

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



N° Réf :.....

Centre Universitaire
Abd elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et Informatiques

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Fondamentales et Appliquées

Le chaos dans les systèmes dynamiques discrets

Préparé par :

*Hammana Hadjer
Djouïmaa Khawla*

Soutenue devant le jury

| | | |
|-------------|------------------------|-------|
| Encadré par | <i>R. Bououden</i> | M.A.A |
| Président | <i>MS. Abdelouahab</i> | M.C.A |
| Examineur | <i>A. Mhazzem</i> | M.A.A |

Année universitaire : 2015/2016

Remerciements

Je tiens à présenter mes sincères remerciements à mon encadreur

« Rabah Bououden »

*qui m'a donné son temps précieux pour me fournir une formation adéquate
Ainsi, je remercie tous le jury d'avoir accepté me faire l'honneur de juger ce
travail.*

Sans oublier tous les étudiants de la mathématique fondamentale.

*Tous mes remerciements et mon estime à tous les enseignants du département
de mathématique et l'informatique.*

Dédicaces

Je dédie mon travail à mes chers parents :

Mohammed & Samia

A mes deux frères *Ismail* et *Choayb*, à ma belle
sœur *Sara*

A ma grande famille

A tous mes amies: *Khawla, Wahiba, Imen, Kenza, Hadda,*
Rima, Radia, Amira, Lamia, Ahlam et Siham.

Hadjer

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

*A mes très chers parents « MOSBAH » & « DJEMAA » source
de force et de courage, et l'exemple de ma vie qui toujours
présentent à mes côtés.*

A mon frère « HOUSSEM »,

*A mes sœurs « CHAIMA », « DOUAA » et ma
petite « AICHA »,*

A toute ma famille surtout « SOUAD » et « WARDA »,

*A tous mes amies: HADJER, ABLA, IMANE, AMIRA, KANZA,
HADA, SIHAM, RADIA et RIMA,*

A tous ceux que j'aime.

KHAWLA

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Introduction Générale | v |
| 1 Réurrence d'ordre un, autonome, à variable réelle | 1 |
| 1.1 Réurrence linéaire d'ordre un, autonome, à variable réelle | 1 |
| 1.1.1 Le point fixe | 1 |
| 1.2 La récurrence non-linéaire, d'ordre un, autonome, à variable réelle | 2 |
| 1.2.1 La complexité de la solution | 2 |
| 1.2.2 Points fixes | 2 |
| 1.2.3 Cycles | 3 |
| 1.2.4 Non unicité de T^{-1} , Endomorphisme | 4 |
| 1.2.5 Domaine de stabilité (ou d'attraction) d'un point fixe attractif | 4 |
| 1.2.6 Bifurcations | 6 |
| 1.2.7 Exposants de Liapunov | 7 |
| 1.2.8 Application : Fonction logistique | 9 |
| 2 Réurrence du deuxième ordre, autonome, à variables réelles | 15 |
| 2.1 Réurrence linéaire d'ordre deux, autonome, à variable réelle | 15 |
| 2.2 Récurrences non-linéaires autonomes du second ordre, à variables réelles | 21 |
| 2.2.1 Généralités-courbes invariantes | 21 |
| 2.2.2 Points fixes et cycles | 22 |
| 2.2.3 Cas d'un Endomorphisme | 23 |
| 2.2.4 Domaine de stabilité d'un ensemble attractif(ou attracteur) | 24 |
| 2.2.5 Bifurcations | 24 |
| 2.2.6 Exposants de Liapunov | 26 |
| 3 Application | 29 |
| 3.1 Existence et stabilité des points fixes | 31 |
| 3.2 Cycles d'ordre 2 et leurs stabilités | 33 |
| 3.2.1 Cycle isolé d'ordre 2 | 34 |
| 3.2.2 Cycles continus d'ordre 2 | 34 |
| 3.3 Bifurcation et Chaos | 35 |
| 3.3.1 Diagramme de bifurcation | 35 |
| 3.3.2 Différents attracteurs chaotiques de la nouvelle fonction | 37 |
| 3.4 Conclusion | 42 |
| Conclusion Générale | 43 |

Table des figures

| | | |
|------|--|----|
| 1.1 | Limites de Domaine d'influence du point fixe stable de $x_{n+1} = f(x_n)$ | 5 |
| 1.2 | Domaine d'influence du point fixe stable de $x_{n+1} = f(x_n)$ | 5 |
| 1.3 | Disjoint domaine d'influence du point fixe de $x_{n+1} = f(x_n)$ | 6 |
| 1.4 | Le graphe de fonction logistique pour $a=3.8$ | 9 |
| 1.5 | Représentation graphique des itérations de la fonction logistique pour $a=3.8282$. 10 | |
| 1.6 | Diagramme de bifurcation de la fonction logistique sur l'intervalle $2 \leq a \leq 4$. 11 | |
| 1.7 | Comportement dynamique observé dans la fonction logistique représenté par des itérations successive tracés pour $a=0.5$ | 11 |
| 1.8 | Comportement dynamique observé dans la fonction logistique représenté par des itérations successive tracés pour $a=2$ | 12 |
| 1.9 | Comportement dynamique observé dans la fonction logistique représenté par des itérations successive tracés pour $a=3.1$ | 12 |
| 1.10 | Comportement dynamique observé dans la fonction logistique représenté par des itérations successive tracés pour $a=4$ | 13 |
| 1.11 | Variation d'exposants de Liapunov de la fonction Logistique. | 13 |
| | | |
| 2.1 | Nœud de type 1. | 16 |
| 2.2 | Nœud de type 2. | 17 |
| 2.3 | Nœud de type 3. | 17 |
| 2.4 | Col de type 1. | 18 |
| 2.5 | Col de type 2. | 18 |
| 2.6 | Col de type 3. | 19 |
| 2.7 | Centre. | 19 |
| 2.8 | Foyer de type 1. | 20 |
| 2.9 | Foyer de type 2. | 20 |
| 2.10 | Nœud étoile de type 1. | 21 |
| 2.11 | Nœud. | 21 |
| 2.12 | Col non linéaire. | 23 |
| 2.13 | bifurcation fold ou(pli) de points fixes, (-) : stable, (- -) : instable. | 25 |
| 2.14 | Bifurcation flip super-critique à gauche, sous-critique à droit, (-) : stable, (- -) : instable, de points fixes. | 25 |
| 2.15 | Diagramme de bifurcation super-critique de Neimark-Sacker. | 25 |
| 2.16 | Diagramme de bifurcation sous-critique de Neimark-Sacker. | 26 |
| | | |
| 3.1 | Attracteur de Lozi obtenu pour $a = 1.7$ et $b = 0.5$ | 30 |
| 3.2 | La densité de Probabilité de la fonction de Lozi (3.2) pour $a = 1.7$ et $b = 0.5$ dans l'intervalle $[-1.3, 1.35]$ divisé sur 265 parties pour 10, 000, 000 itérations. | 30 |
| 3.3 | Existence des points fixes de (3.4) dans l'espace des paramètres (a,b). | 31 |

| | | |
|------|---|----|
| 3.4 | Région de stabilité du point fixe P_1 . | 32 |
| 3.5 | Région de stabilité du point fixe P_2 . | 33 |
| 3.6 | Région de stabilité du cycle isolé de période 2. | 34 |
| 3.7 | Région de stabilité des cycles continus de période 2. | 35 |
| 3.8 | Diagramme de bifurcation pour $b=-0.4$ et $0 < a \leq 1.5$. | 35 |
| 3.9 | Variation d'exposants de Liapunov avec $0 < a \leq 1.5$ et $b = -0.4$. | 36 |
| 3.10 | Diagramme de bifurcation pour $a = 0.7$ et $-1 < b \leq 1.5$. | 36 |
| 3.11 | Variation d'exposants de Liapunov avec $-1 < b \leq 1.5$ et $a = 0.7$. | 36 |
| 3.12 | Attracteur chaotique de (3.4) obtenu pour $a = 1.98$ et $b = -0.4$. | 38 |
| 3.13 | Attracteur chaotique de (3.4) obtenu pour $a = -0.5$ et $b = 1.1$. | 38 |
| 3.14 | Attracteur chaotique de (3.4) obtenu pour $a = -1.1$ et $b = 1.1$. | 38 |
| 3.15 | Attracteur chaotique de (3.4) obtenu pour $a = 1.4$ et $b = 1.1$. | 39 |
| 3.16 | Attracteur chaotique de (3.4) obtenu pour $a = 0.7$ et $b = 1.1$. | 39 |
| 3.17 | Attracteur chaotique de (3.4) obtenu pour $a = 0.9$ et $b = 1.1$. | 40 |
| 3.18 | Attracteur chaotique de (3.4) obtenu pour $a = 1.2$ et $b = 1.25$. | 40 |
| 3.19 | Attracteur chaotique de (3.4) obtenu pour $a = 1.7$ et $b = 1.05$. | 40 |
| 3.20 | Attracteur chaotique de (3.4) obtenu pour $a = -1.4$ et $b = 1.1$. | 41 |
| 3.21 | La densité de probabilité de la fonction (3.4) pour $a = -1.1$ et $b = 1.1$ dans l'intervalle $[0.42, 2.21]$ divisé sur 264 parties pour 10,000,000 itérations. | 41 |
| 3.22 | La densité de Probabilité de la fonction (3.4) pour $a = 1.7$ et $b = -0.4$ dans l'intervalle $[1.29, 1.35]$ divisé sur 264 parties pour 10,000,000 itérations. | 41 |

Introduction Générale

L'OBJET DE CETTE THÈSE consiste en une étude de "chaos dans un système dynamique discret" générée par des systèmes linéaires et non-linéaires régis par des équations aux récurrences appelées également transformations ponctuelles notées T .

Les systèmes dynamiques désignent couramment la branche de recherche active des mathématiques, à la frontière de la topologie, de l'analyse, de la géométrie, de la théorie de la mesure et du probabilités.

Les systèmes dynamiques discrets linéaires sont sans grand surprise puisqu'ils répondent toujours dans le sens qu'on leur commande.

Il n'en va pas de même des systèmes non-linéaires dont l'évolution peut s'avérer difficile à anticiper.

Un système dynamique consiste en un espace de phase dont les coordonnées décrivent l'état dynamique du système à n'importe quel moment et dont une règle dynamique spécifique la tendance future immédiate de toute les variables d'état composant le système, donnée par la valeur présente de ces mêmes variables d'état.

Les systèmes d'équations différentielles paramétrées peuvent avoir différents comportements asymptotiques (tendre vers un équilibre, un cycle limite ...) en fonction des valeurs de leurs paramètres. Il peut donc exister certaines valeurs pour lesquelles le comportement du système passe d'un état qualitatif à un autre (l'attracteur du système était un équilibre et devient un cycle par exemple). Ce changement d'état qualitatif est une bifurcation et la valeur du paramètre associée est appelée valeur de bifurcation.

Le chaos n'est pas aussi "chaotique" que sa dénomination le laisse entendre ; son désordre n'est qu'apparent. Un système chaotique est imprévisible, mais il est parfaitement décrit par des équations simples et déterministes. Un système est dit déterministe lorsqu'il est possible de prédire (de calculer) son évolution au cours du temps : la connaissance exacte de l'état du système à un instant donné, l'instant initiale permet le calcul précis de l'état du système à n'importe quel autre moment. Le lien entre ces deux notions paradoxales, déterministe et imprévisibilité, se manifeste par la sensibilité aux conditions initiales : deux conditions initiales quasiment semblables peuvent conduire à des états très différents du système. Cette impossibilité pratique à calculer l'évolution des systèmes déterministes est la principale caractéristique des systèmes chaotiques.

Les systèmes dynamiques étranges (chaotique) sont depuis longtemps connus dans le domaine des mathématiques, mais c'est seulement au cours de la dernière décennie que les applications concrètes se sont multipliées. Notre étude va se focaliser sur l'usage du chaos pour transmettre de l'information.

Cela dit, nous avons toutefois centralisé nos efforts autour de l'analyse des systèmes chaotiques.

"Chaos", on doit admettre que ce terme n'est pas facile à définir. On ne peut qu'essayer de faire au mieux, en se basant sur les références les plus récentes. Le mot lui-même prend origine de terme $\ll \chi\alpha\omicron\sigma \gg$, utilisé par les Grecs pour décrire l'espace vide infini

dont ils ont supposé l'existence avant l'émergence de toutes choses. De nos jours, dans le langage commun « *chaos* » décrit un état de désordre et d'irrégularité.

L'attracteur étrange (chaotique) se caractérise par :

1. Sensibilité aux conditions initiales (deux trajectoires de l'attracteur initialement voisines finissent toujours par s'éloigner l'une de l'autre, ceci traduit un comportement chaotique).
2. La dimension d de l'attracteur est fractale.
3. L'attracteur est de volume nulle dans l'espace des phases.

Notre travail répartit sur trois chapitres, dans le premier chapitre on introduit les récurrences d'ordre un, autonomes, à variables réelles, linéaires et non-linéaires, et on définit leurs singularités comme les points fixes et leur stabilité, les cycles, les bifurcations.

Dans le deuxième chapitre, on présente les récurrences d'ordre deux, autonomes, à variables réelles, linéaires et non-linéaires, puis on définit quelque notions comme les points fixes, les cycles et leur stabilité, les exposants de Liapunov, avec les différents types de bifurcations.

Dans le troisième chapitre, on introduit et analyse une nouvelle fonction linéaire par morceaux de plan, qui est déduit de la fonction de Lozi. On étudie les points fixes et leurs stabilités, cycles de période 2 et leurs régions de stabilité, les types de bifurcation que faire dans le comportement dynamique de cette fonction. Finalement, on discute les routes vers le chaos et quelque attracteurs chaotique qu'ils existent dans les comportements de notre fonction.

Chapitre 1

Réurrence d'ordre un, autonome, à variable réelle

1.1 Réurrence linéaire d'ordre un, autonome, à variable réelle

Après une translation d'origine, la récurrence linéaire, d'ordre un [1], peut toujours être mise sous la forme :

$$x_{n+1} = Sx_n \quad , -\infty < x < +\infty \quad (1.1)$$

où S est un constant réel, ce dernier appelé *le multiplicateur* ou valeur propre du point fixe $x = 0$. Pour une condition initiale x_0 quelconque, la solution explicite est sous la forme suivante :

$$x_n = S^n x_0 \quad (1.2)$$

L'origine $O(x = 0)$ de l'axe des x , est le seul point fixe à distance finie de transformation T décrit par (1.1).

1.1.1 Le point fixe

Un point fixe x est un point de l'espace des phases X vérifiant :

$$T(x) = x$$

d'après (1.1) ou (1.2), on voit que la nature de point fixe est complètement déterminé par le nombre réel S . En effet si $|S| < 1$, quel que soit x_0 , la suite récurrente engendrée par (1.1) tend vers le point $x = 0$. Ce point O est dit *attractif*, ou encore *asymptotiquement stable*. Si $|S| > 1$, tout point x_0 pris dans un voisinage de O donne une suite de points qui s'éloignent de O quand n augmente, Ce point O est alors dit *répulsif*, ou *instable*.

La nature du point fixe O dépend aussi du signe du multiplicateur S . En effet, si S est positif la suite des point engendrée par (1.1) est telle que x_n a toujours le même signe que x_0 . O est appelé dans ce cas *point de type 1*. Par contre si S est négatif la suite des points engendrée par (1.1) est telle que le signe de x_n dépend de la parité de n . cette suite oscille autour du point fixe O . O est alors appelé *point de type 2*.

Dans le contexte linéaire, $|S| = 1$ correspond à un cas banal, car si $S = +1$ tout point

de l'axe des X est un point fixe, et si $S = -1$, tout point de l'axe des X est un point fixe de

$$x_{n+2} = S^2 x_n,$$

En faisant le changement de variable $x = \frac{1}{z}$, il est possible d'étudier la nature du point à l'infini, qui devient le point $z = 0$, et qui est aussi un point fixe de (1.1). En effet (1.1) se transformation en :

$$z_{n+1} = S^{-1} z_n \tag{1.3}$$

et ce point $z = 0$ a une stabilité opposée à celle de O . Lorsque O est attractif, *le domaine d'influence (termes équivalents, d'attraction, ou de stabilité)* de O est l'ensemble des points x_0 qui donne une suite récurrente tendant vers 0. Il est ici constitué par tout l'axe des x . Le point à l'infini (répulsif) sur cette axe est la frontière de ce domaine. Lorsque O est répulsif, le domaine de stabilité du point à l'infini est tout l'axe des x , le point frontière étant $x = 0$. Étant donné un point initial x_0 , le point x_1 obtenu à partir de (1.1) est appelé *le conséquent* de x_0 . En écrivant (1.1) sous la forme :

$$x_n = S^{-1} x_{n+1} \tag{1.4}$$

on définit la récurrence inverse, (1.1) étant la récurrence "directe". Au point x_0 correspond un point x_{-1} , donné par (1.4), qui est appelé *antécédent de rang un* de x_0 . Si (1.1) correspond à transformation inverse T , (1.4) correspond à la transformation inverse T^{-1} . Dans le cas linéaire, il est évident que T^{-1} est toujours uniforme, c'est-à-dire, un point x_0 possède un antécédent de rang n et un seul. Le point x_{-n} issu de x_0 est *l'antécédent de rang n* .

