République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :...............

Centre Universitaire
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: **Mathématiques**

Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées

Problèmes Inverses et Problèmes mal Posés méthodes de régularisation

Préparé par : Berdai Amira

Rihane Siham

Soutenu devant le jury

- Encadré par : ***Mme. Ahmed Yahia Rakia*** ............M.A.A
- Président : ***Mme. Laouira Widad*** ........................M.A.A
- Examinateur : ***Mme. Baiche Kenzia*** .......................M.A.B

Année Universitaire : 2015/2016

Remerciements

Chaque fois qu'on achève une étape importante dans notre vie, on fait une posepour regarder en arrière et se rappeler toutes ces personnes qui ont partagé avecnous tous les bons moments de notre existence, mais surtout les mauvais.Avant tout, nous remercions le bon dieu tout puissant qui nous avons donné la forceet de nous avoir permis d'arriver à ce stade-là.

*Notre première pensée va tout naturellement à notre encadreur Madame « **Mme.R.Ahmed Yahia »**qui suit fidèlement nos travaux, nous tenons à le remercier pour sonencadrement, pour la confiance qu'il nous a témoignée en nous confiant ce travail et pour nous avoir donné les moyens d'arriver à cette mémoire.*

Nous voudrons remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de cette mémoire.

*Ensuite, nous tenons à remercier **le président** « **Mme.W.Laouira**», **l'examinateur** « **Mme.K.Baiche** » et **tous les enseignants** du centre universitaire de **Mila** en général et l'équipes **enseignantes de l'institut des sciences et de technologie** en particulier pour la richesse des enseignements de ces années de la Licence et Master.*

Nous tenons à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à laréalisation de notre travail.

*Enfin, nous adressons nos plus sincères remerciements à **tous nos proches et amis et tous les groupes de Master LMD** qui nous ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.*

Siham et Amira

Dédicace

Voilà la page que je rêvais d'écrire un jour ...

Je dédie mon travail :

A mes très chers parents, pour leurs soutiens, leurs conseils et leurs encouragements et qui ma donné la tendresse et l'amour.

A mon exemplaire et source du savoir Mon père «Rabah».

et A ma source de tendresse Ma mère «Saida ».

A mes très chers frères «Badis », « Islam ^Mc^» et « Aymene ».

A mes très chers sœurs «Khouloud» et « Amina ».

A toute la famille « Berdai » et «Bouriche »

A mon binôme et ma très cher amie Siham et sa famille.

A tous mes amis qui m'ont soutenu et encouragé :

« Hadia, Meriem, Afaf, Khaoula, Nadira, Hadjer, Khawla, Rima,

Radia, Kenza, Hadda, Naima, Amel, Meriem,… ».

A tous les collègues de promotion et surtout la promotion

2015-2016

Sans oublier bien sûre les enseignants qui nous ont formé durant les années d'étude.

BERDAI AMIRA

Dédicaces

J'offre ce travail

*À la source du savoir de mon père **Lounis**, qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse Dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit ; Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutient permanent venu de toi.*

*À la lumière de mon cœur ma très chère mère **Nassima** qui a œuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.*

*À la source du bonheur de mes frères **Adel** et **Nour El Islam** et de mes sœurs **Nourhane**, **Aya** et **Amel** ,qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité.*

*À mes chers petits neveux et nieces **Asma** et **Mohamed El Amine**.*

*À ma chère et adorable camarade **Amira** et sa famille*

*Et à tous mes amis ainsi que mes proches **Hadia**, **Meriem²**, **Afaf**, **Khaoula²**, **Nadira**, **Hadjer** , **Kenza**, **Hadda**, **Amel**, **Rima** et **Radia**.*

Rihane Siham

Problèmes Inverses et Problèmes mal Posés
Méthodes de régularisation

Berdai *A*mira
Rihane *S*iham

6 juin 2016

NOTATIONS

$\mathbb{R}$: corps des nombres réels.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$: corps des nombres complexes.

$Im(Z)$: partie imaginaire du nombre complexe z.

$Re(z)$: partie réelle du nombre complexe z.

A : opérateur linéaire.

$D(A)$: domaine de définition de l'opérateur A.

A^* : opérateur adjoint de l'opérateur A.

$KerA$: noyau de l'opérateur A.

ImA : image de l'opérateur A.

A_α : approximation de Yosida de l'opérateur A.

H : espace de Hilbert.

$\hat{\delta_T}$: transformée de Fourier de δ_T.

$||u||_H$: norme définie sur H.

$|(u, v)|$: la norme du produit scalaire.

u' : dérivée de u par rapport à t.

FVP : problème de valeur finale.

IVP : problème de valeur initiale.

$BHCP$: the backward heat conduction problem.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Problématique

Problèmes inverses

Le problème inverse consiste à déterminer des causes à partir de la connaissance des effets, de structure interne à partir d'observations externes. Ce problème est le contraire d'un problème direct qui détermine les effets, les causes étant connues [17].

la résolution du problème inverse passe donc en général par une étape initiale de modélisation du phénomène dite problème direct qui décrit comment les paramètres du modèle se traduisent en effets observables expérimentalement. Ensuite, à partir des mesures obtenues sur le phénomène réel, la démarche va consister à approximer au mieux les paramètres qui permettent de rendre compte de ces mesures.
Ces problèmes sont des problèmes difficiles à résoudre car très souvent mal posés au sens de Hadamard.

Il existe toutefois quelques techniques qui possèdent un domaine d'applicabilité étendu.
Parmi les domaines dans lesquels les problèmes inverses jouent un rôle important nous pouvons citer :

- L'imagerie médicale (échographie, scanners, rayons X, ...).
- L'ingénierie pétrolière (identification des perméabilités hydrauliques).
- La chimie (détermination des constantes de réaction).
- La mécanique quantique (détermination du potentiel).
- Le traitement d'image (restauration d'images floues)...etc

On peut citer quelques méthodes de régularisation de problème inverse :

- La méthode de bayésienne,
- La méthode de gradient conjugué,
- La méthode de Tikhonov,
- La méthode de quasi-Newton,
- La méthode de moindres carrés.....

ces méthodes nécessitent une étude approfondie de chaque domaine d'applicabilité.

Problèmes bien et mal posés

La difficulté principale des problèmes inverses est leur caractère généralement mal posé (H.W. Engl et al.,[7] 1994).D'après Jacques Hadamard (voir [11]) un problème est dit bien posé (correctement posé) si le problème admet une solution (Existence), si elle est unique (Unicité) et si elle est stable (Stabilité). Le problème est dit mal posé si au moins une de ces trois conditions n'est pas vérifiée.

La non-existence et la non-unicité de la solution d'un problème mal-posé sont sans doute des difficultés sérieuses mais on peut les rétablir. Cependant le manque de continuité est plus problématique, en particulier en vue d'une résolution approchée ou numérique. C'est-à-dire il ne sera pas possible (indépendamment de la méthode numérique) d'approcher d'une manière satisfaisante la solution du problème inverse car les données disponibles seront bruitées donc proches, mais différentes des données réelles.

Dans cet ouvrage, nous nous sommes penchées sur l'étude détaillée de quelques méthodes relatives aux problèmes mal posés.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

cette partie est consacrée au rappel de quelques définitions et résultats d'analyse fonctionnelle et concernant la méthode de troncature et de Fourier. Ces rappels concernent les espaces de Hilbert, les propriétés des opérateurs définis sur les espaces de Hilbert ainsi que les semi-groupes, la transformé de Fourier et le théorème spectral. Pour plus de détails et pour les démonstrations des théorèmes on propose de voir [4],[25].

1.1 Les espaces de Hilbert

1.1.1 Définitions

Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition 1.1 *Un espace pré-hilbertien est la donnée d'un espace vectoriel H sur le corps $\mathbb{K}$ (des nombres complexes $\mathbb{C}$ ou réels $\mathbb{R}$) et d'une application $H \times H \longrightarrow \mathbb{K}$, $(x, y) \longrightarrow \langle x, y\rangle$ est appelée produit scalaire, vérifiant les propriétés suivantes :*

1) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ *(le produit est Hermitien)*

2) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ *pour tout* $(x, y, z) \in H^3$,

3) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$, *pour tout* $x, y \in H$ *et* $\alpha \in \mathbb{K}$

4) $\langle x, x\rangle \geq 0$, *pour tout* $x \in H$

5) $(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Remarque 1.1 ⋆ *Une application qui vérifie les conditions (2) et (3) est appelée forme sesquilinéaire.*

- ⋆ *Une application qui vérifie les conditions (1), (2) et (3) est appelée forme hermitienne.*
- ⋆ *Si de plus elle vérifie (4) est on dit que c'est une forme hermitienne positive.*
- ⋆ *Si elle vérifie (1), (2), (3), (4) et (5) on dit que c'est une forme hermitienne positive et non-dégénérée ou tout simplement un produit scalaire.*
- ⋆ *L'application de H dans $\mathbb{R}_+$ définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ est appelée la norme induite (du produit scalaire).*

On notera que $\langle x, ay + bz\rangle = a\langle x, y\rangle + b\langle x, z\rangle$, on dit que le produit scalaire est sur un espace vectoriel complexe est linéaire par rapport à la première variable et anti-linéaire par rapport à la seconde variable. Sur $\mathbb{R}$, on a la symétrie $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, et $(H, \langle\Delta, \Delta\rangle)$ est appelé espace pré-hilbertien réel.

Définition 1.2 *On appelle un espace de Hilbert tout espace vectoriel muni d'un produit scalaire et complet pour la norme associée.*

1.1.2 Caractéristiques des espaces de Hilbert

Soit H un espace de Hilbert.

Proposition 1.1 (Inégalité de Cauchy-Schwartz)
Tous les éléments u, v de H, vérifient :

$$|(u, v)|^2 \leq \|u\|_H^2 \cdot \|v\|_H^2.$$

Définition 1.3 *Les deux éléments u, v de H sont dits orthogonaux et notés $u \perp v$ si $(u, v) = 0$.*

On note l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F par :

$$F^{\perp} = \{u \in H,\ (u, v) = 0,\ \forall v \in F\}$$

1.2 Opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert

Soient H et G deux espaces de Hilbert.

1.2.1 Opérateurs auto-adjoints

Définition 1.4 *On dit que l'opérateur $A \in L(H)$ est auto-adjoint si et seulement si $A^* = A$ c'est-à-dire*

$$\forall u, v \in (Au, v) = (u, Av)$$

Théorème 1.1 .

1) $\forall A, B \in \delta(H), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \ \alpha A + \beta B \in \delta(H)$

2) $\forall A, B \in \delta(H)$, *$AB$ est un opérateur auto-adjoint* $\Longleftrightarrow AB = BA$

3) Si l'opérateur $A \in \delta(H)$*, alors on a :* $\|A\| = \sup\limits_{\|u\| \leq 1} |(Au, u)|$

Définition 1.5 *Un opérateur* $A \in \delta(H)$ *est dit positif et noté* $A \geq 0$*, si*

$$(Au, u) \geq 0, \ \forall u \in H$$

1.3 L'opérateur A_α

Définition 1.6 *Soit A un opérateur positif, auto-adjoint et non-borné sur un espace de Hilbert H. L'opérateur :*

$$A_\alpha = A(I + \alpha A)^{-1}$$

*est appelé **approximation de Yosida** de l'opérateur A.*

Théorème 1.2 (Propriétés de l'opérateur A_α)

1) L'opérateur A_α *est positif et auto-adjoint.*

2) L'opérateur $A_\alpha \in L(H)$.

3) $\|A_\alpha h\| \leq \|Ah\|, \forall \alpha > 0, \forall h \in D(A)$.

4) $\forall h \in D(A), \lim\limits_{\alpha \to 0} A_\alpha h = Ah$.

5) $\forall h \in H, \forall t \geq 0, \lim\limits_{\alpha \to 0} S_\alpha h = \lim\limits_{\alpha \to 0} e^{-tA_\alpha} h = S(t)h = e^{-tA}h$.

1.4 Semi-groupes d'opérateurs linéaires

1.4.1 Généralités

Définition 1.7 On appelle semi-groupe fortement continu à un paramètre, une famille $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ d'opérateurs bornés sur X vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $S(0) = I$

(ii) $S(s + t) = S(s)S(t), \ \ \forall t \geq 0, \ s \geq 0$

(iii) $\lim\limits_{t \searrow 0} \|S(t)u - u\| = 0, \ \ \forall u \in E$

On associe à tout semi-groupe son générateur $-A$ défini par

$$-Au = \lim_{t \searrow 0} \left\{ \frac{S(t)u - u}{t} \right\} \qquad (s_1)$$

pour tout u tel que la limite (s_1) *existe dans la topologie de la norme de X, ce qui définit le sous espace* $D(A)$*, domaine de l'opérateur A. Les premières propriétés des semi-groupes sont rassemblées dans la proposition suivante :*

Proposition 1.2 [[24], théorème 13.35]

Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un semi groupe d'opérateurs sur X, et* $-A$ *son générateur. Alors :*

(a) $t \longrightarrow S(t)$ *est une fonction fortement continue de* $[0, \infty[$ *dans* $\mathscr{L}(X)$

(b) Il existe des constantes $M_A \geq 1$ *et* $\gamma_A \in \mathbb{R}$ *telles que :*

$$\|S(t)\| \leq M_A e^{\gamma_A t} \qquad (s_2)$$

(c) A est un opérateur fermé et son domaine $D(A)$ *est dense dans X.*

(d) Pour tout $u \in D(A)$*,* $S(t)u$ *est dérivable au sens de la norme de X et*

$$\frac{d}{dt}(S(t)u) = -AS(t)u = -S(t)Au \qquad (s_3)$$

(e) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ *et* $Re\lambda > \gamma_A$*, alors* $-\lambda$ *est dans l'ensemble résolvant* $\rho(A)$*, et la résolvante* $R(\lambda; A) = (A+\lambda)^{-1}$ *de A à l'expression suivante :*

$$R(\lambda; A) = (A+\lambda)^{-1} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} S(t) dt \qquad (s_4)$$

L'intégrale (s_4) *est définie au sens fort sur tout intervalle borné* $[0, T]$*, et converge en norme d'opérateur lorsque* $T \longrightarrow \infty$*. De plus par l'inégalité* (s_2) *on a :*

$$\|(A+\lambda)^{-1}\| \leq \frac{M_A}{Re\lambda - \gamma_A} \qquad (s_5)$$

En fonction des valeurs des constantes M_A *et* γ_A*, on distingue plusieurs classes de semi-groupes*

- *Si* $\gamma_A \leq 0$*, on dit que* $S(t)$ *est un semi-groupe borné.*
- *Si* $\gamma_A \leq 0$ *et* $M_A = 1$*, on dit que* $S(t)$ *est un semi-groupe contractant.*

Théorème 1.3 [théorème algébrique-topologique]
Soit $\{S(z)\}_{z \in \mathbb{S}(w)}$ *un semi-groupe holomorphe sur un espace de Banach X. Alors pour tout* $z \in \mathbb{S}(w)$*,* $S(z)$ *est injectif,* $\mathcal{R}(S(z))$ *est dense dans X, et tout sous-espace de X défini par*

$$\mathscr{X}_t(S) = \left\{ y \in X, \ \ y = \int_0^{\infty} F(\tau) S(\tau) x d\tau, \ \ x \in X \ \ et \ \ F \in C_0^{\infty}(]t, \infty[) \right\}$$

est dense dans X.

On note par $\{E_\lambda,\ \lambda \geq \gamma > 0\}$ la résolution de l'identité associée à l'opérateur A. Soit $S(t) = e^{-tA} = \int_\gamma^\infty e^{-t\lambda} dE_\lambda \in \mathscr{L}(H)$, $t \geq 0$ le semi-groupe engendré par $-A$.On a quelques propriétés de base de $S(t)$ qui sont données par le théorème suivant :

Théorème 1.4 ([23], p.74)
Pour cette famille d'opérateurs on a :

1. $\|S(t)\| \leq 1, \forall t \geq 0$;
2. *la fonction* $t \longrightarrow S(t)$, $t > 0$, *est analytique ;*
3. *pour tout* $r \geq 0$ *et* $t > 0$, *l'opérateur* $S(t) \in \mathscr{L}(H, D(A^r))$;
4. *pour tout entier* $k \geq 0$ *et* $t > 0$, $\|S^{(k)}(t)\| = \|A^k S(t)\| \leq c(k)t^{-k}$;
5. *pour tout* $x \in D(A^r)$, $r \geq 0$ *on a* $S(t)A^r x = A^r S(t)x$.

Théorème 1.5 *Pour* $t > 0$, $S(t)$ *est auto-adjoint, injectif et à image dense*

$$\Big(S(t) = S(t)^*,\ \ \overline{\mathcal{R}(S(t))} = H\Big).$$

Preuve. Le cas $t = 0$ est trivial.
On suppose que $t > 0$. A étant auto-adjoint, donc

$$S(t)^* = (e^{-tA})^* = e^{-tA^*} = e^{-tA},$$

d'où $S(t)^* = S(t)$. Soient $t_0 > 0$ et $h \in \mathcal{N}(S(t_0))$. L'identité $S(t_0)h = 0$ implique

$$S(t)S(t_0)h = 0 = S(t_0 + t)h, \quad \text{pour tout} \quad t > 0.$$

Or la fonction $F(t) = S(t_0 + t)h$ est analytique, donc par prolongement analytique $S(t)h = 0$ pour tout $t > 0$. De la représentation

$$R(\lambda, A)h = (A + \lambda)^{-1}h = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-tA} h dt = 0$$

découle $h = 0$ (car $R(\lambda, A)$ est bijective). D'où $\mathcal{N}(S(t_0) = \{0\}$. Puisque $t_0 > 0$ est arbitraire, on a alors $\mathcal{N}(S(t)) = \{0\}$ pour tout $t > 0$.

D'après la relation

$$\overline{\mathcal{R}(S(t))} = \mathcal{N}(S(t))^\perp = \{0\}^\perp = H,$$

on conclut que $\mathcal{R}(S(t))$ est dense dans H. ■

1.5 Transformée de Fourier

La transformation de Fourier est une extension, pour les fonctions non périodiques, du développement en série des fonctions périodiques de Fourier. La transformation de Fourier associe à une fonction intégrable, définie sur l'ensemble des nombres réels ou celui des nombres complexes, une fonction appelée *transformée de Fourier* dont la variable indépendante peut s'interpréter en physique comme la fréquence ou la pulsation.

La transformée de Fourier s'exprime comme « somme infinie » des fonctions trigonométriques de toutes fréquences. Une telle sommation se présente sous forme d'intégrale.

