :

$$x^2 = a_1 x + a_2$$

Recherchons les vecteurs propres :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (i = 1 \text{ où } 2),$$

donc :

$$\begin{cases} a_1 x + a_2 y = \lambda_i x \\ x = \lambda_i y \end{cases}$$

Ces deux équations équivalent à :

$$x = \lambda_i y$$

Donc les vecteurs propres de M sont proportionnels à :

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad et \qquad \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Remarquons que :

$$M\overrightarrow{v_1} = \lambda_1 \overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \qquad et \qquad M^n\overrightarrow{v_1} = \lambda_1^n \overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{n+1} \\ \lambda_1^n \end{pmatrix},$$

de méme :

$$M\overrightarrow{v_2} = \lambda_2 \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} \lambda_2^2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad et \qquad M^n\overrightarrow{v_2} = \lambda_2^n \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} \lambda_2^{n+1} \\ \lambda_2^n \end{pmatrix}.$$

Nous supposerons, pour le moment : $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et même plus précisément :

$$|\lambda_1| > |\lambda_2|$$

On a donc :

$$(3) M = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$(4) M^n = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} & -\lambda_1\lambda_2 \dfrac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ \\ \dfrac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} & -\lambda_1\lambda_2 \dfrac{\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{pmatrix}$$

Cette égalité est encore valable pour $n < 0$, à condition que M soit inversible, ce qui suppose :

$$\det M = -a_2 \neq 0, \qquad \textit{donc} \qquad \lambda_1 \neq 0 \text{ et } \lambda_2 \neq 0$$

Il est alors possible de définir u_n pour $n < 0$ grâce à la relation de récurrence :

$$u_{n-1} = \frac{u_{n+1} - a_1 u_n}{a_2}$$

Voyons les conséquences de l'égalité (4) sur la convergence de la suite (q_n) :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} & -\lambda_1\lambda_2 \dfrac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ \\ \dfrac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} & -\lambda_1\lambda_2 \dfrac{\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix},$$

donc :

$$\begin{aligned} u_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} u_1 - \lambda_1\lambda_2 \frac{\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} u_0 &= \lambda_1^n \frac{u_1 - \lambda_2 u_0}{\lambda_1 - \lambda_2} - \lambda_2^n \frac{u_1 - \lambda_1 u_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ &= \lambda_1^n \left[\frac{u_1 - \lambda_2 u_0}{\lambda_1 - \lambda_2} - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n \frac{u_1 - \lambda_1 u_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \right] \end{aligned}$$

Si $n \longrightarrow \infty, \left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n \longrightarrow 0$ donc : $u_n \sim \lambda_1^n \dfrac{u_1 - \lambda_2 u_0}{\lambda_1 - \lambda_2}$ donc : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow \lambda_1$(a condition que : $u_1 \neq \lambda_2 u_0$).
De même : $u_n = \lambda_2^n \left[\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n \dfrac{u_1 - \lambda_2 u_0}{\lambda_1 - \lambda_2} - \dfrac{u_1 - \lambda_1 u_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \right]$
Si $n \longrightarrow -\infty, \left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n \longrightarrow 0$ donc : $u_n \sim {\lambda_2}^n \dfrac{-u_1 + \lambda_1 u_0}{\lambda_1 - \lambda_2}$ donc :$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow \lambda_2$(a condition que : $u_1 \neq \lambda_1 u_0$).

On voit donc que la convergence est indépendante du choix des valeurs initiales u_0 et u_1, pourvu que le vecteur : $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$ ne soit pas un vecteur propre.

Par conséquent, à toute équation du second degré de la forme : $x^2 = a_1 x + a_2$.
On peut associer une suite (u_n)telle que $u_{n+1} = a_1 u_n + a_2 u_{n-1}$

Le "ratio" q_n converge, dans le cas général, vers la racine de l'équation qui a le plus grand module (si $n \to +\infty$) ou vers celle qui a le plus petit module (si $n \to -\infty$).
Le cas des équations ayant deux racines de même module doit être examiné séparément.

Remarque 2.1.1. *Dans le cas particulier de l'équation $x^2 = x + 1$, les racines λ_1 et λ_2 sont les nombres d'or Φ_1 et Φ_2, et la suite (u_n) est la suite de Fibonacci $F(n)$.*

2.2 Fonctions symétriques

Définition 9. [4] *Une fonction $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ en n variables est symétrique si pour tout permutations de l'ensemble d'indices $\{1, 2, ..., n\}$ l'égalité suivante est vérifiée :*

$$f(x_1, x_2, .., x_n) = f(x_{s(1)}, x_{s(2)}, ..., x_{s(n)}). \tag{2.1}$$

Considérons une équation de degré n :

$$(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3)...(x - \lambda_n) = 0, \tag{2.2}$$

à n racines réelles ou complexes $(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n)$, si nous développons le membre de gauche, nous obtenons :

$$x^n - e_1x^{n-1} + e_2x^{n-2} - e_3x^{n-3} + e_4x^{n-4} - e_5x^{n-5} + ... + (-1)^n e_n = 0 \tag{2.3}$$

Ou $e_1, e_2, ..., e_n$ sont des polynômes homogènes et symétriques en $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$

Pour être plus rigoureux, on pourra les noter $e_i(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, ou $e_i^{(n)}$ (si on veut seulement préciser le nombre de racines), ou encore $e_i(f)$, f étant le polynôme :

$$(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)...(X - \lambda_n)$$

Ces polynômes e_i sont appelés : fonctions symétriques élémentaires des racines .

2.2.1 Fonctions symétriques élémentaires

Définition 10. *On appelle k-ième fonction symétrique élémentaire la fonction définie par :*

$$e_k^{(n)} = e_k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \sum_{i_1+i_2+...+i_n=k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}, 0 \leq k \leq n, \tag{2.4}$$

$$avec \;\; i_1, i_2, ..., i_n = 0 \;\; ou \;\; 1$$

Exemple 2.2.1. *Pour une équation de degré* $2(n = 2,$ *les racines* $: \lambda_1$ *et* $\lambda_2)$*, on a :*

$$\begin{cases} e_0 = 1 \\ e_1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ e_2 = \lambda_1\lambda_2 \end{cases}$$

Pour une équation de degré $3(n = 3,$ *les racines* $: \lambda_1, \lambda_2$ *et* $\lambda_3)$*, on a :*

$$\begin{cases} e_0 = 1 \\ e_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ e_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 \\ e_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{cases}$$

Remarque 2.2.1. e_m^n *s'annule pour* $m > n$*.*

Proposition 2.2.1. [19]

$$1) e_k^{(n+1)} = \lambda_{n+1}e_{k-1}^{(n)} + e_k^{(n)} \tag{2.5}$$

$$2) e_k^{(n)} = \lambda_n e_{k-1}^{(n-1)} + \lambda_{n-1}e_{k-1}^{(n-2)} + ... + \lambda_{n-i}e_{k-1}^{(n-i-1)} + ... + \lambda_k e_{k-1}^{(k-1)} \tag{2.6}$$

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
1)\lambda_{n+1}e_{k-1}^{(n)}+e_k^{(n)} &= \lambda_{n+1}\left(\sum_{i_1+i_2+...+i_n=k-1}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}\right)+\sum_{i_1+i_2+...+i_n=k}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}\\
&= \sum_{i_1+i_2+...+i_n=k-1}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{1}+\sum_{i_1+i_2+...+i_n=k}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{0}\\
&= \sum_{i_1+i_2+...+i_n+1=k-1+1=k}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{1}+\sum_{i_1+i_2+...+i_n+0=k}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{0}\\
&= \sum_{i_1+i_2+...+i_{n+1}=k}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{i_{n+1}}, \qquad i_{n+1}=0 \text{ ou } 1\\
&= e_k^{(n+1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2)e_k^{(n)} &= \lambda_n e_{k-1}^{(n-1)}+e_k^{(n-1)}\\
&= \lambda_n e_{k-1}^{(n-1)}+\lambda_{n-1}e_{k-1}^{(n-2)}+e_k^{(n-2)}\\
&= \lambda_n e_{k-1}^{(n-1)}+\lambda_{n-1}e_{k-1}^{(n-2)}+\lambda_{n-2}e_{k-1}^{(n-3)}+e_k^{n-3}\\
&= \lambda_n e_{k-1}^{(n-1)}+\lambda_{n-1}e_{k-1}^{(n-2)}+\lambda_{n-2}e_{k-1}^{(n-3)}+...+\lambda_{n-i}e_{k-1}^{(n-i+1)}+...+\lambda_k e_{k-1}^{(k-1)}
\end{aligned}
$$

□

Proposition 2.2.2. *Les fonctions symétriques élémentaires peuvent également se définir comme les coefficients du développement en série formelle :*

$$E(z)=\sum_{k=0}^{\infty}e_k z^k=\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i z), \tag{2.7}$$

Avec $e_k(\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_n)$ *s'annule pour* $k>n$

Démonstration. On a :

$$e_k^{(n)}=e_k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)=\sum_{i_1+i_2+...+i_n=k}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n},\ \text{avec } e_k^{(n)}=0,\ \text{si } k>n$$

Par récurrence sur n montrons que :

$$\sum_{k=0}^{\infty}e_k z^k=\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i z)$$

Pour $n = 2$,on a :

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{2}(1+\lambda_i z) &= (1+\lambda_1 z).(1+\lambda_2 z) \\
&= 1+(\lambda_1+\lambda_2)z+\lambda_1\lambda_2 z^2 \\
&= e_0+e_1 z+e_2 z^2 \\
&= \sum_{k=0}^{2} e_k z^k.
\end{aligned}$$

Supposons que la propriété est vraie pour n :

$$\sum_{k=0}^{n} e_k z^k = \prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i z)$$

Et montrons que la propriété est vraie pour $n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} e_k z^k &= \prod_{i=1}^{n+1}(1+\lambda_i z) \\
\prod_{i=1}^{n+1}(1+\lambda_i z) &= \prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i z)(1+\lambda_{n+1} z) = \left(\sum_{k=0}^{n} e_k z^k\right)(1+\lambda_{n+1} z) \\
&= \sum_{k=0}^{n} e_k z^k + \lambda_{n+1}\sum_{k=0}^{n} e_k z^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} e_k z^k + \lambda_{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} e_{k-1} z^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} e_k z^k + \lambda_{n+1}\sum_{k=0}^{n+1} e_{k-1} z^k \\
&= \sum_{k\geqslant 0} e_k^{(n)} z^k + \lambda_{n+1}\sum_{k\geqslant 0} e_{k-1}^{(n+1)} z^k \\
&= \sum_{k\geqslant 0}\left(e_k^{(n)} + \lambda_{n+1} e_{k-1}^{(n+1)}\right) z^k \\
&= \sum_{k\geqslant 0} e_k^{(n+1)} z^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} e_k z^k.
\end{aligned}$$