1.2 La récurrence non-linéaire, d'ordre un, autonome, à variable réelle

1.2.1 La complexité de la solution

Soit la récurrence, ou transformation ponctuelle T , sous la forme explicite :

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad , \quad -\infty < x < +\infty \tag{1.5}$$

$f(x)$ étant une fonction uniforme, non linéaire de la variable réelle x , dans les cas où $f(x)$ n'est pas au moins une fois continûment différentiable (classe C_1), ou n'est pas continue partout, de nouvelles difficultés risquent de naître. Alors on ne peut pas retrouver des solutions explicites. A défaut de mieux on est réduit à rechercher les propriétés des solutions à travers une étude de la nature des singularités de (1.5).

1.2.2 Points fixes

Les singularités les plus simples sont les points fixes, racines de l'équation :

$$x - f(x) = 0 \tag{1.6}$$

pour un système dynamique décrit directement par une récurrence, un point fixe correspondant à un état d'équilibre. La récurrence (1.5) peut posséder plusieurs points fixes à

distance finie. Soit $x = \alpha$ un tel point, en posant $x = \alpha + X$, on amène l'origine au point fixe α . Supposons que $f(x)$ est au moins une fois différentiable en $x = \alpha$, $f \in C_1$. Dans la nouvelle récurrence obtenue, on peut alors séparer le terme linéaire en X_n des autres termes $F(x_n)$, d'où :

$$X_{n+1} = SX_n + F(X_n) \quad , \quad F(0) = 0 \quad , \quad \lim_{X \rightarrow 0} F(X)/|X| = 0 \quad (1.7)$$

où $S = \left[\frac{df}{dx} \right]_{x=\alpha}$. En se limitant à un domaine suffisamment petit, D_α entourant le point α , l'approximation linéaire de (1.7) est :

$$X_{n+1} = \left[\frac{df}{dt} \right]_{x=\alpha} \cdot X_n \quad (1.8)$$

En écrivant les deux premiers termes du développement de Taylor de $f(x+\alpha)$ et en tenant compte de $\alpha = f(\alpha)$. $S = \left[\frac{df}{dx} \right]_{x=\alpha}$ est le multiplicateur du point fixe $x = \alpha$.

L'exemple suivant illustre ce qui vient d'être dit :

$$x_{n+1} = x_n + ax_n^i \quad , \quad i = 2 \quad \text{ou} \quad 3. \quad (1.9)$$

Pour $i = 2$ l'examen de la différence $x_{n+1} - x_n$ permet de constater que le point fixe $O(x = 0)$, pour $a > 0$, est *attractif* pour la suite des points engendrés à partir de $x_0 < 0$, *répulsif* pour la suite engendrée à partir de $x_0 > 0$. Pour $a < 0$ on a un résultat inverse. le point fixe $O(x = 0)$ est donc *instable*.

Pour $i = 3$, de la même façon, lorsque $a > 0$, O est répulsif pour une suite engendrée à partir de $x_0 < 0$, ou $x_0 > 0$. Lorsque $a < 0$, O est attractif quel que soit x_0 pris dans son voisinage. O est *répulsif*, ou *instable*, dans le premier cas, et *attractif*, ou *asymptotiquement stable*, dans le second.

Dans l'exemple choisi la stabilité du point O est déterminée par le terme non-linéaire ax^i . Par analogie avec les situations correspondantes les équations différentielles ordinaires, les cas pour lesquels l'approximation linéaire établie en un point ne permet pas de conclure à la stabilité de ce point pour des x_0 suffisamment voisins de α , seront appelés cas critiques au sens de Liapunov.

1.2.3 Cycles

Les point fixes ne sont pas cependant les seuls singularités possibles pour une récurrence non-linéaire soit en effet la récurrence itérée k fois :

$$x_{n+k} = f_k(x_n) = f_{k-1}(f(x_n)) = f(f_{k-1}(x_n)) \quad , \quad k \text{ entier} > 1 \quad (1.10)$$

construite à partir de (1.5), et qui représente la transformation T^k . Les points fixes de (1.10), qui ne sont pas des points fixes de (1.5), sont des singularités pour cette dernière récurrence. Ils sont solutions de l'équation :

$$x - f_k(x) = 0 \quad (1.11)$$

et sont appelés *cycles*. Plus précisément un point α est dit point d'un cycle d'ordre k de la transformation T , s'il est point fixe de T^k , sans être un point fixe de T^l , $1 \leq l < k$, (l et k entiers), c'est-à-dire :

$$T^k \alpha = \alpha \quad , \quad T^l \alpha \neq \alpha \quad , \quad 1 \leq l < k \quad (1.12)$$

Les points $\alpha_2 = T\alpha$, $\alpha_3 = T^2\alpha$, ..., $\alpha_k = T^{k-1}\alpha$, sont alors de même des points du cycle k , qui est constitué par les k points α_i , $i = 1, 2, \dots, k$, ($\alpha_i = \alpha$). Un point fixe donc est un cycle d'ordre $k = 1$.

A un cycle est associé un multiplicateur S qui est le même pour tous les points du cycle. En effet, soit $f(x)$ différentiable aux points α_i :

$$S = \left(\frac{df_k}{dx} \right)_{x=\alpha} = \left(\frac{df}{dx} \right)_{\alpha_1} \cdot \left(\frac{df}{dx} \right)_{\alpha_2} \cdot \dots \cdot \left(\frac{df}{dx} \right)_{\alpha_k} \quad (1.13)$$

multiplicateur du cycle, est le même pour tous les points α_i .

Pour un système dynamique, un cycle correspond à un régime périodique, sous-harmonique d'un régime périodique de référence relatif à un point fixe.

1.2.4 Non unicité de T^{-1} , Endomorphisme

L'uniformité de la transformation inverse T^{-1} , qui a toujours lieu dans le cas linéaire, est maintenant une propriété qui ne se retrouve que pour certaines formes de la fonction uniforme $f(x)$ de (1.5). Autrement dit, (1.5) peut être telle qu'un point x_n peut avoir zéro, un, ou plusieurs antécédents de rang un, selon la région de l'axe des x où se situe ce point. lorsque T^{-1} a ainsi plusieurs déterminations, on dit que T est un endomorphisme.

La récurrence :

$$x_{n+1} = Sx_n + x_n^2 \quad (1.14)$$

donne un exemple de cette situation, en effet la récurrence définie par T^{-1} qui s'écrit :

$$x_n = 0, 5 \left[-S \pm \sqrt{S^2 + 4x_{n+1}} \right] \quad (1.15)$$

comporte deux déterminations, pour des points initiaux x_0 , $x_0 > \frac{-S^2}{4}$, il existe deux antécédents $x_{-1}^{(1)}$, $x_{-1}^{(2)}$, donnés par (1.15). Pour $x_0 < \frac{-S^2}{4}$, les points x_0 n'ont pas d'antécédents réels. Le point $x_0 = \frac{-S^2}{4}$ a deux antécédents de premier rang confondus. Un point qui a plusieurs antécédents de premier rang confondus est appelé un point critique.

1.2.5 Domaine de stabilité (ou d'attraction) d'un point fixe attractif

Un tel domaine (D) est constitué par l'ensemble des points x_0 , à partir desquels (1.5), engendre une suite récurrente, qui tend asymptotiquement vers le point fixe attractif α . Dans le cas linéaire, (D) est tout l'axe des x , sauf le point à l'infini. Dans le cas non-linéaire, il faut s'attendre à ce que cette dernière situation soit exceptionnelle, puisqu'il y a possibilité d'existence de plus d'une singularité à distance finie.

Pour un système dynamique décrit par une récurrence, (D) caractérise le domaine de certaines perturbations, se traduisant par un déplacement de conditions initiales, qui ne modifie pas le comportement qualitatif du système.

Afin de faire apparaître simplement les propriétés de la frontière (F) du domaine (D), on peut utiliser la construction de *Koenigs-Lemery* illustrée par la Figure (1.1). Pour ceci, la courbe $f(x_n)$ est tracée dans le plan (x_n, x_{n+1}) , ainsi que la bissectrice du premier quadrant. A partir de x_0 la courbe en escaliers de la Figure (1.1) permet de construire x_1 ,

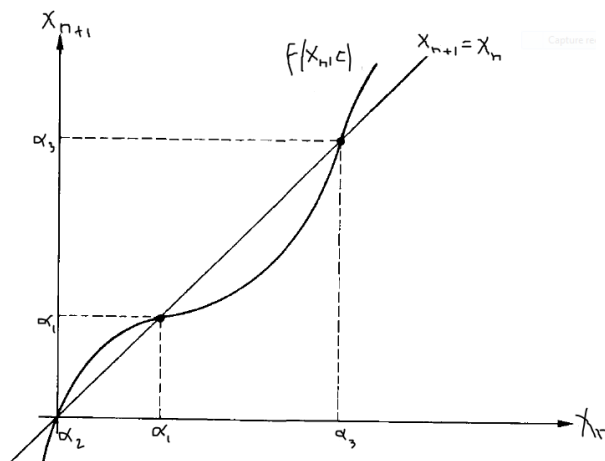


FIGURE 1.1 – Limites de Domaine d'influence du point fixe stable de $x_{n+1} = f(x_n)$

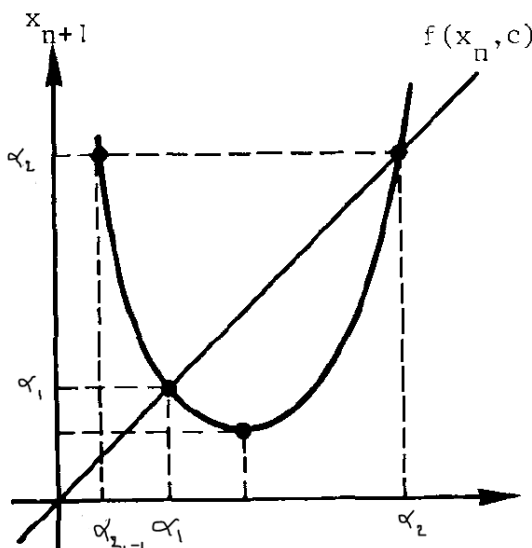


FIGURE 1.2 – Domaine d'influence du point fixe stable de $x_{n+1} = f(x_n)$

x_2, x_3, \dots . Les points fixes sont les intersections de $f(x)$ avec la bissectrice du premier quadrant. Pour la courbe $f(x)$ choisie, le point fixe α_1 est attractif, les points fixes α_2, α_3 sont répulsifs. La construction de Figure (1.1) montre que la frontière (F) du domaine de stabilité du point fixe α , est constitué par les deux points fixes répulsifs α_2, α_3 . La Figure (1.2) fait apparaître un cas où la frontière (F) du domaine de stabilité (ou d'attraction) du point fixe α_1 est constitué par le point fixe répulsif α_2 et son antécédent $\alpha_{2,-1}$ différent de α_2 .

Les deux propriétés fondamentales d'une frontière (F) du domaine du stabilité (ou attraction) d'un point fixe sont : l'invariance de (F) par T^k et T^{-k} , $k = 1, 2, \dots$, et son caractère répulsif pour les points situés dans son voisinage. Les points de (F) des deux exemples ci-dessus ont bien ces caractéristiques, mais ils ne sont pas les seuls. Ainsi les deux points d'un cycle instable d'ordre deux peuvent être des points de (F), comme le montre l'exemple :

$$x_{n+1} = Sx_n - x_n^3, \quad |S| < 1$$

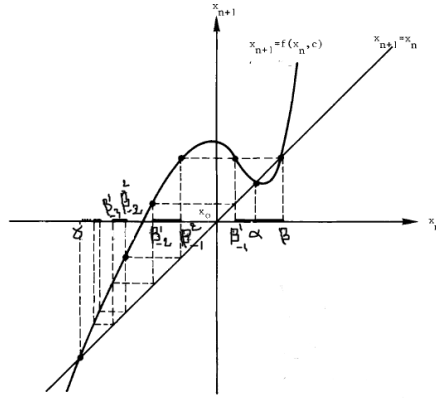


FIGURE 1.3 – Disjoint domaine d'influence du point fixe de $x_{n+1} = f(x_n)$

Le point fixe $x = 0$ est un point attractif. Les points $x = \sqrt{1+S}$, $x = -\sqrt{1+S}$ sont les deux points d'un cycle répulsif d'ordre 2, et le domaine de stabilité de 0 est le segment $-\sqrt{1+S} < x < \sqrt{1+S}$.

Dans les exemples qui viennent d'être considérés, le domaine (D) était simplement connexe, c'est-à-dire constitué par un seul segment de l'axe des x . On peut cependant imaginer sans peine que la non-unicité de la récurrence inverse T^{-1} risque d'amener des situations différentes. Il suffit pour cela que, contrairement au cas de la Figure (1.2), un point fixe répulsif de la frontière ait plus d'un antécédent différent de lui-même. C'est ce qui se passe pour la fonction $f(x)$ de la Figure (1.3) où α est un point fixe attractif, β un point fixe répulsif admettant, en dehors de lui-même, les antécédents $\beta_{-1}^1, \beta_{-1}^2, \beta_{-2}^1, \beta_{-2}^2, \dots$. En utilisant la méthode de Koenigs-Lemery, il est facile de constater que le domaine de stabilité (plus la frontière) du point fixe α est formé par le segment $\beta\beta_{-1}^1$ qui contient α (domaine immédiate stabilité), et la suite infinie des segment $\beta_{-i}^2\beta_{-(i+1)}^1$, ($i = 1, 2, \dots$), formant des régions sans connexion entre elles, leurs extrémités admettant le point fixe répulsif γ en tant que point d'accumulation. Ces régions qui forment le domaine de stabilité d'un point fixe, ne sont pas toujours en nombre infini.

1.2.6 Bifurcations

On dit qu'une solution d'une récurrence correspond à une bifurcation sous l'effet d'une variation de paramètre, ou d'une modification de structure de l'équation, lorsqu'elle est une frontière entre deux comportements qualitatifs différents de solutions. Plus précisément, soit la récurrence :

$$x_{n+1} = f(x_n, \lambda) \quad (1.16)$$

λ étant un paramètre réel, $f(x, \lambda)$ une fonction continue de la variable réelle x et de λ . S'il existe un $\varepsilon > 0$, aussi petit que l'on veut, tel que la structure des singularités de (1.16) est différente pour $\lambda < \lambda_0$, $\lambda > \lambda_0$, et $\lambda = \lambda_0$, ($|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$), la valeur λ_0 du paramètre λ est appelée *une valeur de bifurcation*.

Pour faire apparaître plus clairement cette notion de bifurcation, dans le cas d'une récurrence, soit l'exemple simple suivant :

$$x_{n+1} = \lambda x_n + x_n^3 \quad (1.17)$$

pour $\lambda = 1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ petit, le point fixe $O(x = 0)$ *attractif (ou asymptotiquement stable)* est entouré de deux points fixes $A(x = +\sqrt{\varepsilon})$ et $B(x = -\sqrt{\varepsilon})$ qui sont *instables* $\left(\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_A, x_B} = 3 - 2\lambda\right)$.

pour $\lambda = 1 + \varepsilon$, il existe qu'un seul point fixe $O(x = 0)$ qui est *répulsif (ou instable)*. La valeur $\lambda_0 = +1$ marque donc un changement de comportement qualitatif des solutions de (1.17), d'où mise en évidence d'une *bifurcation*. Pour cette valeur, O est le seul point fixe, son multiplicateur est $S = \lambda = +1$, par conséquent O correspond à un cas critique au sens de Liapunov [1] qui, lorsqu'il est traversé par variation de λ , donne naissance à deux points fixes A, B , on les fait disparaître selon le sens de la variation. il est facile de constater que O est instable pour $\lambda = +1$.

Soit maintenant :

$$x_{n+1} = \lambda x_n - x_n^3 \quad (1.18)$$

Pour $\lambda = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ petit, $O(x = 0)$ est un point fixe *instable* entouré par deux points fixes $A(x = +\sqrt{\varepsilon})$, $B(x = -\sqrt{\varepsilon})$ qui sont *asymptotiquement stables*.

Pour $\lambda = 1 - \varepsilon$, il n'existe qu'un seul point fixe $O(x = 0)$ qui est *asymptotiquement stable*. La valeur de bifurcation est $\lambda_0 = +1$, les deux points A et B sont venus se confondre avec O qui, pour des conditions initiales suffisamment proches de ce points, est *asymptotiquement stable*.