Définition 1.8 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ On appelle transformée de Fourier de f la fonction $\hat{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :*

$$\hat{f} = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x t} dx$$

1.6 Théorème spectral

Soit $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur auto-adjoint, défini positif, non borné à domaine dense sur l'espace de Hilbert H. Le théorème spectral de Yosida [29] est :

$$Au := \int_0^{\infty} \lambda dE_{\lambda} u, \quad u \in D(A)$$

Où

$$D(A) := \{u \in H : \int_0^{\infty} \lambda^2 d\|E_{\lambda} u\|^2 < \infty\},$$

CHAPITRE 2

MÉTHODE DE RÉGULARISATION DE QUASI-RÉVERSIBILITÉ

Soit H un espace de Hilbert complexe, où la norme et le produit scalaire sont notés respectivement par $\|.\|$ et $\langle ., . \rangle$.
On considère le problème de Cauchy rétrograde suivant :

$$u'(t) + Au(t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad u(T) = f, \qquad (FVP)$$

où $A : D(A) : H \longrightarrow H$ est un opérateur linéaire, non-borné, avec

$$\overline{D(A)} = H, \quad A^* = A, \quad \exists \gamma > 0, \ \langle Au, u \rangle \geq \|u\|^2, \ \forall u \in D(A).$$

Le problème consiste à déterminer $u(t)$ pour $0 \leq t < T$ à partir de la condition finale $u(T) = f$. Il est bien connu que ce type de problèmes est mal posé au sens de Hadamard [11], c'est-à-dire : même si la solution existe et unique, elle ne dépend pas continûment de f.
Puisque le semi groupe $S(t) = e^{-tA}$ est irréversible, on souhaite trouver un opérateur $S_\alpha(t)$, $\alpha > 0$ "proche" de $S(t)$ dans un certain sens, de façon que le problème (FVP) soit bien posé.
Parmi les stratégies d'approche de ce type de questions, on peut citer la méthode de quasi-réversibilité proposée par Lions et Lattès [18]. L'idée principale de cette méthode [13] consiste à remplacer l'opérateur A dans l'équation (FVP) par $A_\alpha = g_\alpha(A)$.
Dans la méthode originale [18] Lattès et Lions proposent $g_\alpha(A) = A - \alpha A^2$, pour obtenir un problème bien-posé dans le sens inverse du temps, et dans la méthode de quasi-réversibilité modifiée [9], Gajewski et Zaccharias Gajewski proposent $g_\alpha(A) = A(I + \alpha A)^{-1}$. On indique que lorsqu'on utilise cette méthode, on est confronté à certaines

difficultés.
La première résulte du terme correcteur (αA^2) (opérateur d'ordre deux) ce qui induit une difficulté sérieuse pour l'implémentation numérique, et la seconde consiste dans le fait que le coefficient d'erreur (e^{α}) résultant d'une petite perturbation de la donnée f est de l'ordre $e^{\frac{1}{\alpha}}$. La méthode de quasi-réversibilité se résume comme suit :

- R. Lattès et J.L. Lions ([18], 1967) [cadre hilbertien] proposent $g_\alpha(A) = A - \alpha A^2$.
- H. Gajewski et K. Zaccharias([9], 1972) [espace de Hilbert] proposent $g_\alpha(A) = A(I + \alpha A)^{-1}$.
- I.V. Melnikova([19], 1975) [espace de Banach] propose $g_\alpha(A) = A - \alpha A^2$.
- A.V. Glushak([10], 2001) [espace de Banach] propose $g_\alpha(A) = A + (-1)^{m+1}\alpha m$, $m \geq 2$.
- Y. Huang et Q. Zheng([14], 2004) [espace de Banach] proposent $g_\alpha(A) = A - \alpha A^p$, $p > 1$.
- Y. Huang et Q. Zheng([15], 2005) [espace de Banach] proposent $g_\alpha(A) = A(I+\alpha A)^{-1}$.
- N. Boussetila et F. Rebbani([3]) [espace de Hilbert] proposent

$$g_\alpha(A) = -\frac{1}{pT}\ln(\alpha + e^{-pTA}), \quad p \geq 1.$$

Remarque 2.1 *Par un calcul direct moyennant le caractère auto-adjoint et la positivité de l'opérateur A on montre l'injectivité de $S(t) = e^{-tA}$. En effet, notons $A_\alpha = A(I + \alpha A)^{-1}$, $S_\alpha(t) = e^{-tA_\alpha}$, $G_\alpha = \alpha A^2(I + \alpha A)^{-1}$, $B_\alpha(t) = e^{-tG_\alpha}$ et $\alpha > 0$. Il est clair que A_α, $G_\alpha^{-1} \in \mathscr{L}(H)$. Soient $t_0 > 0$ et $h \in \mathcal{N}(S(t_0))$.*
On a $S(t_0)h = 0$, ce qui implique $S_\alpha(t_0)S(t_0)h = B_\alpha(t_0)h = 0$ pour tout $t_0 > 0$. Par passage à la limite quand α tend vers zéro, on obtient $\lim_{\alpha\to 0} B_\alpha(t_0)h = h = 0$. Ce qui montre que $\mathcal{N}(S(t0)) = \{0\}$.
En conclusion, pour tout $t > 0$, $S(t)$ est injectif et $\mathcal{R}(S(t))$ est dense dans H.

Remarque 2.2 *Si on remplace A par $B = pA$ dans le théorème 1.5, on obtient alors $\mathcal{N}(S(pt)) = \{0\}$ et $\overline{\mathcal{R}(S(pt))} = H$, $p > 0$, $t > 0$.*
On définit :

$$C_\theta(A) = \left\{\phi \in H : \|\phi\|_\theta^2 = \int_\gamma^{+\infty} e^{2T\theta\lambda} d\|E_\lambda\phi\|^2 < +\infty\right\}, \quad \theta \geq 0.$$

De la définition de $C_\theta(A)$ on a les inclusions topologiques suivantes :

$$C_{\theta_2}(A) \subseteq C_{\theta_1}(A), \quad \theta_2 \geq \theta_1$$

On aura besoin aussi de ce lemme technique

Lemme 2.1 *Pour $x \geq 0$ et $\tau \in [0,1]$, on a :*

$$(1 + x)^\tau - 1 \leq \tau x(1 + x)^\tau(1 + \tau x)^{-1}$$

2.1 Description de la méthode

$*$ Soit v_α la solution du problème perturbé suivant :

$$v'_\alpha + A_\alpha v_\alpha(t) = 0, \;\; 0 \leq t < T, \;\; v_\alpha(T) = f, \qquad (FVP)_\alpha$$

où l'opérateur A est remplacé par A_α.

$**$ On injecte la condition initiale :

$$v_\alpha(0) = \varphi_\alpha$$

dans le problème

$$u'_\alpha + A_\alpha u_\alpha(t) = 0, \;\; 0 \leq t < T, \;\; u_\alpha(0) = f, \qquad (IVP)_\alpha$$

$***$ Enfin, on montre que :

$$\Phi(f) = \|u_\alpha(T) - f\| \longrightarrow 0, \quad \alpha \longrightarrow 0.$$

2.2 Analyse de A_α et ses conséquences

On commence notre analyse par une étude qualitative de la perturbation A_α et ses conséquences. Pour $0 < \alpha \leq \alpha_* = 1 - e^{-\gamma T}$, $p \geq 1$, on définit

$$\begin{aligned} A_\alpha = g_\alpha(A) &= -\frac{1}{pT} \ln\left(\alpha + e^{-pTA}\right) \\ &= \int_\gamma^\infty -\frac{1}{pT} \ln\left(\alpha + e^{-pTA}\right) dE_\lambda \end{aligned}$$

Proposition 2.1 On a :

1. $A_\alpha \in \mathscr{L}(H)$ et $\|A_\alpha\| \leq \dfrac{1}{pT} \ln\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$;
2. $A_\alpha = A_\alpha^* \geq 0$ et $A_\alpha A^\theta v = A^\theta A_\alpha v$, $v \in D(A^\theta)$, $\theta \geq 0$;
3. $\forall v \in D(A)$, $\lim\limits_{\alpha \longrightarrow 0} \|A_\alpha v - Av\| = 0$;
4. $\forall v \in H$, $S_\alpha(t)v = e^{-tA_\alpha} v \longrightarrow S(t)v$, $\alpha \longrightarrow 0$.

Preuve. On a :

1. La propriété $A_\alpha \in \mathscr{L}(H)$ découle directement des propriétés

de la fonction $g_\alpha(\lambda)$, $\lambda \geq \gamma$. En effet, le choix de α nous permet d'écrire :

$$\alpha + e^{-pT\gamma} \leq 1,$$

ce qui implique que :

$$\underline{g_\alpha} = g_\alpha(\gamma) = -\frac{1}{pT}\ln\left(\alpha + e^{-pTA}\right) \geq 0$$

D'autre part :

$$\overline{g_\alpha} = \lim_{\lambda\to+\infty} g_\alpha(\lambda) = -\frac{1}{pT}\ln(\alpha) > 0$$

On remarque que $g'_\alpha(\lambda) > 0$, ce qui montre que $g_\alpha \nearrow$ et $\sup_{\lambda\geq\gamma} g_\alpha(\lambda) = \overline{g_\alpha}$. D'après La représentation spectrale de $g_\alpha(A)$ et les propriétés de $g_\alpha(\lambda)$,
$\lambda \geq \gamma$ on conclut que $A_\alpha \in \mathscr{L}(H)$.

2. La propriété (2) résulte directement du calcul fonctionnel et les propriétés de A.

3. Soit $v \in D(A)$, on a :

$$A_\alpha v = -\frac{1}{pT}\ln\left(\alpha + e^{-pTA}\right)A^{-1}Av$$

Notons :

$$B_\alpha = -\frac{1}{pT}\ln\left(\alpha + e^{-pTA}\right)A^{-1} = \int_\gamma^{+\infty} M_\alpha(\lambda)dE_\lambda,$$

où $M_\alpha(\lambda) = -\dfrac{1}{pT}\ln\left(\alpha + e^{-pT\lambda}\right)\lambda^{-1}$. De la définition de α, on remarque que $M_\alpha(\lambda) \geq 0$, pour tout $\lambda \geq \gamma$. De plus :

$$M_\alpha(\lambda) = 1 - \frac{1}{pT}\ln\left(1 + \alpha e^{pT\lambda}\right)\lambda^{-1} \geq 0$$

Ce qui implique que $M_\alpha(\lambda) \leq 1$, pour tout $\lambda \geq \gamma$. Par conséquent, l'opérateur B_α est uniformément borné, i.e., $\|B_\alpha\| \leq 1$, $\forall 0 < \alpha \leq 1 - e^{-\gamma T}$.
Soit $v = e^{-pTA}h$, $h \in H$. On calcule

$$\|(B_\alpha - I)v\|^2 = \int_\gamma^{+\infty}\left(\frac{1}{pT}\ln\left(1 + \alpha e^{pT\lambda}\right)\lambda^{-1}\right)^2 e^{-pT\lambda}d\|E_\lambda h\|^2. \qquad (a_\alpha)$$

En vertu de "$ln(1+x) \leq x, x \geq 0$" la quantité (a_α) peut être dominée comme suit :

$$\|(B_\alpha - I)v\|^2 \leq \left(\frac{\alpha}{p\gamma T}\right)^2\|h\|^2 \longrightarrow 0, \ \ \alpha \longrightarrow 0,$$

ce qui montre que $B_\alpha v \longrightarrow v$ dans H, quand $\alpha \longrightarrow 0$, $\forall v \in \mathcal{R}(S(pT))$. Mais $\mathcal{R}(S(pT))$ est dense dans H et B_α est uniformément borné sur H. Ainsi, par le théorème du prolongement par continuité, on a :

$$\forall v \in H, \ \ B_\alpha v \longrightarrow v, \ \ \alpha \longrightarrow 0.$$

En particulier pour $v \in D(A)$, on obtient :

$$A_\alpha v = B_\alpha A v \longrightarrow A v, \quad \alpha \longrightarrow 0.$$

4. Puisque $A_\alpha \in \mathscr{L}(H)$, alors on peut définir :

$$S_\alpha(t) = e^{-tA_\alpha} = \left(\alpha + e^{-pTA}\right)^{\frac{t}{pT}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t)^n}{n!} A_\alpha^n, \quad t \in \mathbb{R}$$

Il est clair que $\|S_\alpha(t)\| \leq 1$, $t \geq 0$. D'où $S_\alpha(t)$, $t \geq 0$ est un semi-groupe de contraction sur H. On a :

$$\frac{d}{dt} S_\alpha(t) = -A_\alpha(t) S_\alpha(t)$$

et

$$\begin{aligned} S_\alpha(t) - S_\beta(t) &= \int_0^t \frac{d}{d\tau}\left(S_\beta(t-\tau) S_\alpha(\tau)\right) d\tau \\ &= \int_0^t \left(S_\beta(t-\tau) S_\alpha(\tau)(A_\beta - A_\alpha)\right) d\tau \end{aligned}$$

D'où, $\forall t \geq 0$, $0 < \alpha, \beta \leq 1 - e^{-\gamma T}$, $h \in D(A)$, on obtient l'estimation :

$$\|S_\alpha(t)h - S_\beta(t)h\| \leq t\|A_\beta h - A_\alpha h\|,$$

ce qui montre que $\{S_\alpha(t)h\}$ est une suite de Cauchy dans H, uniformément par rapport à $t \in [0, T]$ (voir (3) dans la proposition 2.1).
Comme $S_\alpha(t)$ est une contraction et $D(A)$ est dense H, alors la limite

$$S_\alpha(t)h \longrightarrow \tilde{S}(t)h, \quad \alpha \longrightarrow 0, \quad t \geq 0$$

se prolonge pour tout $h \in H$ et uniformément par rapport à $t \in [0, T]$. Il est clair que $\tilde{S}(t) \in \mathscr{L}(H)$ est un semi-groupe de contraction sur H.
Soit $h \in D(A)$, $t > 0$, alors :

$$\begin{aligned} \|S(t)h - S_\alpha(t)h\| &= \left\| \int_0^t \frac{d}{d\tau}\left(S_\alpha(t-\tau)S(\tau)h\right) d\tau \right\| \\ &\leq \int_0^t \|S_\alpha(t-\tau)(A - A_\alpha)S(\tau)h\| d\tau \\ &\leq \int_0^t \|(A - A_\alpha)S(\tau)h\| d\tau \end{aligned}$$

De l'inégalité :

$$\|A_\alpha S(\tau)h\| = \|B_\alpha A S(\tau)h\| \leq \|S(\tau)Ah\|$$

vient

$$\|(A_\alpha - A)S(\tau)h\| \leq 2\|S(\tau)Ah\|$$

Puisque $\|S(t)Ah\|$ est continue comme fonction de t, une application du théorème de Lebesgue de la convergence dominée donne

$$\lim_{\alpha \longrightarrow 0} \|S(t)h - S_\alpha(t)h\| \leq \int_0^t \lim_{\alpha \longrightarrow 0} \|(A - A_\alpha)S(\tau)h\| d\tau = 0.$$

Ce qui implique que $S_\alpha(t) \longrightarrow S(t) = \tilde{S}(t)$ sur D(A), quand $\alpha \longrightarrow 0$. Grâce à la densité de $D(A)$ dans H, on conclut que $S_\alpha(t) \longrightarrow S(t) = \tilde{S}(t)$ sur H, quand $\alpha \longrightarrow 0$. ■

Remarque 2.3 *Par un calcul direct et en utilisant le* lemme 2.1, *on peut montrer que :*

$$\forall h \in H, \quad S_\alpha(t)h \longrightarrow S(t)h, \quad \alpha \longrightarrow 0.$$

En effet, soit $v = e^{-ptA}h$, $h \in H$, on calcule :

$$\|S_\alpha(t)v - S(t)v\|^2 = \int_\gamma^{+\infty} \left(\left(\alpha + e^{-pT\lambda}\right)^{\frac{t}{pT}} - e^{-t\lambda} \right)^2 e^{-2pT\lambda} d\|E_\lambda h\|^2.$$

En vertu du lemme 2.1 *et $\alpha + e^{-pT\lambda} \leq 1$, la fonction*

$$M_\alpha(\lambda) = \left(\alpha + e^{-pT\lambda}\right)^{\frac{t}{pT}} - e^{-t\lambda} = e^{-t\lambda}\left(\left(1 + \alpha e^{pT\lambda}\right)^{\frac{t}{pT}} - 1 \right)$$

peut être majoré comme suit

$$M_\alpha(\lambda) \leq \frac{\frac{t}{pT}\alpha e^{pT\lambda}\left(\alpha + e^{-pT\lambda}\right)^{\frac{t}{pT}}}{\left(1 + \frac{t}{pT}\alpha e^{pT\lambda}\right)} \leq \frac{\alpha}{p} e^{pT\lambda}.$$

Ce qui implique

$$\|S_\alpha(t)v - S(t)v\|^2 = \int_\gamma^{+\infty} M_\alpha(\lambda)^2 e^{-2pT\lambda} d\|E_\lambda h\|^2 \leq \left(\frac{\alpha}{p}\right)^2 \|h\|^2 \longrightarrow 0, \quad \alpha \longrightarrow 0.$$

En vertu de la densité de $\mathcal{R}(S(pT))$ et $\|S_\alpha(t)\| \leq 1$, $t \geq 0$, on conclut que

$$\forall h \in H, \quad S_\alpha(t)h \longrightarrow S(t)h, \quad \alpha \longrightarrow 0$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition 2.1.

Remarque 2.4 *Dans la* proposition 2.1, *on a justifié que la perturbation proposée donne une bonne approximation de A. Ainsi, on peut espérer que cette perturbation produira un effet régularisant significatif.*

2.3 Résultats de convergence

Il est important de caractériser la classe admissible pour laquelle le problème (FVP) admet une solution. La réponse à cette question est donnée par le lemme suivant :

Lemme 2.2 *Le problème (FVP) admet une solution unique, si et seulement si $f \in C_1(A)$. Dans ce cas, elle est donnée par*

$$u(t) = e^{(T-t)A} f. \tag{2.1}$$

Preuve. Si $f \in C_1(A)$, i.e.,$\int_\gamma^{+\infty} e^{2T\lambda} d\|E_\lambda f\|^2$ est finie, alors on définit $u(t) = e^{(T-t)A} f = e^{-tA}e^{TA} f$. On voit que $u(t)$ donnée par cette expression vérifie l'équation (FVP). Maintenant,si on suppose que $u(t) = e^{(T-t)} f$ est solution de l'équation (FVP), alors $u(0) = e^{TA} f \in H$ si et seulement si $\|u(0)\| = e^{TA} f = \int_\gamma^{+\infty} e^{2T\lambda} d\|E_\lambda f\|^2$ est finie. ■

Remarque 2.5 *On donne une autre démonstration du* lemme 2.2 *en utilisant le* théorème de Picard *dans sa version continue. En utilisant le cadre théorique des semi-groupes et les propriétés de $S_\alpha(t)$, on montre le* théorème *suivant*

Théorème 2.1 *Pour tout $f \in H$, la fonction*

$$v_\alpha(t) = e^{(T-t)A_\alpha} f = \left(\alpha + e^{-pTA}\right)^{-\frac{(T-t)}{pT}} f \tag{2.2}$$

est l'unique solution du problème $(FVP)_\alpha$ et elle dépend continûment de f.