□

2.2.2 Fonctions symétriques Complètes

Définition 11. *On définit également les fonctions symétriques complètes des racines de la façon suivante :*

$$h_k^{(n)} = h_k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \sum_{i_1+i_2+...+i_n=k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}, \tag{2.8}$$

avec $i_1, i_2, ..., i_n \geq 0$

Exemple 2.2.2. *Pour une équation de degré* 2 ($n = 2$, *les racines* λ_1 *et* λ_2), *on a :*

$$\begin{cases} h_0 = 1 \\ h_1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ h_2 = \lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 \\ h_3 = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_2^2\lambda_1 \\ . \\ . \\ . \end{cases}$$

Pour une équation de degré 3 ($n = 3$ *;les racines* λ_1, λ_2 *et* λ_3), *on a :*

$$\begin{cases} h_0 = 1 \\ h_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ h_2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 \\ h_3 = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 + \lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_1^2\lambda_3 + \lambda_2^2\lambda_1 + \lambda_2^2\lambda_3 + \lambda_3^2\lambda_1 + \lambda_3^2\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\ . \\ . \\ . \end{cases}$$

Proposition 2.2.3. [19]

$$1) h_k^{(n+1)} = \lambda_{n+1} h_{k-1}^{(n+1)} + h_k^{(n)} \tag{2.9}$$

$$2) h_k^{(n+1)} = \lambda_{n+1}^k + \lambda_{n+1}^{k-1} h_1^{(n)} + \lambda_{n+1}^{k-2} h_2^{(n)} + \lambda_{n+1}^{k-3} h_3^{(n)} + ... + \lambda_{n+1} h_{k-1}^{(n)} + h_k^{(n)} \tag{2.10}$$

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
1)\lambda_{n+1}h_{k-1}^{(n+1)}+h_k^{(n)} &= \lambda_{n+1}\sum_{i_1+i_2+...+i_{n+1}=k-1}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{i_{n+1}}+\sum_{i_1+i_2+...+i_n=k}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}\\
&= \sum_{i_1+i_2+...+i_{n+1}=k-1}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{i_{n+1}}\lambda_{n+1}^{1}+\sum_{i_1+i_2+...+i_n=k}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{0}\\
&= \sum_{i_1+i_2+...+i_n+i_{n+1}+1=k}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{i_{n+1}+1}+\sum_{i_1+i_2+...+i_n+0=k}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{0}\\
&= \sum_{i_1+i_2+...+i_n+(i_{n+1}+1)=k}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{i_{n+1}+1}+\sum_{i_1+i_2+...+i_n+0=k}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{0}
\end{aligned}
$$

On a $i_{n+1}\geq 0$ donc $i_{n+1}+1\geq 0$ supposons $i'_{n+1}=i_{n+1}+1,\ ou\ 0$
alors $i'_{n+1}\geq 0$
Donc :

$$
\begin{aligned}
\lambda_{n+1}h_{k-1}^{(n+1)}+h_k^{(n)} &= \sum_{i_1+i_2+...i_n+i'_{n+1}=k}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{i'_{n+1}}\\
&= h_k^{(n+1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2)h_k^{(n+1)} &= \lambda_{n+1}h_{k-1}^{(n+1)}+h_k^{(n)}\\
&= \lambda_{n+1}\left(\lambda_{n+1}h_{k-2}^{(n+1)}+h_{k-1}^{(n)}\right)+h_k^{(n)}\\
&= \lambda_{n+1}^2h_{k-2}^{(n+1)}+\lambda_{n+1}h_{k-1}^{(n)}+h_k^{(n)}\\
&= \lambda_{n+1}^3h_{k-3}^{(n+1)}+\lambda_{n+1}^2h_{k-2}^{(n)}+\lambda_{n+1}h_{k-1}^{(n)}+h_k^{(n)}\\
&\vdots\\
&= \lambda_{n+1}^ih_{k-i}^{(n+1)}+\lambda_{n+1}^{i-1}h_{k-(i-1)}^{(n)}+...+\lambda_{n+1}^2h_{k-2}^{(n)}+\lambda_{n+1}h_{k-1}^{(n)}+h_k^{(n)}, \qquad i<k.\\
&\vdots\\
&= \lambda_{n+1}^k+\lambda_{n+1}^{k-1}h_1^{(n)}+\lambda_{n+1}^{k-2}h_2^{(n)}+\lambda_{n+1}^{k-3}h_3^{(n)}+...+\lambda_{n+1}h_{k-1}^{(n)}+h_k^{(n)}
\end{aligned}
$$

□

Proposition 2.2.4. *On peut également définir les k-ièmes fonctions complètes comme les coefficient du développement en série formelle :*

$$H(z) = \sum_{k\geq 0} h_k z^k = \prod_{i\geq 1}(1-\lambda_i z)^{-1} \tag{2.11}$$

Démonstration. On a :

$$h_k^{(n)} = h_k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \sum_{i_1+i_2+...+i_n=k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}...\lambda_n^{i_n}$$

Pour $n = 2$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 0} h_k^{(2)} z^k &= h_0^{(2)} + h_1^{(2)} z + h_2^{(2)} z^2 + ... \\
&= 1 + (\lambda_1+\lambda_2)z + (\lambda_1^2+\lambda_1\lambda_2+\lambda_2)z^2 + ... \\
&= (1+\lambda_1 z+\lambda_1^2 z^2+...)(1+\lambda_2 z+\lambda_2^2 z^2+...) \\
&= \left(\sum_{k\geq 0}(\lambda_1 z)^k\right)\left(\sum_{k\geq 0}(\lambda_2 z)^k\right) \\
&= \frac{1}{(1-\lambda_1 z)(1-\lambda_2 z)} \\
&= \frac{1}{\prod_{i=1}^{2}(1-\lambda_i z)}.
\end{aligned}$$

Supposons que la propriété est vraie pour n :

$$\sum_{k\geq 0} h_k^{(n)} z^k = \prod_{i=1}^{n}(1-\lambda_i z)^{-1}.$$

Et montrons que la propriété est vraie pour $n+1$:

$$\sum_{k\geq 0} h_k^{(n+1)} z^k = \prod_{i=1}^{n+1}(1-\lambda_i z)^{-1}.$$

On a :

$$h_k^{(n+1)} = \lambda_{n+1} h_{k-1}^{(n+1)} + h_k^{(n)}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 0} h_k^{(n+1)} z^k &= \sum_{k\geq 0} \left(\lambda_{n+1} h_{k-1}^{(n+1)} + h_k^{(n)}\right) z^k \\
&= \lambda_{n+1} \sum_{k\geq 0} h_{k-1}^{(n+1)} z^k + \sum_{k\geq 0} h_k^{(n)} z^k \\
&= \lambda_{n+1} \sum_{k\geq 1} h_{k-1}^{(n+1)} z^k + \sum_{k\geq 0} h_k^{(n)} z^k \\
&= \lambda_{n+1} z \sum_{k\geq 0} h_k^{(n+1)} z^k + \sum_{k\geq 0} h_k^{(n)} z^k \\
&= \lambda_{n+1} z \prod_{i=1}^{n+1} (1-\lambda_i z)^{-1} + \prod_{i=1}^{n} (1-\lambda_i z)^{-1} \\
&= \frac{\lambda_{n+1} z + (1-\lambda_{n+1} z)}{\prod\limits_{i=1}^{n+1} (1-\lambda_i z)} \\
&= \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n+1} (1-\lambda_i z)}
\end{aligned}$$

□

Définition 12. [19] *Soit n un entier supérieur ou égal à 2, On définie Une matrice de Vandermonde par :*

$$\mathbf{V}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

Proposition 2.2.5. *Le déterminant d'une matrice de Vandermonde est :*

$$D(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \prod_{1\leq j<i\leq n} (\lambda_i - \lambda_j) \tag{2.13}$$

(produit de $\dfrac{n(n-1)}{2}$ *facteurs).*

Proposition 2.2.6. [19] *Soient m et n étant deux entiers strictement positifs, et les* *racines* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *étant toutes distinctes, on a l'égalité :*

$$h_m^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^{m+n-1}}{\prod\limits_{j\in\{1,...,n\}-\{i\}} (\lambda_i - \lambda_j)}. \tag{2.14}$$

Où le produit est étendu à tous les entiers j *différents de* i*, compris entre* 1 *et* n*.*

Démonstration. Par récurrence On a :

- Pour n=1, l'égalité se réduit à : $h_m^{(1)} = \lambda_1^m$,ce qui est manifestement vrai.
- Pour m=1, l'égalité à démontrer est :

$$h_1^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^{n}}{\prod\limits_{j\in\{1,...,n\}-\{i\}} (\lambda_i - \lambda_j)}$$

Au dénominateur, remplaçons $(\lambda_i - \lambda_j)$ par $(\lambda_j - \lambda_i)$ chaque fois que j est supérieur à i (donc $n-i$ fois) ; ceci revient à multiplier le dénominateur par $(-1)^{n-i}$.

Ensuite, multiplions-le par $D(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, ..., \lambda_n)$ (ou λ_i a été exclu) ; nous obtenons alors $D(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$.

Faisons de même au numérateur . Il vient :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^{n}}{\prod\limits_{j\in\{1,...,n\}-\{i\}} (\lambda_i - \lambda_j)} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^{n-i}\lambda_i^n D(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, ..., \lambda_n)}{D(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)}$$

Etudions le numérateur de cette fraction :

$$N(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i}\lambda_i^n D(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, ..., \lambda_n);$$

montrons d'abord qu'il est multiplié par (-1) quand on permute deux racines.

On voit que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^{n}}{\prod\limits_{j\in\{1,...,n\}-\{i\}} (\lambda_i - \lambda_j)},$$

est indépendant de l'ordre des racines .

Si on permute deux racines quelconques, le dénominateur $D(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ change de signe, donc il en est de même pour le numérateur $N(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$

Montrons ensuite que $N(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ s'annule si deux racines λ_k et λ_l $(k \neq l)$ sont égales.

Nous pouvons supposer que $k = 1$ et $l = 2$, puisqu'une permutation des racines ne peut pas modifier la valeur absolue de $N(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$.

Si $\lambda_1 = \lambda_2$, tous les déterminants de Vandermonde contenant à la fois λ_1 et λ_2 s'annulent, et $N(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ se réduit donc à une somme de deux termes :

$$N(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = (-1)^{n-1}\lambda_1^n D(\lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n) + (-1)^{n-2}\lambda_2^n D(\lambda_1, \lambda_3, ..., \lambda_n) = 0$$

On en déduit que $N(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ est divisible par $(\lambda_k - \lambda_l)$ $(k \neq l)$, donc par $D(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$.

Notons $Q(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ le polynôme quotient. Ce polynôme est symétrique (quand on inverse deux racines, $N(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ et $D(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ changent de signe, donc leur quotient n'est pas modifié) et homogène.

Le degré total de $N(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ est

$$n + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n^2 - n + 2}{2},$$

celui de $D(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ est

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n^2 - n)}{2},$$

donc le degré total de $Q(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ est :

$$\frac{n^2 - n + 2}{2} - \frac{(n^2 - n)}{2} = 1.$$

Le degré partiel de $N(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ (par rapport à une indéterminée quelconque λ_i) est n , celui de $D(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ est $n - 1$, donc le degré partiel de $Q(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ est : $n - (n - 1) = 1$.