1.2.7 Exposants de Liapunov

Certains systèmes dynamiques sont très sensibles aux variations de leurs conditions initiales, ces variations peuvent rapidement prendre d'énormes proportions.

Le mathématicien *russe Alexandre Markus-Liapunov* (1857-1918) s'est penché sur ce phénomène et a développé une quantité permettant de mesurer la divergence des trajectoires qui sont voisines au départ, cette quantité appelée "*exposant de Liapunov*" mesure en fait le degré de sensibilité d'un système dynamique, autrement dit, le taux de divergence entre l'évolution de trajectoires issues de conditions initiales proches au sein de cet espace borné qu'est l'attracteur étrange. Ce quantité est souvent utilisé pour déterminer si un système est *chaotique* ou non.

Soit une application discrète f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui applique x_n sur x_{n+1} : on choisit deux conditions initiales très proches, soit x_0 et x'_0 séparées d'une distance d_0 , et on regarde comment se comportent les trajectoires qui en sont issues. On sait que :

$$d_0 = |x'_0 - x_0|$$

après une itération d_0 devient d_1 :

$$d_1 = |x'_1 - x_1|$$

après n itérations la distance évolue à d_n :

$$d_n = |x'_n - x_n|$$

$\frac{d_1}{d_0}$: décrit l'évolution de l'erreur d_1 dans la 1^{ière} itération :

$$\frac{d_1}{d_0} = \frac{|x'_1 - x_1|}{|x'_0 - x_0|} = \frac{|f(x'_0) - f(x_0)|}{|x'_0 - x_0|} = \frac{|f(x_0 + d_0) - f(x_0)|}{d_0}$$

pour d_0 infinitésimale,

$$\lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{d_1}{d_0} = \lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + d_0) - f(x_0)|}{d_0} = |f'(x_0)|$$

On suppose que les deux trajectoires $X(x_0, t)$ et $X(x'_0, t)$ s'écartent à un rythme exponentiel à la 1^{ière} itération. On pourra alors trouver un réel $\lambda(x_1)$ tel qu'après 1 itération :

$$\lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{d_1}{d_0} = e^{\lambda(x_1)}$$

par comparaison avec la limite précédente :

$$e^{\lambda(x_1)} = |f'(x_0)|$$

en passant au logarithme, on trouve :

$$\lambda(x_1) = \log |f'(x_0)|$$

$\lambda(x_1)$ est appelé exposant de Liapunov local, qui mesure la divergence ou la convergence après la 1^{ière} itération. L'évolution de l'erreur après n itérations :

$$\frac{d_n}{d_0} = \frac{|x'_n - x_n|}{|x'_0 - x_0|} = \frac{|f^n(x'_0) - f^n(x_0)|}{|x'_0 - x_0|} = \frac{|f^n(x_0 + d_0) - f^n(x_0)|}{d_0}$$

pour d_0 infinitésimale :

$$\lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{d_n}{d_0} = \lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{|f^n(x_0 + d_0) - f^n(x_0)|}{d_0} = \left| \frac{df^n}{dx}(x_0) \right|$$

l'erreur d_n tend vers une limite, un réel λ qui représente l'exposant de Liapunov,

$$\lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{d_n}{d_0} = e^{\lambda n}$$

d'où :

$$e^{\lambda n} \simeq \left| \frac{df^n}{dx}(x_0) \right| \Rightarrow \log e^{\lambda n} \simeq \log \left| \frac{df^n}{dx}(x_0) \right|$$

par conséquent,

$$\lambda \simeq \frac{1}{n} \log \left| \frac{df^n}{dx}(x_0) \right|$$

Finalement, en faisant tendre n vers l'infini et en utilisant la règle de dérivation en chaîne, on obtient :

$$\begin{aligned} \lambda &\simeq \frac{1}{n} \log \left| \frac{df(f^{n-1}(x_0))}{dx} \right| = \dots = \frac{1}{n} \log |f'(x_{n-1})| |f'(x_{n-2})| \dots |f'(x_0)| \\ \lambda &\simeq \frac{1}{n} \log \prod_{i=0}^{n-1} |f'(x_i)| \end{aligned}$$

on conclut :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log |f'(x_i)|$$

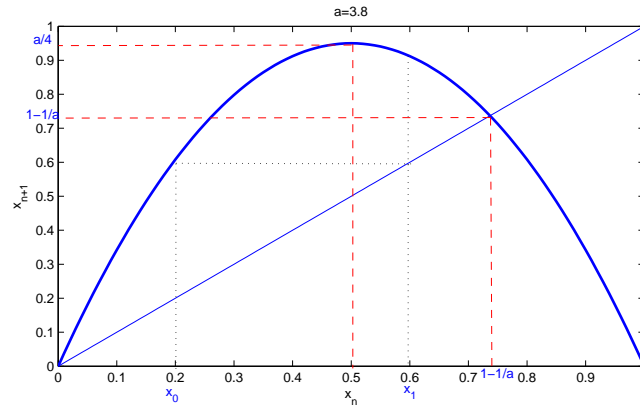


FIGURE 1.4 – Le graphe de fonction logistique pour $a=3.8$.

avec la notation :

$$f'(x_i) = \frac{df}{dx} \Big|_{x = x_i}$$

Appliquant la formule précédente pour $x_i = x^*$ tel que x^* est le point d'équilibre, il faut que :

$$\lambda = \log |\gamma| \quad \text{où} \quad \gamma = f'(x^*)$$

1. Si $|\gamma| < 1 \Rightarrow \lambda < 0$, l'orbite est attractive vers un point fixe ou une orbite périodique.
2. $|\gamma| = 1 \Rightarrow \lambda = 0$, les orbites issues de conditions initiales différentes, gardant une séparation constante, ni ne convergent l'une par rapport à l'autre, il y a un point de bifurcation.
3. $|\gamma| > 1 \Rightarrow \lambda > 0$, l'attracteur est chaotique.

1.2.8 Application : Fonction logistique

En mathématiques, une suite logistique est une suite simple, mais dont la récurrence n'est pas linéaire. Sa relation de récurrence est

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n), x_0 \in [0, 1].$$

suivant la valeur du paramètre a (dans $[0, 4]$ pour assurer que x reste dans $[0, 1]$), elle génère une suite convergente, une suite soumise à oscillations ou une suite chaotique. Souvent citée comme exemple de la complexité de comportement pouvant surgir d'une relation non linéaire simple, cette suite fut popularisée par le biologiste Robert May en 1976. Une application de la suite logistique est la modélisation de la taille d'une population biologique au fil des générations.

Elle est la solution en temps discret du modèle de Verhulst. Le terme «logistique» provient de l'ouvrage de Pierre François Verhulst qui appelle courbe logistique la solution en temps continu de son modèle. Il écrit en 1845 dans son ouvrage consacré à ce phénomène : «Nous donnerons le terme de logistique à cette courbe». L'auteur n'explique pas son choix mais «logistique» a même racine que logarithme et logistikos signifie «calcul» en grec.

On considère la fonction logistique :

$$f_a : [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \quad \text{donné par} \quad x_{n+1} = f_a(x_n)$$

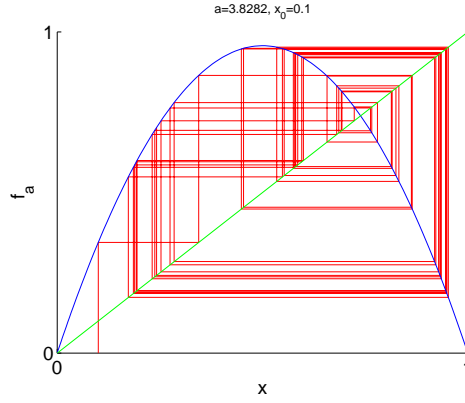


FIGURE 1.5 – Représentation graphique des itérations de la fonction logistique pour $a=3.8282$.

où $f_a(x) = ax(1 - x)$, a est un paramètre dans $[0, 4]$. Le graphe de f_a est donné dans la Figure (1.4).

Notre analyse sera limitée à trouver des points périodiques et tracer un diagramme de bifurcation. Pour trouver des points de période un, il faut résoudre l'équation suivante :

$$f_a(x) = ax(1 - x) = x$$

ce qui donne les points qui satisfont à la condition $x_{n+1} = x_n$ pour tout n . Il existe donc deux solutions données par $x_1 = 0$ et $x_2 = 1 - \frac{1}{a}$. La stabilité des points critiques peut être déterminée en utilisant le théorème [5] suivant :

Théorème 1.1 *Supposons que la fonction $f_a(x)$ a un point fixe x^* . Donc, le point fixe est stable si*

$$\left| \frac{d}{dx} f_a(x^*) \right| < 1$$

et instable si

$$\left| \frac{d}{dx} f_a(x^*) \right| > 1$$

En utilisant le théorème (1.1), on trouve $\left| \frac{d}{dx} f_a(0) \right| = a$ donc le point fixe $x_1 = 0$ est *stable (attractif)* pour $0 < a < 1$, et *instable (répulsif)* si $a > 1$, et $\left| \frac{d}{dx} f_a(x_2) \right| = |2 - a|$, donc le point fixe $x_2 = 1 - \frac{1}{a}$ est stable pour $1 < a < 3$ et instable si $a < 1$ ou $a > 3$.

Pour trouver les points de période 2, il faut résoudre l'équation suivante :

$$f_a^2(x) = a(ax(1 - x))(1 - ax(1 - x)) = x \quad (1.19)$$

ce qui donne les points qui satisfont à la condition $x_{n+1} = x_n$ pour tout n , deux solutions de (1.19) sont connues notées $x_1 = 0$ et $x_2 = 1 - \frac{1}{a}$, (1.19) factorise comme suite :

$$x \left(x - \left(1 - \frac{1}{a} \right) \right) \left(-a^3 x^2 + (a^2 + a^3)x - (a^2 + a) \right) = 0$$

l'équation $\left(-a^3 x^2 + (a^2 + a^3)x - (a^2 + a) \right) = 0$ a deux solutions :

$$x_3 = \frac{a + 1 + \sqrt{(a - 3)(a + 1)}}{2a} \quad \text{et} \quad x_4 = \frac{a + 1 - \sqrt{(a - 3)(a + 1)}}{2a}$$

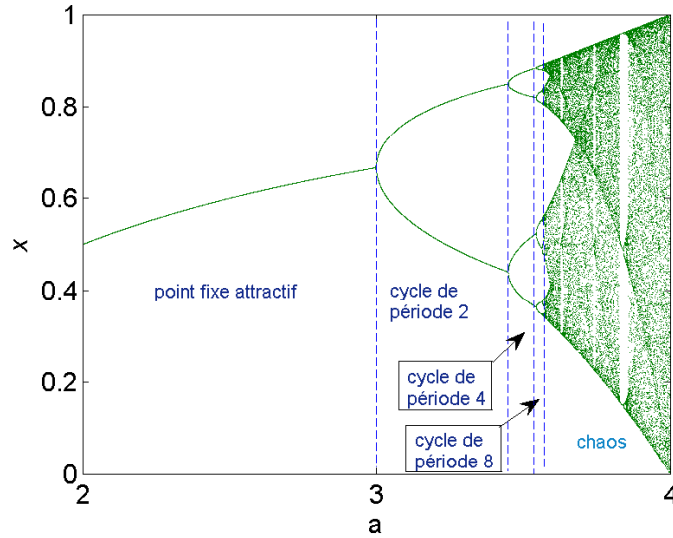


FIGURE 1.6 – Diagramme de bifurcation de la fonction logistique sur l'intervalle $2 \leq a \leq 4$.

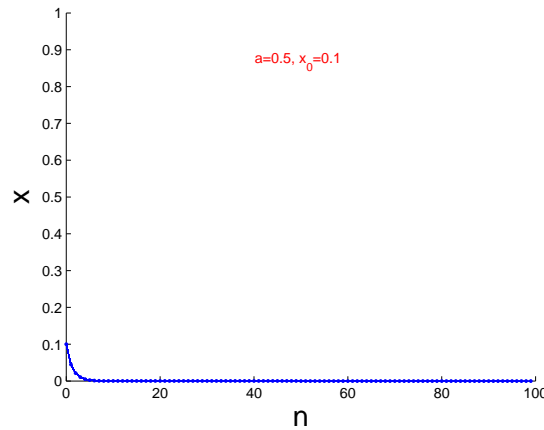


FIGURE 1.7 – Comportement dynamique observé dans la fonction logistique représenté par des itérations successive tracés pour $a=0.5$.

il y a deux points périodique de période 2 si $a > 3$, $b_1 = 3$ correspond au premier bifurcation pour la fonction logistique. Maintenant,

$$\frac{d}{dx} f_a^2(x_3) = -4a^3 x^3 + 6a^3 x^2 - 2(a^2 + a^3)x + a^2$$

et

$$\left| \frac{d}{dx} f_a^2(x_3) \right| = 1$$

si $a = b_2 = 1 + \sqrt{6}$, la valeur b_2 correspond au deuxième point de bifurcation pour la fonction logistique. Ainsi x_3 et x_4 perdent leur stabilité quand $a = b_2$ (vérifié en utilisant MATLAB) [5].

En résumant, pour $0 < a < 1$, le point fixe $x_1 = 0$ est stable et les chemins itératifs seront attirés par ce point. Comme a passe par un, le point fixe trivial devient instable et les chemins itératifs sont attirés par le point fixe $x_2 = 1 - \frac{1}{a}$. Pour $1 < a < b_1$, le point fixe de la période un est stable. Comme a passe par b_1 , le point fixe de période un devient

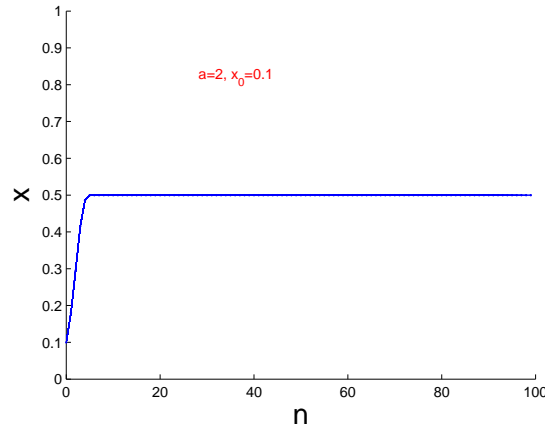


FIGURE 1.8 – Comportement dynamique observé dans la fonction logistique représenté par des itérations successive tracés pour $a=2$.

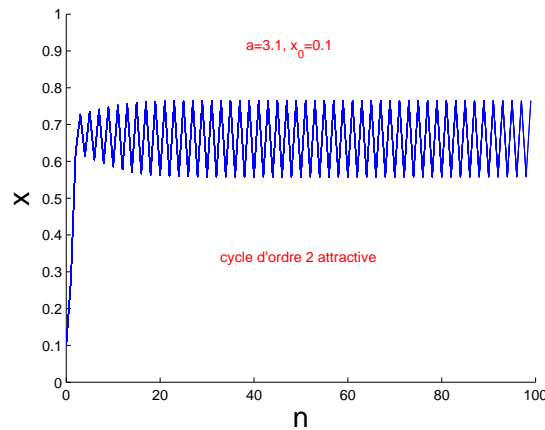


FIGURE 1.9 – Comportement dynamique observé dans la fonction logistique représenté par des itérations successive tracés pour $a=3.1$.

instable et un point fixe de période deux est créée ($b_1 < a < b_2$). Comme a passe par b_2 , le point fixe de la période deux perde sa stabilité et un point de période quatre est créée, ainsi de suite.

Comme avec d'autres système dynamique, tous les informations obtenues jusque là peuvent être résumées sur un diagramme de bifurcation. La Figure (1.6) représente un diagramme de bifurcation pour la fonction logistique lorsque $2 \leq a \leq 4$. Les deux premiers points de bifurcation sont marqués b_1 et b_2 .

Pour des autres valeurs de a , il est intéressant de tracer des données de séries temporelles obtenues à partir de la fonction logistique. Les figures (1.7), (1.8), (1.9) (1.10) montrent le comportement les itérations successives de la fonction logistique lorsque $x_0 = 0.1$ pour les quatre cas suivant $a = 0.5$, $a = 2$, $a = 3.1$ et $a = 4$, ces itérations donnent un régime stationnaire, périodique et chaotique.

Le diagramme de bifurcation donné dans la Figure (1.6) a été produit en utilisant MATLAB. Ainsi, même le simple fonction quadratique $f_a(x) = ax(1 - x)$ présente une extraordinaire variété de comportements comme a varie de 1 à 4.