Pour montrer la dépendance continue de v_α de f, on calcule :

$$\begin{aligned} \|v_\alpha(t)\| &= \|e^{(T-t)A_\alpha} f = \left(\alpha + e^{-pTA}\right)^{\frac{-(T-t)}{pT}} f\| \\ &\leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{(T-t)}{pT}} \|f\| \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\| = e(\alpha)\|f\|. \end{aligned} \tag{2.3}$$

A partir de (2.2) on construit :

$$\varphi_\alpha = v_\alpha(0) = \left(\alpha + e^{-pTA}\right)^{-\frac{(1)}{p}} f$$

Théorème 2.2 *Le problème $(IVP)_\alpha$ est bien posé, et sa solution est donnée par :*

$$u_\alpha(t) = S(t)\varphi_\alpha = e^{-tA}\left(\alpha + e^{-pTA}\right)^{-\frac{1}{p}} f. \tag{2.4}$$

Théorème 2.3 *Pour tout $f \in H$, $\|u_\alpha(T) - f\| \to 0$, quand $\alpha \to 0$.*

Preuve. On calcule

$$\|u_\alpha(T) - f\|^2 = \int_\gamma^{+\infty} H_\alpha(\lambda)^2 d\|E_\lambda f\|^2, \tag{2.5}$$

où

$$\begin{aligned} H_\alpha(\lambda) &= \frac{\left((\alpha + e^{-pT\lambda})^{\frac{1}{p}} - e^{-T\lambda}\right)}{(\alpha + e^{-pT\lambda})^{\frac{1}{p}}} \\ &= \frac{\left(e^{-T\lambda}(\alpha e^{T\lambda} + e^{-pT\lambda})^{\frac{1}{p}} - 1\right)}{(\alpha + e^{-pT\lambda})^{\frac{1}{p}}} \end{aligned}$$

Si on pose $x = \alpha e^{T\lambda}, \tau = \frac{1}{p}$, alors on peut estimer la fonction $H_\alpha(\lambda)$ comme suit

$$H_\alpha(\lambda) \leq \frac{\alpha}{\alpha + pe^{-pT\lambda}} \tag{2.6}$$

De (2.6), on déduit que

$$\|u_\alpha(T) - f\|^2 \leq \int_\gamma^{+\infty} \left\{\frac{\alpha}{\alpha + pe^{-pT\lambda}}\right\}^2 d\|E_\lambda f\|^2. \tag{2.7}$$

Fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons N tel que $\int_N^{+\infty} d\|E_\lambda f\|^2 < \dfrac{\varepsilon}{2}$.D'où

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(T) - f\|^2 &\leq \int_\gamma^{N} \left\{\frac{\alpha}{\alpha + pe^{-pT\lambda}}\right\}^2 d\|E_\lambda f\|^2 \\ &+ \int_\gamma^{+\infty} \left\{\frac{\alpha}{\alpha + pe^{-pT\lambda}}\right\}^2 d\|E_\lambda f\|^2. \end{aligned} \tag{2.8}$$

De (2.8) on tire

$$\|u_\alpha(T) - f\|^2 \leq \left(\frac{\alpha}{p}\right)^2 e^{2pTN}\|f\|^2 + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.9}$$

En prenant α tel que $\left(\dfrac{\alpha}{p}\right)^2 e^{2pTN}\|f\|^2 < \dfrac{\varepsilon}{2}$,on achève la démonstration. ■

★ Si $\alpha < p^2 T\gamma$ et $f \in \mathcal{D}(A)$, alors on a l'estimation suivante

$$\|u_\alpha(T) - f\| \leq \left(\frac{pt}{1 + ln(\dfrac{p^2T\gamma}{\alpha})}\right)\|Af\|$$

En effet, de l'inégalité (2.7), on a

$$\|u_\alpha(T) - f\|^2 \leq \int_\gamma^{+\infty} \left\{ \frac{\alpha}{(\alpha + pe^{-pT\lambda})\lambda} \right\}^2 \lambda^2 d\|E_\lambda f\|^2.$$

D'autre part

$$\left\{ \frac{\alpha}{\alpha\lambda + \lambda pe^{-pT\lambda}} \right\} \leq \left\{ \frac{\alpha}{\alpha\lambda + \gamma pe^{-pT\lambda}} \right\} = \Delta_\alpha(\lambda)$$

La fonction $\Delta_\alpha(\lambda)$ est positive, $\Delta_\alpha(\lambda) \to 0$ quand $\lambda \to +\infty$ et atteint son maximum en $\lambda^* = -1/pTln(\dfrac{\alpha}{p^2T\gamma})$. Donc $\Delta_\alpha(\lambda) \leq \Delta_\alpha(\lambda^*) = \dfrac{pT}{1 + ln(\dfrac{p^2T\gamma}{\alpha})}$.

Théorème 2.4 *Si $f \in C_\theta(A), p \geq 1, 0 < \theta < 1$, alors $\|u_\alpha(T) - f\|$ tend vers zéro, avec l'ordre de convergence $\alpha^{\frac{\theta}{p}}$.*

Preuve. On calcule :

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(T) - f\|^2 &= \int_\gamma^{+\infty} \left\{ \frac{H_\alpha(\lambda)}{e^{\theta T\lambda}} \right\}^2 e^{2\theta T\lambda} d\|E_\lambda f\|^2 \\ &\leq \int_\gamma^{+\infty} G_\alpha(\lambda)^2 e^{2\theta T\lambda} d\|E_\lambda f\|^2 \end{aligned} \tag{2.10}$$

■

où

$$G_\alpha(\lambda) = \frac{\alpha}{(\alpha + pe^{-pT\lambda})\, e^{\theta T\lambda}} > 0$$

Une dérivation simple par rapport à λ donne :

$$G'_\alpha(\lambda) = \frac{\alpha Te^{\theta T\lambda}\left(p(p - \theta e^{-pT\lambda} - \theta\alpha)\right)}{((\alpha + pe^{-pT\lambda})e^{\theta T\lambda})^2}$$

D'où $G'_\alpha(\lambda) = 0$ si $\lambda = \lambda^* = \dfrac{1}{pT} ln\left(\dfrac{p(p-\theta)}{\theta\alpha}\right)$ Puisque $G'_\alpha(\lambda) > 0$ si $\lambda < \lambda^*$, $G'_\alpha(\lambda) < 0$ si $\lambda > \lambda^*$ et $\lim_{\lambda\to+\infty} G_\alpha(\lambda) = 0$, alors λ^* est un point critique qui réalise le maximum de G_α. Ainsi, on a l'inégalité :

$$G_\alpha(\lambda) \geq G_\alpha(\lambda^*) = c(p, \theta)\alpha^{\frac{\theta}{p}} \tag{2.11}$$

où $c(p, \theta) = \left(\dfrac{1}{p}\right)^{\frac{p+\theta}{p}} (p - \theta)^{\frac{p+\theta}{p}} \theta^{\frac{\theta}{p}} \leq 1$.
En combinant (2.10) et (2.11), on obtient :

$$\|u_\alpha(T) - f\| \leq c(p, \theta)\alpha^{\frac{\theta}{p}} \|f\|_\theta. \tag{2.12}$$

Notons que dans le cas $1 \leq p \leq \theta$, on a l'estimation suivante :

$$\|u_\alpha(T) - f\| \leq \alpha \|f\|_\theta. \tag{2.13}$$

Théorème 2.5 *Pour tout $f \in H$, le problème (FVP) admet une solution u si et seulement si la suite $\varphi_\alpha = u_\alpha(0)$ converge dans H. Dans ce cas, on a $u_\alpha(t)$ converge uniformément vers $u(t)$ quand $\alpha \to 0$.*

Preuve. On suppose que $\lim_{\alpha\to 0} \varphi_\alpha = \varphi_0$. Posons $w(t) = S(t)\varphi_0$. On calcule :

$$\begin{aligned} \|w(t) - u_\alpha(t)\| &= \|S(t)\varphi_0 - S(t)\varphi_\alpha\| \\ &= \|S(t)(\varphi_0 - \varphi_\alpha)\| \\ &\leq \|\varphi_0 - \varphi_\alpha\|. \end{aligned}$$

Ce qui implique :

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|w(t) - u_\alpha(t)\| \leq \|\varphi_0 - \varphi_\alpha\| \to 0, \qquad \textit{quand} \quad \alpha \to 0$$

Puisque $\lim_{\alpha\to 0} u_\alpha(T) = f$ et $\lim_{\alpha\to 0} u_\alpha(T) = w(T)$, alors de l'unicité de la limite, on déduit $w(T) = f$. Ainsi, $w(t) = S(t)\varphi_0$ résout le problème (FVP) et vérifie la condition $w(T) = f$.
On suppose maintenant que le problème (FVP) est résoluble, et soit $u(t)$ sa solution. D'après le lemme 2.2 on a $u(0) = S(-T)f \in H$, i.e.,$\|u(0)\|^2 = \|f\|_1^2 = \int_\gamma^{+\infty} e^{2T\lambda} d\|E_\lambda f\|^2 < \infty$.
Soient $N > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\int_N^{+\infty} e^{2T\lambda} d\|E_\lambda f\|^2 < \frac{\varepsilon}{2}$.
On calcule :

$$\|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 = \int_\gamma^{+\infty} F_\alpha^2(\lambda) d\|E_\lambda f\|^2 < \infty,$$

où

$$F_\alpha(\lambda) = e^{T\lambda} - \left(\alpha - e^{-pT\lambda}\right)^{\frac{-1}{p}}$$

■

En vertu du lemme 2.1 et par un calcul simple, on peut estimer la quantité $F_\alpha(\lambda)$ comme suit :

$$F_\alpha(\lambda) \leq \left(\frac{\alpha e^{pT\lambda}}{p + \alpha e^{pT\lambda}}\right) e^{T\lambda} = K_\alpha(\lambda) e^{T\lambda}$$

D'où

$$\|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 = \int_\gamma^{+\infty} K_\alpha^2(\lambda) e^{2T\lambda} d\|E_\lambda f\|^2 < I_1 + I_2,$$

où

$$I_1 = \int_\gamma^N K_\alpha^2(\lambda) e^{2T\lambda} d\|E_\lambda f\|^2 \leq \left(\frac{\alpha}{p}\right)^2 e^{2(p+1)TN} \|f\|^2,$$

$$I_2 = \int_N^{+\infty} K_\alpha^2(\lambda) e^{2T\lambda} d\|E_\lambda f\|^2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si on choisit α telle que $\left(\frac{\alpha}{p}\right)^2 e^{2(p+1)TN}\|f\|^2 < \frac{\varepsilon}{2}$, on obtient :

$$\|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 < \varepsilon.$$

Ce qui montre que :

$$u_\alpha(0) \to u(0), \quad quand \quad \alpha \to 0.$$

Théorème 2.6 *Si $f \in C_{1+\theta}(A), p \geq 1, 0 < \theta < 1$, alors $\|u_\alpha(0) - u(0)\|$ tend vers zéro, avec l'ordre $\alpha^{\frac{\theta}{p}}$.*

Preuve. Par des calculs similaires à ceux utilisés pour établir les théorèmes 2.4 et 2.5, on a :

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 &\leq \int_\gamma^{+\infty} K_\alpha^2(\lambda) e^{-2\theta T\lambda} e^{2(1+\theta)T\lambda} d\|E_\lambda f\|^2 \\ &\leq \int_\gamma^{+\infty} G_\alpha^2(\lambda) e^{2(1+\theta)T\lambda} d\|E_\lambda f\|^2 \\ &\leq (G_\alpha^\infty)^2 \|f\|_{\theta+1}^2, \end{aligned}$$

■

avec $G_\alpha^\infty = \sup_{\lambda \geq \gamma} G_\alpha(\lambda) \leq c(p,\theta)\alpha^{\frac{\theta}{p}}$ (voir l'estimation (11)).
A partir des théorèmes 2.5-2.6, il s'en suit

Corollaire 2.1 *Si $f \in C_{1+\theta}(A),\ \theta > 0$, alors $\sup_{0\leq t\leq T}\|u_\alpha(t) - u(t)\|$ converge vers zéro, avec l'ordre $\alpha^{\frac{\theta}{p}}$.*

On termine ce travail par la construction d'une famille d'opérateurs régularisante pour le problème (FVP).

Définition 2.1 *[20] Une famille d'opérateurs $\{R_\alpha(t), \alpha > 0, t \in [0,T]\} \subset \mathscr{L}(H)$ est dite famille d'opérateurs régularisante pour le problème (FVP) si pour toute solution $u(t)$, $0 \leq t \leq T$ du problème (FVP) avec la condition finale f, et pour tout $\delta > 0$, il existe un choix $\alpha(\delta) > 0$, tel que :*

$$\alpha(\delta) \to 0, \quad \delta \to 0 \qquad (\mathscr{R}_1)$$

$$\|R_{\alpha(\delta)}(t) f_\delta - u(t)\| \to, \quad \delta \to 0 \qquad (\mathscr{R}_2)$$

pour tout $t \in [0,T]$ dés que f_δ satisfait $\|f_\delta - f\| \leq \delta$. On définit $R_\alpha(t) = e^{-tA}\left(\alpha + e^{-pTA}\right)^{\frac{-1}{p}}$,$t \geq 0, \alpha > 0$; il est clair que $R_\alpha(t) \in \mathscr{L}(H)$. Dans ce qui suit, on montre que $R_\alpha(t)$ est une famille d'opérateurs régularisante pour le problème (FVP).

Théorème 2.7 *On suppose que $f \in C_1(A)$, alors $(\mathscr{R}_2)$ a lieu.*

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} H_\alpha(t) &= \|R_{\alpha(\delta)}(t)f_\delta - u(t)\| \\ &\leq \|R_{\alpha(\delta)}(t)(f_\delta - f)\| + \|R_{\alpha(\delta)}(t)f - u(t)\| \\ &= \Delta_1(t) + \Delta_{2(t)}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

où

$$\Delta_1(t) = \|R_{\alpha(\delta)}(t)(f_\delta - f)\| \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}\delta}, \tag{2.15}$$

et

$$\Delta_2(t) = \|R_{\alpha(\delta)}(t)f - u(t)\|. \tag{2.16}$$

Choisissons $\alpha = \sqrt{\delta}$, alors $\alpha(\delta) \to 0, \quad \delta \to 0$, et

$$\Delta_1(t) \leq \delta^{\frac{2p-1}{2p}} \to 0, \quad \delta \to 0, \tag{2.17}$$

En vertu du théorème 2.5, on obtient :

$$\Delta_2(t) = \|u_\alpha(t) - u(t)\| \to 0, \quad \delta \to 0, \tag{2.18}$$

uniformément par rapport à t. En combinant (2.17) et (2.18) on obtient :

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|R_{\alpha(\delta)}(t)f_\delta - f\| \to 0, \quad \delta \to 0. \tag{2.19}$$

Ce qui montre que $R_\alpha(t)$ est une famille d'opérateurs régularisante pour le problème (FVP). Par des calculs similaires à ceux utilisés pour établir les résultats précédents, on montre que :

$$\Delta_2(t) \leq C(p,t,T)\alpha^{\frac{t}{pT}}\|f\|_1, \quad t > 0, \tag{2.20}$$

avec

$$C(p,t,T) = p^{\frac{-pT+t}{pT}}(pT-t)^{\frac{-pT+t}{pT}}t^{\frac{t}{pT}}T^{-1} \leq 1$$

■

Généralisation

Considérons les problèmes de Cauchy suivants :

$$u_t(t) + Au(t) = 0, \; 0 < t < T, \; u(0) = f, \tag*{$(CP)_1$}$$

$$u_t(t) + Au(t) = 0, \; 0 < t < T, \; u(T) = f, \tag*{$(CP)_2$}$$

Où A est un opérateur linéaire, non-borné, auto-adjoint et changeant de signe, avec $0 \in \rho(A)$, c'est-à-dire : $\sigma(A) \subset]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. On sait, d'après la théorie des opérateurs auto-adjoints, qu'on peut écrire :

$$h = \int_{\mathbb{R}} dE_\lambda h = \int_{\mathbb{R}_-} dE_\lambda h + \int_{\mathbb{R}_+} dE_\lambda h = h_- + h_+,\ h \in H,$$

i.e., l'espace de Hilbert H se décompose en somme directe $H = H_- \oplus H_+$, et

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda = \int_{\mathbb{R}_-} \lambda dE_\lambda + \int_{\mathbb{R}_+} \lambda dE_\lambda = A_- + A_+.$$

Il est bien connu (par symétrie) que le problème $(CP)_1$ (resp. $(CP)_2$) est mal posé. Dans le but de régulariser ces problèmes, on propose la famille d'opérateurs suivante :

$$\begin{aligned} R_\alpha(t) &= e^{(T-t)A_-}\left(\alpha e^{pTA_-} + (1-\alpha)\right)^{\frac{-1}{p}} \\ &+ e^{-tA_+}\left(\alpha + (1-\alpha)e^{-pTA_+}\right)^{\frac{-1}{p}} \\ &= R_\alpha^-(t) + R_\alpha^+(t),\ 0 < \alpha < 1,\ p \geq 1. \end{aligned}$$

On clôture cette analyse par le résultat suivant :

Lemme 2.3 *Si $f = f_- + f_+ \in H$, alors $(CP)_1$ (resp. $(CP)_2$) admet une solution unique, si et seulement si :*

$$\int_{\mathbb{R}_-} e^{-2T\lambda} d\|E_\lambda f_-\|^2 < +\infty \ (\textit{resp.} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-2T\lambda} d\|E_\lambda f_+\|^2 < +\infty)$$

Preuve. Si $\int_{\mathbb{R}_-} e^{-2T\lambda} d\|E_\lambda f_-\|^2 < +\infty$, alors on définit $u(t) = e^{-tA_-} f_- + e^{-tA_+} f_+$. On vérifie aisément que $u(t)$ résout $(CP)_1$. Inversement, soit $u(t)$ la solution du problème $(CP)_1$. Alors $u(T) = h = h_- + h_+ = e^{-TA_-} f_- + e^{-TA_+} f_+ \in H$. Ce qui implique que $h_- = e^{-TA_-} f_- \in H$, i.e.,$\|h_-\|^2 = \int_{\mathbb{R}_-} e^{-2T\lambda} d\|E_\lambda f_-\|^2 < +\infty$. Par le même raisonnement, on montre la seconde partie.

On définit $u_\alpha(t) = R_\alpha(t) f$. Par la même méthodologie utilisée dans le cas où A est défini positif, on montre que :

$$u_\alpha(T) \to f,\ \textit{quand} \quad \alpha \to 0, \tag{2.21}$$

$$u_\alpha(0) \to f,\ \textit{quand} \quad \alpha \to 1, \tag{2.22}$$

et $R_\alpha(t)$ est une famille d'opérateurs régularisante pour le problème $(CP)_1$ (resp. $(CP)_2$).
■

CHAPITRE 3

MÉTHODE DE RÉGULARISATION DE FOURIER

Beaucoup d'auteurs ont utilisé la méthode régularisation de Fourier dans le *BHCP*. Dans le présent chapitre on utilise cette régularisation pour les problèmes mal-posés suivants :

1. Le problème de la chaleur rétrograde homogène.

2. Le problème de la chaleur rétrograde non homogène.

En général la solution de ces problèmes existe avec des conditions restrictives sur l'état final. On trouve la solution exacte et on recherche la solution approchée par la méthode de régularisation de Fourier, et on donne une estimation de l'erreur, et sous certaines conditions on obtient une estimation du type Hölder.