D'après le théorème fondamental des polynômes symétriques, $Q(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$

peut s'exprimer comme polynôme en $e_i(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ mais le seul e_i qui soit de degré 1 en λ_i est $e_1(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = h_1(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$

Donc $Q(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ est égal à $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$, à un coefficient multiplicatif non nul près, il reste à expliquer pourquoi ce coefficient est 1.

Dans $(-1)^{n-i}\lambda_i^n D(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, ..., \lambda_n)$, le degré partiel de λ_i est n, et le degré partiel des autres indéterminées est n-2.

Dans $N(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, considéré comme un polynôme à une seule indéterminée λ_i, cherchons le monôme en λ_i ayant le plus haut degré :

c'est $(-1)^{n-i}\lambda_i^n D(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, ..., \lambda_n)$ son degré est n, et son coefficient est $(-1)^{n-i} D(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, ..., \lambda_n)$

D'autre part, dans le polynôme :

$$D(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = (-1)^{n-i} D(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, ..., \lambda_n) \prod_{j\in\{1,...,n\}-\{i\}} (\lambda_i - \lambda_j).$$

Le monôme de plus haut degré en λ_i est $(-1)^{n-i} D(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, ..., \lambda_n)\lambda_i^{n-1}$: son degré est $n-1$, son coefficient est encore $(-1)^{n-i} D(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, ..., \lambda_n)$.

En divisant selon les puissances décroissantes, on voit que le coefficient de λ_i dans $Q(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ ne peut être que 1.

- Pour $n > 1$ et $m > 1$: faisons un raisonnement par récurrence.

Nous supposons que la formule est vérifiée pour $h_{m-1}^{(n)}$ et pour $h_m^{(n-1)}$ et nous la démontrons pour $h_m^{(n)}$

Partons de la formule (2.9) :

$$h_m^{(n)} = \lambda_n h_{m-1}^{(n)} + h_m^{(n-1)}$$

$$\begin{aligned}
h_m^{(n)} &= \lambda_n \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^{m+n-2}}{\prod\limits_{j\in\{1,...,n\}-\{i\}} (\lambda_i - \lambda_j)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i^{m+n-2}}{\prod\limits_{j\in\{1,...,n-1\}-\{i\}} (\lambda_i - \lambda_j)} \\
h_m^{(n)} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_n \lambda_i^{m+n-2}}{\prod\limits_{j\in\{1,...,n\}-\{i\}} (\lambda_i - \lambda_j)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i^{m+n-2}(\lambda_i - \lambda_n)}{\prod\limits_{j\in\{1,...,n\}-\{i\}} (\lambda_i - \lambda_j)}
\end{aligned}$$

(On peut sommer jusqu'à $i = n$, car le dernier terme est nul.)

$$\begin{aligned} h_m^{(n)} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^{m+n-2}(\lambda_n + (\lambda_i - \lambda_n))}{\prod\limits_{j\in\{1,\dots,n\}-\{i\}} (\lambda_i - \lambda_j)} \\ h_m^{(n)} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^{m+n-1}}{\prod\limits_{j\in\{1,\dots,n\}-\{i\}} (\lambda_i - \lambda_j)} \end{aligned}$$

La formule est donc vérifiée pour $h_m^{(n)}$ □

2.2.3 Fonctions sommes de puissances

Définition 13. [8] *Soit k un entier positif. On appelle k -ième somme de puissances, la fonction symétrique définie par :*

$$p_k = \sum_i \lambda_i^k \tag{2.15}$$

Exemple 2.2.3.

$$\begin{aligned} p_6(\lambda_1, \lambda_2) &= \lambda_1^6 + \lambda_2^6. \\ p_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= \lambda_1^4 + \lambda_2^4 + \lambda_3^4. \end{aligned}$$

Définition 14. *Les k-ièmes fonctions sommes de puissances peuvent également se définir comme les coefficients du développement en série de*

$$P(z) = \sum_{k\geq 1} p_k z^{k-1} = \frac{d}{dz}\log H(z) = \sum_{i\geq 1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_i z} \tag{2.16}$$

Théorème 2.2.1. [14]*(Formules de Newton)*
Soit n un entier ≥ 2, $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $x_1, ..., x_n$ n éléments de $\mathbb{K}$. On considère, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la somme $p_k = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^k$.

On note $e_1, e_2, ..., e_n$ les fonctions symétriques élémentaires de $x_1, ..., x_n$, définis par :

$$e_m = \sum_{1\leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} \dots x_{i_n} \tag{2.17}$$

On a alors les relations suivantes :

1.

$$p_k - e_1 p_{k-1} + e_2 p_{k-2} + ... + (-1)^n e_n p_{k-n} = 0 \quad \textit{pour } k \geq n \tag{2.18}$$

2.

$$p_k - e_1 p_{k-1} + e_2 p_{k-2} + ... + (-1)^{k-1} e_{k-1} p_1 + (-1)^n e_k k = 0 \quad \textit{pour } 1 \leq k \leq n-1 \tag{2.19}$$

Démonstration. 1.Considérons le polynôme P talle que :

$$P(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - x_i) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i e_i X^{n-i}.$$

Il a pour expression

$$P(X) = X^n + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i e_i X^{n-i}.$$

Pour $1 \leq i \leq n$ et $k \geq n$, on a : $P(x_i) = 0$

Donc :

$$x_i^n - e_1 x_i^{n-1} + ... + (-1)^k e_k = 0$$

En multipliant par x_i^{k-n},

$$x_i^k - e_1 x_i^{k-1} + ... + (-1)^n e_n x_i^{k-n} = 0$$

En additionnant, pour $1 \leq i \leq n$, on obtient :

$$p_k - e_1 p_{k-1} + e_2 p_{k-2} + ... + (-1)^n e_n p_{k-n} = 0$$

2.Soit k entier tel que $1 \leq k \leq n-1$.basée cette fois sur le calcul brut de $e_m p_{k-m}$ pour $m = 0, ..., k-1$:

$$\begin{aligned}
e_m p_{k-m} &= \sum_{i_1<\ldots<i_m} x_{i_1}\ldots x_{i_m}\sum_{i=1}^{n} x_i^{k-m} = \sum_{\substack{i_1<\ldots<i_m\\ i_{m+1}=1,\ldots,n}} x_{i_1}\ldots x_{i_m}x_{i_{m+1}}^{k-m}\\
&= \sum_{\substack{i_1<\ldots<i_m\\ i_{m+1}\neq i_1,\ldots,i_m}} x_{i_1}\ldots x_{i_m}x_{i_{m+1}}^{k-m} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{\substack{i_1<\ldots<i_m\\ i_{m+1}=i_j}} x_{i_1}\ldots x_{i_{j-1}}x_{i_j}^{k-m}x_{i_{j+1}}\ldots x_{i_m}\\
&= \sum_{\substack{i_1<\ldots<i_m\\ i_{m+1}\neq i_1,\ldots,i_m}} x_{i_1}\ldots x_{i_m}x_{i_{m+1}}^{k-m} + \sum_{\substack{i_1'<\ldots<i_{m-1}'\\ i_m'\neq i_1'<\ldots<i_{m-1}'}} x_{i_1'}\ldots x_{i_{m-1}'}x_{i_m'}^{k-m}\\
&= A_m + A_{m-1}.
\end{aligned}$$

Où l'on a naturellement introduit les quantités :

$$A_m = \sum_{\substack{i_1<\ldots<i_m\\ i_{m+1}\neq i_1,\ldots,i_m}} x_{i_1}\ldots x_{i_m}x_{i_{m+1}}^{k-m}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
p_k - e_1p_{k-1} + \ldots + (-1)^{k-1}e_{k-1}p_1 + (-1)^n e_k k &= (A_1 + A_0) - (A_0 + A_1) + (A_1 + A_2)\\
\ldots+&\ (-1)^{k-1}(A_{k-2} + A_{k-1}) + (-1)^k e_k k\\
&= (-1)^k(ke_k - A_{k-1}).
\end{aligned}$$

Il reste à calculer A_{k-1} selon la place du dernier indice i_k parmi les autres :

$$\begin{aligned}
A_{k-1} &= \sum_{\substack{i_1<\ldots<i_{k-1}\\ i_k\neq i_1,\ldots,i_{k-1}}} x_{i_1}\ldots x_{i_{k-1}}x_{i_k}\\
&= \sum_{\substack{i_1<\ldots<i_{k-1}\\ i_k<i_1}} x_{i_1}\ldots x_{i_k} + \sum_{j=1}^{k-2}\sum_{\substack{i_1<\ldots<i_{k-1}\\ i_j<i_k<i_{j+1}}} x_{i_1}\ldots x_{i_k} + \sum_{\substack{i_1<\ldots<i_{k-1}\\ i_k<i_{k-1}}} x_{i_1}\ldots x_{i_k}\\
&= e_k + (k-2)e_k + e_k.
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.2.2. *On prendra garde à ne pas écrire pour* $1 \leq k < n$

$$p_k - e_1 p_{k-1} + e_2 p_{k-2} + ... + (-1)^{k-1} e_{k-1} p_1 + (-1)^n e_k p_0 = 0.$$

(On a remplacé k *à la fin par* p_0*). Ceci est tentant pour harmoniser avec le cas* $k \geq n$ *mais complètement faux vu que :*

$$p_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i^0 = \sum_{i=1}^{n} 1 = n \neq k.$$

2.2.4 Relations entre les fonctions symétriques

Proposition 2.2.7. [19] *On a :*

$$\sum_{j=0}^{m} \left[(-1)^j e_j^{(n)} h_{m-j}^{(n)} \right] = 0. \tag{2.20}$$

Proposition 2.2.8. [19] *On a :*

$$h_p(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \sum_{i_1 + 2i_2 + ... + n i_n = p} \frac{(i_1 + i_2 + ... + i_n)!}{i_1! i_2! ... i_n!} \alpha_1^{i_1} \alpha_2^{i_2} ... \alpha_n^{i_n}, \tag{2.21}$$

avec :

$$\alpha_i = (-1)^i e_i \text{ et } i_1, i_2, ..., i_n \in \mathbb{N}.$$

Démonstration. Par récurrence :

Pour $p = 0$, la formule est vraie,

et supposons-la vraie pour tout indice inférieur à un nombre p donné, et montrons qu'elle est vraie pour p.