La Figure (1.6) montre les bifurcations de doublement de période au chaos. Cela signifie que si a passe par b_1 , le point de période un devient de période deux, au b_2 le

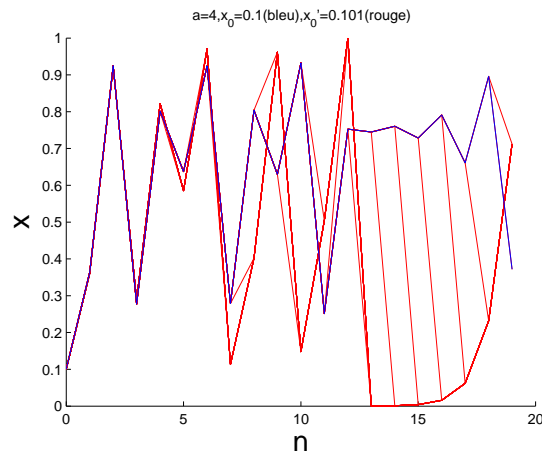


FIGURE 1.10 – Comportement dynamique observé dans la fonction logistique représenté par des itérations successive tracés pour $a=4$.

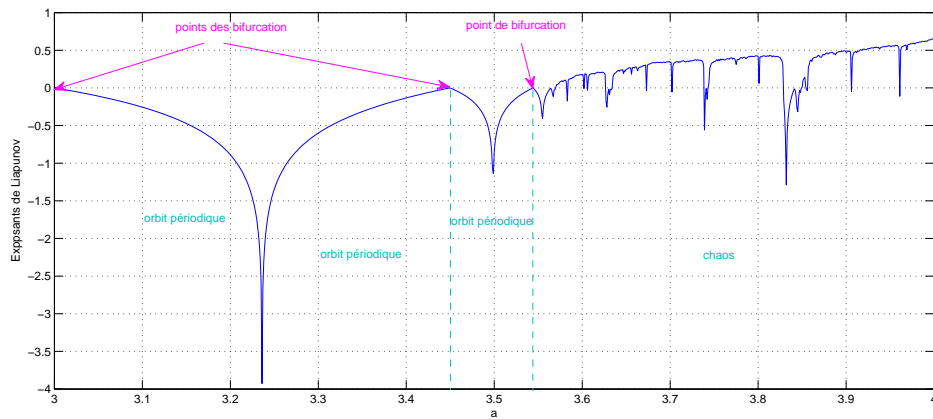


FIGURE 1.11 – Variation d'exposants de Liapunov de la fonction Logistique.

point de période deux deviennent de période quatre, et ainsi de suite. La séquence de doublement de période extrémités à environ $a = 3.59945 \dots$, où le système devient chaotique. La Figure (1.6) montre clairement les régions où le système revient à comportement périodique, même si pour une petit intervalle des valeurs a . Ces régions sont appelées les *fenêtres périodiques*.

Une méthode souvent utilisée pour déterminer si un système est chaotique ou non est d'utiliser l'exposant de Liapunov.

| a | 0.5 | 1 | 2.1 | 3 | 3.5 | 3.8282 | 4 |
|-----------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Exposants de Liapunov | -0.6932 | -0.0003 | -2.3024 | -0.0002 | -0.8719 | 0.26315 | 0.69316 |

Tableau (1.1) : Les exposants de Liapunov calculés pour quelques valeurs du paramètre a , avec $x_0 = 0.1$ et 50.000 itérations utilisés pour chaque case.

Le tableau (1.1) représente les exposants de Liapunov calculés de la fonction logistique pour plusieurs valeurs du paramètre a avec une valeur initial égale à 0.1. Par exemple, si $a = 4$, l'exposant de Liapunov de la fonction logistique est $\lambda = \ln 2 \simeq 0.69314$, donc l'attracteur est chaotique dans ce cas.

Chapitre 2

Récurrance du deuxième ordre, autonome, à variables réelles

2.1 Récurrance linéaire d'ordre deux, autonome, à variable réelle

Après un changement d'origine, les récurrance linéaire d'ordre deux [1] peuvent toujours être mises sous la forme :

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n, \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n \end{cases}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (2.1)$$

où a, b, c, d sont des constantes réelles. L'origine O du plan de phase (x_n, y_n) est un point fixe de la transformation ponctuelle T décrite par (2.1).

Le changement de variable :

$$\left. \begin{aligned} x &= \alpha X + \beta Y, & y &= p_1 \alpha X + p_2 \beta Y \\ p_1 &= (S_1 - a)/b = c/(S_1 - d), & p_2 &= (S_2 - a)/b = c/(S_2 - d) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

où S_1, S_2 sont les racines de "l'équation caractéristique" (c-à-d l'équation des valeurs propres de la matrice des coefficients a, b, c et d) :

$$S^2 - (a + d)S + ad - bc = 0 \quad (2.3)$$

permet, lorsque $S_1 \neq S_2$, de ramener (2.1) sous la forme de deux récurrances du premier ordre à variable réelle :

$$\begin{cases} X_{n+1} = S_1 X_n \\ Y_{n+1} = S_2 Y_n \end{cases}, \quad S_1 \neq S_2 \quad (2.4)$$

Les valeurs propres S_1, S_2 de la matrice des coefficients de (2.1) sont donc les multipliateurs du point fixe O . Lorsque S_1, S_2 sont réels, les nouveaux axes OX, OY ont pour pente p_1 et p_2 (vecteurs propres de la matrice des coefficients). Ces axes sont appelés axes principaux du point fixe O . Par rapport à ces axes (2.4) a pour solution :

$$\begin{cases} X_n = S_1^n X_0, \\ Y_n = S_2^n Y_0 \end{cases} \quad (2.5)$$

X_0, Y_0 étant la condition initiale de (2.4). Si $S_1 > 0$ et $S_2 > 0$, en éliminant n entre les deux relation (2.5) on obtient l'équation d'une famille des courbes :

$$Y = cX^{(\ln(S_2)/\ln(S_1))} \quad , \quad c = \text{constante fixée par } X_0, Y_0 \quad (2.6)$$

qui sont invariantes par application de la transformation T (2.4), c'est-à-dire le changement de X en S_1X , et Y en S_2Y ne modifie pas (2.6).

a) Soit $|S_2| < |S_1| < 1$

Les courbes invariantes par l'application de T ont donc l'allure des Figures (2.1), (2.2) et (2.3). A partir d'un point initiale $M_0(X_0, Y_0)$, la suite des points engendrée par (2.1), c'est-à-dire la trajectoire discret issue de M_0 située sur la courbe invariante passant par M_0 , si $|S_1| > 0, |S_2| > 0$, et sur deux courbes invariantes, celle qui passe par M_0 et celle qui passe par $M_1(X_1, Y_1)$, si l'un des multiplicateurs est négatif, ou si les deux multiplicateurs sont négatifs. Cette suite est telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n = 0$$

Le point O est un point fixe attractif, ou asymptotiquement stable, qui par analogie avec le point correspondant de la théorie des équations différentielles est appelé un *nœud stable*. $S_1 > 0, S_2 > 0$ alors le point fixe O est appelé *nœud de type 1*.

$S_1 < 0, S_2 > 0$, ou $S_1 > 0, S_2 < 0$ alors le point fixe O est appelé *nœud de type 2*.

$S_1 < 0, S_2 < 0$ alors le point fixe O est appelé *nœud de type 3*.

b) Soit $|S_2| > |S_1| > 1$

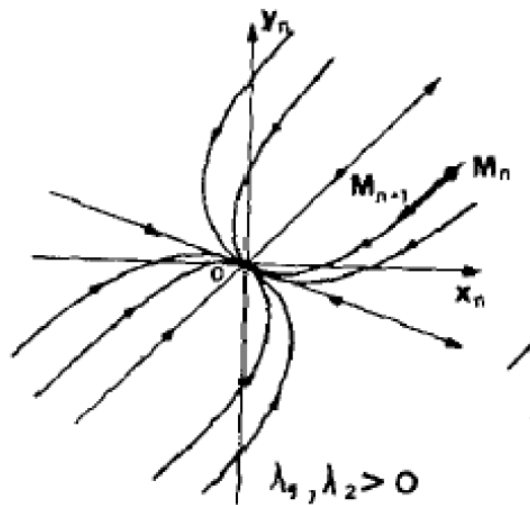


FIGURE 2.1 – Nœud de type 1.

Les trajectoires discrètes sont encore situées sur les mêmes courbes à allure paraboliques mais la suite des points obtenue à partir d'un point initiale $M_0(X_0, Y_0)$ s'éloigne de 0 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = \pm\infty \quad , \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n = \pm\infty \quad (2.7)$$

Donc le point fixe O est appelé un *nœud instable* qui selon les signes de S_1 et S_2 peut être de type 1, 2 ou 3.

c) Soit $|S_1| < 1, |S_2| > 1$

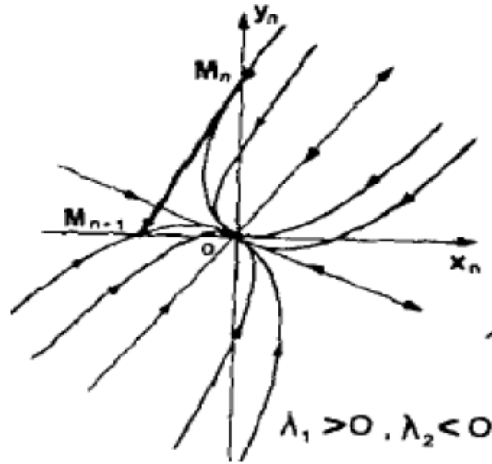


FIGURE 2.2 – Nœud de type 2.

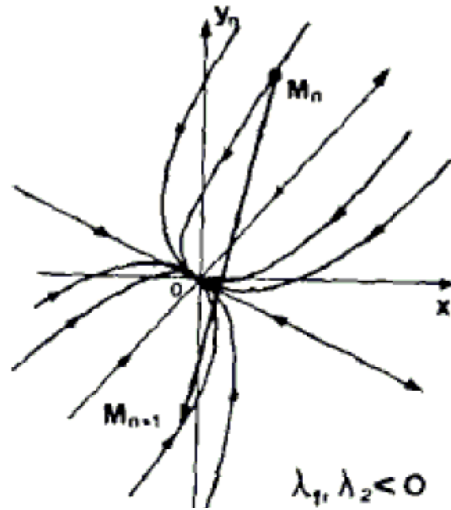


FIGURE 2.3 – Nœud de type 3.

Les trajectoires discrètes sont situées sur les courbes invariantes à allure hyperbolique des Figures (2.4), (2.5) et (2.6), et l'origine O de plan de phase (X_n, Y_n) est un point fixe instable qui sera appelé un *col*. Le signe de S_1, S_2 permet distinguer *des cols de type 1. 2 ou 3.*

$S_1 > 0, S_2 > 0$ alors le point fixe O est appelé *col de type 1.*

$S_1 < 0, S_2 > 0$ ou $S_1 > 0, S_2 < 0$ alors le point fixe O est appelé *col de type 2.*

$S_1 < 0, S_2 < 0$ alors le point fixe O est appelé *col de type 3.*

d) Les cas qui viennent d'être considérés ne sont pas essentiellement différents de ceux qui ont été rencontrés dans le cas des récurrences linéaires du premier ordre, puisque (2.1) peut se réduire à (2.4). Cependant, l'augmentation de l'ordre d'un unité crée une situation nouvelle avec la possibilité, pour l'équation caractéristique, d'avoir deux racines complexes conjuguées :

$$S_{1,2} = \rho e^{\pm i\phi} \quad , \quad (i = \sqrt{-1})$$

Le changement de variable (2.2) transforme la récurrence à variables réelles (2.1) en une récurrence à variable complexes.

$$X_{n+1} = \rho e^{i\phi} X_n \quad , \quad Y_{n+1} = \rho e^{-i\phi} Y_n \quad (2.8)$$

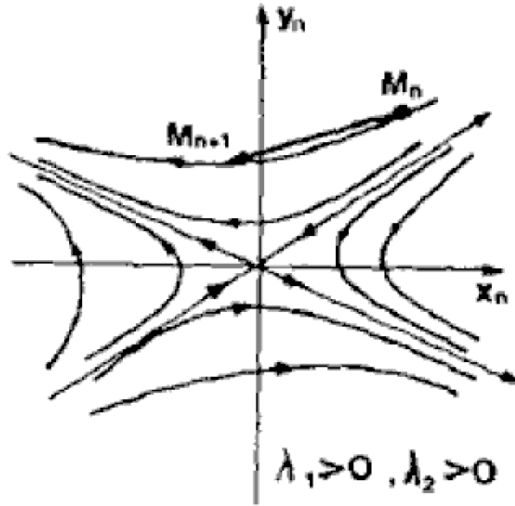


FIGURE 2.4 – Col de type 1.

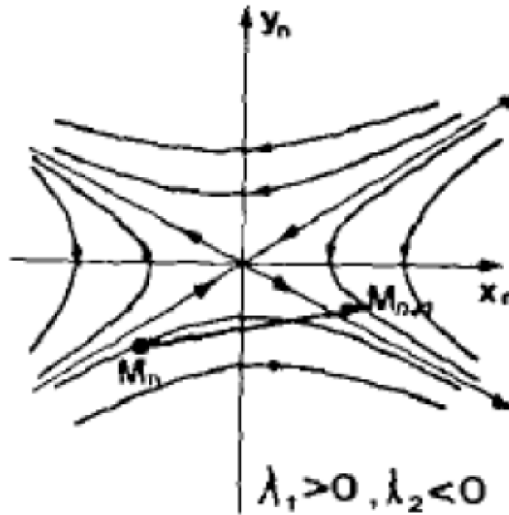


FIGURE 2.5 – Col de type 2.

Un nouveau changement de variables $u = X + Y$, $v = -i(X - Y)$ permet alors de transformer (2.8) en une récurrence à variables réelles u , v :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \rho(u_n \cos \phi - v_n \sin \phi), \\ v_{n+1} = \rho(u_n \sin \phi + v_n \cos \phi) \end{cases} \quad (2.9)$$

Lorsque $\rho = 1$, les cercles centrés en O sont des courbes invariantes pour la récurrence (2.9) puisque $u_{n+1}^2 + v_{n+1}^2 = u_n^2 + v_n^2$. Si ϕ n'est pas commensurable avec 2π , une trajectoire discrète issue d'un point $M_0(u_0, v_0)$ est formé d'une suite de points dense sur le cercle de rayon $\sqrt{u_0^2 + v_0^2}$. Si $\phi = \frac{2k\pi}{q}$ (k et q entiers sans diviseur commun), une trajectoire issue d'un point $M_0(u_0, v_0)$ est formée par les q points d'un cycle d'ordre q située sur le cercle de rayon $\sqrt{u_0^2 + v_0^2}$. En revenant à l'équation de départ (2.1), les courbes invariantes deviennent des ellipses centrées à l'origine du plan (X_n, Y_n) , sur lesquelles se situent les trajectoires discrètes. Le point fixe O est appelé *un centre* (Figure (2.7)).

Pour $\rho \neq 1$, les spirales logarithmiques :

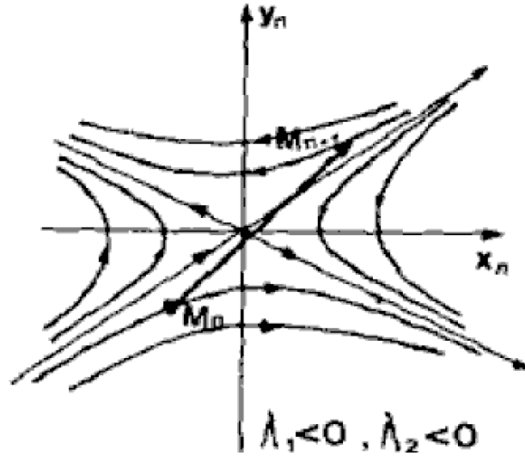


FIGURE 2.6 – Col de type 3.

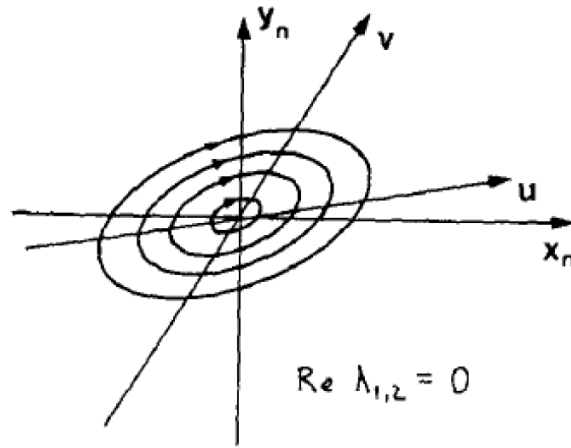


FIGURE 2.7 – Centre.

$$u^2 + v^2 = (u_0^2 + v_0^2)\rho^2 e^{-\arctan(\frac{u}{v})}, \quad (2.10)$$

sont des courbes invariantes pour la récurrence S (2.9), si $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$, ou pour S^2 si $\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{3\pi}{2}$.