3.1 Problème de la chaleur rétrograde homogène sur l'intervalle infini

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < T \\ u(x,T) = \varphi_T(x) & -\infty < x < \infty \end{cases} \tag{3.1}$$

Il est facile de voir que la solution u de ce problème est donnée par la transformation de Fourier

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} e^{\xi^2(T-t)} \hat{\varphi}_T(\xi) d\xi, \tag{3.2}$$

où $\hat{\varphi}_T$ désigne la transformée de Fourier de φ_T .
Preuve.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(x,T) = \varphi_T(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \\ u(x,T) = \varphi_T(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{F}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\Big)_{(\xi)} - \mathcal{F}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\Big)_{(\xi)} = 0 \\ \mathcal{F}\Big(u(x,T)\Big)_{(\xi)} = \mathcal{F}\Big(\varphi_T(x)\Big)_{(\xi)} \end{cases}$$

On a

$$\mathcal{F}(u(x,t))_{(\xi)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} u(x,t) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} u(x,t) dx.$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\Big)_{(\xi)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t}(e^{-i\xi x} u(x,t)) dx$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}(u(x,t))_{(\xi)}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\Big)_{(\xi)} = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}(u(x,t))_{(\xi)} \tag{3.3}$$

Dans la transformation de Fourier on choisit :

$$supp\ u \Subset \mathbb{R} \Longrightarrow \exists\ \mathcal{R} > 0,\ supp\ u \subset [-\mathcal{R}, \mathcal{R}]$$

.Donc

$$\mathcal{F}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\Big)_{(\xi)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\mathcal{R}}^{\mathcal{R}} e^{-i\xi x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) dx$$

En intégrant par parties on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\mathcal{R}}^{\mathcal{R}} e^{-i\xi x} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[\Big[e^{-i\xi x} u(x,t) \Big]_{-\mathcal{R}}^{\mathcal{R}} - \int_{-\mathcal{R}}^{\mathcal{R}} -i\xi e^{-i\xi x} u(x,t) dx \Big]$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[\Big[e^{-i\xi x} u(x,t) \Big]_{-\mathcal{R}}^{\mathcal{R}} + i\xi \int_{-\mathcal{R}}^{\mathcal{R}} e^{-i\xi x} u(x,t) dx \Big]$$

Comme

$$u(\mathcal{R}, t) = u(-\mathcal{R}, t) = 0 \Longrightarrow$$

$$\mathcal{F}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\Big)_{(\xi)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\mathcal{R}}^{\mathcal{R}} e^{-i\xi x}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i\xi \int_{-\mathcal{R}}^{\mathcal{R}} e^{-i\xi x}u(x,t)dx$$

$$\Longrightarrow \mathcal{F}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\Big)_{(\xi)} = i\xi\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\mathcal{R}}^{\mathcal{R}} e^{-i\xi x}u(x,t)dx\Big)$$

$$\Longrightarrow \mathcal{F}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\Big)_{(\xi)} = i\xi\mathcal{F}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\Big)_{(\xi)}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{F}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\Big)_{(\xi)} = -\xi^2\mathcal{F}(u(x,t))_{(\xi)} \tag{3.4}$$

Soit le problème :

$$\begin{cases} \mathcal{F}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\Big)_{(\xi)} - \mathcal{F}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\Big)_{(\xi)} = 0 \\ \mathcal{F}\Big(u(x,T)\Big)_{(\xi)} = \mathcal{F}\Big(\varphi_T(x)\Big)_{(\xi)} \end{cases}$$

De (3.3) et (3.4) on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}\Big(u(x,t)\Big)_{(\xi)} + \xi^2\mathcal{F}\Big(u(x,t)\Big)_{(\xi)} = 0 \\ \mathcal{F}\Big(u(x,T)\Big)_{(\xi)} = \mathcal{F}\Big(\varphi_T(x)\Big)_{(\xi)} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \partial_t\hat{u}(\xi,t) + \xi^2\hat{u}(\xi,t) = 0 \\ \hat{u}(\xi,T) = \hat{\varphi}_T(\xi) \end{cases}$$

$$(\hat{u}(\xi,t))' + \xi^2\hat{u}(\xi,t) = 0 \Rightarrow \frac{(\hat{u}(\xi,t))'}{\hat{u}(\xi,t)} = -\xi^2 \Rightarrow (\ln\hat{u}(\xi,t))' = -\xi^2$$

$$\ln\hat{u}(\xi,t) = \int -\xi^2 dt$$

Donc

$$\hat{u}(\xi,t) = e^{-\xi^2 t}c(\xi)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \hat{u}(\xi,T) = e^{-\xi^2 T}c(\xi) \\ et \quad \hat{u}(\xi,T) = \hat{\varphi}_T(\xi) \end{cases}$$

$$c(\xi) = e^{\xi^2 T}\hat{\varphi}_T(\xi)$$

D'où on obtient :

$$\hat{u}(\xi,T) = e^{\xi^2(T-t)}\hat{\varphi}_T(\xi)$$

où $\hat{u}(\xi, t)$ est la transformation de Fourier de $u(x, t)$ et $\hat{u}(\xi, 0) = e^{\xi^2 T}\hat{\varphi}_T(\xi)$, ainsi :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x}\hat{u}(\xi,t)d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} e^{\xi^2(T-t)}\hat{\varphi}_T(\xi)d\xi$$

Alors $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} e^{\xi^2(T-t)}\hat{\varphi}_T(\xi)d\xi$ est la solution du problème. ■

3.1.1 Régularisation de Fourier et estimation de l'erreur

Pour $t = T$ on prend $\varphi_T(x)$ la solution exacte et $\varphi_T^\delta(x)$ la solution approchée de $\varphi_T(x)$, Il existe une constante $\delta > 0$ telle que :

$$\|\varphi_T(x) - \varphi_T^\delta(x)\| \leq \delta \tag{3.5}$$

On note : $\varphi_0(x) = u(x, 0)$ et E une constante telle que :

$$\|\varphi_0\|_{H^s} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mid \hat{\varphi}_0(\xi) \mid^2 (1+\xi^2)^s d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \leq E, \forall s \geq 0 \tag{3.6}$$

On a $\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R})}$ où $u(x, t)$ est donnée par (3.2) est une solution exacte, et

$$u_{\delta,\xi_{\max}}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} e^{\xi^2(T-t)}\hat{\varphi}_T^\delta(\xi)\mathcal{X}_{\max}d\xi \tag{3.7}$$

est une solution approchée de la solution exacte u où $\xi_{\max}$ est une constante positive. L'intervalle $[-\xi_{\max}, \xi_{\max}]$ compact est tel que $u_{\delta,\xi_{\max}}(x, t)$ existe et est unique et stable, $\mathcal{X}_{\max}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[\xi_{\max}, \xi_{\max}]$.

Lemme 3.1

$$\| u(x,t) - u_{\delta,\xi_{\max}}(x,t) \| \leq$$

$$E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}}\Big(\ln\frac{E}{\delta}\Big)^{\frac{-(T-t)s}{2T}} \left[1 + \Big(\frac{\ln\frac{E}{\delta}}{\frac{1}{T}\ln\frac{E}{\delta} + \ln(\ln\frac{E}{\delta})^{\frac{-s}{2T}}}\Big)^{\frac{s}{2}}\right] \tag{3.8}$$

où $u(x, t)$ et $u_{\delta,\xi_{\max}}(x, t)$ sont donnés par (3.2) et (3.7) où

$$\xi_{\max} = \Big(\ln\Big(\Big(\frac{E}{\delta}\Big)^{\frac{1}{T}}\Big(\ln\frac{E}{\delta}\Big)^{\frac{-s}{2T}}\Big)\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{3.9}$$

Preuve. On a :

$$\| u(x,t) - u_{\delta,\xi_{\max}}(x,t) \|_{L^2(\mathbb{R})} = \| \hat{u}(x,t) - \hat{u}_{\delta,\xi_{\max}}(x,t) \|_{L^2(\mathbb{R})}$$
$$= \| e^{\xi^2(T-t)}\hat{\varphi}_T(\xi) - e^{\xi^2(T-t)}\hat{\varphi}_T(\xi)\mathcal{X}_{\max} + e^{\xi^2(T-t)}\hat{\varphi}_T(\xi)\mathcal{X}_{\max} - e^{\xi^2(T-t)}\hat{\varphi}_T^\delta(\xi)\mathcal{X}_{\max} \|$$

$$\leq \| e^{\xi^2(T-t)}\hat{\varphi}_T(\xi) - e^{\xi^2(T-t)}\hat{\varphi}_T(\xi)\mathcal{X}_{\max} \| + \|\| e^{\xi^2(T-t)}\hat{\varphi}_T(\xi)\mathcal{X}_{\max} - e^{\xi^2(T-t)}\hat{\varphi}_T^{\delta}(\xi)\mathcal{X}_{\max} \|$$

$$= \Big(\int_{|\xi|>\xi_{\max}} \Big|e^{\xi^2(T-t)}\hat{\varphi}_T(\xi)\Big|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\int_{|\xi|\leq\xi_{\max}} \Big|e^{\xi^2(T-t)}\Big(\hat{\varphi}_T^{\delta}(\xi) - \hat{\varphi}_T(\xi)\Big)\Big|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \Big(\int_{|\xi|>\xi_{\max}} \Big|e^{\xi^2(T-t)}e^{-\xi^2 T}\hat{\varphi}_0(\xi)\Big|^2 \frac{(1+\xi^2)^s}{(1+\xi^2)^s} d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\int_{|\xi|\leq\xi_{\max}} \Big|e^{\xi^2(T-t)}\Big(\hat{\varphi}_T^{\delta}(\xi) - \hat{\varphi}_T(\xi)\Big)\Big|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}$$

Puisque :

$$\begin{cases} \hat{\varphi}_T(\xi) = e^{-\xi^2 T}\hat{u}(\xi,0) = e^{-\xi^2 T}\hat{\varphi}_0(\xi) \\ \text{et } \ \hat{\varphi}_0(\xi) = \hat{u}(\xi,0) \\ \hat{\varphi}_T(\xi)\mathcal{X}_{\max} = \begin{cases} \hat{\varphi}_T(\xi) & ; \ |\xi| \leq \xi_{\max} \\ 0 & ; \ |\xi| > \xi_{\max} \end{cases} \end{cases}$$

Alors

$$= \left(\int_{|\xi|>\xi_{\max}} \Big|e^{\xi^2(T-t)}e^{-\xi^2 T}\hat{\varphi}_0(\xi)\Big|^2 \frac{(1+\xi^2)^s}{(1+\xi^2)^s} d\xi\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{|\xi|\leq\xi_{\max}} \Big|e^{\xi^2(T-t)}\Big(\hat{\varphi}_T^{\delta}(\xi) - \hat{\varphi}_T(\xi)\Big)\Big|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int_{|\xi|>\xi_{\max}} \Big|e^{-\xi^2 t}\hat{\varphi}_0(\xi)\Big|^2 \frac{(1+\xi^2)^s}{(1+\xi^2)^s} d\xi\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{|\xi|\leq\xi_{\max}} \Big|e^{\xi^2(T-t)}\Big(\hat{\varphi}_T^{\delta}(\xi) - \hat{\varphi}_T(\xi)\Big)\Big|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\int_{|\xi|>\xi_{\max}} \Big(\sup_{|\xi|>\xi_{\max}} \frac{(e^{-\xi^2 t})^2}{(1+\xi^2)^s}\Big)\Big|\hat{\varphi}_0(\xi)\Big|^2 (1+\xi^2)^s d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \left(\int_{|\xi|\leq\xi_{\max}} \Big(\sup_{|\xi|\leq\xi_{\max}} e^{\xi^2(T-t)2}\Big)\Big|\hat{\varphi}_T^{\delta}(\xi) - \hat{\varphi}_T(\xi)\Big|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sup_{|\xi|>\xi_{\max}} \frac{(e^{-\xi^2 t})^2}{(1+\xi^2)^s}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{|\xi|>\xi_{\max}} \Big|\hat{\varphi}_0(\xi)\Big|^2 (1+\xi^2)^s d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \left(\sup_{|\xi|\leq\xi_{\max}} e^{\xi^2(T-t)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{|\xi|\leq\xi_{\max}} \Big|\hat{\varphi}_T^{\delta}(\xi) - \hat{\varphi}_T(\xi)\Big|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \sup_{|\xi|>\xi_{\max}} \frac{e^{-\xi^2 t}}{\big|\xi\big|^s} \left(\int_{|\xi|>\xi_{\max}} \Big|\hat{\varphi}_0(\xi)\Big|^2 (1+\xi^2)^s d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \sup_{|\xi|>\xi_{\max}} e^{\xi^2(T-t)} \left(\int_{|\xi|\leq\xi_{\max}} \Big|\hat{\varphi}_T^{\delta}(\xi) - \hat{\varphi}_T(\xi)\Big|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

Puisque :

$$\begin{cases} \| \varphi_0 \|_{H^s} = \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \Big|\hat{\varphi}_0(\xi)\Big|^2 (1+\xi^2)^s d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} \\ \text{et} \qquad \| \varphi_0 \|_{H^s} \leq E \end{cases}$$

Donc :

$$\leq \sup_{|\xi|>\xi_{\max}} \frac{e^{-\xi^2 t}}{\left|\xi\right|^s} \left(\int_{|\xi|>\xi_{\max}} \left|\hat{\varphi}_0(\xi)\right|^2 (1+\xi^2)^s d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+ \sup_{|\xi|\leq\xi_{\max}} e^{\xi^2(T-t)} \left(\int_{|\xi|\leq\xi_{\max}} \left|\hat{\varphi}_T^\delta(\xi) - \hat{\varphi}_T(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \sup_{|\xi|>\xi_{\max}} \frac{e^{-\xi^2 t}}{\left|\xi\right|^s} \parallel \varphi_0 \parallel_{H^s} + \sup_{|\xi|\leq\xi_{\max}} e^{\xi^2(T-t)} \parallel \varphi_T - \varphi_T^\delta \parallel$$

Comme :

$$\begin{cases} \parallel \varphi_0 \parallel_{H^s} \leq E \\ \text{et} \quad \parallel \hat{\varphi}_T - \hat{\varphi}_T^\delta \parallel = \parallel \varphi_T - \varphi_T^\delta \parallel \leq \delta \end{cases}$$

Alors :

$$\sup_{|\xi|>\xi_{\max}} \frac{e^{-\xi^2 t}}{\left|\xi\right|^s} \parallel \varphi_0 \parallel_{H^s} + \sup_{|\xi|\leq\xi_{\max}} e^{\xi^2(T-t)} \parallel \varphi_T - \varphi_T^\delta \parallel \leq \sup_{|\xi|>\xi_{\max}} \frac{e^{-\xi^2 t}}{\left|\xi\right|^s} E + \sup_{|\xi|\leq\xi_{\max}} e^{\xi^2(T-t)} \delta$$

$$\leq \frac{e^{-t\xi_{\max}^2}}{\left|\xi_{\max}\right|^s} E + \delta e^{\xi_{\max}^2 (T-t)}$$

$$= \frac{e^{-t\left(\ln\left(\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{1}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-s}{2T}}\right)\right)}}{\left(\ln\left(\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{1}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-s}{2T}}\right)\right)^{\frac{s}{2}}} E + \delta e^{(T-t)\left(\ln\left(\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{1}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-s}{2T}}\right)\right)}$$

$$\text{tel que} \quad \xi_{\max} = \left(\ln\left(\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{1}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-s}{2T}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{e^{\ln\left(\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-t}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{ts}{2T}}\right)}}{\left(\ln\left(\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{1}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-s}{2T}}\right)\right)^{\frac{s}{2}}} E + \delta e^{\ln\left(\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{(T-t)}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-s(T-t)}{2T}}\right)}$$

$$= \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-t}{T}} \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{st}{2T}} E \left(\frac{1}{\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E}{\delta}\right) + \ln\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-s}{2T}}}\right)^{\frac{s}{2}} + \delta \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{(T-t)}{T}} \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-s(T-t)}{2T}}$$

$$= \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-t}{T}} \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{st}{2T}} E \left(\frac{\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)}{\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E}{\delta}\right) + \ln\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-s}{2T}}}\right)^{\frac{s}{2}} \left(\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)\right)^{\frac{-s}{2}} + E^{1-\frac{t}{T}} \delta^{\frac{t}{T}} \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-(T-t)s}{2T}}$$

$$= \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-t}{T}} \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-(T-t)s}{2T}} E \left(\frac{\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)}{\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E}{\delta}\right) + \ln\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-s}{2T}}} \right)^{\frac{s}{2}} + E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}} \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-s(T-t)}{2T}}$$

Puisque :

$$\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{s}{2T}} \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-s}{2T}} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{st}{2T} - \frac{sT}{2T} = \frac{-s(T-t)}{2T}$$

$$\text{et} \quad \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{T-t}{T}}\delta = \left(\frac{1}{\delta}\right)^{1-\frac{T-t}{T}}\delta = \delta^{\frac{t}{T}}$$

Donc

$$\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-t}{T}} \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-(T-t)s}{2T}} E \left(\frac{\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)}{\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E}{\delta}\right) + \ln\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-s}{2T}}} \right)^{\frac{s}{2}} + E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}} \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-s(T-t)}{2T}}$$

$$= E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}} \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-s(T-t)}{2T}} \left(\frac{\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)}{\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E}{\delta}\right) + \ln\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-s}{2T}}} \right)^{\frac{s}{2}} + E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}} \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-s(T-t)}{2T}}$$

$$E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}} \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-(T-t)s}{2T}} \left[\left(\frac{\ln(\frac{E}{\delta})}{\frac{1}{T}\ln\frac{E}{\delta} + \ln(\ln\frac{E}{\delta})^{\frac{-s}{2T}}} \right)^{\frac{s}{2}} + 1 \right]$$

Ainsi (3.8) est démontrée. ■

3.1.2 Choix de $\xi_{\max}$

Pour trouver une estimation de stabilité de type Hölder, on choisit ξ_{max} par la formule (3.9), c'est à dire :

$$\xi_{\max} = \left(\ln\left(\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{1}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-s}{2T}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{où } \ln\frac{E}{\delta} > 1; \forall s > 0$$