D'après la formule (2.20) pour tout entier m non nul, on a :

$$\sum_{j=0}^{m} \left[(-1)^j e_j^{(n)} h_{m-j}^{(n)} \right] = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}
h_p^{(n)} &= \sum_{j=0}^{n}\left[(-1)^j e_j^{(n)} h_{p-j}^{(n)}\right] \\
&= \sum_{j=0}^{n}\left[\alpha_j h_{p-j}^{(n)}\right] \\
&= \sum_{j=0}^{n}\left[\alpha_j \sum_{i_1+2i_2+...+ni_n=p-j} \frac{(i_1+i_2+...+i_n)!}{i_1!i_2!...i_n!}\alpha_1^{i_1}\alpha_2^{i_2}...\alpha_n^{i_n}\right] \\
&= \sum_{j=0}^{n}\left[\sum_{i_1+2i_2+...+ni_n+j=p} \frac{(i_1+i_2+...+i_n)!}{i_1!i_2!...i_n!}\alpha_1^{i_1}\alpha_2^{i_2}..\alpha_j^{i_j+1}...\alpha_n^{i_n}\right] \\
&= \sum_{j=0}^{n}\left[\sum_{i_1+2i_2+...+j(i_j+1)+..+ni_n=p} \frac{(i_1+i_2+...+i_n)!}{i_1!i_2!...i_n!}\alpha_1^{i_1}\alpha_2^{i_2}..\alpha_j^{i_j+1}...\alpha_n^{i_n}\right]
\end{aligned}$$

On remplaçant i_j+1 par i_j

$$\begin{aligned}
h_p^{(n)} &= \sum_{j=0}^{n}\left[\sum_{\substack{i_1+2i_2+...+ji_j+..+ni_n=p \\ i_j\geq 1}} \frac{(i_1+i_2+...+(i_j-1)+..+i_n)!}{i_1!i_2!...(i_j-1)!..i_n!}\alpha_1^{i_1}\alpha_2^{i_2}...\alpha_n^{i_n}\right] \\
h_p^{(n)} &= \sum_{i_1+2i_2+...+ji_j+..+ni_n=p}\left[\sum_{i_j\geq 1} \frac{(i_1+i_2+...+(i_j-1)+..+i_n)!}{i_1!i_2!...(i_j-1)!..i_n!}\alpha_1^{i_1}\alpha_2^{i_2}...\alpha_n^{i_n}\right]
\end{aligned}$$

Il reste donc à prouve que :

$$\frac{(i_1+i_2+...+i_n)!}{i_1!i_2!...i_n!} = \sum_{i_j\geq 1}\frac{(i_1+i_2+...+(i_j-1)+..+i_n)!}{i_1!i_2!...(i_j-1)!..i_n!}$$

Remarquons que :

$$\begin{aligned}
\frac{(i_1+i_2+...+i_n)!}{i_1!i_2!...i_n!} &= \frac{(i_1+i_2+...+i_n)!}{(i_1+i_2+...+i_{n-1})!i_n!}\frac{(i_1+i_2+...+i_{n-1})!}{(i_1+i_2+...+i_{n-2})!i_{n-1}!}...\frac{(i_1+i_2)!}{i_1!i_2!}\frac{i_1!}{i_1!} \\
&= C_{i_1+i_2+...+i_n}^{i_n} C_{i_1+i_2+...+i_{n-1}}^{i_{n-1}}...C_{i_1+i_2}^{i_2}C_{i_1}^{i_1}
\end{aligned}$$

C'est le nombre de n-uplets qu'on peut construire avec les éléments $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ chaque élément α_k étant représenté i_k fois. Mais si on fixe le dernier élément du n-uplet(un élément α_j choisi, tel que $i_j \geq 1$). Il reste :

$$\frac{(i_1 + i_2 + ... + (i_j - 1) + .. + i_n)!}{i_1!i_2!...(i_j - 1)!..i_n!},$$

façons de construire le n-uplet.
D'où l'égalité annoncée. □

Proposition 2.2.9. [9] *Donnons tout d'abord une liste d'identités sur les fonctions génératrices des $E(z), H(z)$ et $P(z)$:*

$$\begin{aligned}
H(z).E(-z) &= 1 && (2.22)\\
\frac{H'(z)}{H(z)} &= \sum_{r\geq 1} p_r z^{r-1} = p(z) && (2.23)\\
H(z) &= \exp \sum_{n\geq 1} p_r(x)\frac{z^r}{r} && (2.24)\\
\sum_{0\leq r\leq n} (-1)^n e_r h_{n-r} &= 0 && (2.25)\\
& && (2.26)
\end{aligned}$$

Démonstration. 1-On a :

$$\begin{aligned}
E(z) &= \prod_{i\geq 1}(1 + x_i z)\\
H(z) &= \prod_{i\geq 1}(1 - x_i z)^{-1}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
E(-z) &= \prod_{i\geq 1}(1 - x_i z)\\
H(z).E(-z) &= \frac{1}{\prod_{i\geq 1}(1 - x_i z)}.\prod_{i\geq 1}(1 - x_i z)\\
H(z).E(-z) &= 1
\end{aligned}$$

2- On a La fonction génératrice des p_r définie par : $p(z) = \sum\limits_{r\geq 1} p_r z^{r-1}$,
et on a :

Les sommes de puissances p_r sont elles définies par : $p_r = \sum\limits_{i} x_i^r$.
Donc :

$$p(z) = \sum_{i\geq 1}\sum_{r\geq 1} x_i^r z^{r-1}$$

On pose : $r-1=n$ donc $r=n+1$

$$\begin{aligned} p(z) &= \sum_{i\geq 1}\sum_{n\geq 0} x_i^{n+1} z^n \\ &= \sum_{i\geq 1}\sum_{n\geq 0} x_i (x_i z)^n \end{aligned}$$

Tell que :

$$\sum_{n\geq 0} (x_i z)^n = \frac{1}{(1-x_i z)}$$

Donc :

$$\begin{aligned} p(z) &= \sum_{i\geq 1} \frac{x_i}{(1-x_i z)} \\ &= \sum_{i\geq 1} \frac{d}{dz} \log \frac{1}{(1-x_i z)} \end{aligned}$$

Tell que :

$$\sum_{i\geq 1} \log \frac{1}{(1-x_i z)} = \log \prod_{i\geq 1} \frac{1}{(1-x_i z)}$$

Donc :

$$\begin{aligned} p(z) &= \frac{d}{dz}\log\prod_{i\geq 1}\frac{1}{(1-x_iz)} \\ &= \frac{d}{dz}\log H(z) \\ &= \frac{H^{'}(z)}{H(z)} \end{aligned}$$

3-On a :

$$\begin{aligned} H(z) &= \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{(1-x_iz)} \\ &= \exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\log(1-x_iz)\right) \\ &= \exp\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{r\geq 1}\frac{(x_iz)^r}{r}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{r\geq 1}\frac{p_rz^r}{r}\right) \end{aligned}$$

4-On a :

$$\begin{aligned} E(-z) &= \prod_{i\geq 1}(1-x_iz) \\ H(z) &= \prod_{i\geq 1}(1-x_iz)^{-1} \end{aligned}$$

Donc :

$$E(-z)=\sum_{i=0}^{\infty}e_i(-z)^i=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^ie_iz^i,$$

et :

$$H(z)=\sum_{i=0}^{\infty}h_jz^j.$$

D'après (2.22) on a :

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^ie_i(z)^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}h_jz^j\right)=1$$

On pose :$i+j=m$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i+j=m}(-1)^i e_i h_j z^{i+j}=1$$

Donc :

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{m}(-1)^i e_i h_{m-i}\right)z^m=1$$

Donc tous les coefficients de la série sont nuls, sauf le premier.

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i e_i h_{m-i}=\delta_{m,0},$$

(où δ est le symbole de Kronecker) □

2.3 Quelques proprietes sur les fonctions symétriques

A partir de la matrice M^n donnée dans l'égalité (4) et d'après la définition (11) on peut donner la définition suivante des fonctions symétriques.

Définition 15. [22] *Considérons l'alphabet $E_2=\{e_1,e_2\}$ et on définit la fonction symétrique S_n qui lui est associée par :*

$$S_n(E_2)=S_n(e_1+e_2)=\frac{e_1^{n+1}-e_2^{n+1}}{e_1-e_2}, \tag{2.27}$$

avec :

$$\begin{aligned}
&S_0(E_2)=h_0=1.\\
&S_1(E_2)=h_1=e_1+e_2.\\
&S_2(E_2)=h_2=e_1^2+e_1e_2+e_2^2.\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Définition 16. [2] *Etant donnés deux ensembles indéterminés A et B (dits alphabets), on note $S_j(A-B)$ les coefficients de la série rationnelle :*

$$\frac{\prod_{b\in B}(1-zb)}{\prod_{a\in A}(1-za)}=\sum_{j=0}^{\infty}S_j(A-B)z^j. \tag{2.28}$$

Remarque 2.3.1. *La définition* (16) *implique la convention :*

$$S_j(A-B) = 0 \qquad \textit{pour } j < 0$$

Remarque 2.3.2. *En prenant* $A = \phi$ *dans la définition* (16) *nous obtenons :*

$$\prod_{b\in B}(1-zb) = \sum_{j=0}^{\infty} S_j(-B)z^j$$

Lemme 2.3.1. *Soit* A, B *deux alphabets,*A *est de cardinal* 1 *on a :*

$$S_{j+k}(x-B) = x^k S_j(x-B) \textit{ pour } k \in \mathbb{N} \tag{2.29}$$

Proposition 2.3.1. *Si A est de cardinal 1 (ie* $A = \{x\}$ *)alors :*

$$\frac{\prod_{b\in B}(1-zb)}{(1-zx)} = 1 + ... + z^{j-1}S_{j-1}(x-B) + z^j \frac{S_j(x-B)}{(1-xz)} \tag{2.30}$$

Démonstration. D'après (2.28) on a :

$$\frac{\prod_{b\in B}(1-zb)}{(1-zx)} = \sum_{j=0}^{\infty} S_j(x-B)z^j$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} S_j(x-B)z^j &= 1 + ... + S_{j-1}(x-B)z^{j-1} + S_j(x-B)z^j + S_{j+1}(x-B)z^{j+1}... \\
&= 1 + ... + S_{j-1}(x-B)z^{j-1} + z^j(S_j(x-B) + S_{j+1}(x-B)z + ...) \\
&= 1 + ... + S_{j-1}(x-B)z^{j-1} + z^j\,(S_j(x-B) + xS_j(x-B)z + ...) \\
&= 1 + ... + S_{j-1}(x-B)z^{j-1} + z^j S_j(x-B)(1 + xz + x^2z^2 + ...) \\
&= 1 + ... + z^{j-1}S_{j-1}(x-B) + z^j \frac{S_j(x-B)}{(1-xz)}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{\prod_{b\in B}(1-zb)}{(1-xz)} = 1 + ... + z^{j-1}S_{j-1}(x-B) + z^j \frac{S_j(x-B)}{(1-xz)}$$

□

Proposition 2.3.2. [2] *Considérons successivement le cas $A = \phi$ ou $B = \phi$ on obtient la factorisation*

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_j(A-B)z^j = \sum_{j=0}^{\infty} S_j(A)z^j \sum_{j=0}^{\infty} S_j(-B)z^j \tag{2.31}$$

Si $A = B$ d'après (2.28) *la formule* (2.31) *s'écrit :*

$$1 = \sum_{j=0}^{\infty} S_j(A)z^j \sum_{j=0}^{\infty} S_j(-A)z^j$$

C'est à dire

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_j(A)z^j = \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} S_j(-A)z^j} \tag{2.32}$$

La formule(2.31)*nous permet d'écrire :*

$$S_n(A-B) = \sum_{k=0}^{n} S_{n-k}(A)S_k(-B) \tag{2.33}$$

Proposition 2.3.3. *Soit* $A = \{x\}$ *on a :*

$$S_n(x-B) = x^n S_0(-B) + x^{n-1}S_1(-B) + ... + S_n(-B) \tag{2.34}$$

$S_j(-B)$ sont les coefficients du polynôme $S_n(x-B)$ pour $0 \leq j \leq n$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} S_n(x-B) &= \sum_{k=0}^{n} S_{n-k}(x)S_k(-B) \\ &= \sum_{k=0}^{n} x^{n-k} S_k(-B) \\ &= x^n S_0(-B) + x^{n-1}S_1(-B) + ... + S_n(-B) \end{aligned}$$