Si $\rho < 1$, une trajectoire discrète issue de $M_0(u_0, v_0)$ tend asymptotiquement vers O pour $n \rightarrow +\infty$, les points correspondants restant sur une courbe (2.10) quand $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$, et passant alternativement d'une courbe à une autre courbe quand $\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{3\pi}{2}$. Le point fixe O est alors appelé *foyer stable de type 1* lorsque $\Re(S_{1,2}) > 0$ (Figure (2.8)), et *foyer stable de type 3* lorsque $\Re(S_{1,2}) < 0$ (Figure (2.9)).

Si $\rho > 1$, les trajectoires discrètes s'éloignent de O pour $n \rightarrow +\infty$, et O est *foyer instable de type 1 ou 2*. En revenant à l'équation initiale (2.1), les courbes invariantes sont encore des spirales donnant des foyers (Figures (2.8) et (2.9)).

Quels que soient S_1, S_2 réels avec $|S_1| \neq |S_2|$, ou complexes, la solution de (2.1) peut alors expliciter, à partir de la solution de (2.4), sous la forme :

$$\begin{cases} X_n = \lambda S_1^n + \mu S_2^n, \\ Y_n = \lambda[(S_1 - a)/b]S_1^n + \mu[(S_2 - a)/b]S_2^n \end{cases} \quad (2.11)$$

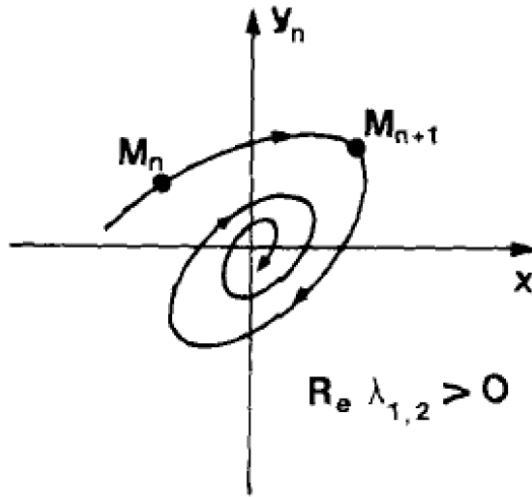


FIGURE 2.8 – Foyer de type 1.

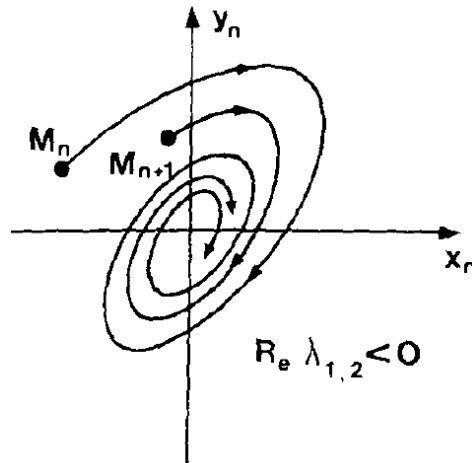


FIGURE 2.9 – Foyer de type 2.

λ, μ étant déterminés par les conditions initiales :

$$\lambda = x_0 \quad , \quad \lambda \left(\frac{S_1 - a}{b} \right) + \mu \left(\frac{S_2 - a}{b} \right) = y_0 \quad (2.12)$$

Si S_1, S_2 sont réels avec $|S_1| = |S_2|$, la solution a la forme (2.11), si $b = c = 0$, et pour $S_1 = S_2 > 0$, les courbes invariantes sont des droites passant par O, et le point fixe O est appelé *nœud étoile de type 1* (Figure (2.10)), Pour $S_1 = -S_2, S_1 = S_2 < 0$, le point fixe O est appelé *nœud étoile de type 2*, attractif ou répulsif, selon $|S_1| < 1$ ou $|S_2| > 1$.

lorsque un seul des mineurs b ou c étant nul, il est impossible d'amener (2.1) à la forme (2.4) à l'aide d'un changement de variables. Si $S_1 = -S_2$, les courbes invariantes ont une allure parabolique. le point fixe O à deux directions principales confondues est *un nœud de type 1, 2, ou 3, attractif ou répulsif* (Figure (2.11)).

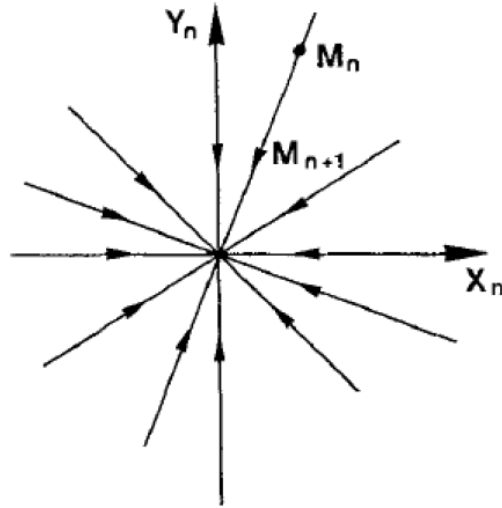


FIGURE 2.10 – Nœud étoile de type 1.

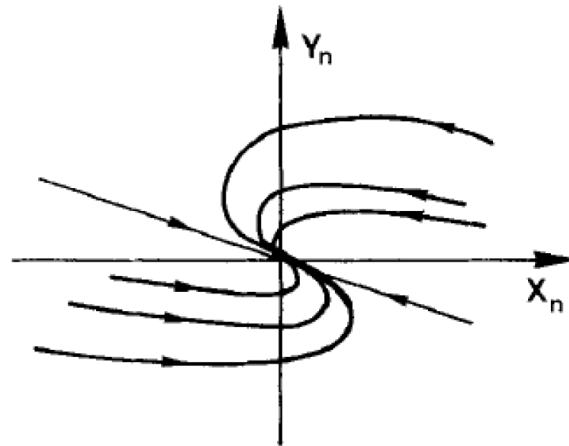


FIGURE 2.11 – Nœud.

2.2 Récurrences non-linéaires autonomes du second ordre, à variables réelles

2.2.1 Généralités-courbes invariantes

Soit la récurrence, ou transformation ponctuelle T , sous la forme explicite :

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) \end{cases} \quad (2.13)$$

$f(x_n, y_n)$ et $g(x_n, y_n)$ étant des fonctions continue, uniformes, non-linéaires, des variables réelles x, y . Les propriétés des solutions de (2.13) sont en général très complexes par rapport à celles de la récurrence (2.1). Par rapport au premier ordre, l'augmentation de l'ordre d'une unité amène un type nouveau de singularité caractérisé par des *courbes invariantes particulières*.

2.2.2 Points fixes et cycles

Ces ensembles invariants appartiennent à la classe des singularités de dimension zéro. Un point fixe $M_*(\alpha, \beta)$ est un point dont les coordonnées α, β sont solutions du système d'équation :

$$\begin{cases} \alpha - f(\alpha, \beta) = 0 \\ \beta - g(\alpha, \beta) = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Le cas non-linéaire conduit donc à la possibilité d'existence de plusieurs points fixes. Si $f(x_n, y_n), g(x_n, y_n)$ sont au moins une fois différentiables (classe C_1) au point $M_*(\alpha, \beta)$, un changement de variables $x = \alpha + X, y = \beta + Y$, permet d'amener l'origine en ce point fixe, et de séparer dans la nouvelle récurrence les termes linéaires des autres termes (si les termes linéaires existent et sont de degré le plus bas).

$$\begin{cases} X_{n+1} = aX_n + bY_n + \bar{X}(X_n, Y_n), \\ Y_{n+1} = cX_n + dY_n + \bar{Y}(X_n, Y_n) \end{cases} \quad (2.15)$$

où

$$\bar{X}(0, 0) = \bar{Y}(0, 0) = 0, \quad \lim_{X, Y \rightarrow 0} \frac{\bar{X}}{|X| + |Y|} = \lim_{X, Y \rightarrow 0} \frac{\bar{Y}}{|X| + |Y|} = 0.$$

L'écriture des premiers termes du développement en série de Taylor de $f(\alpha + X, \beta + Y), g(\alpha + X, \beta + Y)$ permet d'écrire :

$$a = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{M^*}, b = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{M^*}, c = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{M^*}, d = \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)_{M^*},$$

les dérivées partielles étant évaluées en $M^*(x = \alpha, y = \beta)$.

Comme dans le cas linéaire, en général, les multiplicateurs S_1, S_2 , solutions de l'équation caractéristique (2.3), fixent le comportement des trajectoires discrètes engendrées par (2.13), mais ici seulement pour des conditions initiales prises dans un voisinage D suffisamment petit du point fixe M^* , voisinage dont l'étendue dépend des non-linéarités $\bar{X}(x, y), \bar{Y}(x, y)$.

Les courbes invariantes passant par un point fixe subissent en outre une "distorsion", en particulier pour les cols et les nœuds, les axes principaux du cas linéaire deviennent maintenant des courbes invariantes et non des droites (2.12). Ces courbes invariantes, sont tangent aux vecteurs propres de la matrice des coefficients a, b, c, d , dans (2.15), au point fixe M^* . Si $|S_1| = 1$, ou $|S_2| = 1$, ou $|S_1| = |S_2| = 1$, cette caractéristique de "frontière", entre deux comportements qualitatifs différents, entraîne que les trajectoires de l'approximation linéaire ne sont pas en général conservées aussi petit que soit le voisinage D de M^* . Ce sont les non-linéarités \bar{X}, \bar{Y} , qui fixent l'allure de ces trajectoires à l'intérieur de D d'une façon semblable à ce qui a lieu dans les équations différentielles. On dit alors qu'il y a *cas critique au sens de Liapunov* [1].

Explicitement, il y a ainsi cas critique pour :

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a) } S_1 = +1, |S_2| \neq 1, \quad \text{(b) } S_1 = -1, |S_2| \neq 1, \quad \text{(c) } S_{1,2} = e^{\pm i\phi} \\ \text{(d) } S_1 = S_2 = 1 \quad (\phi = 0 \text{ du cas (c)}), \quad \text{(e) } |S_1| = |S_2| = -1 \quad (\phi = \pi \text{ du cas (c)}) \\ \text{(f) } S_1 = S_2 = \pm 1 \quad \text{non issu du cas } \phi = 0 \quad (\text{un seul des mineurs } b, c \text{ de} \\ \text{matrice des coefficients de (2.1) est nul}) \end{array} \right\} (2.16)$$

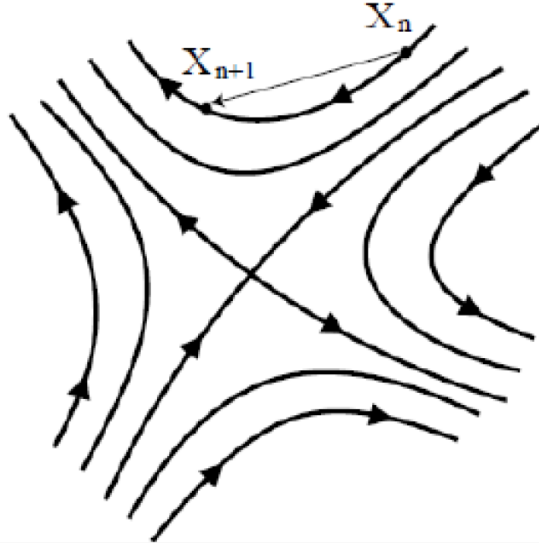


FIGURE 2.12 – Col non linéaire.

Il apparaît donc un nombre beaucoup plus grand de possibilités par rapport aux récurrences du premier ordre.

Un cycle d'ordre k est défini comme pour les récurrences du premier ordre : C'est un point fixe de T^k qui n'est pas point fixe de T^l , $1 \leq l < k$, (l, k entiers).

Il est donc constitué par k points dans le plan (x_n, y_n) , et possède, comme un point fixe, deux multiplicateurs S_1, S_2 .

2.2.3 Cas d'un Endomorphisme

Dans le cas non-linéaire, l'uniformité de la récurrence inverse T^{-1} n'a lieu que pour des formes particuliers des fonctions uniformes $f(x, y), g(x, y)$ lorsque T^{-1} est non uniforme, c'est-à-dire T est à inverse non unique ou T est un endomorphisme, selon la région du plan (x_n, y_n) considérée, un point peut avoir zéro, un, ou plusieurs antécédents réels de premier rang. Il existe deux types d'endomorphismes : *Ceux tels que la Jacobien des seconds membres peut s'annuler, et ceux tels qu'il ne s'annule pas.* Pour le premier type, les régions ayant un membre différent d'antécédents du premier rang, sont limitées par des courbes, lieux des points pour lesquels deux antécédents sont confondus appelées *lignes critiques*.

En se plaçant dans le cas où les fonctions $f(x, y), g(x, y)$ sont différentiables par rapport à x, y , les lignes critiques sont les courbes consécutives de rang un des courbes définies par :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} \end{pmatrix} = 0$$

Ainsi la récurrence suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n, \\ y_{n+1} = -0.1x_n + 0.1x_n^2 + y_n, \end{cases}$$

a pour courbe $J = 0$ la droite $x = \frac{1}{2}$, la ligne critique, qui la droite d'équation $x - y - \frac{1}{40} = 0$, sépare le plan en deux régions : une région où un point a deux antécédents réels de rang un, une région où un point n'a pas d'antécédent réel.

2.2.4 Domaine de stabilité d'un ensemble attractif(ou attracteur)

Le domaine (D) de stabilité considéré est constitué par l'ensemble des points $M_0(x_0, y_0)$, à partir desquels (2.13) engendre une suite récurrente qui tend asymptotiquement vers l'ensemble attractif, tout point à l'extérieur de (D) ne vérifiant pas cette propriété. Le domaine (D) possède une frontière (F) dont les propriétés fondamentales, sont :

- ★ (F) est invariante par application de T^k , et T^{-k} , $1, 2, \dots$;
- ★ (F) est répulsive pour les suites de points situées dans son voisinage ;
- ★ (F) se présente en général comme une séparatrice, mais dans certains cas peut être de nature plus complexe.

2.2.5 Bifurcations

Lorsque le système dynamique dépend continument d'un ou plusieurs paramètres, la variation de ces paramètres peut entraîner des changements qualitatifs dans l'espace des phases, tel que l'apparition ou la disparition de singularités, le changement de stabilité d'une singularité, le changement de type de singularités, etc

Les changements qualitatifs s'appelle *bifurcation*. Dans ce paragraphe on présentera les bifurcations fondamentales dans le cas des transformations unidimensionnelles et bidimensionnelles.

Bifurcation fold ou pli

Elle correspond à l'apparition de deux cycles d'ordre k, de stabilités différentes. A la bifurcation les deux cycles sont confondus et avec un multiplicateur S égale 1, cette bifurcation s'écrira :

-Pour $\dim X=1$:

$$\phi \xrightarrow{S=1} Cy_s^k + Cy_i^k$$

où X désigne l'espace des phases, Cy_s^k un cycle d'ordre k stable et Cy_i^k un cycle d'ordre k instable.

-Pour $\dim X=2$:

$$\phi \xrightarrow{S=1} N_s^k + C^k$$

où N_s^k désigne un cycle nœud d'ordre k stable et C^k un cycle col d'ordre k

Bifurcation flip ou doublement de période

Cette bifurcation a lieu, lorsque un cycle d'ordre k stable a un multiplicateur qui passe par la valeur $S=-1$. Ce cycle devient alors instable et donne naissance à un cycle d'ordre 2k stable. On écrira :

$\dim X=1$

$$Cy_s^k \xrightarrow{S=-1} Cy_i^k + Cy_s^{2k}$$

$\dim X=2$

$$N_s^k \xrightarrow{S=-1} N_i^k + N_s^{2k}$$

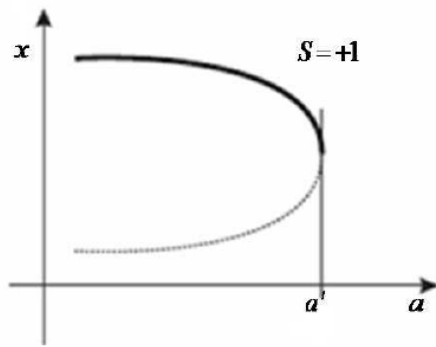


FIGURE 2.13 – bifurcation fold ou(pli) de points fixes, (-) : stable, (- -) : instable.