Preuve. D'après le Lemme 3.1 on a :

$$\| u(x,t) - u_{\delta,\xi_{\max}}(x,t) \| \leq \sup_{|\xi|>\xi_{\max}} \frac{e^{\xi^2 t}}{|\xi|^s} E + \sup_{|\xi|\leq\xi_{\max}} e^{\xi^2(T-t)}\delta$$

$$\leq \frac{e^{-t\xi_{max}^2}}{|\xi_{\max}|} E + e^{\xi_{\max}^2(T-t)}\delta = e^{-t\xi_{\max}^2}\left(\frac{E}{\xi^s} + e^{T\xi_{\max}^2}\delta\right)$$

$$\leq \frac{E}{\xi_{\max}^s} + \delta e^{T\xi_{\max}^2}$$

$$\text{puisque} \quad e^{-t\xi_{\max}^2} < 1$$

Donc

$$\| u(x,t) - u_{\delta,\xi_{\max}}(x,t) \| \leq \frac{E}{\xi_{\max}^{s}} + \delta e^{T\xi_{\max}^{2}} \tag{3.10}$$

et par Hölder on a :

$$\| u(x,t) - u_{\delta,\xi_{\max}}(x,t) \| \leq 2E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}} \tag{3.11}$$

Par (3.10) et (3.11) on trouve que :

$$\frac{E}{\xi_{\max}^{s}} + \delta e^{T\xi_{\max}^{2}} \leq 2E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}} = E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}} + E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}}$$

Donc

$$\frac{E}{\xi_{\max}^{s}} \leq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} \quad \text{et} \quad \delta e^{T\xi_{\max}^{2}} \leq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}$$

On pose $M = \delta e^{T\xi_{\max}^{2}}$

$$M = \delta e^{T\xi_{\max}^{2}} \Longrightarrow e^{T\xi_{\max}^{2}} = \frac{M}{\delta} \Longrightarrow T\xi_{\max}^{2} = \ln\left(\frac{M}{\delta}\right)$$

$$\Longrightarrow \xi_{\max}^{2} = \frac{1}{T}\ln\left(\frac{M}{\delta}\right) \Longrightarrow \xi_{\max} = \left(\ln\left(\frac{M}{\delta}\right)^{\frac{1}{T}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.12}$$

1)

$$\frac{E}{\xi_{\max}^{s}} \leq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} \Longrightarrow \frac{1}{\xi_{\max}^{s}} \leq \left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} \Longrightarrow \xi_{\max} \geq \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{t}{sT}}$$

$$\Longrightarrow T\xi_{\max}^{2} \geq T\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{sT}} \Longrightarrow e^{T\xi_{\max}^{2}} \geq e^{T\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{sT}}} \Longrightarrow M = \delta e^{T\xi_{\max}^{2}} \geq \delta e^{T\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{sT}}}$$

$$\Longrightarrow M \geq \delta e^{T\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{sT}}} \geq \delta e^{T\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{sT}}} = \delta\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{s}} = E\left(\frac{\delta}{E}\right)\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{s}} \geq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2}\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{s}}$$

$$\Longrightarrow M \geq E\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{2}\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{s}}$$

$$\text{tel que } \frac{\delta}{E} \geq \ln\frac{\delta}{E} \Longrightarrow \left(\frac{\delta}{E}\right)^{2} \geq \left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{2}$$

Puisque :

$$\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{2} = [\ln\delta - \ln E]^{2} = [\ln E - \ln\delta]^{2} = \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{2}$$

Donc :

$$M \geq E\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^2\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{s}}$$

Comme :

$$\frac{E}{\delta} \geq \ln\frac{E}{\delta} \Longrightarrow \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{s}} \geq \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{s}}$$

On a :

$$M \geq E\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^2\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{s}} \geq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^2\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{s}} = E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{s}+2}$$

Puisque

$$2\left(\frac{t}{s}+1\right) > 0 > -\frac{s}{2} \Longrightarrow \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{s}+2} \geq \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}$$

Donc on a :

$$M \geq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}} \quad \text{et} \quad M = \delta e^{T\xi_{\max}^2}$$

Alors :

$$\Longrightarrow \delta e^{T\xi_{\max}^2} \geq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}} \tag{3.13}$$

2)

$$\delta e^{T\xi_{\max}^2} \leq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} \Longrightarrow M \leq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}$$

Puisque :

$$\frac{\delta}{E} \geq \ln\frac{\delta}{E} \Longrightarrow \left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{-2s} \geq 1$$

Donc :

$$M \leq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}\left[\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{-2s}\right]$$

$$M \leq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{s}{2}}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}\left[\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{-2s}\right]$$

$$\Longrightarrow M \leq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}\left[\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{s}{2}}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{-2s}\right]$$

$$\Longrightarrow M \leq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}\left[\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{2s}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{-2s}\right]$$

Alors :

$$M \leq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}\left[\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}\right]$$

$$\leq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}\left[\left(\frac{\delta}{E}\right)^{-2s}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}\right]$$

Puisque :

$$\begin{cases} \dfrac{t}{T} > 0 > -2s \\ \text{et} \quad \dfrac{\delta}{E} < 1 \end{cases} \Longrightarrow \Big(\frac{\delta}{E}^{\dfrac{t}{T}}\Big) \leq \Big(\frac{\delta}{E}^{-2s}\Big)$$

Alors :

$$\begin{cases} M \leq E\Big(\ln\dfrac{E}{\delta}\Big)^{-\frac{s}{2}} \\ \text{et} \quad M = \delta e^{T\xi_{\max}^2} \end{cases} \Longrightarrow M = \delta e^{T\xi_{\max}^2} \leq E\Big(\ln\frac{E}{\delta}\Big)^{-\frac{s}{2}} \tag{3.14}$$

En utilisant (3.13) et (3.14) on a

$$M = \delta e^{T\xi_{\max}^2} = E\Big(\ln\frac{E}{\delta}\Big)^{-\frac{s}{2}}$$

$$\text{par (3.12) on a} \Longrightarrow \xi_{\max} = \Big(\ln\Big(\Big(\frac{E}{\delta}\Big)^{\frac{1}{T}}\Big(\ln\frac{E}{\delta}\Big)^{-\frac{s}{2T}}\Big)\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Longrightarrow \xi_{\max} = \Big(\ln\Big(\Big(\frac{E}{\delta}\Big)^{\frac{1}{T}}\Big(\ln\frac{E}{\delta}\Big)^{-\frac{s}{2T}}\Big)\Big)^{\frac{1}{2}} \quad \text{pour} \quad \ln\frac{E}{\delta} > 1.\Big(\text{donc} \ \frac{E}{\delta} > 1\Big);\ \forall s > 0.$$

■

Remarque 3.1 *Il y a plusieurs solutions qui approchent la solution exacte mais pour trouver la solution qui est très proche il faut choisir $\xi_{\max}$ qui donne l'estimation de type Hölder pour laquelle on a la stabilité.*

3.2 Problème de la chaleur rétrograde non homogène

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(x,t) \quad -\infty < x < \infty, \ \ 0 < t < T \\ u(x,T) = \varphi_T(x) \end{cases} \tag{3.15}$$

Il est facile de voir que la solution u de ce problème est donnée par :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x}\Big(e^{\xi^2(T-t)}\hat{\varphi}_T(\xi) + \int_{-t}^{T} e^{\xi^2(s-t)}\hat{f}(s)ds\Big)d\xi, \tag{3.16}$$

En effet

Preuve. En utilisant la transformation de Fourier on a :

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{F}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - f(x,t)\Big)_{(\xi)} = 0 \\ \mathcal{F}\Big(u(x,T)\Big)_{(\xi)} = \mathcal{F}\Big(\varphi_T(x)\Big)_{(\xi)} \end{cases} \Rightarrow$$

Donc : par (3.3) et (3.4) on a :

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u}(\xi,t) + \xi^2 \hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(x,t) \\ \text{et :} \quad \hat{u}(\xi,T) = \hat{\varphi}_T(\xi) \end{cases} \tag{3.17}$$

On pose $y(t) = \hat{u}(\xi,T)$, donc :

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u}(\xi,t) + \xi^2 \hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(x,t) \\ \text{et :} \quad \hat{u}(\xi,T) = \hat{\varphi}_T(\xi) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y'(t) + \xi^2 y(t) = \hat{f}(t) \\ \text{et :} \quad y(T) = \hat{\varphi}_T(\xi) \end{cases}$$

On recherche la solution de l'équation par la méthode de variation des constantes :

$$y'(t) + \xi^2 y(t) = \hat{f}(t)$$

On pose $y(t) = W(t)V(t)$ Alors :

$$y'(t) + \xi^2 y(t) = \hat{f}(t) \Longrightarrow \Big(W(t)\frac{dV}{dt} + V(t)\frac{dW}{dt}\Big) + \xi^2 W(t)V(t) = \hat{f}(t)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \frac{dV}{dt} + \xi^2 V(t) = 0 \\ V(t)\dfrac{dW}{dt} = \hat{f}(t) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{dV}{dt} + \xi^2 V(t) = 0 \Longrightarrow V(t) = e^{-\xi^2 t} \tag{3.18}$$

et

$$V(t)\frac{dW}{dt} = \hat{f}(t) \Longrightarrow W(t) = C + \int e^{\xi^2 t} \hat{f}(t)dt. \tag{3.19}$$

Donc :

$$y(t) = e^{-\xi^2 t}\Big(C + \int_t^T e^{\xi^2 s} \hat{f}(s)ds\Big).$$

avec la solution initiale :

$$y(T) = e^{-\xi^2 T}\Big(C + \int_T^T e^{\xi^2 s} \hat{f}(s)ds\Big) = \hat{\varphi}_T(\xi) \Longrightarrow C = e^{-\xi^2 T}\hat{\varphi}_T(\xi)$$

$$\Longrightarrow y(t) = e^{-\xi^2 (T-t)}\hat{\varphi}_T(\xi) + \int_t^T e^{\xi^2 (s-t)} \hat{f}(s)ds$$

On aura

$$y(t) = \hat{u}(\xi,t) \Longrightarrow \hat{u}(\xi,t) = e^{-\xi^2 (T-t)}\hat{\varphi}_T(\xi) + \int_t^T e^{\xi^2 (s-t)} \hat{f}(s)ds$$

$$u(\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x}\Big(e^{\xi^2 (T-t)}\hat{\varphi}_T(\xi) + \int_t^T e^{\xi^2 (s-t)} \hat{f}(s)ds\Big)d\xi.$$

■

3.2.1 Régularisation Fourier et estimation de l'erreur

Comme :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x}\Big(e^{\xi^2(T-t)}\hat{\varphi}_T(\xi) + \int_t^T e^{\xi^2(s-t)}\hat{f}(s)ds\Big)d\xi, \quad \text{et} \quad u(x,t) = \varphi_T(x).$$

$$u_{\delta,xi_{\max}}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x}\Big(e^{\xi^2(T-t)}\hat{\varphi}_T^{\delta}(\xi) + \int_t^T e^{\xi^2(s-t)}\hat{f}(s)\chi_{\max}ds\Big)d\xi.$$

$$\text{Soit} \quad \|\hat{g} - \hat{g}^{\delta}\| \leq \beta \quad \text{où} \quad \hat{g}(\xi,t) = \int_t^T e^{\xi^2(s-t)}\hat{f}(s)ds \tag{3.20}$$

Lemme 3.2 *Si on choisit* $\xi_{\max}$ *par la formule* (3.9), *et* (3.20) *et* $\|\hat{g} - \hat{g}^{\delta}\| \leq \beta$ *alors :*

$$\|u(x,t) - u_{\delta,\xi_{\max}}(x,t)\|_2$$

$$\leq E\Big(\ln\frac{E}{\delta}\Big)^{-\frac{s}{2}}\left[\Big(\frac{\ln\frac{E}{\delta}}{\frac{1}{T}\ln\frac{E}{\delta} + \ln(\ln\frac{E}{\delta})^{\frac{-s}{2T}}}\Big)^{\frac{s}{2}} + 1 + \frac{\beta}{E}\Big(\ln\frac{E}{\delta}\Big)^{\frac{s}{2}}\right] \tag{3.21}$$

Preuve.

$$\|u(x,t) - u_{\delta,\xi_{\max}}(x,t)\| = \|\hat{u}(x,t) - \hat{u}_{\delta,\xi_{\max}}(x,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$= \left\|e^{\xi^2(T-t)}\hat{\varphi}_T(\xi) + \int_t^T e^{\xi^2(s-t)}\hat{f}(s)ds - e^{\xi^2(T-t)}\hat{\varphi}_T^{\delta}(\xi)\chi_{\max} - \int_t^T e^{\xi^2(s-t)}\hat{f}^{\delta}(s)\chi_{\max}ds\right\|$$

$$\leq \left\|e^{\xi^2 t}\Big(e^{\xi^2 T}\hat{\varphi}_T(\xi) - e^{\xi^2 T}\hat{\varphi}_T(\xi)\chi_{\max}\Big) + e^{\xi^2 t}\Big(\int_t^T e^{\xi^2 s}\Big(\hat{f}(s) - \hat{f}(s)\chi_{\max}\Big)ds\Big)\right\|$$

$$+ \left\|e^{\xi^2(T-t)}\hat{\varphi}_T^{\delta}(\xi)\chi_{\max} - e^{\xi^2(T-t)}\hat{\varphi}_T(\xi)\chi_{\max} + e^{-\xi^2 t}\int_t^T e^{\xi^2 s}\Big(\hat{f}(s)\chi_{\max} - \hat{f}^{\delta}(s)\chi_{\max}\Big)ds\right\|$$

$$\leq \Big(\int_{|\xi|\leq\xi_{\max}} \Big|e^{-\xi^2 t}\Big(e^{\xi^2 T}\hat{\varphi}_T(\xi) + \int_t^T e^{\xi^2 s}\hat{f}(s)ds\Big)\Big|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\Big(\int_{|\xi|\leq\xi_{\max}} \Big|e^{-\xi^2(T-t)}\Big(\hat{\varphi}_T^{\delta}(\xi) - \hat{\varphi}_T(\xi)\Big) + e^{-\xi^2 t}\int_t^T e^{\xi^2 s}\Big(\hat{f}(s) - \hat{f}^{\delta}(s)\Big)ds\Big|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{e^{\xi_{\max}^2 t}}{\xi_{\max}^s}E + \delta e^{\xi_{\max}^2(T-t)} + \beta$$

Alors on a :

$$\|\hat{u}(x,t)-\hat{u}_{\delta,\xi_{\max}}(x,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\leq \frac{e^{\xi_{\max}^2 t}}{\xi_{\max}^s}E+\delta e^{\xi_{\max}^2(T-t)}+\beta\leq \frac{E}{\xi_{\max}^s}+\delta e^{\xi_{\max}^2 T}+\beta$$

$$\|\hat{u}(x,t)-\hat{u}_{\delta,\xi_{\max}}(x,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\leq \frac{E}{\xi_{\max}^s}+\delta e^{\xi_{\max}^2 T}+\beta \tag{3.22}$$

De (3.9), on a :

$$\|u(x,t)-u_{\delta,\xi_{\max}}(x,t)\|$$

$$\leq \frac{E}{\left(\ln\left(\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{1}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-s}{2T}}\right)\right)^{\frac{s}{2}}}+\delta e^{\left(\ln\left(\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{1}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-s}{2T}}\right)\right)T}+\beta$$

$$=E\left[\frac{1}{\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{1}{T}}\ln\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-s}{2T}}}\right]^{\frac{s}{2}}+\delta\left(\frac{E}{\delta}\right)\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{s}{2}}+\beta$$

$$\|\hat{u}(x,t)-\hat{u}_{\delta,\xi_{\max}}(x,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\leq$$

$$E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}\left[\left(\frac{\ln\frac{E}{\delta}}{\frac{1}{T}\ln\frac{E}{\delta}+\ln(\ln\frac{E}{\delta})^{\frac{-s}{2T}}}\right)^{\frac{s}{2}}+1+\frac{\beta}{E}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{s}{2}}\right]$$

Ainsi (3.21) est démontrée. ■

3.2.2 Choix de $\xi_{\max}$

Pour trouver une estimation de stabilité du type Hölder. On choisit :

$$0<\beta\leq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}} \tag{3.23}$$

Preuve. Par le lemme 3.2 et l'estimation de (3.22) et par l'estimation de Hölder : (3.11). On a :

$$\left(\frac{E}{\xi_{\max}^s}+\beta\right)+\delta e^{\xi_{\max}^2 T}\leq 2E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}}=E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}}+E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}}$$

Alors

$$\frac{E}{\xi_{\max}^s}+\beta\leq E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}} \tag{3.24}$$

et

$$\delta e^{\xi_{\max}^2 T}\leq E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}} \tag{3.25}$$

1) Comme

$$0 < \beta \leq E\left(\ln \frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}, \tag{3.26}$$

On a

$$\frac{\delta}{E} < 1 \Longrightarrow \frac{\delta}{E} \geq \left(\frac{\delta}{E}\right)^2 \Longrightarrow \left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} \geq \frac{\delta}{E} \geq \left(\frac{\delta}{E}\right)^2 \geq \left(\ln \frac{\delta}{E}\right)^2 = \left(\frac{E}{\delta}\right)^2$$
$$\Longrightarrow \left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} \geq \left(\ln \frac{\delta}{E}\right)^2 \geq \left(\ln \frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}$$
$$\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} \geq \left(\ln \frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}$$

Donc :

$$\beta \leq E\left(\ln \frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}} \leq \left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} = E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}} \Longrightarrow \beta \leq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} = E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}}$$

Et on a :

$$\frac{E}{\xi_{\max}^s} + \beta \leq E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}} \Longrightarrow \frac{E}{\xi_{\max}^s} \leq E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}} - \beta \leq E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}}$$

Alors :

$$e^{\xi_{\max}^2 T} \geq e^{T\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{2t}{sT}}}$$

On pose

$$M = e^{\xi_{\max}^2 T} \Longrightarrow M \geq e^{T\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{2t}{sT}}} = \delta\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{s}} \tag{3.27}$$

$$M \geq E\left(\frac{\delta}{E}\right)\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{s}} \geq E\left(\ln \frac{\delta}{E}\right)^2\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{s}} = E\left(\ln \frac{E}{\delta}\right)^2\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{s}}$$
$$\Longrightarrow M \geq E\left(\ln \frac{E}{\delta}\right)^2\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{s}}$$
$$\Longrightarrow M \geq E\left(\ln \frac{E}{\delta}\right)^2\left(\ln \frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{s}} = E\left(\ln \frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{s}+2} = E\left(\ln \frac{E}{\delta}\right)^{2(\frac{t}{s}+1)}$$
$$\Longrightarrow M \geq E\left(\ln \frac{E}{\delta}\right)^{2(\frac{t}{s}+1)} \geq E\left(\ln \frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}$$

On a :

$$\begin{cases} M \geq E\left(\ln \frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}} \\ \text{et} \quad M = e^{T\xi_{\max}^2}\delta \end{cases} \Longrightarrow e^{T\xi_{\max}^2}\delta \geq E\left(\ln \frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}} \tag{3.28}$$

2) Par (3.25) on a :

$$M = e^{T\xi_{\max}^2}\delta \leq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}$$

$$\Longrightarrow M \leq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} \leq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} \left(\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{-2s}\right)$$

$$= E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{s}{2}}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} \left(\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{-2s}\right)$$

$$M \leq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{s2}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{-2s}$$

$$M \leq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}$$

Donc

$$\Longrightarrow M = e^{T\xi_{\max}^2}\delta \leq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}} \tag{3.29}$$

Donc par (3.28) et (3.29) on a

$$e^{T\xi_{\max}^2}\delta = E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}} \Longrightarrow \xi_{\max}^2 = \frac{1}{T}\ln\left(\frac{E}{\delta}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}\right)$$

$$\text{pour} \qquad \ln\frac{E}{\delta} > 1;\ \forall s > 0$$

Ainsi le choix de $\xi_{\max}$ est prouvé. ■

Remarque 3.2 *On a*

1) Pour trouver l'estimation de type Hölder il faut choisir β tel que

$$0 < \beta \leq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}} \tag{3.30}$$

sous les conditions du lemme 3.2.