□

Remarque 2.3.3. *Ceux sont donc au signe prés les fonctions symétriques élémentaires de l'alphabet B, qui sont nuls pour $j \geq n$ c'est à dire $S_j(-B) = 0$ pour $j \geq n$.*

En particulier, lorsque $B = \{b, b....., b\}$ *on note*$(B = nb)$ *on a :*

$$S_n(x - nb) = (x - b)^n \tag{2.35}$$

Proposition 2.3.4. [2] *Si* $b = 1$ *c'est à dire* $B = \{1, 1, ..., 1\}$ *les coefficient binomiaux,donné par :*

$$\begin{aligned} S_j(-n) &= (-1)^j \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}, & (2.36) \\ \text{et} \qquad S_j(n) &= \begin{pmatrix} n + j - 1 \\ j \end{pmatrix} & (2.37) \end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \text{Ona :} \qquad S_n(x - nb) &= (x - b)^n \\ \text{Pour} \quad b = 1 : \qquad S_n(x - n) &= (x - 1)^n \\ &= \sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} (-1)^j x^{n-j} \\ \text{Donc :} \qquad S_j(-n) &= (-1)^j \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\textit{Ona :} \qquad S_n(x+n) &= (x-1)^{-n} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} -n \\ j \end{pmatrix} (-1)^j x^{n-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{(-n)!}{(-n-j)!j!} (-1)^j x^{n-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{(-n)(-n-1)...(-n-j+1)}{j!} (-1)^j x^{n-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{n(n+1)...(n+j-1)}{j!} x^{n-j} \\
\textit{donc :} \qquad S_j(n) &= \begin{pmatrix} n+j-1 \\ j \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

□

Il existe une autre manière d'écrire les polynômes en faisant apparaître les coefficients binomiaux.

Si n est un entier positif, E un alphabet, X une indéterminé, on a d'après(2.31)et(2.34)

$$S_n(E-nx) = S_n(E) - \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x^1 S_{n-1}(E) + ... + (-1)^n \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} x^n \tag{2.38}$$

Puisque :

$$S_j(-nx) = (-x)^j \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}$$

CHAPITRE 3

FONCTIONS DE SCHUR

Dans ce chapitre nous nous intéressons aux les fonctions Schur, dans la première section nous rappellerons les définitions combinatoires des partitions, a la deuxième section nous introduisons les fonctions Schur ainsi que leurs propriétés . Dans la troisième section nous rappellerons la relation entre les fonctions Schur et tableaux semi-standards .

3.1 Définitions combinatoires

3.1.1 Partitions d'entiers

Définition 17. [22] *Soit n un entier positif . Une partition de l'entier n est une suite décroissante $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p)$ qui vérifies les deux conditions suivantes :*

$$\begin{cases} \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ... \geq \alpha_p. \\ \qquad et \\ |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_p = n \end{cases} \tag{3.1}$$

Les entiers $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$ sont les parts de la partition et p est le nombre de parts. On dit encore que n est le poids de la partition et p sa longueur.

On écrit alors : $|\alpha| = n$ *et* $l(\alpha) = p$.

Remarque 3.1.1. *Une partition* α *peut également s'écrire sous forme exponentielle (forme multiplicative) :*

$$\alpha = (1^{m_1} ... r^{m_r}) \tag{3.2}$$

Où m_i *représente la multiplicité de l'entier* i *dans* α. *On associe aussi à la partition* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p)$ *de* n *son diagramme de Ferrers* F, *qui n'est autre qu'un ensemble de* n *points du plan ayant les coordonnées* (i, j) *entières, tels que* $(i, j) \in F$ *si et seulement si* $1 \leq j \leq p$ *et* $1 \leq i \leq \alpha_j$.

Exemple 3.1.1. *La partition* $\alpha = (5, 4, 2, 2)$ *de poids* $n = 13$ *a pour notation multiplicative est :*

$$(1^0 2^2 3^0 4^1 5^1 6^0 ... 13^0)$$

3.1.2 Fonctions Monomiales

Définition 18. [8] *On définit les fonctions monomiales, notées* m_λ, *indexées par des partitions* $\lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_k$, *comme étant la somme de tous les monômes de degré* n, *avec* $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k = n$.

Soit $\alpha = (a_1, a_2, ..., a_n)$ *où* $a_i \in \mathbb{N}$ $\forall i$, *on a alors* $X^\alpha = \prod_i x_i^{a_i}$.

Soit $T(\alpha)$, *les valeurs de* α *triées dans l'ordre décroissant et sans les* 0, *alors* $m_0 = 1$ *et :*

$$m_\lambda = \sum_{T(\alpha)=\lambda} X^\alpha$$

Exemple 3.1.2.
$m_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
$m_{22}(x, y, z) = 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2x^2z^2$.
$m_{31}(x, y, z) = x^3y + xy^3 + x^3z + xz^3 + y^3z + yz^3$.
$m_{1111}(x, y, z) = 0$.

Notons que $m_\lambda = 0$ *quand* $l(\lambda) > n$ *où* n *est le nombre de variables.*

Proposition 3.1.1. [9]*Soit :*

$$\prod_{i,j} \frac{1}{(1 - x_i y_j)} = \sum_{n \geq 0} \sum_{|\lambda|=n} m_\lambda(x) h_\lambda(y) \tag{3.3}$$

Démonstration. Pour démontrée cette proposition on écrit :

$$\begin{aligned}
\prod_i \prod_j \frac{1}{(1 - x_i y_j)} &= \prod_i \sum_{r \geq 0} h_r(y) x_i^r \qquad \text{d'aprés (2.11)} \\
&= \sum_{n \geq 0} \sum_{r_1, \ldots, r_n} h_{r_1}(y) \ldots h_{r_n}(y) \sum_{1 \leq i_1 .. \leq i_n} x_{i_1}^{r^1} \ldots x_{i_n}^{r^n} \\
&= \sum_{n \geq 0} \sum_{|\lambda|=n} h_\lambda(y) m_\lambda(x) \\
&= \sum_{n \geq 0} \sum_{|\lambda|=n} h_\lambda(x) m_\lambda(y)
\end{aligned}$$

□

3.1.3 Fonctions anti-symétriques

Définition 19. [8] *Soit $f(X), X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, une fonction de plusieurs variables, et soit $\sigma \in \mathbb{S}_n$, une permutation sur n éléments.*

On dit que f est une fonction anti-symétrique si et seulement si

$$\sigma f(X) = (-1)^{inv(\sigma)} f(X), \qquad \forall \sigma \in \mathbb{S}_n$$

Où $inv(\sigma)$ est le nombre d'inversions de σ c'est à dire :

$$inv(\sigma) = \sharp \{ i | i > j \ \ et \ \sigma(i) < \sigma(j) \}.$$

Soit :

$$f_a(X) = \det \begin{pmatrix} x_1^{a_1} & x_1^{a_2} & \cdots & x_1^{a_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{a_1} & x_n^{a_2} & \cdots & x_n^{a_n} \end{pmatrix} \ \ avec \ a_1 < a_2 < \cdots < a_n \leq 0 \tag{3.4}$$

Le déterminant de Vandermonde correspond au plus petit déterminant non nul $f_a(X)$:

$$D_n(X) = \det \begin{pmatrix} x_1^{n-1} & \cdots & x_1^0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{n-1} & \cdots & x_n^0 \end{pmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq n} (x_i - x_j) \tag{3.5}$$

Théorème 3.1.1. [8] *$D_n(X)$ divise sans reste tout polynôme anti-symétrique et de plus, le résultat de cette division est un polynôme symétrique.*

Démonstration. On peut tout d'abord remarquer que tout polynôme anti-symétrique $f(X)$ s'annule si deux de ses variables sont égales.

En effet, soient i et j tels que $x_i = x_j$ et soit la permutation σ qui inverse x_i et $x_j$et ne fait rien d'autre. On a $inv(\sigma) = 1$, donc $\sigma f = -f$ puisque f est anti-symétrique mais on a aussi $\sigma f = f$ puisque $x_i = x_j$, donc finalement f est nulle.

On en déduit donc que $(x_i - x_j)$ divise $f(X)$ pour tout couple (i, j), donc

$$\prod_{1\leq i<j\leq n} (x_i - x_j) = D_n(X) \text{ divise } f(X).$$

De plus, $\dfrac{f(X)}{D_n(X)}$ est symétrique car $\forall\sigma$:

$$\sigma.\frac{f(X)}{D_n(X)} = \frac{\sigma.f(X)}{\sigma.D_n(X)} = \frac{(-1)^{inv(\sigma)} f(X)}{(-1)^{inv(\sigma)} D_n(X)} = \frac{f(X)}{D_n(X)}$$

□

3.1.4 Définition des fonctions Schur

On définit les fonctions Schur de la façon suivante :

Définition 20. [10] *Soient $a = (a_1, a_2, .., a_n), \sigma = (n-1, n-2, ..., 0)$ et λ un partition*

$$[\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k, 0, ..., 0) \qquad avec \qquad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ...\lambda_n = 0]\,.$$

Les fonctions Schur sont définies par :

$$S_\lambda = \frac{f_{\sigma+\lambda}(X)}{D(X)} = \frac{\det(x_i^{\lambda_j+n-j})_{1\leq i,j\leq n}}{\prod\limits_{i<j}(x_i - x_j)} \tag{3.6}$$

Théorème 3.1.2. [16]*(Formule de Jacobi-Trudi)*

$$S_\lambda = \det\begin{pmatrix} h_{\lambda_1} & h_{\lambda_1+1} & \cdots & h_{\lambda_1+k-1} \\ h_{\lambda_2-1} & h_{\lambda_2} & \cdots & h_{\lambda_2+k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\lambda_k-k+1} & \cdots & h_{\lambda_k-1} & h_{\lambda_k} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Où $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k), h_0 = 1$ *et* $h_k = 0$ *pour* $k < 0$*. On peut aussi l'écrire de la façon suivante :*

$$S_\lambda = \det(h_{\lambda_i+j-i})_{1\leq i,j\leq k} \tag{3.8}$$

Exemple 3.1.3.

$$S_{421} = \det\begin{pmatrix} h_4 & h_5 & h_6 \\ h_1 & h_2 & h_3 \\ 0 & 1 & h_1 \end{pmatrix}$$

Lemme 3.1.1. [9] *Soit* $l(\lambda) = l$ *et* p, q *deux entiers tels que* $l \leq p < q$*.*
Alors :

$$S_\lambda(x_1, ...x_p) = S_\lambda(x_1, ..x_p, x_{p+1}, ..., x_q)|_{x_{p+1}=.....=x_q=0} \tag{3.9}$$

Démonstration. Il suffit de vérifier la proposition pour $q = p + 1$.