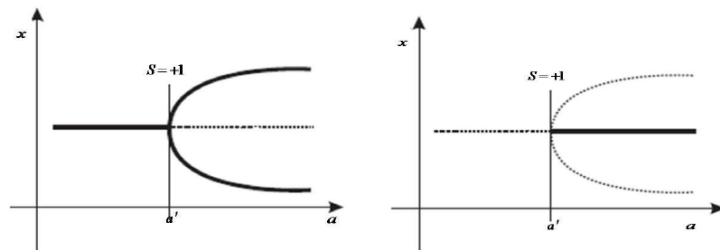


FIGURE 2.14 – Bifurcation flip super-critique à gauche, sous-critique à droit, (-) : stable, (- -) : instable, de points fixes.

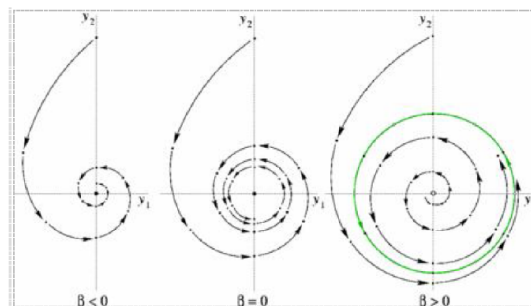


FIGURE 2.15 – Diagramme de bifurcation super-critique de Neimark-Sacker.

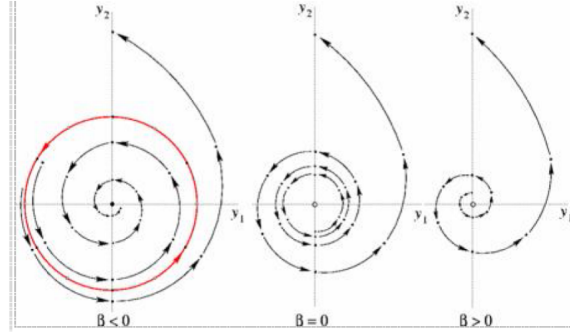


FIGURE 2.16 – Diagramme de bifurcation sous-critique de Neimark-Sacker.

Bifurcation de Neimark-Sacker

Cette bifurcation est définie pour $\dim X \geq 2$ et a lieu lorsqu'un cycle d'ordre k stable a deux multiplicateurs complexes $S_1 = \overline{S_2} = \rho e^{i\theta}$. dont le module ρ passe par la valeur 1. pour $\dim X=2$ on a :

$$F_s^k \xrightarrow{\rho=1} F_i^k + CFI_s^k$$

ou F_s^k et F_i^k désignent deux cycle foyers d'ordre k , le premier stable et le second instable CFI_s^k désigne un cycle de k courbes fermées invariantes stables, chacune d'elles entourant un foyer du cycle F_i^k

2.2.6 Exposants de Liapunov

Soit f une application discrète de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^p :

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Comme précédemment on s'intéresse à :

$$f^n(x_0 + d_0) - f^n(x_0) \simeq d_0 e^{n\lambda}$$

Écrivons un développement en série limitée d'ordre 1 de $f^n(x_0)$ au voisinage de x'_0 :

$$\begin{aligned} x_n - x'_n &\simeq f^n(x_0) - f^n(x'_0) \\ &\simeq \frac{df^n(x_0)}{dx} (x_0 - x'_0) \\ &\simeq J(x_0)J(x_1)\dots J(x_{n-1})(x_0 - x'_0) \\ &\simeq \prod_{i=0}^{n-1} J(x_i)(x_0 - x'_0) \end{aligned}$$

On note $\prod_{i=0}^{n-1} J(x_i)$ par $J^n(x_0)$, ainsi :

$$x_n - x'_n \simeq J^n(x_0)(x_0 - x'_0)$$

où $J^n(x_0)$ représente la matrice Jacobienne de $f^n(\cdot)$ au point x_0 , il s'agit d'une matrice carrée $p \times p$. Si elle est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible P_p telle que $D_p^n = P_p^{-1} J^n P_p$ est une matrice diagonale des valeurs propres $q_i(f^n(x_0))$ ($i = 1, \dots, p$) de J^n .

On définit alors les p exposants de Liapunov de la matrice suivante :

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log q_i \left(f^k(x_0) \right)$$

λ_i représente l'exposant de Liapunov associé à la trajectoire issue de x_0 dans la $i^{\text{ème}}$ direction. Ainsi :

$$x_n - x'_n = (J(x^*))^n (x_0 - x'_0)$$

tel que x^* est un point d'équilibre d'où :

$$\|x_{i,n} - x_{i,n'}\| = [q_i(x^*)]^n \|x_{i,0} - x_{i,0'}\|$$

et puisque :

$$\|x_{i,n} - x_{i,n'}\| = e^{\lambda_i n} \|x_{i,0} - x_{i,0'}\|$$

par comparaison avec l'égalité (1.3) obtient :

$$e^{\lambda_i n} = [q_i(x^*)]^n$$

d'où :

$$\lambda_i = \log q_i(x^*), i = 1, 2, \dots, p$$

Proposition 2.1 *Si $\lambda_k < 0$ pour $k = 1, 2, \dots, n$, on a point fixe stable ou orbite périodique stable.*

Si $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_k < 0$ pour $k = 2, \dots, n$, on a cycle limite stable.

Si $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_k < 0$ pour $k = 3, \dots, n$, on a Tore d'ordre 2 stable.

Si $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ et $\lambda_K < 0$ pour $K = k + 1, \dots, n$, on a Tore d'ordre k stable.

Si existe au moins un $\lambda_k > 0$ pour $k = 1, 2, \dots, n$, alors l'attracteur est chaotique.

Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$ et $\lambda_k < 0$ pour $k = 3, \dots, n$ alors l'attracteur est hyper-chaotique.

Dimension de Kaplan-Yorke

Soit j_0 un entier positif tel que :

$$\sum_{i=1}^{j_0} \lambda_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{j_0+1} \lambda_i < 0$$

On définit alors la dimension de **Kaplan-Yorke** par la relation suivante :

$$D_{KY} = j_0 + \frac{\sum_{i=1}^{j_0} \lambda_i}{|\lambda_{j_0+1}|}$$

Dimension de Liapunov

Soient $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n$, les exposants de Liapunov d'un attracteur d'un système dynamique et soit j le grand entier naturel tel que :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_j \geq 0$$

Alors la dimension de **Liapunov** défini par **Kaplan-Yorke** est donné par :

$$D_L = j + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_j}{|\lambda_{j+1}|}$$

Chapitre 3

Application

En 1963, le météorologue Lorenz [7] a découvert le chaos dans un système simple de trois équations différentielles ordinaires autonomes décrivant le problème de Rayleigh-Benard. Depuis cette année, le chaos a été trouvé dans nombreux systèmes avec des différents types tels que les systèmes dynamiques à temps continu de nombre entier ou d'ordre fractionnelle [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15] et des systèmes dynamiques discrets [16, 17, 18, 19, 20]. Le chaos a plusieurs applications dans les autres disciplines tels que physique, chimie, médecine, économie, mécanique, et ainsi de suite [21].

En 1976, l'astronome et mathématicien Hénon a essayé de comprendre la structure de l'attracteur de Lorenz et proposé une fonction itérative en deux dimensions comme un modèle simplifié de Poincaré pour les équations de Lorenz [17]. Cette fonction est donné par :

$$H \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - ax^2 + by \\ x \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

La fonction (3.1) donne un attracteur chaotique qui apparaît pour être le produit d'une variété uni-dimensionnels par un ensemble de Cantor. Comme la linéarité sur les intervalles permet de faire des calculs simples et efficace donc les calculs sur les fonctions linéaires par morceaux sont plus simple par rapport aux fonctions quadratique. Ainsi les fonctions linéaires par morceaux restent les fonctions préférées à étudier et appliquer des divers développements et différents notions dans les systèmes dynamiques. Sur la base de cette motivation, Lozi a introduit une fonction deux-dimensionnelle en 1978, où il a remplacé le terme quadratique dans la fonction de Hénon (3.1) par la valeur absolue [18].

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - a|x| + by \\ x \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Cette fonction donne un attracteur chaotique pour $a = 1.7$ et $b = 0.5$ comme dans la (Figure (3.1)). Ça peut être écrit dans le temps retardé :

$$x_{n+1} = 1 - a|x_n| + bx_{n-1}$$

La densité de probabilité de fonction de Lozi pour $a = 1.7$ et $b = 0.5$ est représentée dans la Figure (3.2).

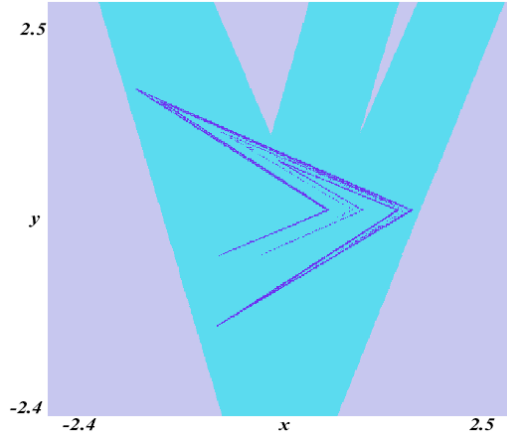


FIGURE 3.1 – Attracteur de Lozi obtenu pour $a = 1.7$ et $b = 0.5$.

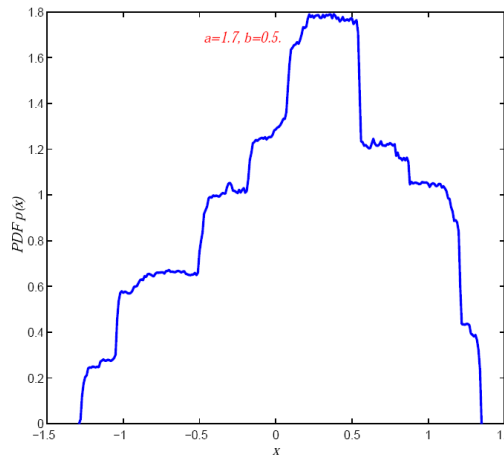


FIGURE 3.2 – La densité de Probabilité de la fonction de Lozi (3.2) pour $a = 1.7$ et $b = 0.5$ dans l'intervalle $[-1.3, 1.35]$ divisé sur 265 parties pour 10,000,000 itérations.

Dans [19] Zaraoulia et Sprott sont introduits une petite modification sur la fonction de Lozi et obtenus une nouvelle fonction chaotique donnée par (3.3) :

$$L' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - a|y| + bx \\ x \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Motivée par les idées ci-dessus, nous introduisons et analysons une nouvelle fonction linéaire par morceaux qui est dérivé à partir de la fonction de Lozi, définit comme suite :

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - a|x| - b|y| \\ x \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

On peut écrire cette nouvelle fonction dans le temps discret comme suite :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - a|x_n| - b|y_n|, \\ y_{n+1} = x_n \end{cases} \quad (3.5)$$

où a et b sont les paramètres de bifurcation, la fonction f dans (3.4) est continue sur \mathbb{R}^2 , mais elle n'est pas différentiable aux points $(x, 0)$ et $(0, y)$ pour $x, y \in \mathbb{R}$.

Malgré que la fonction (3.4) n'est pas un modèle pour des phénomènes réels, elle a plusieurs applications dans les autres sciences (cryptologies, communications, l'optimisation, ... etc). Un autre avantage de la fonction proposée est qu'elle possède des propriétés riches tels que les points fixes de différentes types, les orbites périodiques de différentes périodes et les attracteurs étranges où certains d'entre eux sont semblables à l'attracteur de Lozi (3.2), d'autres sont semblables à ceux générés par la fonction (3.3) et le reste sont complètement différent de tous les attracteurs observées dans ces deux fonctions.

3.1 Existence et stabilité des points fixes

Dans cette section, on commence par l'étude d'existence des points fixes de la fonction (3.4) et trouver leurs stabilités. On définit la région $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ et } y > 0\}$ (resp $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < 0 \text{ et } y < 0\}$) par \mathcal{R}_+ (resp \mathcal{R}_-), comme vous observez dans la Figure (3.3). On a alors :

- Si $b < -1 - a$, il n'y a pas des points fixes,
- Si $-1 - a < b \leq 1 - a$, il existe un seul point fixe $P_1 = \left(\frac{1}{1+a+b}, \frac{1}{1+a+b}\right) \in \mathcal{R}_+$,
- Si $b > 1 - a$, il existe deux points fixes $P_1 \in \mathcal{R}_+$ et $P_2 = \left(\frac{1}{1-a-b}, \frac{1}{1-a-b}\right) \in \mathcal{R}_-$,

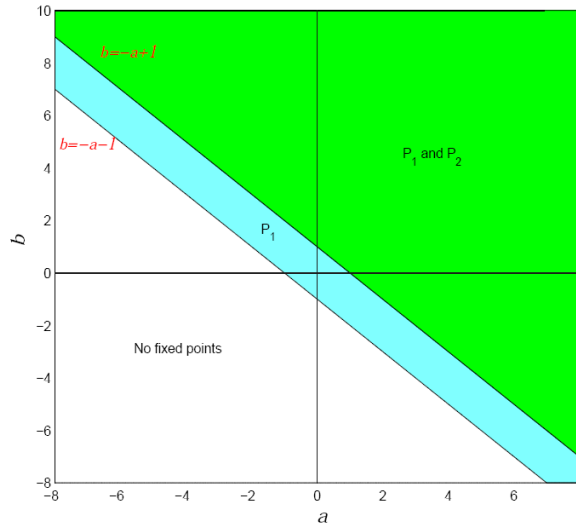


FIGURE 3.3 – Existence des points fixes de (3.4) dans l'espace des paramètres (a,b).

On note qu'il n'y a pas des points fixes dans la région $\mathcal{R}^2 - (\mathcal{R}_- \cup \mathcal{R}_+)$ et on remarque que les points fixes ne touchent pas les lignes $x = 0$ et $y = 0$ quelques soient les valeurs de a et b .

Pour étudier la stabilité de ces points fixes, on a besoin de la matrice jacobienne de (3.4) qui est :

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -a \operatorname{sign}(x) & -b \operatorname{sign}(y) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

où $\operatorname{sign}(x)$ (resp $\operatorname{sign}(y)$) est le signe de nombre réel x (resp y).

On commence par la stabilité de P_1 , le polynôme caractéristique de P_1 est $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$

- Si $b < \frac{a^2}{4}$, $p(\lambda)$ a deux solutions réels $-\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}$.
- Si $b > \frac{a^2}{4}$, $p(\lambda)$ a deux solutions complexes conjugués $-\frac{1}{2}a \pm i\frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}$.

On va utiliser différentes notations dans l'espace des paramètres (a,b) comme suit :

1. Le demi-plan $\mathcal{P}_1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 / b > -1 - a\}$.
2. La région $\mathcal{R}_1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 / b < \frac{a^2}{4}\}$.
3. Le demi-plan $\mathcal{P}_2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 / b > a - 1\}$.
4. Si \mathcal{A} est une partie de \mathbb{R}^2 , on note $\overline{\mathcal{A}}$ le complémentaire de \mathcal{A} sur \mathbb{R}^2 .

La proposition suivante résume les différents résultats sur la stabilité de P_1 (Figure(3.4)).

- Proposition 3.1**
1. Le point fixe P_1 est un nœud répulsif si $(a, b) \in \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{P}_2$ et $a > 2$ ou $(a, b) \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{R}_1$ et $a < -2$.
 2. Le point fixe P_1 est un nœud attractif si $(a, b) \in \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ et $-2 < a < 2$.
 3. Le point fixe P_1 est un point selle si $(a, b) \in \mathcal{P}_1 \cap \overline{\mathcal{P}_2}$.
 4. Le point fixe P_1 est un foyer stable si $(a, b) \in \overline{\mathcal{R}_1}$ et $b < 1$.
 5. Le point fixe P_1 est un foyer instable si $(a, b) \in \overline{\mathcal{R}_1}$ et $b > 1$.
 6. Le point fixe P_1 est un centre si $(a, b) \in \overline{\mathcal{R}_1}$ et $b = 1$.

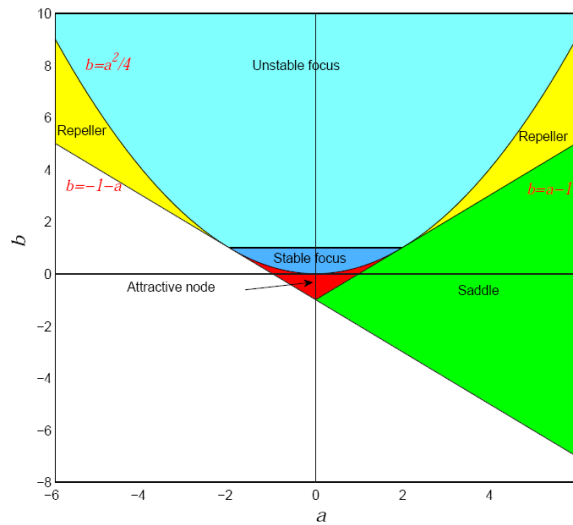


FIGURE 3.4 – Région de stabilité du point fixe P_1 .