2) Si $s = 0$ alors d'après l'estimation (3.21), on a :

$$\Longrightarrow \|u(x,t) - u_{\delta,\xi_{\max}}(x,t)\|_2 \leq E\left[2 + \frac{\beta}{E}\right]$$

Donc l'estimation d'erreur est bornée par $2E + \beta$.

3) Soit $t = 0$, $\delta \to 0^+$ et $s > 0$ alors :

$$\delta \longrightarrow 0^+ \Longrightarrow \frac{E}{\delta} \longrightarrow +\infty \Longrightarrow \ln\frac{E}{\delta} \longrightarrow +\infty \Longrightarrow \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}} \longrightarrow 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{\delta\to 0^+}\left(\frac{\ln\frac{E}{\delta}}{\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E}{\delta}\right) + \ln\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-s}{2T}}}\right)^{\frac{s}{2}} = T^{\frac{s}{2}}$$

$$E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}\left(1+\left(\frac{\ln\frac{E}{\delta}}{\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)+\ln\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-s}{2T}}}\right)^{\frac{s}{2}}\right)\longrightarrow 0$$

lorsque $\delta \to 0^+$ *et* $s > 0$.
Donc la solution est stable pour $t = 0$, $\delta \to 0^+$ *et* $s > 0$.

CHAPITRE 4

MÉTHODE DE TRONCATURE

En mathématiques, la troncature est un terme utilisé pour couper le développement décimal d'un nombre à un certain nombre de chiffres après la virgule, ou le développement limité d'une fonction à un certain ordre.

Exemple :

- La troncature à l'unité de $78,637$ est 78.
  On définit aussi, si on veut plus de précision :
- La troncature au dixième : La troncature au dixième de $78,637$ est $78,6$.
- La troncature au centième : La troncature au centième de 78,637 est 78,63.
- La troncature au millième de 1.362985 est 1.362

Certains auteurs ont utilisé la méthode de troncature.L'idée de cette méthode est de limiter l'espace de problème à un sous espace finie (Nam [22]), ou de remplacer la somme infinie par une somme finie (Jana [16]). Dans cette section, on présente la méthode de troncature spectrale de Jana 2016 [16].

4.1 Certaines conséquences du théorème spectral

Soit H un espace de Hilbert et $A : D(A) \subset H \to H$ est un opérateur auto-adjoint, défini positif, non borné à domaine dense. Pour $\tau > 0$, $\phi \in H$ et $f \in L^1([0,\tau], H)$ on considère le problème de la résolution de la valeur finale, indiqué brièvement par FVP,

$$u_t + Au = f(t) \quad 0 < t \leq \tau \tag{4.1}$$

$$u(\tau) = \phi \tag{4.2}$$

On rappelle que le théorème spectral (cf. Yosida [29]) est :

$$Au := \int_0^\infty \lambda dE_\lambda u, \quad u \in D(A)$$

Où

$$D(A) := \{u \in H : \int_0^\infty \lambda^2 d\|E_\lambda u\|^2 < \infty\},$$

et pour toute fonction continue ou continue par morceaux $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$, l'opérateur $g(A)$ est définie par :

$$g(A)u = \int_0^\infty g(\lambda) dE_\lambda u, \quad u \in D(g(A)),$$

où

$$D(g(A)) := \{u \in H : \int_0^\infty g(\lambda)^2 d\|E_\lambda u\|^2 < \infty\},$$

en particulier, on définit l'opérateur e^{tA} comme suit :

$$e^{tA}u := \int_0^\infty e^{t\lambda} dE_\lambda u, \quad \forall u \in D(e^{tA})$$

D'où

$$D(e^{tA}) = \{u \in H : \int_0^\infty e^{2t\lambda} d\|E_\lambda u\|^2 < \infty\},$$

On peut remarquer que :

$$S(t) = e^{-tA} := \int_0^\infty e^{-t\lambda} dE_\lambda, \quad t \geq 0,$$

la famille $S(t) : T \leq 0$ d'opérateurs linéaires bornés sur H est un semi groupe dérivable fortement continu (ou C_0) avec $\| S(t) \| \leq 1$ pour tous $t \geq 0$, $-A$ est son générateur infinitésimale (cf. [23]). Avec ces notations, les lemmes suivants peuvent être prouvés.

Lemme 4.1 Pour $t > 0$, on note les domaines des opérateurs e^{-tA} et e^{tA} par $R(e^{-tA})$ et $D(e^{tA})$ successivement. alors :

$$R(e^{-tA}) \subseteq D(e^{tA}) \subseteq D(A^n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Lemme 4.2 Pour $t \geq 0$,

$$e^{-tA}e^{tA} = I \quad \text{sur} \quad D(e^{tA}),$$

$$e^{tA}e^{-tA} = I \quad \text{sur} \quad H$$

En particulier, pour $t > 0$, l'opérateur e^{tA} est un opérateur fermé et $S(t) = e^{-tA}$ est injective avec son domaine $D(e^{-tA})$

4.2 Représentation spectrale de la solution

On déduit l'expression suivante :

$$u(t) = \int_0^{\infty} e^{(\tau-t)\lambda} dE_\lambda \phi - \int_t^{\tau} \Big(\int_0^{\infty} e^{(s-t)\lambda} dE_\lambda f(s) \Big) ds, \quad t \in [0,\tau] \tag{4.3}$$

On prouve Plus précisément le théorème suivant :

Théorème 4.1 *On suppose que l'équation* (4.1) *a une solution* $u(.)$ *et que* $\phi = u(\tau)$ *et* $f \in L^1([0,\tau], H)$ *satisfont aux conditions suivantes :*

(1) $\phi \in D(e^{\tau A})$

(2) $f(s) \in D(e^{sA})$ *pour tout* $s \in [0,\tau]$*et*

(3) La fonction $s \to e^{sA} f(s)$, $s \in [0,\tau]$ *appartient à* $L^1([0,\tau], H)$

Alors :

$$u(t) = \int_0^{\infty} e^{(\tau-t)\lambda} dE_\lambda \phi - \int_t^{\tau} \int_0^{\infty} e^{(s-t)\lambda} dE_\lambda f(s) ds.$$

Preuve. De $f \in L^1([0,\tau], H)$, à l'aide de résultats de la théorie des semi groupes, la solution $u(t)$ de la valeur initiale du problème est donné par (cf. [23])

$$u(t) = S(t)u(0) + \int_0^t S(t-s) f(s) ds. \tag{4.4}$$

En utilisant la notation e^{-tA} pour $S(t)$, (4.4) prend la forme :

$$u(t) = e^{(-tA)} u(0) + \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s) ds. \tag{4.5}$$

En particulier,

$$\phi = u(\tau) = e^{-\tau A} u(0) + \int_0^{\tau} e^{-(t-s)A} f(s) ds.$$

De $\phi \in D(A)$, $f(s) \in D(e^{sA})$ pour toutes $s \in [0,\tau]$ et la fonction $s \to e^{sA} f(s)$ appartient à $L^1([0,\tau], H)$, on a

$$\begin{aligned} e^{\tau A}\phi &= u(0) + e^{\tau A}\Big[\int_0^{\tau} e^{-(\tau-s)A} f(s) ds\Big]. \\ &= u(0) + \int_0^{\tau} e^{sA} f(s) ds. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$u(0) = e^{\tau A}\phi - \int_0^{\tau} e^{sA} f(s) ds$$

On substitue la représentation ci-dessus de $u(0)$ à (4.5), il est possible d'obtenir :

$$u(t) = e^{-tA}\Big[e^{\tau A}\phi - \int_0^{\tau} e^{sA} f(s)ds\Big] + \int_0^{t} e^{-(t-s)A} f(s)ds$$

$$= e^{(\tau-t)A}\phi - \int_0^{\tau} e^{(s-t)A} f(s)ds + \int_0^{t} e^{-(t-s)A} f(s)ds$$

$$= e^{(\tau-t)A}\phi - \int_t^{\tau} e^{(s-t)A} f(s)ds$$

Ainsi,

$$u(t) = \int_0^{\infty} e^{(\tau-t)\lambda} dE_\lambda \phi - \int_t^{\tau}\int_0^{\infty} e^{(s-t)\lambda} dE_\lambda f(s)ds.$$

■

Remarque 4.1 *La condition suffisante sur f, afin de satisfaire à la condition (3) du* théorème 4.1, *est :*

$$\int_0^{\tau}\int_0^{\infty} e^{2s\lambda} d\|E_\lambda f(s)\|^2 \, ds < \infty, \tag{4.6}$$

ou de façon équivalente, la fonction $s \to e^{sA} f(s)$ appartient à $L^2([0,\tau], H)$, puisque, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a :

$$\int_0^{\tau} \|\int_0^{\infty} e^{s\lambda} dE_\lambda f(s)\| \, ds \leq \sqrt{\tau}\Big(\int_0^{\tau} \|\int_0^{\infty} e^{s\lambda} dE_\lambda f(s)\|^2 \, ds\Big)^{1/2}$$

$$= \sqrt{\tau}\Big(\int_0^{\tau}\int_0^{\infty} e^{s\lambda} d\|E_\lambda f(s)\|^2 \, ds\Big)^{1/2}$$

Les conditions en (4.6) et $\phi \in D(e^{\tau A})$ sont exactement les hypothèses de [27] pour obtenir l'estimation d'erreur.

Définition 4.1 Si $\phi \in H$ et $f \in L^1([0,\tau], H)$ satisfont les conditions (1)-(3) dans le théorème (4.1) qui est :

(1) $\phi \in D(e^{\tau A})$

(2) $f(s) \in D(e^{sA})$ *pour tout* $s \in [0,\tau]$*et*

(3) La fonction $s \to e^{sA} f(s)$, $s \in [0,\tau]$ *appartient à* $L^1([0,\tau], H)$ Puis la

fonction $u : [0,\tau] \to H$ définis par :

$$u(t) = \int_0^{\infty} e^{(\tau-t)\lambda} dE_\lambda \phi - \int_t^{\tau}\int_0^{\infty} e^{(s-t)\lambda} dE_\lambda f(s)ds. \tag{4.7}$$

est appelée la solution moyenne de la *FVP* donnée par (4.1) et (4.2).

Théorème 4.2 *On suppose que* $\phi \in H$ *et* $f \in L^1([0,\tau],H)$ *satisfont les conditions* (1)-(3) *de la* définition 4.1 *soit* $u(.)$ *la solution moyenne de la FVP donnée par* (4.1) *et* (4.2). *alors :*

(i) $u(t) \in D(A^n)$ *pour tous* $t \in (0,\tau)$, $n \in \mathbb{N}$ *et*

(ii) $u(.)$ *est continu sur* $[0,\tau]$.

Preuve. On remarque que la solution moyenne $u(.)$ de la *FVP* donnée par (4.1) et (4.2) est :

$$u(t) = e^{(\tau-t)A}\phi - \int_t^\tau e^{(s-t)A} f(s)ds \tag{4.8}$$

elle peut être modifié comme suit :

$$u(t) = e^{-tA}\Big(e^{\tau A}\phi - \int_t^\tau e^{sA} f(s)ds\Big)$$

de sorte que :

$$u(t) \in R(e^{-tA}), \forall t \in (0,\tau)$$

Par conséquent, avec le Lemme 4.1, on obtient (i).

Maintenant, on prouve (ii). Pour $x \in H$, la fonction $t \to e^{-tA}x$ est continue sur $[0,\infty)$ (cf.Pazy [23]). Donc la fonction $t \to e^{(\tau-t)A}\phi = e^{-tA}(e^{\tau A}\phi)$ est continue sur $[0,\tau]$.Il suffisait de démontrer que la fonction $t \to v(t) = -\int_t^\tau e^{(s-t)A} f(s)ds$ est continue sur $[0,\tau]$. Soit $t_0 \in [0,\tau]$ et $t \in (0,\tau)$, alors :

$$v(t) - v(t_0) = -\int_t^\tau e^{(s-t)A} f(s)ds + \int_{t_0}^\tau e^{(s-t_0)A} f(s)ds$$

$$= -e^{-tA}\Big(\int_{t_0}^\tau e^{sA} f(s)ds + \int_t^{t_0} e^{sA} f(s)ds\Big) + e^{-At_0}\Big(\int_{t_0}^\tau e^{sA} f(s)ds\Big)$$

$$= \Big(e^{-tA} - e^{-At_0}\Big)y - e^{-tA}\Big(\int_{t_0}^\tau e^{sA} f(s)ds\Big)$$

où $y = -\int_{t_0}^\tau e^{sA} f(s)ds$, Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned} \Big\| e^{tA}\Big(\int_t^{t_0} e^{sA} f(s)ds\Big)\Big\| &\leq \Big\|\int_t^{t_0} e^{sA} f(s)ds\Big\| \\ &\leq \Big(\int_0^\tau \| e^{sA} f(s) \|^2 ds\Big)^{\frac{1}{2}} (|t-t_0|)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

à partir de ce qui précède, on a :

$$\lim_{t\to t_0} e^{-tA}\Big(\int_t^{t_0} e^{sA} f(s)ds\Big) = 0$$

également, par la continuité de $t \to e^{-tA}y$

$$\lim_{t\to t_0}\left(e^{-tA} - e^{-t_0A}\right)y = 0$$

où $\lim_{t\to t_0} v(t) = v(t_0)$. Donc, $t \to v(t)$ est continue sur $[0, \tau]$, et (ii) est prouvé. ∎

4.3 Régularisation et l'analyse d'erreur

4.3.1 Estimation d'erreur avec les données exactes

On suppose que $\phi \in H$ et $f \in L^1([0,\tau], H)$ satisfont les conditions (1)-(3) de la définition 4.1 et $u(.)$ est la solution moyenne de la FVP donnée par (4.1) et (4.2), c'est-à-dire :

$$u(t) = \int_0^{\infty} e^{(\tau-t)\lambda} dE_\lambda \phi - \int_t^{\tau}\int_0^{\infty} e^{(s-t)\lambda} dE_\lambda f(s) ds \tag{4.9}$$

Comme on l'a déjà fait remarquer dans les conséquences de théorème spectral, la dépendance de $u(.)$ sur ϕ et f n'est pas continue en raison du terme $e^{(\tau-t)\lambda}$ et $e^{(s-t)\lambda}$ dans la première et dernière intégrale dans (4.9). Par conséquent, à la suite de [27] pour les données bruitées dans ϕ, on considère la solution régularisée pour $\beta > 0$ comme

$$u_\beta(\phi, f, t) = \int_0^{\beta} e^{(\tau-t)\lambda} dE_\lambda \phi - \int_t^{\tau}\int_0^{\beta} e^{(s-t)\lambda} dE_\lambda f(s) ds \tag{4.10}$$

Le théorème suivant montre la dépendance continue de $u_\beta(\phi, f, t)$ sur ϕ et f

Théorème 4.3 *Soient ϕ_1,$\phi_2 \in H$ et $f_1, f_2 \in L^1([0,\tau], H)$. puis*

$$\| u_\beta(\phi_1, f_1, t) - u_\beta(\phi_2, f_2, t) \| \leq e^{(\tau-t)\beta}\Big(\|\phi_1 - \phi_2\| + \|f_1 - f_2\| \Big), \quad 0 \leq t \leq \tau$$

Preuve. Pour $t \in [0, \tau]$

$$u_\beta(\phi_1, f_1, t) - u_\beta(\phi_2, f_2, t) = \int_0^{\infty} e^{(\tau-t)\lambda} dE_\lambda(\phi_1 - \phi_2) - \int_t^{\tau}\int_0^{\beta} e^{(s-t)\lambda} dE_\lambda(f_1 - f_2)(s) ds$$

Donc

$$\|u_\beta(\phi_1, f_1, t) - u_\beta(\phi_2, f_2, t) \| \leq \left\| \int_0^{\beta} e^{(\tau-t)\lambda} dE_\lambda(\phi_1 - \phi_2) \right\|$$

$$+ \int_t^{\tau} \left\| \int_0^{\beta} e^{(s-t)\lambda} dE_\lambda(f_1 - f_2)(s) \right\| ds \tag{4.11}$$

A l'aide de l'inéquation $e^{2\lambda(\tau-t)} \leq e^{2\beta(\tau-t)}$ pour $0 \leq \lambda \leq \beta$

$$\left\| \int_0^\beta e^{\lambda(\tau-t)} dE_\lambda(\phi_1 - \phi_2) \right\|^2 = \int_0^\beta e^{2\lambda(\tau-t)} d\, \|E_\lambda(\phi_1 - \phi_2)\|^2$$

$$\leq e^{2\beta(\tau-t)} \, \|\phi_1 - \phi_2\|^2$$

Ainsi,

$$\left\| \int_0^\beta e^{\lambda(\tau-t)} dE_\lambda(\phi_1 - \phi_2) \right\| \leq e^{\beta(\tau-t)} \, \|\phi_1 - \phi_2\| \tag{4.12}$$

De plus, on utilise l'inéquation identique (4.12) et l'inégalité
$e^{(s-t)\lambda} \leq e^{(\tau-t)\beta}$, pour tout $s \in [t, \tau]$, on obtient :

$$\int_t^\tau \left\| \int_0^\beta e^{(s-t)\lambda} dE_\lambda (f_1 - f_2)(s) \right\| ds \leq \int_t^\tau e^{(s-t)\beta} \|(f_1 - f_2)(s)\| ds \tag{4.13}$$

$$\leq e^{(s-t)\beta} \|(f_1 - f_2)(s)\|$$

A partir de (4.11), en utilisant (4.12) et (4.13), on obtient :

$$\| \, u_\beta(\phi_1, f_1, t) - u_\beta(\phi_2, f_2, t) \, \| \leq e^{(\tau-t)\beta} \Big(\, \|\phi_1 - \phi_2\| + \|f_1 - f_2\| \, \Big)$$