D'abord $f_{\lambda+\sigma}(x_1,...,x_{p+1})$ est égal à :

$$\begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+p} & .... & x_1^{\lambda_p+1} & x_1^{\lambda_{p+1}} \\ ... & ... & ... & ... \\ x_p^{\lambda_1+p} & ... & x_p^{\lambda_p+1} & x_p^{\lambda_{p+1}} \\ x_{p+1}^{\lambda_1+p} & ... & x_{p+1}^{\lambda_p+1} & x_{p+1}^{\lambda_{p+1}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+p} & .... & x_1^{\lambda_p+1} & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ x_p^{\lambda_1+p} & ... & x_p^{\lambda_p+1} & 1 \\ x_{p+1}^{\lambda_1+p} & ... & x_{p+1}^{\lambda_p+1} & 1 \end{vmatrix}$$

Puisque $\lambda_{p+1} = 0$. De là $f_{\lambda+\sigma}(x_1,...,x_p,0)$ vaut

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+p} & .... & x_1^{\lambda_p+1} & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ x_p^{\lambda_1+p} & ... & x_p^{\lambda_p+1} & 1 \\ 0 & ... & 0 & 1 \end{vmatrix} &= x_1....x_p \begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+p-1} & .... & x_1^{\lambda_p} \\ .... & .... & .... \\ x_p^{\lambda_1+p-1} & ... & x_p^{\lambda_p} \end{vmatrix} \\ &= x_1....x_p f_{\lambda+\sigma}(x_1,...,x_p) \end{aligned}$$

De là

$$S_\lambda(x_1,...,x_p,0) = \frac{x_1...x_p f_{\lambda+\sigma}(x_1,...,x_p)}{x_1...x_p f_\sigma(x_1,...,x_p)} = S_\lambda(x_1,...,x_p)$$

□

Proposition 3.1.2. [9] *On a déjà obtenu une expression pour le développement du produit* $\prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-1}$*, à savoir :*

$$\prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-1} = \sum_\lambda S_\lambda(x)S_\lambda(y). \tag{3.10}$$

Remarque 3.1.2.

$$\prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-1} = \sum_\lambda m_\lambda(x)h_\lambda(y) = \sum_\lambda S_\lambda(x)S_\lambda(y). \tag{3.11}$$

3.2 Approche combinatoire des fonctions Schur

3.2.1 Diagrammes et tableaux de Young

Avant d'aborder la définition combinatoire des fonctions Schur, il est utile de définir les diagrammes et les tableaux de Young qui nous seront également utiles par la suite .

Définition 21. [8] *Un diagramme de Young, également appelé diagramme de Ferrer, est un ensemble de cases contiguës, alignées à gauche et dont le nombre de cases par ligne décroit du bas vers le haut.*

On utilise ici décroit au sens large, c'est-a-dire que la ligne i possède un nombre de cases inférieur ou égal à la ligne $i+1$, pour tout i.

Notons également que l'on a choisi d'utiliser ici la notation française. Les lignes du diagramme peuvent également être ordonnées dans le sens décroissant du haut vers le bas, il s'agit alors de la notation anglaise.

Remarque 3.2.1. *Les diagrammes de Young permettent de représenter les partitions. En effet, le nombre de cases de la ligne i correspond au $i^{\text{ème}}$ terme α_i de la partition α.*
Par abus de langage, on notera également α le diagramme associé à la partition α.

Exemple 3.2.1. *La suite d'entier* $(5, 4, 2, 2)$ *est une partition de poids* 13. *Le diagramme de Young associé est :*

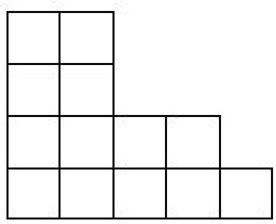

FIGURE 3.1 – Un diagramme de Young de la partition $\alpha = 5, 4, 2, 2$

Définition 22. [8] *Le conjugué d'une partition α peut d'ailleurs facilement s'obtenir à partir du diagramme de Young de la partition en comptant le nombre de cases des colonnes de gauche à droite et non plus des lignes.*

La partition conjuguée d'une partition $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p)$ est la partition

$$\alpha^{'} = 1^{\alpha_1 - \alpha_2} 2^{\alpha_2 - \alpha_3} ... (n-1)^{\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}} n^{\alpha_n} \tag{3.12}$$

Exemple 3.2.2. *La partition conjuguée de $(5, 4, 2, 2)$ est la partition*

$$\alpha^{'} = 1^1 2^2 3^0 4^2 = (44221)$$

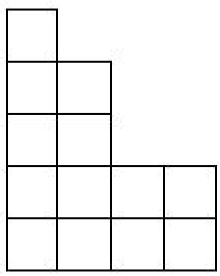

FIGURE 3.2 – Conjugaison d'une partition $\alpha = 5, 4, 2, 2$

Définition 23. [8] *Un tableau de Young est un diagramme de Young dont on rempli les cases avec des entiers. On distingue deux type de tableaux de Young, les tableaux standards et les tableaux semi-standard.*

Définition 24. [8] *Un tableau de Young standard est un remplissage d'un diagramme de Young dont les entrées sont les entiers de* 1 *à* n *où* n *est le nombre de cases total du tableau.*

Toutes les valeurs des entrées sont donc distinctes deux à deux et elles sont strictement croissantes sur les lignes de gauche à droite et sur les colonnes de bas en haut.

9	13			
7	8			
3	4	6	12	
1	2	5	10	11

FIGURE 3.3 – Exemple de remplissage de $\alpha = 5, 4, 2, 2$ donnant un tableau standard

Définition 25. [8] *Un tableau de Young semi-standard est un remplissage d'un diagramme de Young dont les entrées sont les entiers de* 1 *à* n *où* n *est inférieur ou égal au nombre de cases total du tableau.*

Les entrées sont croissantes sur les lignes et strictement croissantes sur les colonnes.

6	6			
3	5			
2	3	3	4	
1	1	2	3	4

FIGURE 3.4 – Exemple de remplissage de $\alpha = 5, 4, 2, 2$ donnant un tableau semi-standard

Définition 26. [8] *Soit α et β deux partitions telles que le diagramme de Young de β soit inclus dans celui de α (on note $\beta \subseteq \alpha$), alors α/β est une forme gauche.*

-Le diagramme gauche associé à α/β contient les cases du diagramme de α qui ne sont pas dans le diagramme de β.

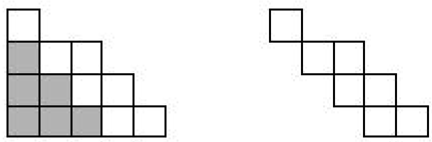

FIGURE 3.5 – Exemple de diagramme gauche : $\alpha = 5, 4, 3, 1$ (a gauche) , $\beta = 3, 2, 1$ (en gris à gauche) et α/β (à droite)

Remarque 3.2.2. *De la même façon que pour les diagrammes de Young, on peut remplir un diagramme gauche pour obtenir un tableau gauche.*

Remarquons également que si β est la partition vide, le diagramme associé à α/β est un diagramme de Young classique.

3.3 Tableaux semi-standards et fonctions Schur

On peut définir combinatoirement les polynômes de Schur à l'aide des tableaux semi-standards.

Soit λ un tableau semi-standard dont le remplissage se fait donc en étant croissant sur les lignes de gauche à droite et strictement croissant sur les colonnes de bas en haut, $\lambda \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

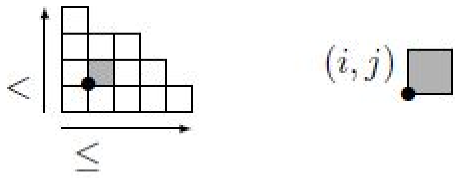

Figure 3.6 – Exemple de forme d'un tableau semi-standard

Soit $T : \lambda \to \mathbb{N}$ une fonction de remplissage qui à chaque case (i, j) de λ associe un entier.

Par définition, on a les relations suivantes :

$$T(i,j) < T(i,k) \quad si \quad j < k$$
$$T(i,j) \leq T(l,k) \quad si \quad i < l.$$

De plus, on note $X_T = \prod_{(i,j)\in\lambda} x_{T(i,j)}$. X_T est l'évaluation monomiale de T .

On définit alors les polynômes de Schur de la façon suivante :

$$S_\lambda(X) = \sum_{T:\lambda\to\mathbb{N}} X_T \tag{3.13}$$

On peut également décrire les fonctions Schur dans la base des fonctions monomiales à l'aide des tableaux semi-standards. Considérons $a < b < c$ et tous les tableaux semi-standards de forme 21. On obtient alors les tableaux suivants :

Figure 3.7 – Tableaux semi-standards de forme 21

La figure (3.7) montre que l'on peut écrire la fonction Schur S_{21} dans la base des monomiales : $S_{21} = m_{21} + 2m_{111}$.

On retrouve m_{21} dans les deux premiers tableaux $(a^2b + b^2a)$ et chacun des deux derniers tableaux correspondent à $m_{111}(abc)$.

On exprime alors les polynômes de Schur dans la base des monomiales :

$$S_\lambda(x) = \sum_{\mu \vdash d} K_{\lambda\mu} m_\mu(x) \tag{3.14}$$

Les $K_{\lambda\mu}$ sont des entiers appelés nombres de Kostka.

Exemple 3.3.1.

$$\begin{aligned} S_4 &= m_4 + m_{31} + m_{22} + m_{211} + m_{1111}. \\ S_{31} &= m_{31} + m_{22} + 2m_{211} + 3m_{1111}. \\ S_{22} &= m_{22} + m_{211} + m_{1111}. \\ S_{1111} &= m_{1111}. \end{aligned}$$

Remarque 3.3.1. *On peut également remarquer que pour $n \in \mathbb{N}$:*

$$S_n = h_n \text{ et } S_{\underbrace{111...1}_{n \text{ fois}}} = e_n$$

CHAPITRE 4

CERTAINES APPLICATIONS SUR LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES

Dans ce chapitre nous présentons de nouveaux résultats obtenus sur les fonctions génératrices des produits de nombres de Lucas et Pell-Lucas, ainsi que le produits de nombres de Jacobsthal et Jacobsthal-Lucas.