Pour étudier la stabilité du point fixe P_2 , le polynôme caractéristique de la matrice jacobienne de P_2 est $\lambda^2 - a\lambda - b = 0$, ce dernier a deux solutions réelles $\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4b}$ si $b > -\frac{a^2}{4}$ (dans le domaine où P_2 existe). On peut définir quelques notations comme suit :

1. Le demi-plan $\mathcal{L}_1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2, b > 1 - a\}$.
2. Le demi-plan $\mathcal{L}_2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2, b > 1 + a\}$.

La proposition suivante résume les différents résultats sur la stabilité de P_2 (Figure (3.5)).

- Proposition 3.2**
1. Le point fixe P_2 est un nœud répulsif si $(a, b) \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$.
 2. Le point fixe P_2 est un point selle si $(a, b) \in \mathcal{L}_1 \cap \overline{\mathcal{L}_2}$.

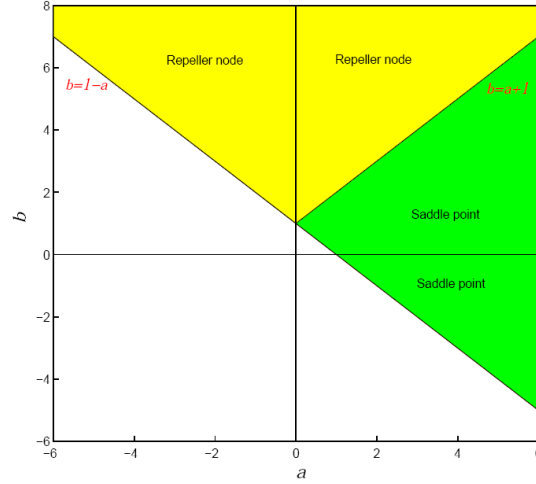


FIGURE 3.5 – Région de stabilité du point fixe P_2 .

3.2 Cycles d'ordre 2 et leurs stabilités

Soit $\{(x_1, y_1); (x_2, y_2)\}$ un cycle d'ordre 2 de (3.4) alors :

$$\begin{cases} 1 - a|x_1| - b|y_1| = x_2, \\ x_1 = y_2 \end{cases}$$

et,

$$\begin{cases} 1 - a|x_2| - b|y_2| = x_1, \\ x_2 = y_1 \end{cases}$$

Donc le cycle est sous la forme $\{(x_1, x_2); (x_2, x_1)\}$ vérifié :

$$\begin{cases} x_1 = 1 - a|x_2| - b|x_1|, \\ x_2 = 1 - a|x_1| - b|x_2|. \end{cases} \quad (3.7)$$

Ce système peut écrire comme suite :

$$\begin{cases} (1 + b\text{sign}(x_1))x_1 + a\text{sign}(x_2)x_2 = 1, \\ a\text{sign}(x_1)x_1 + (1 + b\text{sign}(x_2))x_2 = 1. \end{cases}$$

La matrice des coefficients est :

$$\begin{pmatrix} 1 + b\text{sign}(x_1) & a\text{sign}(x_2) \\ a\text{sign}(x_1) & 1 + b\text{sign}(x_2) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

et la matrice augmenté est :

$$\begin{pmatrix} 1 + b\text{sign}(x_1) & a\text{sign}(x_2) & 1 \\ a\text{sign}(x_1) & 1 + b\text{sign}(x_2) & 1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

on a deux cas :

3.2.1 Cycle isolé d'ordre 2

Si la matrice des coefficients a le rang 2 avec $x_1 < 0, x_2 > 0$ ou $x_1 > 0, x_2 < 0$ alors il existe un cycle isolé de période 2 si $-\sqrt{1+a^2} < b < a-1$ ou $b > \sqrt{1+a^2}$ et $b > a+1$.

Ses éléments sont $\left(\frac{1+a-b}{1+a^2-b^2}, \frac{1-a+b}{1+a^2-b^2}\right)$ et $\left(\frac{1-a+b}{1+a^2-b^2}, \frac{1+a-b}{1+a^2-b^2}\right)$.

La matrice jacobienne de ce cycle est : $\begin{pmatrix} b-a^2 & ab \\ a & -b \end{pmatrix}$, le polynôme caractéristique est $\lambda^2 + a^2\lambda - b^2 = 0$, il admet deux solutions réelles $-\frac{1}{2}a^2 \mp \frac{1}{2}\sqrt{a^4 + 4b}$.

Proposition 3.3 *Le cycle isolé de période 2 est :*

1. *stable ssi : $-\sqrt{1-a^2} < b < a-1$.*

2. *instable ssi : $-\sqrt{1+a^2} < b < a-1$, et $b < -\sqrt{1-a^2}$ ou $b > 1+a, b > \sqrt{1+a^2}$.*

La Figure (3.6) résume les régions de stabilité de cycle isolé de période 2.

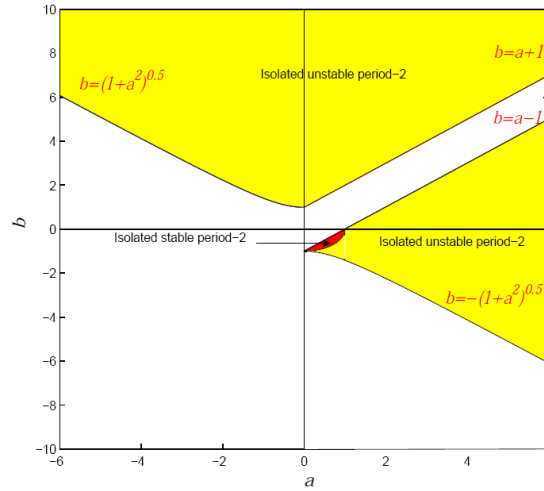


FIGURE 3.6 – Région de stabilité du cycle isolé de période 2.

3.2.2 Cycles continus d'ordre 2

La matrice des coefficients a le rang 1 si $a > 0$ et $b = a+1$ ou $b = a-1$. Alors dans ce cas il existe deux familles des cycles de période 2 sur \mathbb{R}^2 , $\{A_1, A_2\}$ et $\{B_1, B_2\}$ avec $A_1 = (x, \frac{1-ax}{a})$, $A_2 = (\frac{1-ax}{a}, x)$, si ($b = a-1$ et $0 < x < \frac{1}{a}$).

$B_1 = (x, -\frac{1+ax}{a})$, $B_2 = (-\frac{1+ax}{a}, x)$, si ($b = a+1$ et $-\frac{1}{a} < x < 0$).

La matrice jacobienne de la famille A est :

$$J = \begin{pmatrix} a^2 - b & ab \\ -a & -b \end{pmatrix},$$

Les valeurs propres de cette matrice sont $\frac{1}{2}a^2 - b \pm \frac{1}{2}a\sqrt{a^2 - 4b}$, dans le cas critique $b = a-1$, ces valeurs propres s'écrivent comme suit 1 et $(a-1)^2$, ses orbites sont stables si $0 < a < 2$ sinon ils sont instables voir[22].

La matrice jacobienne de la famille B est :

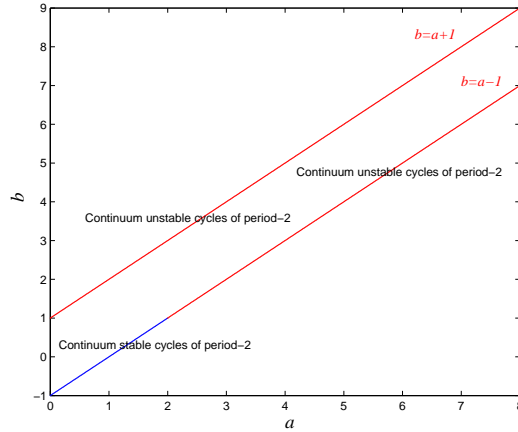


FIGURE 3.7 – Région de stabilité des cycles continus de période 2.

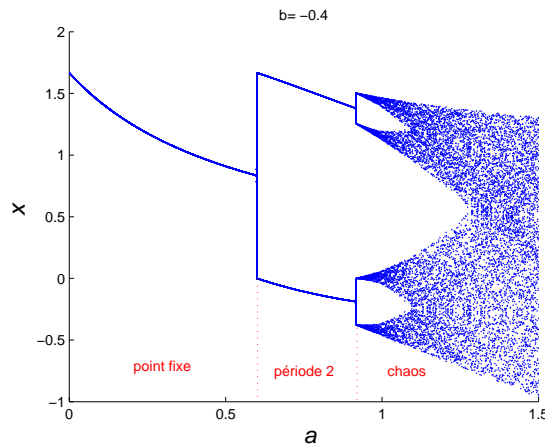


FIGURE 3.8 – Diagramme de bifurcation pour $b=-0.4$ et $0 < a \leq 1.5$.

$$J = \begin{pmatrix} a^2 + b & ab \\ a & b \end{pmatrix},$$

Les valeurs propres de cette matrice sont $\frac{1}{2}a^2 + b \pm \frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + 4b}$, dans le cas critique $b = a + 1$, ces valeurs propres s'écrivent comme suit 1 et $(a + 1)^2$, ses orbites sont instables. La Figure (3.7) résume les régions de stabilité des familles A et B.

3.3 Bifurcation et Chaos

3.3.1 Diagramme de bifurcation

Dans cette section, on va étudier le comportement dynamique de la fonction (3.4) numériquement. Nous rappelons que les exposants de Liapunov d'une orbite périodique attractif sont négatifs. Le point périodique peut bifurquer si et seulement si l'un des exposants de Liapunov est zéro. Finalement, si l'un des exposants de Liapunov est positif alors le comportement de la fonction est devenu chaotique.

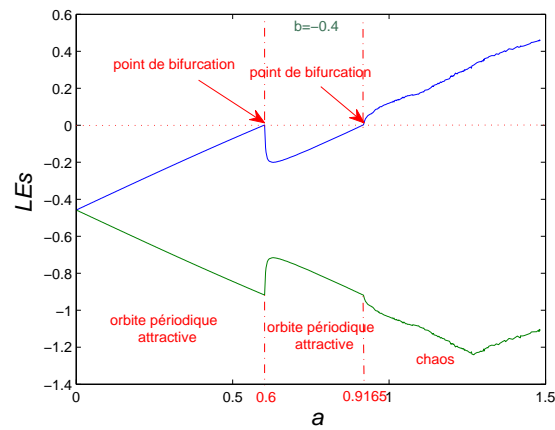


FIGURE 3.9 – Variation d'exposants de Liapunov avec $0 < a \leq 1.5$ et $b = -0.4$.

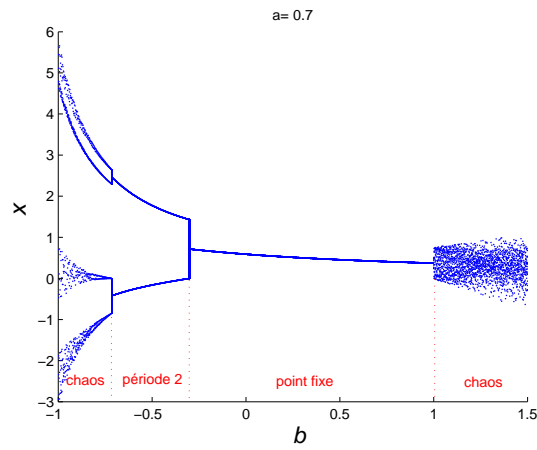


FIGURE 3.10 – Diagramme de bifurcation pour $a = 0.7$ et $-1 < b \leq 1.5$.

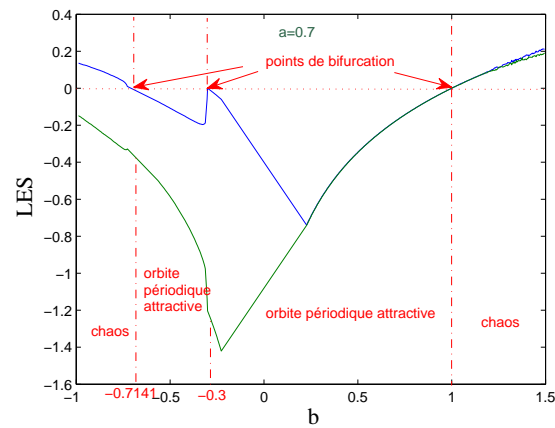


FIGURE 3.11 – Variation d'exposants de Liapunov avec $-1 < b \leq 1.5$ et $a = 0.7$.

Pour $b = -0.4$ et $0 < a < 1.5$ on peut voir différentes bifurcations comme dans la Figure (3.8). Dans l'intervalle $0 < a < b+1$ (i.e. $0 < a < 0.6$), la fonction (3.4) converge vers un point fixe stable P_1 . La première bifurcation se produit quand $a = b + 1$ (i.e. $a = 0.6$) du point fixe vers un cycle de période 2 attractif, dans l'intervalle $b+1 \leq a < \sqrt{1-b^2}$ (i.e. $0.6 \leq a < 0.9165$) elle converge vers un cycle de période 2 stable. On note que si $a = 0.6$, il y a des cycles continus de période 2, et quand on utilise plusieurs conditions initiales, les cycles continus de période 2 attractifs constituent une ligne verticale dans le diagramme de bifurcation comme dans la Figure (3.8). Quand $a = \sqrt{1-b^2}$ (i.e. $a = 0.9165$) la deuxième bifurcation se produit à partir du cycle de période 2 vers des cycles continus attractifs d'ordre 4, ceci est clairement visible comme une ligne vertical dans la Figure (3.8) pour $b = -0.4$. Ces bifurcations sont très clair dans la Figure (3.9), où on observe que les deux exposants de Liapunov sont négatifs dans l'intervalle $0 < a < 0.9165$ sauf sur les points de bifurcation $a = 0.6$ et $a = 0.9165$ où l'un des exposants de Liapunov est nul, cela signifie que la fonction converge vers un orbite périodique sur l'intervalle $0 < a < 0.9165$. Dans l'intervalle $0.9165 < a < 1.5$, elle converge vers un attracteur chaotique, et cela est clair dans la Figure (3.9) où l'un des exposants de Liapunov est positif. Ces résultats numériques sont identiques aux résultats théoriques que nous avons vus dans les sections (3.1) et (3.2).

De même, comme nous le voyons dans la Figure (3.10), pour $a = 0.7$ et $-1 \leq b \leq 1.5$, le comportement de la fonction (3.4) prend différentes formes. Dans l'intervalle $-1 \leq b < -\sqrt{1-a^2}$ (i.e. $-1 \leq b < -0.7141$) la fonction (3.4) converge vers un attracteur chaotique (l'un des exposants de Liapunov est positif comme donne la Figure (3.11)). La première bifurcation se produit à $b = -\sqrt{1-a^2}$ (i.e. $b = -0.7141$) de chaos vers cycle de période 2 stable et il reste le même jusqu'à $b = a - 1$ (i.e. $b = -0.3$) lorsque la deuxième bifurcation se produit à partir d'un cycle de période 2 stable vers le point fixe stable P_1 . Le long de l'intervalle $a - 1 \leq b < 1$ (i.e. $-0.3 \leq b < 1$) elle converge vers un point fixe stable P_1 . La Figure (3.11) confirme cette affirmation (les exposants de Liapunov sont tous négatifs sur l'intervalle $-0.7141 \leq b \leq 1$ sauf sur les points de bifurcation $b = -0.7141$, $b = -0.3$ et $b = 1$ où au moins un des exposants de Liapunov est égal à zéro. La dernière bifurcation se produit quand $b = 1$ de période 1 stable vers l'hyper-chaos (tous les exposants de Liapunov sont positifs Figure (3.11)), ce type particulier de bifurcation est appelé bifurcation de la collision de frontière voir [19].

3.3.2 Différents attracteurs chaotiques de la nouvelle fonction

Dans cette section, nous présentons d'abord quelques attracteurs chaotiques observés obtenus par un choix approprié des paramètres a et b , nous discutons les différentes routes vers le chaos qui existent dans le comportement de la fonction (3.4) qu'on a déjà étudié. Tous les portraits des phases présentés dans cette section sont fait dans le plan xy .

Comme nous voyons dans la Figure (3.8), il y a des paramètres $a = 1.98$ et $b = -0.4$ tel que la fonction converge vers un attracteur chaotique Figure (3.12) qui est similaire à l'attracteur de Lozi, mais elle a un bassin d'attraction différent. D'autres valeurs des paramètres a et b tels que $a = -0.5$ et $b = 1.1$ pour lesquels les deux exposants de Liapunov sont positifs, donc la fonction (3.4) converge vers un attracteur hyper-chaotique comme le montre la Figure (3.13).