On rappelle que les conditions (1) - (3) dans la définition 4.1 impliquent

$$\int_0^\infty e^{2\lambda\tau} d\|E_\lambda \phi\|^2 \leq \rho^2 \quad \text{et} \quad \int_0^\tau \| \int_0^\infty e^{\lambda s} dE_\lambda f(s)\| \, ds \leq \eta \tag{4.14}$$

pour certains $\rho > 0$, $\eta \geq 0$. Maintenant, on prouve l'un des principaux théorèmes de cette section dans les conditions générales sur ϕ et f, à savoir

$$\int_0^\infty [h(\lambda)]^2 e^{2\lambda\tau} d\|E_\lambda \phi\|^2 \leq \rho^2 \quad \text{et} \quad \int_0^\tau \| \int_0^\infty [h(\lambda)] e^{\lambda s} dE_\lambda f(s)\| \, ds \leq \eta \tag{4.15}$$

pour certains $\rho > 0$, $\eta \geq 0$ (en fonction de h), où $h : (0, \infty) \to (0, \infty)$ est une fonction continue par morceaux croissante , ce qui peut conduire à de meilleures estimations des erreurs possibles (4.14). ■

Théorème 4.4 *On suppose que $\phi \in H$ et $f \in L^1([0, \tau], H)$ satisfont les conditions en (4.15). Soit $u(t)$ et $u_\beta(t) = u_\beta(\phi, f, t)$ qui sont en (4.9) et (4.10), respectivement. Alors :*

$$\|u(t) - u_\beta(t)\| \leq \frac{(\rho + \eta) e^{-t\beta}}{h(\beta)}, \quad 0 \leq t \leq \tau$$

donc :

(i) pour $0 < t \leq \tau$

$$\|u(t) - u_\beta(t)\| \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \beta \to \infty$$

(ii) Si $\lim\limits_{\lambda\to\infty} h(\lambda) = \infty$, *puis pour* $0 \leq t \leq \tau$,

$$\|u(t) - u_\beta(t)\| \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \beta \to \infty$$

Preuve. Soit $t \in [0, \tau]$. A partir de (4.9) et (4.10), on obtient :

$$u(t) - u_\beta(t) = \int_\beta^\infty e^{(\tau-t)\lambda} dE_\lambda \phi - \int_t^\tau \int_\beta^\infty e^{(s-t)\lambda} dE_\lambda f(s) ds$$

Donc

$$\|u(t) - u_\beta(t)\| \leq \left\| \int_\beta^\infty e^{(\tau-t)\lambda} dE_\lambda \phi \right\| + \int_t^\tau \left\| \int_\beta^\infty e^{(s-t)\lambda} dE_\lambda f(s) \right\| ds \tag{4.16}$$

On utilise l'inégalité $\dfrac{e^{-2\lambda t}}{[h(\lambda)]^2} \leq \dfrac{e^{-2\beta t}}{[h(\beta)]^2}$ pour $\lambda \geq \beta$

$$\begin{aligned}
\left\| \int_\beta^\infty e^{(\tau-t)\lambda} dE_\lambda \phi \right\|^2 &= \int_\beta^\infty e^{2(\tau-t)\lambda} d\|E_\lambda \phi\|^2 \\
&\leq \frac{e^{-2\beta t}}{[h(\beta)]^2} \int_0^\infty [h(\lambda)]^2 e^{2\tau\lambda} d\|E_\lambda \phi\|^2 \\
&\leq \frac{e^{-2\beta t}}{[h(\beta)]^2} \rho^2
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\left\| \int_\beta^\infty e^{(\tau-t)\lambda} dE_\lambda \phi \right\| \leq \rho \frac{e^{-\beta t}}{h(\beta)} \tag{4.17}$$

Aussi,

$$\begin{aligned}
\left\| \int_\beta^\infty e^{(s-t)\lambda} dE_\lambda f(s) \right\|^2 &= \int_\beta^\infty e^{2(s-t)\lambda} d\|E_\lambda f(s)\|^2 \\
&\leq \frac{e^{-2\beta t}}{[h(\beta)]^2} \int_0^\infty [h(\lambda)]^2 e^{2\tau\lambda} d\|E_\lambda f(s)\|^2
\end{aligned}$$

$$\int_t^\tau \left\| \int_\beta^\infty e^{(\tau-t)\lambda} dE_\lambda f(s) \right\| \leq \eta \frac{e^{-\beta t}}{h(\beta)} \tag{4.18}$$

A partir de (4.16), en utilisant (4.17) et (4.18), on obtient :

$$\|u(t) - u_\beta(t)\| \leq (\rho + \eta)\frac{e^{-\beta t}}{h(\beta)}$$

On note que pour tout $\beta_0 > 0$,

$$\frac{e^{-\beta t}}{h(\beta)} \leq \frac{e^{-\beta_0 t}}{h(\beta_0)} \quad \forall \beta \geq \beta_0,$$

alors pour $0 < t \leq \tau$

$$\|u(t) - u_\beta(t)\| \to 0 \quad \textit{lorsque} \quad \beta \to \infty.$$

Dans le cas où $h(\beta) \to \infty$ lorsque $\beta \to \infty$ on obtient :

$$\|u(t) - u_\beta(t)\| \to 0 \quad \textit{lorsque} \quad \beta \to \infty.$$

pour chaque $t \in [0, \tau]$ ■

Remarque 4.2 *On remarque que si $h : (0, \infty) \to (0, \infty)$ est une fonction bornée dans le théorème 4.4, alors on ne peut pas déduire la convergence de $u_\beta(0)$ à $u(0)$ lorsque $\beta \to \infty$. On considère quelques cas particuliers de la fonction h dans le théorème 4.4*

(i) On suppose que $h(\lambda) = \lambda^p$, $\lambda > 0$ pour $p > 0$. Les conditions sur ϕ et f dans (4.15) prennent les formes :

$$\int_0^\infty \lambda^{2p} e^{2\lambda\tau} d\|E_\lambda \phi\|^2 \leq \rho^2 \quad et \quad \int_0^\tau \left\| \int_0^\infty \lambda^p e^{\lambda s} dE_\lambda f(s) \right\| ds \leq \eta$$

On obtient :

$$\|u(t) - u_\beta(t)\| \leq (\rho + \eta)\beta^{-p} e^{-t\beta} \quad \text{pour tout} \quad t \in [0, \tau]$$

En particulier,

$$\|u(0) - u_\beta(0)\| \leq (\rho + \eta)\beta^{-p}$$

(ii) On suppose que $h(\lambda) = e^{q\lambda}$, $\lambda > 0$ pour $q > 0$. Les conditions sur ϕ et f en (4.15) prennent les formes

$$\int_0^\infty e^{2\lambda(\tau+q)} d\|E_\lambda \phi\|^2 \leq \rho^2 \quad et \quad \int_0^\tau \left\| \int_0^\infty e^{\lambda(s+q)} dE_\lambda f(s) \right\| ds \leq \eta$$

On obtient :

$$\|u(t) - u_\beta(t)\| \leq (\rho + \eta) e^{-\beta(t+q)} \quad \text{pour tout} \quad t \in [0, \tau]$$

En particulier,

$$\|u(0) - u_\beta(0)\| \leq (\rho + \eta) e^{-q\beta}$$

(iii) On suppose que $h(\lambda) = 1$, $\lambda > 0$. Les conditions sur ϕ et f en (4.15)

prennent les formes :

$$\int_0^{\infty} e^{2\lambda\tau} d\|E_\lambda\phi\|^2 \leq \rho^2 \quad et \quad \int_0^{\tau} \| \int_0^{\infty} e^{\lambda s} dE_\lambda f(s)\| \, ds \leq \eta$$

On obtient :

$$\|u(t) - u_\beta(t)\| \leq (\rho + \eta)e^{-\beta t} \quad \text{pour tout} \quad t \in (0, \tau]$$

Dans ce cas, on ne peut pas déduire $u_\beta(0) \to u(0)$ lorsque $\beta \to \infty$.

Corollaire 4.1 On suppose que :

$$\int_0^{\tau} \int_0^{\infty} [h(\lambda)]^2 e^{2\lambda s} d \, \| E_\lambda f(s) \|^2 \, ds \leq \eta^2$$

alors :

$$\|u(t) - u_\beta(t)\| \leq \frac{(\rho + \eta\sqrt{\tau})e^{-t\beta}}{h(\beta)} \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

Preuve. Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a :

$$\begin{aligned}
\Big(\int_0^{\tau} \Big\| \int_0^{\infty} [h(\lambda)] e^{\lambda s} dE_\lambda f(s) \Big\| ds\Big)^2 &\leq \tau \int_0^{\tau} \Big\| \int_0^{\infty} [h(\lambda)] e^{\lambda s} dE_\lambda f(s) \Big\|^2 ds \\
&\leq \tau \int_0^{\tau} \int_0^{\infty} [h(\lambda)]^2 e^{\lambda s} d \, \Big\| E_\lambda f(s) \Big\|^2 ds \\
&\leq \tau\eta^2.
\end{aligned}$$

Par conséquent, le résultat suit immédiatement du théorème 4.4 ■

Remarque 4.3 On suppose que $h(A)$ est bien définie pour tout $s \in [0, \tau]$. Les hypothèses de f dans le théorème 4.4 et le corollaire 4.1

4.3.2 Estimation d'erreur dans les données bruitées

On suppose que les données ϕ et f sont bruitées. si on a ϕ_ε et f_δ à la place de ϕ et f respectivement avec

$$\| \phi_\varepsilon - \phi \| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \| f - f_\delta \| \leq \delta$$

Soit $u(t)$ comme dans (4.9) et $u_{\beta,\varepsilon,\delta}(t) = u_\beta(\phi_\varepsilon, f_\delta, t)$ sont définis dans (4.10), qui est

$$u_{\beta,\varepsilon,\delta}(t) = \int_0^{\beta} e^{(\tau - t)\lambda} dE_\lambda \phi_\varepsilon - \int_t^{\tau} \int_0^{\beta} e^{(s-t)\lambda} dE_\lambda f_\delta(s) ds$$

pour chaque $\beta > 0$.

Théorème 4.5 *on suppose que $\phi \in H$ et $f \in L^1([0,\tau],H)$ satisfont les conditions de* (4.15). *alors*

$$\| u(t) - u_{\beta,\varepsilon,\delta}(t) \| \leq e^{-t\beta}\Big((\varepsilon+\delta)e^{\tau\beta} + \frac{(\rho+\eta)}{h(\beta)}\Big) \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

Preuve. Soit $0 \leq t \leq \tau$ et $u_\beta(t) = u_\beta(\phi, f, t)$ est défini dans (4.10). En utilisant le théorème 4.4, on a

$$\| u_\beta(t) - u_{\beta,\varepsilon,\delta}(t) \| \leq e^{(\tau-t)\beta}\Big(\| \phi - \phi_\varepsilon(t) \| + \| f - f_\delta \| \Big)$$

pour que

$$\| u(t) - u_{\beta,\varepsilon,\delta}(t) \| \leq e^{(\tau-t)\beta}\Big(\| \phi - \phi_\varepsilon(t) \| + \| f - f_\delta \| \Big) + \| u(t) - u_\beta(t) \|$$

Comme $\| \phi_\varepsilon - \phi \| \leq \varepsilon$ et $\| f - f_\delta \| \leq \delta$

$$\| u(t) - u_{\beta,\varepsilon,\delta}(t) \| \leq (\varepsilon+\delta)e^{(\tau-t)\beta} + \| u(t) - u_\beta(t) \| \tag{4.19}$$

Maintenant (4.19), en utilisant le théorème 4.4, qui implique

$$\| u(t) - u_{\beta,\varepsilon,\delta}(t) \| \leq e^{-t\beta}\Big((\varepsilon+\delta)e^{\tau\beta} + \frac{(\rho+\eta)}{h(\beta)}\Big) \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

■

Corollaire 4.2 *Les résultats suivants découlent :*

(i) On suppose que $\phi \in H$, $f \in L^1([0,\tau],H)$ satisfont les conditions

$$\int_0^\infty e^{2\lambda\tau} d\|E_\lambda \phi\|^2 \leq \rho^2 \quad et \quad \int_0^\tau \| \int_0^\infty e^{\lambda s} dE_\lambda f(s) \| \, ds \leq \eta$$

pour chaque $\rho > 0$ et $\eta \geq 0$. Alors

$$\| u(t) - u_{\beta,\varepsilon,\delta}(t) \| \leq e^{-t\beta}\Big((\varepsilon+\delta)e^{\tau\beta} + \rho + \eta\Big), \quad 0 \leq t \leq \tau$$

(ii) On suppose que $\phi \in H$, $f \in L^1([0,\tau],H)$

$$\int_0^\infty \lambda^{2p} e^{2\lambda\tau} d\|E_\lambda \phi\|^2 \leq \rho^2 \quad et \quad \int_0^\tau \| \int_0^\infty \lambda^2 e^{\lambda s} dE_\lambda f(s) \| \, ds \leq \eta$$

pour chaque $\rho,\ p > 0$ et $\eta \geq 0$. Alors

$$\| u(t) - u_{\beta,\varepsilon,\delta}(t) \| \leq (\varepsilon+\delta)e^{(\tau-t)\beta} + (\rho+\eta)e^{-t\beta}\beta^{-p}, \quad 0 \leq t \leq \tau$$

(iii) On suppose que $\phi \in H$, $f \in L^1([0,\tau],H)$ satisfont les conditions

$$\int_0^\infty e^{2\lambda(\tau+q)} d\|E_\lambda \phi\|^2 \leq \rho^2 \quad et \quad \int_0^\tau \| \int_0^\infty e^{\lambda(s+q)} dE_\lambda f(s) \| \, ds \leq \eta$$

pour chaque $\rho, q > 0$ et $\eta \geq 0$. Alors

$$\| u(t) - u_{\beta,\varepsilon,\delta}(t) \| \leq (\varepsilon+\delta)e^{(\tau-t)\beta} + (\rho+\eta)e^{-(t+q)\beta}, \quad 0 \leq t \leq \tau$$

Preuve. Les résultats de (i), (ii) et (iii) découlent du théorème 4.5 en prenant respectivement $h(\lambda) = 1$, $h(\lambda) = \lambda^p$ et $h(\lambda) = e^{q\lambda}$. ■

Remarque 4.4 *On suppose que* $h(\beta) \to \infty$ *lorsque* $\beta \to \infty$. *Alors,il existe* $\beta_0 > 0$ *telle que* $\dfrac{1}{h(\beta)} \leq 1, \forall \beta > \beta_0$ *donc*

$$e^{-t\beta}\Big((\varepsilon+\delta)e^{\tau\beta} + \frac{\rho+\eta}{h(\beta)}\Big) \leq e^{-t\beta}\Big((\varepsilon+\delta)e^{\tau\beta} + \rho + \eta\Big) \quad \forall \beta > \beta_0$$

Dans ce cas, l'estimation donnée dans le théorème *4.5 conduit à l'estimation dans le* corollaire *4.2(i). Toute fois, l'estimation dans le corollaire 4.2(i) n'est pas utile pour* $t = 0$.

Remarque 4.5 *On considère le FVP homogène, c'est à dire* $f = 0$.*Dans ce cas on a* $\eta = 0$ *et*

$$u(t) = \int_0^\infty e^{(\tau-t)\lambda} dE_\lambda \phi, \quad t \in [0, \tau]$$

pour que

$$\|u(0)\|^2 = \int_0^\infty e^{2\lambda\tau} d\|E_\lambda \phi\|^2.$$

Dans le cas suivant, on a annulé δ *pour les expressions suivantes :*

(i) On suppose que $h \equiv 1$. *La condition sur* δ *en* corollaire *4.2(i) peut être remplacé par* $u(0) \leq \rho$ *et l'estimation des erreurs dans le théorème 4.5 devient :*

$$\|u(t) - u_{\beta,\varepsilon}(t)\| \leq e^{-t\beta}(\varepsilon e^{\tau\beta} + \rho).$$

C'est l'estimation obtenue par Tuan *([26],* dans le théorème *4.1) pour le problème parabolique homogène à valeur finale .*

(ii) On suppose que $h(\lambda) = \lambda^p$ *pour certains* $p > 0$. *La condition sur*

ϕ *dans* le théorème *4.5 de même que la condition en corollaire 4.2(ii), est*

$$\int_0^\infty \lambda^{2p} e^{2\lambda\tau} d\|E_\lambda \phi\|^2 \leq \rho^2, \tag{4.20}$$

l'estimation des erreurs dans le théorème *4.5 devient*

$$\|u(t) - u_{\beta,\varepsilon}(t)\| \leq \varepsilon e^{(\tau-t)\beta} + \rho\beta^{-p} e^{-t\beta}.$$

si on choisit $\beta = \frac{a}{\tau}\ln(\frac{1}{\varepsilon})$, $(0 < a < 1)$, *alors*

$$\|u(t) - u_{\beta,\varepsilon}(t)\| \leq \varepsilon^{\frac{at}{\tau}+1-a} + \frac{\tau^p}{a}\rho(\ln(\frac{1}{\varepsilon}))^{-p}, \quad \forall t \in [0, \tau].$$

C'est l'estimation obtenue par Tuan *([26],* dans le théorème 2.4(a)*) pour le problème parabo-*

lique homogène de valeur finale . Par hypothèse on a :

$$\int_0^\infty \lambda^{2p} d\|E_\lambda u(t)\|^2 < \infty, \quad \forall t \in [0, \tau]. \tag{4.21}$$

On montre ci-dessous que (4.20) *et* (4.21) *sont équivalentes, de sorte que le résultat de* ([26], théorème 2.4(a)) *soit un cas particulier du* théorème *4.5. On utilise le théorème spectrale de l'opérateur A, on a :*

$$u(t) = \int_0^\infty e^{(\tau-t)\lambda} dE_\lambda \phi = e^{(\tau-t)A}\phi$$

pour que

$$E_\mu u(t) = \chi_{[0,\mu]}(A)u(t) = \chi_{[0,\mu]}(A)e^{(\tau-t)A}\phi = \int_0^\mu e^{(\tau-t)\lambda} dE_\lambda \phi$$

et

$$\|E_\mu u(t)\|^2 = \int_0^\mu e^{2(\tau-t)\lambda} d\|E_\lambda \phi\|^2$$

C'est pourquoi (cf. Yosida [29]),

$$\int_0^\infty \mu^{2p} d\|E_\mu u(t)\|^2 = \int_0^\infty \mu^{2p} e^{2(\tau-t)\mu} d\|E_\mu \phi\|^2$$

Par conséquent,

$$\int_0^\infty \mu^{2p} d\|E_\mu u(t)\|^2 < \infty \quad \forall t \in [0, t] \quad \text{si et seulement si} \quad \int_0^\infty \lambda^{2p} e^{2\tau\lambda} d\|E_\lambda u(t)\|^2 < \infty$$

C'est-à-dire, (4.20) *et* (4.21) *sont équivalentes.*

(iii) On suppose que $h(\lambda) = e^{q\lambda}$ pour $q > 0$, correspondant au théorème *4.5. On considère que*

$$\int_0^\infty e^{2\lambda(q+\tau)} d\|E_\lambda \phi\|^2 \leq \rho^2 \tag{4.22}$$

l'estimation d'erreur dans le théorème *4.5 devient :*

$$\|u(t) - u_{\beta,\varepsilon}(t)\| \leq \varepsilon e^{(\tau-t)\beta} + \rho e^{-\beta(t+q)}$$