4.1 Définitions et Notations

Définition 27. [2] *Etant donné une fonction* $g(x_1, x_2, ...)$ *de plusieur variable on définit son image par l'opérateur différence divisé* δ_i *par la formule :*

$$g(x_1, ...x_i, x_{i+1}...) \to \delta_i(g) = \frac{g - g^{\sigma_i}}{x_i - x_{i+1}} \tag{4.1}$$

Où σ_i *est la transposition de* x_i *et* x_{i+1} *et* g^{σ_i} *est l'image de* g *par cette transposition.*

C'est à dire :

$$g^{\sigma_i} = g(x_1, ..., x_{i+1}, x_i, x_{i+2}, ...)$$

Proposition 4.1.1. [2] *Etant donné un alphabet $E = \{e_1, e_2, ...\}$ alors :*

$$\sigma_p \sigma_{p-1} .... \sigma_1 (1 - e_1 z)^{-1} = \frac{z^p}{(1 - e_1 z)...(1 - e_{p+1} z)} \tag{4.2}$$

Démonstration. D'après la définition(27)on a :

$$\begin{aligned}
\sigma_1((1 - e_1 z)^{-1}) &= \frac{(1 - e_1 z)^{-1} - (1 - e_2 z)^{-1}}{e_1 - e_2} \\
&= \frac{z}{(1 - e_1 z)(1 - e_2 z)} \\
\sigma_2 \sigma_1((1 - e_1 z)^{-1}) &= \sigma_2 \left(\frac{z}{(1 - e_1 z)(1 - e_2 z)} \right) \\
&= \frac{z^2}{(1 - e_1 z)(1 - e_2 z)(1 - e_3 z)} \\
&. \\
&. \\
&. \\
\sigma_p \sigma_{p-1} ... \sigma_1(g) &= \frac{z^p}{(1 - e_1 z)...(1 - e_{p+1} z)}
\end{aligned}$$

□

Lemme 4.1.1. [2] *Etant donné un alphabet $E = \{e_1, e_2, ..\}$ alors :*

$$\sum_{i \geq 0} S_i(E_{P+1}) z^{i+p} = \sigma_p ... \sigma_1 (1 - e_1 z)^{-1} \tag{4.3}$$

Démonstration. Pour $E = \{e_1, e_2\}$ on trouve :

Si $p = 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{i\geq 0} S_i(E_2)z^{i+1} &= z.\sum_{i\geq 0} S_i(E_2)z^i \\
&= z.\frac{1}{(1-e_1z)(1-e_2z)} \\
&= \sigma_1\left((1-e_1z)^{-1}\right)
\end{aligned}$$

Si $p = 2$ On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i\geq 0} S_i(E_3)z^{i+2} &= z^2.\sum_{i\geq 0} S_i(E_3)z^i \\
&= z^2.\frac{1}{(1-e_1z)(1-e_2z)(1-e_3z)} \\
&= \sigma_2\sigma_1\left((1-e_1z)^{-1}\right) \\
&\ . \\
&\ . \\
&\ . \\
\sum_{i\geq 0} S_i(E_{p+1})z^{i+p} &= \frac{z^p}{(1-e_1z)...(1-e_{p+1}z)} \\
&= \sigma_p\sigma_{p-1}...\sigma_1\left((1-e_1z)^{-1}\right)
\end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{i\geq 0} S_i(E_{P+1})z^{i+p} = \sigma_p\sigma_{p-1}...\sigma_1\left((1-e_1z)^{-1}\right).$$

□

4.2 Applications

Pour $p = 1$, le lemme (4.1.1) s'écrit alors :

$$\sum_{j\geq 0} S_j(E_2)z^{j+1} = \frac{z}{(1-e_1z)(1-e_2z)}.$$

Alors :

$$\sum_{j\geq 0} S_j(E_2)z^{j} = \frac{1}{(1-e_1z)(1-e_2z)}.$$

Donc :

$$\sum_{j\geq 0} S_j(E_2)z^{j} = \frac{1}{1-(e_1+e_2)z+e_1e_2z^2}. \tag{4.4}$$

En remplaçant e_2 par $(-e_2)$ dans la formule (4.4), le lemme (4.1.1) s'écrit alors :

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_j(e_1+[-e_2])z^{j} = \frac{1}{1-(e_1-e_2)z-e_1e_2z^2}. \tag{4.5}$$

De la formule (4.5) nous pouvons déduire :

$$\sum_{j=0}^{\infty}[S_j(e_1+[-e_2])-S_{j-1}(e_1+[-e_2])]z^{j} = \frac{1-z}{1-(e_1-e_2)z-e_1e_2z^2} \tag{4.6}$$

On pose $\begin{cases} e_1-e_2=3 \\ \quad\text{et} \\ e_1e_2=-1 \end{cases}$, la formule (4.6)devient :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}[S_j(e_1+[-e_2])-S_{j-1}(e_1+[-e_2])]z^{j} &= \frac{1-z}{1-3z+z^2} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} F_{2j+1}z^j\end{aligned}$$

Qui donnée par [18] et représente une fonction génératrice pour les nombres de Fibonnacci tel que :

$$F_{2j+1} = S_j(e_1+[-e_2])-S_{j-1}(e_1+[-e_2]).$$

On pose $\begin{cases} e_1 - e_2 = 6 \\ \text{et} \\ e_1 e_2 = -1 \end{cases}$, la formule (4.6)devient :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}[S_j(e_1+[-e_2]) - S_{j-1}(e_1+[-e_2])]z^j &= \frac{1-z}{1-6z+z^2} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} P_{2j+1}z^j\end{aligned}$$

Que l'on trouve dans [18] c'est à dire :

$$P_{2j+1} = S_j(e_1+[-e_2]) - S_{j-1}(e_1+[-e_2].$$

Ou les P_{2j+1} sont les nombre de Pell. De la formule (4.5) nous pouvons déduire :

$$\sum_{j=0}^{\infty}[S_j(e_1+[-e_2]) + S_{j-1}(e_1+[-e_2])]z^j = \frac{1+z}{1-(e_1-e_2)z-e_1e_2z^2} \tag{4.7}$$

On pose $\begin{cases} e_1 - e_2 = 3 \\ \text{et} \\ e_1 e_2 = -1 \end{cases}$, la formule (4.7)devient :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}[S_j(e_1+[-e_2]) + S_{j-1}(e_1+[-e_2])]z^j &= \frac{1+z}{1-3z+z^2} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} L_{2j+1}z^j\end{aligned}$$

Qui donnée par [18] et représente une fonction génératrice pour les nombres de Lucas tel que :

$$L_{2j+1} = S_j(e_1+[-e_2]) + S_{j-1}(e_1+[-e_2]).$$

De la formule (4.5) nous pouvons déduire :

$$\sum_{j=0}^{\infty}[2S_j(e_1+[-e_2])-(e_1-e_2)S_{j-1}(e_1+[-e_2])]z^j=\frac{2-(e_1-e_2)z}{1-(e_1-e_2)z-e_1e_2z^2} \tag{4.8}$$

On pose $\begin{cases} e_1-e_2=1 \\ \text{et} \\ e_1e_2=1 \end{cases}$, la formule (4.8)devient :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}[2S_j(e_1+[-e_2])-S_{j-1}(e_1+[-e_2])]z^j &= \frac{2-z}{1-z-z^2}\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}L_jz^j\end{aligned}$$

Que l'on trouve dans [18] c'est à dire :

$$L_j=2S_j(e_1+[-e_2])-S_{j-1}(e_1+[-e_2]).$$

Ou les L_j sont les nombres de Lucas.

On pose $\begin{cases} e_1-e_2=2 \\ \text{et} \\ e_1e_2=1 \end{cases}$, la formule (4.8)devient :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}[2S_j(e_1+[-e_2])-2S_{j-1}(e_1+[-e_2])]z^j &= \frac{2-2z}{1-2z-z^2}\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}Q_jz^j\end{aligned}$$

Que l'on trouve dans [18] c'est à dire :

$$Q_j=2S_j(e_1+[-e_2])-2S_{j-1}(e_1+[-e_2]).$$

Ou les Q_j sont les nombres de Pell- Lucas. De la spécialisation suivante $\begin{cases} e_1-e_2=1 \\ \text{et} \\ e_1e_2=2 \end{cases}$

dans (4.8)devient :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}[2S_j(e_1+[-e_2])-S_{j-1}(e_1+[-e_2])]z^j &= \frac{2-z}{1-z-2z^2}\\ &= \sum_{j=0}^{\infty} j_j z^j\end{aligned}$$

Qui est donnée par [18] et représente une fonction génératrice pour les nombres de Jacobsthal- Lucas tel que :

$$j_j = 2S_j(e_1+[-e_2]) - S_{j-1}(e_1+[-e_2]).$$

On pose $\begin{cases} e_1 - e_2 = 3 \\ \quad \text{et} \\ e_1e_2 = -1 \end{cases}$, la formule (4.8)devient :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}[2S_j(e_1+[-e_2])-3S_{j-1}(e_1+[-e_2])]z^j &= \frac{2-3z}{1-3z+z^2}\\ &= \sum_{j=0}^{\infty} L_{2j} z^j\end{aligned}$$

Qui est donnée par [18] et représente une fonction génératrice pour les nombres de Lucas tel que :

$$L_{2j} = 2S_j(e_1+[-e_2]) - 3S_{j-1}(e_1+[-e_2]).$$

On pose $\begin{cases} e_1 - e_2 = 5 \\ \quad \text{et} \\ e_1e_2 = -4 \end{cases}$, la formule (4.8)devient :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}[2S_j(e_1+[-e_2])-5S_{j-1}(e_1+[-e_2])]z^j &= \frac{2-5z}{1-5z+4z^2}\\ &= \sum_{j=0}^{\infty} j_{2j} z^j\end{aligned}$$

qui est donnée par [18] et représente une fonction génératrice tel que :

$$j_{2j} = 2S_j(e_1 + [-e_2]) - 5S_{j-1}(e_1 + [-e_2]).$$

De la formule (4.6) nous pouvons déduire :

$$\sum_{j=0}^{\infty}[S_j(e_1 + [-e_2]) - S_{j-1}(e_1 + [-e_2])]z^j = \frac{1-z}{1-(e_1-e_2)z - e_1e_2z^2}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty}[S_j(e_1 + [-e_2]) - S_{j-1}(e_1 + [-e_2])]z^j &= \frac{1-z}{1-(e_1-e_2)z - e_1e_2z^2} \\
&= \frac{1}{1-(e_1-e_2)z - e_1e_2z^2} - \frac{z}{1-(e_1-e_2)z - e_1e_2z^2} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} S_j(e_1 + [-e_2])z^j - \frac{z}{1-(e_1-e_2)z - e_1e_2z^2}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{z}{1-(e_1-e_2)z - e_1e_2z^2} &= \sum_{j=0}^{\infty} S_j(e_1 + [-e_2])z^j - \sum_{j=0}^{\infty}[S_j(e_1 + [-e_2]) - S_{j-1}(e_1 + [-e_2])]z^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} S_{j-1}(e_1 + [-e_2])z^j
\end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_{j-1}(e_1 + [-e_2])z^j = \frac{z}{1-(e_1-e_2)z - e_1e_2z^2} \tag{4.9}$$

-Si on pose $\begin{cases} e_1 - e_2 = 1 \\ \text{et} \\ e_1e_2 = 2 \end{cases}$, la formule (4.9)devient :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} S_{j-1}(e_1 + [-e_2])z^j &= \frac{z}{1-z-2z^2} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} J_j z^j
\end{aligned}$$

Que l'on trouve dans [18] c'est à dire :

$$J_j = S_{j-1}(e_1 + [-e_2]).$$

Ou les J_j sont les nombres de Jacobsthal- Lucas.