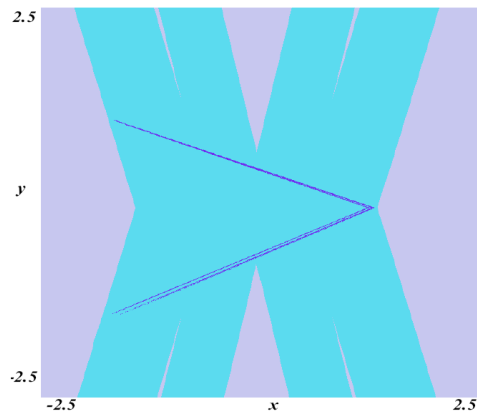


FIGURE 3.12 – Attracteur chaotique de (3.4) obtenu pour $a = 1.98$ et $b = -0.4$.

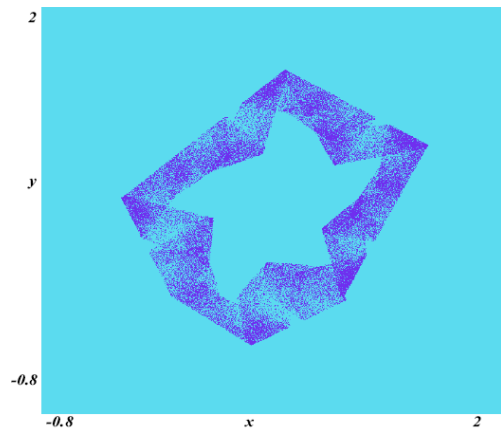


FIGURE 3.13 – Attracteur chaotique de (3.4) obtenu pour $a = -0.5$ et $b = 1.1$.

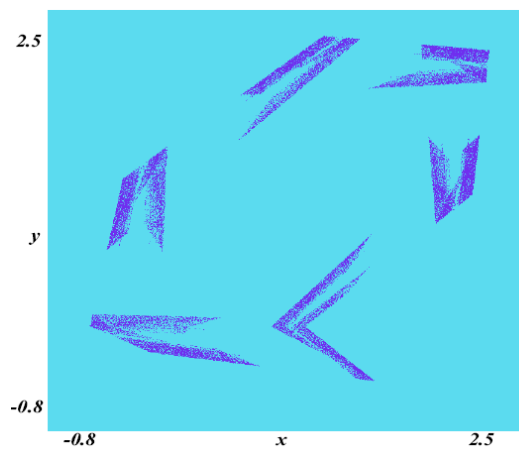


FIGURE 3.14 – Attracteur chaotique de (3.4) obtenu pour $a = -1.1$ et $b = 1.1$.

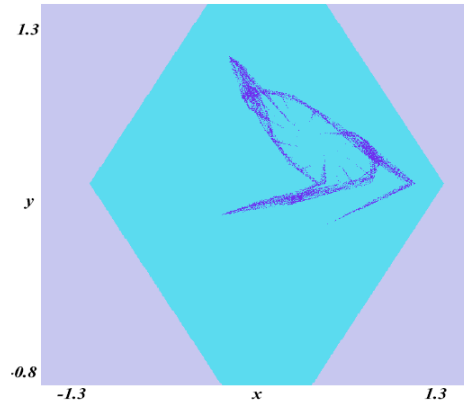


FIGURE 3.15 – Attracteur chaotique de (3.4) obtenu pour $a = 1.4$ et $b = 1.1$.

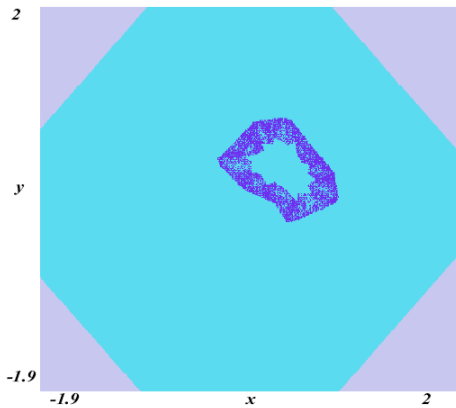


FIGURE 3.16 – Attracteur chaotique de (3.4) obtenu pour $a = 0.7$ et $b = 1.1$.

Certains attracteurs chaotiques sont représentés dans les Figures (3.12), (3.13),..., (3.20) par la couleur bleue et leurs bassins d'attraction par la couleur bleu-ciel. Nous notons que dans les Figures (3.13), (3.14) et (3.20) les bassins d'attraction sont très vastes et nous voyons donc que la couleur bleu-ciel.

Dans notre fonction (3.4), nous remarquons deux déférentes routes vers le chaos. La première est comme celui-là dans la fonction de Lozi (bifurcation de collision de frontière développé à partir d'un cycle de période 2 stable) représentée dans la Figure (3.8). le deuxième scénario est une bifurcation de collision de la frontière développé à partir d'un point fixe stable et il est similaire à celle trouvée dans (3.12), comme le montre la Figure (3.10).

Pour comprendre comment les points d'itérations $(x_n)_n$ de la fonction (3.4) distribués on va tracer la densité de probabilité $p(x)$ de cette fonction pour deux cas, la première est pour $a = 1.7$ et $b = 1.05$, et la seconde est pour $a = -1.1$ et $b = 1.1$. Ces deux fonctions sont représentées dans les Figures (3.21) et (3.22). Dans le premier cas (respectivement dans le second cas) nous avons $\int_{-1.29}^{1.35} p(x)dx = 1$ (respectivement : $\int_{-0.42}^{2.21} p(x)dx = 1$).

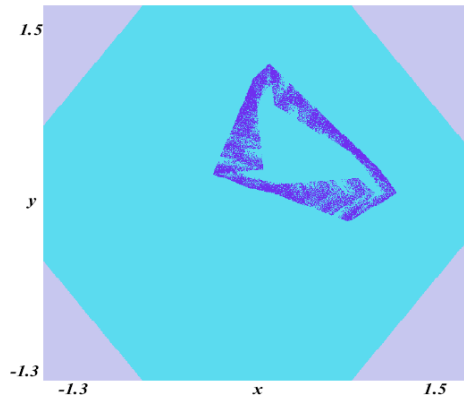


FIGURE 3.17 – Attracteur chaotique de (3.4) obtenu pour $a = 0.9$ et $b = 1.1$.

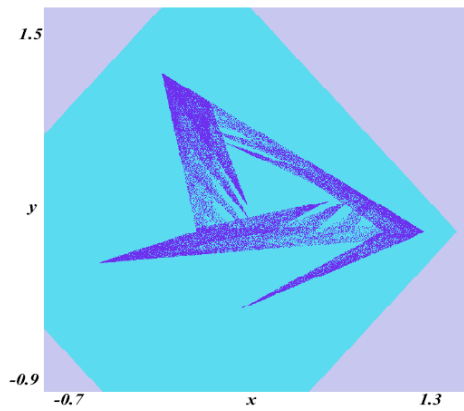


FIGURE 3.18 – Attracteur chaotique de (3.4) obtenu pour $a = 1.2$ et $b = 1.25$.

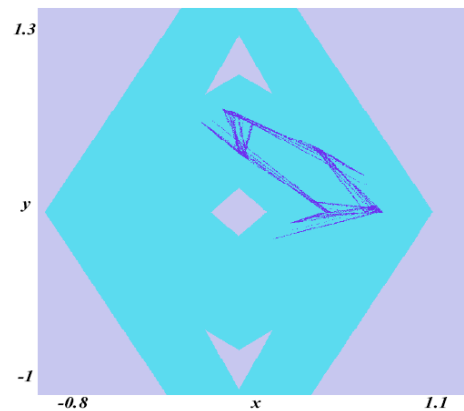


FIGURE 3.19 – Attracteur chaotique de (3.4) obtenu pour $a = 1.7$ et $b = 1.05$.

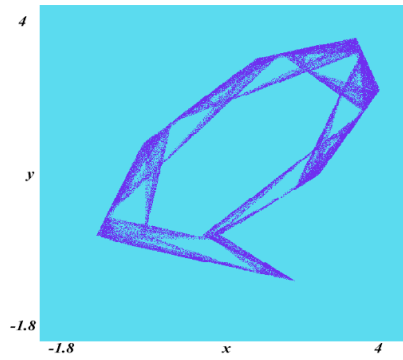


FIGURE 3.20 – Attracteur chaotique de (3.4) obtenu pour $a = -1.4$ et $b = 1.1$.

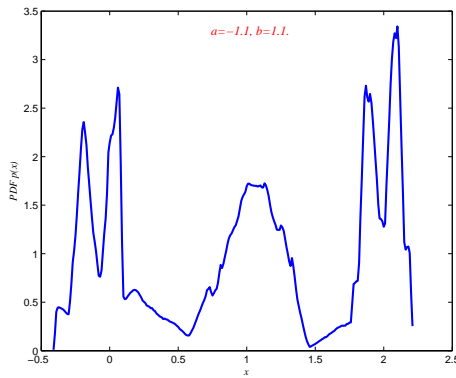


FIGURE 3.21 – La densité de probabilité de la fonction (3.4) pour $a = -1.1$ et $b = 1.1$ dans l'intervalle $[0.42, 2.21]$ divisé sur 264 parties pour 10,000,000 itérations.

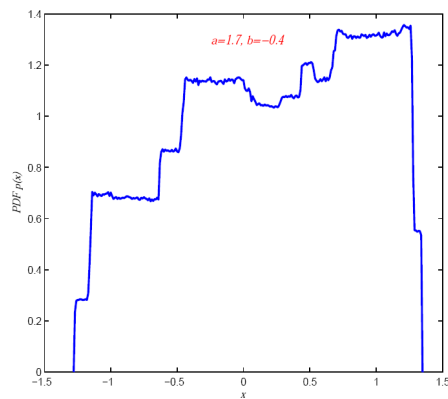


FIGURE 3.22 – La densité de Probabilité de la fonction (3.4) pour $a = 1.7$ et $b = -0.4$ dans l'intervalle $[1.29, 1.35]$ divisé sur 264 parties pour 10,000,000 itérations.

3.4 Conclusion

Ce chapitre est rapporté des résultats d'une étude d'une nouvelle 2-d fonction linéaire par morceaux obtenue de la fonction de Lozi avec des modifications simples. Nous avons concentré nos analyses sur les bifurcations globale des ensembles attractives tels que l'étude des points fixes et leurs stabilités, les cycles de période 2 avec leurs régions de stabilités. Nous avons aussi discuté quelques routes vers le chaos qui a eu lieu dans le comportement de la fonction (3.4). Finalement, nous avons donné quelque attracteurs chaotiques qui ont eu lieu dans le comportement de notre fonction (3.4).

Conclusion Générale

Le chaos dans un système dynamique discret est un vaste domaine qui fait intervenir plusieurs types de compétences.

Le travail développé dans le cadre de cette thèse, a eu pour objectif l'étude de chaos dans un système dynamique discret, linéaire et non-linéaire de la première et deuxième ordre, autonome, à variables réelles.

Nous avons abordé dans le premier chapitre, les principales définitions mathématiques relatives aux systèmes chaotiques, notamment des notions préliminaires pour l'étude des systèmes dynamiques discrets de premier ordre (les points fixes, cycles, et leurs stabilités ...).

Dans le deuxième chapitre, on a étudié les systèmes dynamiques discrets de second ordre avec quelque notion comme les points d'équilibre, les cycles et leurs stabilités, les courbes invariantes, les exposants de Liapunov, Puis nous avons étudié les types des bifurcations locales (Flip, Fold, Neimark-Sacker).

La dernière chapitre du travail, nous avons présenté une nouvelle fonction de plan, et puis nous avons étudié leur stabilité des points fixes, des cycles, et leur régions de stabilité, les bifurcations, finalement on discute sur la route vers le chaos de ce système, avec quelque attracteurs chaotiques.

Bibliographie

- [1] Gumovski. I., Mira. C. : Recurrences and Discrete Dynamical Systems. Springer-Verlag (1980).
- [2] Kuznetsov, Y. : Elements of applied bifurcation theory. Springer-Verlag (1995).
- [3] Maistrenko, Y., Sushko, I., Gardini, L. :About two mechanisms of reunion of chaotic attractors. Chaos, Solitons and Fractals, 9(8), pp. 1373 – 1390 (1998).
- [4] Zhusubaliyev, Z.T., Mosekilde, E. : Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems, Singapore, World Scientific (2003).
- [5] Stephen. L. : Dynamical Systems with Applications using MATLAB®. Springer International Publishing (2014).
- [6] Hao Bai-Lin : Elementary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative Systems. World Scientific, Singapore (1989).
- [7] Lorenz, E.N. : Deterministic nonperiodic flow. J. Atmos. Sci. 20, 130-141 (1963).
- [8] Rössler, O.E. : An equation for continuous chaos. Phys. Lett. A 57, 397-398 (1976).
- [9] Chua, L.O., Kouro, M., Matsumoto, T. : The double scroll family. Parts I and II. IEEE Trans. Circuits Syst. 33, 1073-1118 (1986).
- [10] Chen, G.R., Ueta, T. : Yet another chaotic attractor. Int. J. Bifurc. Chaos 9, 1465-1466 (1999)
- [11] Lü, J.H., Chen, G.R. : A new chaotic attractor coined. Int. J. Bifurc. Chaos. 12, 659-661 (2002).
- [12] Abdelouahab, M.S., Hamri, N-E. : A new chaotic attractor from hybrid optical bistable system. Nonlinear Dynamics. 67, 457-463 (2012).
- [13] Hartley, T., Lorenzo, C., Qammer, H. : Chaos in a fractional order Chua's system. IEEE Trans. Circ. Syst.-I. 42, 485 (1995).
- [14] Nimmo, S., Evans, A. K. : The Effects of Continuously Varying the Fractional Differential Order of Chaotic Nonlinear Systems. Chaos Solitons and Fractals. 10 1111-1118 (1999).
- [15] Abdelouahab, M-S., Hamri, N-E., Wang, J.W. : Hopf bifurcation and chaos in fractional-order modified hybrid optical system. Nonlinear Dyn. 69, 275-284 (2012)
- [16] Djellit, I., Boukemara, I. : Dynamics of a three parameter-family of piecewise maps. Facta Universitatis, 20, 85-92 (2007).
- [17] Hénon M., A two dimensional mapping with a strange attractor. Commun Math Phys. 50(1), 69-77 (1976).
- [18] Lozi. R. : Un attracteur étrange du type attracteur de Hénon. Journal de Physique. 39, (C5), 9-10 (1978).

- [19] Zeraoulia, E., Julien, C.S. : A new simple 2-d piecewise map. *J Syst Sci Complex.* 23, 379-389 (2010).
- [20] Zeraoulia, E. : A new chaotic attractor from 2-D discrete mapping via border-collision period doubling scenario. *Discrete Dynamics in Nature and Society.* Volume 2005, 235-238, (2005).
- [21] Chen, G., Dong, X. : *From Chaos to Order : Methodologies, Perspectives and Applications.* World Scientific, Singapore (1998).
- [22] Botella-Soler, V., Castelo, J.M., Oteo, J.A., Ros1, J. : Bifurcations in the Lozi map. *J. Phys. A : Math. Theor.* 44 305101.
- [23] Avrutin, V., Michael, S. : Border-collision period-doubling scenario. *PHYSICAL REVIEW.* E 70, 026222 (2004).

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons introduit et analysé une nouvelle fonction linéaire par morceaux de plan, qui est déduit de fonction de **Lozi**. Nous avons étudié les points fixes et leurs stabilités, cycles de période 2 et leurs régions de stabilité, les types de bifurcation que faire dans le comportement dynamique de cette fonction. Finalement, nous avons discuté les routes vers le chaos et quelque attracteurs chaotique qu'ils existent dans les comportements de notre fonction.

Les mots clés:

Linéaire par morceaux, Orbite périodique, Les exposants de **Liapunov**, Attracteur chaotique.

Abstract

In this memoir, we introduced and analyzed a new piecewise mapping of the plan which is deduced from **Lozi's** map. We had study fixed points and their stability, cycles of period two and their stability regions, type of bifurcation that occur in the dynamical behaviours of this map. Finally we discussed the routes to chaos and some chaotic attractors that exist in the behavior of our map.

Key words :

Piecewise linear map, Periodic orbit, **Lyapunov** exponent, Chaotic attractor.

ملخص

في هذه المذكرة، قمنا بتقديم وتحليل دالة خطية بالتجزئة في المستوى استنتجت من دالة **لوزي**، درسنا نقاطها الثابتة واستقرارها، دوراتها ذات الدور 2 ومناطق استقرارها و أنواع التشعبات التي تحدث في السلوك الديناميكي للدالة. و أخيرا ناقشنا الطرق نحو الفوضى وبعض الجذابين الفوضويين في سلوك الدالتنا.

الكلمات المفتاحية:

دالة خطية بالتجزئة، مدار دوري، أسس **ليابونوف**، جذاب فوضوي.