-Si on pose $\begin{cases} e_1 - e_2 = 1 \\ \text{et} \\ e_1 e_2 = 1 \end{cases}$, la formule (4.9)devient :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} S_{j-1}(e_1 + [-e_2])z^j &= \frac{z}{1 - z - z^2} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} F_j z^j \end{aligned}$$

C'est à dire :

$$F_j = S_{j-1}(e_1 + [-e_2]).$$

Où les F_j sont les nombres de Fibonnacci. [18] On pose $\begin{cases} e_1 - e_2 = 2 \\ \text{et} \\ e_1 e_2 = 1 \end{cases}$,la formule (4.9)devient :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} S_{j-1}(e_1 + [-e_2])z^j &= \frac{z}{1 - 2z - z^2} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} P_j z^j \end{aligned}$$

Qui est donnée par [18] c'est à dire :

$$P_j = S_{j-1}(e_1 + [-e_2]).$$

Ou P_j sont les nombres de Pell. On pose $\begin{cases} e_1 - e_2 = 3 \\ \text{et} \\ e_1 e_2 = -1 \end{cases}$, la formule (4.9)devient :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} S_{j-1}(e_1 + [-e_2])z^j &= \frac{z}{1-3z+z^2} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} F_{2j} z^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} F_j L_j z^j \end{aligned}$$

Cette formule nous permet de déduire le produit des nombres de Fibonnacci et de Lucas.

$$F_{2j} = F_j L_j = S_{j-1}(e_1 + [-e_2]). \tag{4.10}$$

Qui est donnée par [18]

On pose $\begin{cases} e_1 - e_2 = 5 \\ \text{et} \\ e_1 e_2 = -4 \end{cases}$, la formule (4.9)devient :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} S_{j-1}(e_1 + [-e_2])z^j &= \frac{z}{1-5z+4z^2} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} J_{2j} z^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} J_j j_j z^j \end{aligned}$$

Qui est donnée par [18] tel que :

$$J_{2j} = J_j j_j = S_{j-1}(e_1 + [-e_2]).$$

En remplaçant e_1 par $(3e_1)$ et e_2 par $(-3e_2)$ dans la formule (4.4), le lemme (4.1.1) s'écrit alors :

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_j(3e_1 + [-3e_2])z^j = \frac{1}{1 - 3(e_1 - e_2)z - 9e_1e_2z^2}. \tag{4.11}$$

De la formule (4.11) nous pouvons déduire :

$$\sum_{j=0}^{\infty}[2S_j(3e_1+[-3e_2])-(e_1-e_2)S_{j-1}(3e_1+[-3e_2])]z^j = \frac{2-(e_1-e_2)z}{1-3(e_1-e_2)z-9e_1e_2z^2} \tag{4.12}$$

De la formule (4.12) on a :

$\sum\limits_{j=0}^{\infty}[2S_j(3e_1+[-3e_2])-(e_1-e_2)S_{j-1}(3e_1+[-3e_2])]z^j =$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{1-3(e_1-e_2)z-9e_1e_2z^2} - \frac{(e_1-e_2)z}{1-3(e_1-e_2)z-9e_1e_2z^2} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} 2S_j(3e_1+[-3e_2]) - \frac{(e_1-e_2)z}{1-3(e_1-e_2)z-9e_1e_2z^2}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{j=0}^{\infty}(e_1-e_2)S_{j-1}(3e_1+[-3e_2])z^j = \frac{(e_1-e_2)z}{1-3(e_1-e_2)z-9e_1e_2z^2} \tag{4.13}$$

On pose $\begin{cases} e_1 - e_2 = 2 \\ \quad\text{et} \\ 9e_1e_2 = -1 \end{cases}$, la formule (4.13)devient :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} 2S_{j-1}(3e_1+[-3e_2])z^j &= \frac{2z}{1-6z+z^2} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} P_{2j}z^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} P_jQ_jz^j \end{aligned}$$

Qui est donnée par [18] tel que :

$$P_{2j} = P_jQ_j = 2S_{j-1}(3e_1+[-3e_2]). \tag{4.14}$$

D'après [18] on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} F_j^2 z^j &= \frac{z-z^2}{1-2z-2z^2+z^3} \\
&= \frac{z-z^2-z+z}{1-2z-2z^2+z^3} \\
&= \frac{(z^2+z)-2z}{-1+2z+2z^2-z^3} \\
&= \frac{z^2+z}{-1+2z+2z^2-z^3} - \frac{2z}{-1+2z+2z^2-z^3} \\
&= \frac{-z}{1-3z+z^2} + \frac{2}{(1+z)} \times \frac{z}{1-3z+z^2} \\
&= -\sum_{j=0}^{\infty} F_{2j} z^j + \frac{2}{(1+z)} \times \sum_{j=0}^{\infty} F_{2j} z^j \\
&= \left(\frac{2}{(1+z)} - 1\right) \sum_{j=0}^{\infty} F_{2j} z^j. \\
&= \left(\frac{2}{(1+z)} - 1\right) \sum_{j=0}^{\infty} S_{j-1}(e_1+[e_2]) z^j.
\end{aligned}$$

Qui est donnée par la formule(4.10) et représente une fonction génératrice tel que :

$$F_j^2 = \left(\frac{2}{(1+z)} - 1\right) S_{j-1}(e_1+[e_2])$$

D'après [18] on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} P_j^2 z^j &= \frac{z-z^2}{1-5z-5z^2+z^3} \\
&= \frac{z}{1-5z-5z^2+z^3} - \frac{2z}{1-5z-5z^2+z^3} \\
&= \frac{-z}{1-6z+z^2} + \frac{1}{(1+z)} \times \frac{2z}{1-6z+z^2} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty} P_{2j} z^j + \frac{1}{(1+z)} \times \sum_{j=0}^{\infty} P_{2j} z^j \\
&= \left(\frac{1}{(1+z)} - \frac{1}{2}\right) \sum_{j=0}^{\infty} P_{2j} z^j. \\
&= \left(\frac{1}{(1+z)} - \frac{1}{2}\right) \sum_{j=0}^{\infty} 2S_{j-1}(3e_1+[3e_2]) z^j.
\end{aligned}$$

Qui est donnée par la formule(4.14) et représente une fonction génératrice tel que :

$$P_j^2 = \left(\frac{2}{(1+z)} - 1\right) 2S_{j-1}(3e_1 + [3e_2]).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Abderrezzak, Généralisation d'Identités de Carlitz, Howard et Lehmer, Aequationes Math, p. 36-46, vol. 49, 1995.

[2] A. Abderrezzak, Généralisation de la Transformation d'Euler d'une Série Formelle, Adv. Math, p.180-195, vol.103, 1994.

[3] A. Abderrezzak, Quelques Formules d'Inversion à Plusieurs Variables, Eur. J. Comb, p. 507-512, vol. 14(6), 1993.

[4] A. Boussayoud, M. Kerada, A. Abderrezzak, A Generalization of Some Orthogonal Polynomials, Springer Proc Math Stat, p. 235-241, vol. 41, 2013.

[5] A. Benoit, Algorithmique Semi-Numérique Rapide des Séries de Tchebychev, Thèse Doctorat, Ecole doctorale de Mathématiques et Informatiques de Bordeaux, 2012.

[6] Amy M.Fu and A. Lascoux, Partition Analysis and Symmetrizing Operators, Journal of Combinatorial Theory, Series A 109, p.339-343, 2005.

[7] A. Necer, Séries Formelles et Produit de Hadamard, Journale de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 9, N2, p. 319-335, 1997.

[8] Bernard Gleyse, François Bergeron, Rapport de Stage Ingénieur,Effectué au laboratoire de combinatoire et d'informatique mathématique (LaCIM, Montréal),p. 5-10 , Mai à Octobre 2014.

[9] D. Foata et G. Han, Princpes de Combinatoire Classique, Université Louis Pasteur, Strasbourg Département de mathématiques, 2008.

[10] D. Foata and G-N. Han, Calcul basique des permutations signées.1, Longueur et nombre d'inversions, Adv.in Appl. Math, p. 489-509, vol. 18(4), 1997.

[11] D. Foata and G-N. Han, Nombres de Fibonacci et Polynômes Orthogonaux, Leonardo Fibonacci : il tempo, le opere, l'eredit scientifica, p. 179-200, 1994.

[12] F.Boucekkine, Du Triangle de Pascal aux Séries Formelles, p.1-16.

[13] F.Descouens, Combinatoire des Tableaux de Rubans et des Polynômes de Kostka Généralisés.Thèse de Doctorat. Université de Marne-la-Vallée école Doctorale I.C.M.S 2007.

[14] Francinou-Gianella-Nicolas,Oraux X-ENS Alébre 1,p.193.

[15] G.Leborgne, Interpolation Polynomiale, Intégration Numérique, Résolution Numérique d'Equations Diférentielles, 5 juin 2012.

[16] Introduction à La Théorie Des Représentations,UFR de mathématique et d'informatique , Université Louis Pasteur,p. 175-185 ,Année 2008–2009.

[17] I.G. Macdonald, Symmetric Functions and Hall Polynomias, second edition, Oxford Mathematical Monographs. 1995.

[18] Istv'an Mezo ,Several Generating Functions for Second-Order Recurrence Sequences ,Journal of Integer Sequences, Vol. 12 (2009),

[19] JP. Chabert, Equations Algébriques et Fonctions Symétriques, p.1-36. Tome 2, 11eme édition, Mir-Moscou, 1980.

[20] L.Manivel, Cours Spécialisées, Fonctions Symétriques, Polynômes de Schuet et Lieux de Dégcnérexence, N3, Société Mathématiques de France,1998

[21] Nicolas Pouyanne,Cours en bref,Licence de sciences et technologie, santé,LSMA510 (combinatoire),p. 15-18 ,UVSQ 2011/2012.

[22] R. Sahali, W. Rouibah, Certaines Applications sur les Fonctions Symétriques, Mémoire de Master, Université de Jijel, 2013.

[23] Rainville (Earl D.). Special Functions. Bronx, N.Y., Chelsea, 1960.

[24] S. Gabriel, Résolution de Récurrence Linéaire, Faculté d'Informatique - FUNDP.2010.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons présenté des résultats sur les fonctions symétriques élémentaires, complètes et sommes de puissances et nous avons utilisé des concepts des fonctions symétriques pour obtenir des nouveaux résultats sur le produit des suites de Lucas et Pell-Lucas, et le produits de nombres de Jacobsthal et Jacobsthal-Lucas.

Mots clés : Fonction symétriques, Fonctions de Schur, Fonctions génératrice de suite de Lucas, Pell-Lucas, Jacobsthal et Jacobsthal-Lucas .

Abstract

In this work, we presented the results of the elementary symmetric functions, the complete functions and the power sums, and we used the concepts of symmetric functions to obtain new results on the product suites of Lucas and Pell-Lucas and the product numbers Jacobsthal and Jacobsthal Lucas.

Keywords : Symmetric functions, Schur functions, Generating function for the Lucas sequences, the Pell-Lucas, the Jacobsthal and the Jacobsthal-Lucas.

ملخص

في هذه المذكرة ، قدمنا نتائج الدوال التناظرية الإبتدائية، التامة و مجموع الأسس، و استعملنا مفاهيم الدوال التناظرية لإيجاد نتائج جديدة بين المتتاليات التالية : (لوكا ـ بال لوكا ـ جاكوبستال و جاكوبستال لوكا)

الكلمات الدالة : دوال تناظرية ـ دوال شور ـ دوال مولدة السلاسل : لوكا ـ بال لوكا ـ جاكوبستال و جاكوبستال لوكا.