Si on choisit $\beta = \frac{1}{\tau+q}\ln(\frac{1}{\varepsilon})$, puis

$$\|u(t) - u_{\beta,\varepsilon}(t)\| \leq \varepsilon^{\frac{q}{\tau+q}}\left(\varepsilon^{\frac{t}{\tau+\rho}} + \rho\right)$$

C'est l'estimation obtenue par Tuan ([26], dans le théorème 2.4(b)) *pour FVP homogène prouvé en posant l'hypothèse suivante :*

$$\int_0^\infty e^{2q\mu} d\|E_\mu u(t)\|^2 < \infty \quad \forall t \in [0, \tau] \tag{4.23}$$

comme en (ii) *ci-dessus, on peut montré que (4.22) et* (4.23) *sont équivalentes, de sorte que le* théorème 2.4(b) *de* Tuan [26] *est un cas particulier du* théorème 4.5

4.3.3 Estimations d'erreurs sous les stratégies de choix des paramètres

Les trois théorèmes qui résultent de théorème 4.5 par substitution directe :

Théorème 4.6 *On suppose que* $\phi \in H$ *et* $f \in L^1([0,\tau],H)$ *satisfont les conditions en* (4.15) *avec* $h \equiv 1$ *et soit* $c_{h,\rho,\eta} = \rho + \eta$. *En prenant ensuite*

$$\beta = \frac{1}{\tau} ln\Big[\frac{tc_{h,\rho,\eta}}{(\varepsilon+\delta)(\tau-t)}\Big],$$

On a

$$\|u(t) - u_{\beta,\varepsilon,\delta}(t)\| \le \Big[\frac{\tau}{t}\Big]^{\frac{t}{\tau}}\Big[\frac{\tau}{\tau-t}\Big]^{1-\frac{t}{\tau}} c_{h,\rho,\eta}^{1-\frac{t}{\tau}}(\varepsilon+\delta)^{t/\tau} \quad \text{pour} \quad 0 < t < \tau \tag{4.24}$$

En plus

$$\max_{0<t<\tau}\Big[\frac{\tau}{t}\Big]^{\frac{t}{\tau}}\Big[\frac{\tau}{\tau-t}\Big]^{1-\frac{t}{\tau}} = 2$$

et en prenant

$$\beta = \frac{1}{\tau}\ln\Big(\frac{c_{h,\rho,\eta}}{(\varepsilon+\delta)}\Big),$$

$$\|u(t) - u_{\beta,\epsilon}(t)\| \le 2c_{h,\rho,\eta}^{1-\frac{t}{\tau}}(\varepsilon+\delta)^{\frac{t}{\tau}} \quad \textit{pour} \quad 0 \le t \le \tau \tag{4.25}$$

Théorème 4.7 *On suppose que* $\phi \in H$ *et* $f \in L^1([0,\tau],H)$ *satisfont les conditions en (4.15) avec* $h(\lambda) = \lambda^p$, $\lambda > 0$ *Pour* $p > 0$, *et soit* $c_{h,\rho,\eta} := \rho + \eta$. *En prenant ensuite :*

$$\beta := \frac{\gamma}{\tau-t}\ln\Big(\frac{1}{\varepsilon+\delta}\Big),$$

pour $0 < \gamma < 1$,

$$\begin{gathered}\|u(t) - u_{\beta,\varepsilon,\delta}(t)\| \le (\varepsilon+\delta)^{1-\gamma} + c_{h,\rho,\eta}(\varepsilon+\delta)^{\frac{\gamma t}{\tau-t}}\Big(\frac{\tau-t}{\gamma}\Big)^p\Big[ln\Big(\frac{1}{\varepsilon+\delta}\Big)\Big]^{-p} \\ 0 \le t < \tau\end{gathered} \tag{4.26}$$

En plus, si on choisit :

$$\beta = \frac{1}{\tau}\ln\Big(\frac{1}{\varepsilon+\delta}\Big)$$

alors

$$\|u(t) - u_{\beta,\varepsilon,\delta}(t)\| \le (\varepsilon+\delta)^{t/\tau}\Big(1 + c_{h,\rho,\eta}\tau^p\Big[\ln\Big(\frac{1}{\varepsilon+\delta}\Big)\Big]^{-p}\Big), 0 \le t \le \tau \tag{4.27}$$

Théorème 4.8 *On suppose que* $\phi \in H$ *et* $f \in L^1([0,\tau], H)$ *satisfont les conditions en* (4.15) *avec* $h(\lambda) = e^{q\lambda}$, $t > 0$ *pour* $q > 0$, *et soit* $c_{h,\rho,\eta} := \rho + \eta$. *En prenant ensuite*

$$\beta := \frac{1}{\tau+q} \ln\Big[\frac{(t+q)c_{h,\rho,\eta}}{(\varepsilon+\delta)(\tau-t)}\Big],$$

on a :

$$\|u(t) - u_{\beta,\varepsilon,\delta}(t)\| \leq \Big(\frac{\tau+q}{\tau-t}\Big)\Big(\frac{\tau-t}{t+q}\Big)^{\frac{\tau+q}{t+q}} c_{h,\rho,\eta}^{1-\frac{t+q}{\tau+q}} (\varepsilon+\delta)^{\frac{t+q}{\tau+q}},\ 0 \leq t \leq \tau \tag{4.28}$$

En plus

$$\max_{0\leq t<\tau}\Big(\frac{\tau+q}{\tau-t}\Big)\Big(\frac{\tau-t}{t+q}\Big)^{\frac{\tau+q}{t+q}} = 2$$

et en prenant $\beta = \frac{1}{\tau+q}\ln(\frac{c_{h,\rho,\eta}}{\varepsilon+\delta})$,

$$\|u(t) - u_{\beta,\varepsilon}(t)\| \leq 2c_{h,\rho,\eta}^{1-\frac{t+q}{\tau+q}} (\varepsilon+\delta)^{\frac{t+q}{\tau+q}} \quad 0 \leq t \leq \tau \tag{4.29}$$

Remarque 4.6 *Explication du choix de β dans les théorèmes* 4.6, 4.7, 4.8
(i) Dans le théorème 4.5 *pour* $h \equiv 1$, *en*
corollaire 4.2(i), *on a obtenu l'estimation*

$$\|u(t) - u_{\beta,\varepsilon,\delta}(t)\| \leq (\varepsilon+\delta)e^{(\tau-t)\beta} + c_{h,\rho,\eta}e^{-t\beta} \quad 0 \leq t \leq \tau$$

où $c_{h,\rho,\eta} = \rho + \eta$. *On note que pour les constants* $\varepsilon, \delta > 0$ *et* $0 < t < \tau$

$$e^{-t\beta} \to 0 \quad \text{et} \quad (\varepsilon+\delta)e^{(\tau-t)\beta} \to \infty \quad \text{lorsque} \ \ \beta \to \infty$$

Alors, le choix de β serait en fonction de :

$$g(\beta) = (\varepsilon+\delta)e^{(\tau-t)\beta} + c_{h,\rho,\eta}e^{-t\beta},\ \ 0 < t < \tau$$

$g(\beta)$ *sera minimale. Pour* $\beta = \frac{1}{\tau}\ln\Big[\frac{tc_{h,\rho,\eta}}{(\varepsilon+\delta)(\tau-t)}\Big] = \beta_{\varepsilon,\delta}$ *la fonction g atteint sa valeur minimale qui est donnée par :*

$$g(\beta_{\varepsilon,\delta}) = \Big[\frac{\tau}{t}\Big]^{\frac{t}{\tau}}\Big[\frac{\tau}{\tau-t}\Big]^{1-\frac{t}{\tau}} c_{h,\rho,\eta}^{1-\frac{t}{\tau}}(\varepsilon+\delta)^{t/\tau}.$$

Ainsi, on obtient (4.24). *Si on choisit β tel que*

$$(\varepsilon+\delta)e^{(\tau+t)\beta} = c_{h,\rho,\eta}e^{-t\beta},$$

On a $g(\beta) = 2c_{h,\rho,\eta}e^{-t\beta}$. *On note que*

$$(\varepsilon+\delta)e^{(\tau-t)\beta} = c_{h,\rho,\eta}e^{-t\beta} \quad \text{si} \quad \beta = \frac{1}{\tau}\ln\Big(\frac{c_{h,\rho,,\eta}}{\varepsilon+\delta}\Big)$$

Ainsi, on obtient l'estimation dans (4.25).

Puisque $\lim_{\alpha\to 0^+} \alpha^\alpha = 1$, *on remarque que :*

$$\lim_{t\to 0}\Big[\frac{\tau}{t}\Big]^{\frac{t}{\tau}}\Big[\frac{\tau}{\tau-t}\Big]^{1-\frac{t}{\tau}} = 1 = \lim_{t\to \tau}\Big[\frac{\tau}{t}\Big]^{\frac{t}{\tau}}\Big[\frac{\tau}{\tau-t}\Big]^{1-\frac{t}{\tau}}$$

et

$$\max_{0<t<\tau}\Big[\frac{\tau}{t}\Big]^{\frac{t}{\tau}}\Big[\frac{\tau}{\tau-t}\Big]^{1-\frac{t}{\tau}} = 2$$

(ii) Dans le théorème 4.5 *pour* $h(\lambda) = \lambda^p$ *et pour* $p > 0$, *et au* corollaire 4.2(ii), *on a obtenu l'estimation*

$$\|u(t) - u_{\beta,\varepsilon,\delta}(t)\| \leq (\varepsilon+\delta)e^{(\tau-t)\beta} + c_{h,\rho,\eta}e^{-t\beta}\beta^{-p} \quad 0 \leq t \leq \tau$$

avec $c_{h,\rho,\eta} = \rho + \eta$. *On trouve* $\beta = \beta(\varepsilon, \delta)$ *telle que* $\beta(\varepsilon,\delta) \to \infty$ *lorsque* $\varepsilon \to 0$ *et* $\delta \to 0$. *On considère* β *sous la forme*

$$\beta = \xi(t)\ln\Big(\frac{1}{\varepsilon+\delta}\Big)$$

$\xi(t)$ *fonction positive . En remplaçant* β *dans* $(\varepsilon+\delta)e^{(\tau-t)\beta}$, *on obtient*

$$(\varepsilon+\delta)e^{(\tau-t)\beta} = (\varepsilon+\delta)^{1-(\tau-t)\xi(t)}.$$

Il est nécessaire que $0 < \xi(t) < 1/(\tau - t)$. *On considère* $\xi(t) = \gamma/(\tau-t)$ *pour* $0 < \gamma < 1$, *qui déduit :*

$$\beta = \frac{\gamma}{\tau-t}\ln\Big(\frac{1}{\varepsilon+\delta}\Big)$$

On obtient (4.26) *et on choisis* γ *telle que*

$$1-\gamma = \frac{\gamma t}{\tau-t},$$

(4.26) *prend la forme*

$$\|u(t) - u_{\beta,\varepsilon,\delta}(t)\| \leq (\varepsilon+\delta)^{1-\gamma}\Big\{1 + c_{h,\rho,\eta}\Big(\frac{\tau-t}{\gamma}\Big)^p\Big[\ln\Big(\frac{1}{\varepsilon+\delta}\Big)\Big]^{-p}\Big\}.$$

On note que

$$1-\gamma = \frac{\gamma t}{\tau-t} \quad \text{si} \quad \gamma = \frac{\tau-t}{\tau}.$$

Du choix $\gamma = \frac{\tau-t}{\tau}$ *on déduit que*

$$\beta = \frac{\gamma}{\tau-t}\ln\Big(\frac{1}{\varepsilon+\delta}\Big) = \frac{1}{\tau}\ln\Big(\frac{1}{\varepsilon+\delta}\Big)$$

β *conduit à* (4.27).

(iii) Dans le théorème 4.5, *pour* $h(\lambda) = e^{q\lambda}$, $\forall\lambda \in (0,\infty)$ *pour* $q > 0$ *en* corollaire 4.2(i), *on a obtenu l'estimation*

$$\|u(t) - u_{\beta,\varepsilon,\delta}(t)\| \leq (\varepsilon+\delta)e^{(\tau-t)\beta} + c_{h,\rho,\eta}e^{-(t+q)\beta} \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

où $c_{h,\rho,\eta} = \rho + \eta$ *on choisit le paramètre de régularisation* $\beta = \beta(\varepsilon, \delta)$ *telle que la fonction*

$$g(\beta) = e^{-t\beta}\Big((\varepsilon + \delta)e^{\tau\beta} + c_{h,\rho,\eta}e^{-q\beta}\Big) \quad 0 \leq t \leq \tau$$

Atteint son minimum, pour

$$\beta = \frac{1}{\tau + q} \ln\Big[\frac{(t+q)c_{h,\rho,\eta}}{(\varepsilon + \delta)(\tau - t)}\Big] = \beta_{\varepsilon,\delta}$$

La valeur minimale de g est

$$g(\beta_{\varepsilon,\delta}) = \Big(\frac{\tau + q}{\tau - t}\Big)\Big(\frac{\tau}{\tau - t}\Big)^{\frac{\tau+q}{t+q}} c_{h,\rho,\eta}^{1-\frac{t+q}{\tau+q}}(\varepsilon + \delta)^{\frac{t+q}{\tau+q}} \quad 0 \leq t < \tau.$$

On obtient l'estimation (4.28). *Si on choisis* β *tel que* $(\varepsilon + \delta)e^{(\tau - t)\beta} = c_{h,\rho,\eta}$, *c'est-à-dire, si*

$$\beta = \frac{1}{\tau + q} \ln\Big(\frac{c_{h,\rho,\eta}}{\varepsilon + \delta}\Big)$$

On obtient l'estimation (4.29). *On remarque que*

$$\max_{0 \leq t < \tau}\Big(\frac{\tau + q}{\tau - t}\Big)\Big(\frac{\tau - t}{t + q}\Big)^{\frac{\tau+q}{t+q}} = 2$$

Cas général : soit $h : (0, \infty) \to (0, \infty)$ une fonction continue croissante satisfaisant (4.15). On a

$$h(\beta)e^{\tau\beta} \to \infty \quad \text{lorsque} \quad \beta \to \infty$$

L'estimation du théorème 4.5 et les arguments dans Nair [21], on veut trouver $\beta = \beta_{\varepsilon,\delta}$ telle que

$$\frac{c_{h,\rho,\eta}}{h(\beta)} = (\varepsilon + \delta)e^{\tau\beta}$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{h(\beta)e^{\tau\beta}} = \frac{\varepsilon + \delta}{c_{h,\rho,\eta}},$$

où $c_{h,\rho,\eta} = \rho + \eta$

Théorème 4.9 *On suppose que* $h : (0, \infty) \to (0, \infty)$ *une fonction continue croissante et on pose* $\phi \in H$ *et* $f \in L^1([0, \tau], H)$ *satisfont les conditions en* (4.15). *Pour* $0 < \varepsilon + \delta < \ell c_{h,\rho,\eta}$ *avec* $c_{h,\rho,\eta} = \rho + \eta$ *,*$\ell = \lim_{\lambda \to 0}(1/h(\beta))$ *et soit* $\beta_{\varepsilon,\delta} > 0$.*Alors*

$$\|u(t) - u_{\beta_{\varepsilon,\delta},\varepsilon,\delta}(t)\| \leq 2c_{h,\rho,\eta}\frac{e^{-t\beta_{\varepsilon,\delta}}}{h(\beta_{\varepsilon,\delta})} \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

En particulier,

$$\|u(t) - u_{\beta_{\varepsilon,\delta},\varepsilon,\delta}(t)\| \to 0 \quad \text{lorsque} \quad \varepsilon \to 0 \text{ et } \delta \to 0, \ \ \forall t \in (0, \tau].$$

Si h est une fonction non bornée, alors

$$\|u(t) - u_{\beta_{\varepsilon,\delta},\varepsilon,\delta}(t)\| \to 0 \quad \text{lorsque} \quad \varepsilon \to 0 \text{ et } \delta \to 0, \ \ \forall t \in [0, \tau].$$

Corollaire 4.3 *On suppose que $\phi \in H$ et $f \in L^1([0,\tau], H)$ satisfont les conditions en* (4.15)*, avec $\beta = \beta_{\varepsilon,\delta} = \frac{1}{\tau}\ln\left(\frac{c_{h,\rho,\eta}}{\varepsilon+\delta}\right)$.*

$$\|u(t) - u_{\beta,\varepsilon,\delta}(t)\| \leq 2c_{h,\rho,\eta}^{1-\frac{t}{\tau}}(\varepsilon+\delta)^{\frac{t}{\tau}} \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

Preuve. Se déduit du théorème 4.9 en prenant $h(\lambda) \equiv 1$. ■

Corollaire 4.4 *On suppose que $\phi \in H$ et $f \in L^1([0,\tau], H)$ satisfont les conditions en* (4.15)*, avec $\beta = \beta_{\varepsilon,\delta} = \frac{1}{q+\tau}\ln\left(\frac{c_{h,\rho,\eta}}{\varepsilon+\delta}\right)$.*

$$\|u(t) - u_{\beta,\varepsilon,\delta}(t)\| \leq 2c_{h,\rho,\eta}^{\frac{t+q}{\tau+q}}(\varepsilon+\delta)^{\frac{t+q}{\tau+q}} \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

Preuve. Se déduit du théorème 4.9 en prenant $h(\lambda) = e^{q\lambda}$, $\lambda > 0$. ■

CONCLUSION

- ⋆ La méthode de quasi-réversibilité, on perturbe l'opérateur de façons différentes et on obtient des estimations différentes.
- ⋆ La méthode de Fourier se base sur le choix $[-\xi_{\max}, \xi_{\max}]$ pour que l'estimation de l'erreur soit de type Hölder.
- ⋆ La méthode de troncature,

  - Pour un opérateur auto-adjoint,définie positif, non borné à domaine dense, le théorème de spectral de Yosida permet d'écrire :

  $$u(t) = \int_0^\infty e^{(\tau-t)\lambda} dE_\lambda \phi - \int_t^\tau \Big(\int_0^\infty e^{(s-t)\lambda} dE_\lambda f(s) \Big) ds, \quad t \in [0, \tau]$$

  Pour la méthode de troncature la solution régularisée pour $\beta > 0$ est donnée par

  $$u_\beta(\phi, f, t) = \int_0^\beta e^{(\tau-t)\lambda} dE_\lambda \phi - \int_t^\tau \int_0^\beta e^{(s-t)\lambda} dE_\lambda f(s) ds$$

  Sous les stratégies de choix du paramètre β, on obtient des estimations relatives au paramètre de β.

  La méthode de troncature spectrale est le plus récent. Donc elle donne des meilleurs résultats par rapport aux deux autres méthodes (c-à-d : par rapport à la méthode de Fourier et celle de quasi-réversibilité).

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Boussetila, F. Rebbani, *The modified quasi-reversibility method for a class of ill-posed Cauchy problems* (to appear in GMJ), Annaba.

[2] N. Boussetila, *Etude de problèmes non locaux et régularisation de problèmes mal posés en EDP*, Annaba, (2012).

[3] N. Boussetila, F. Rebbani, *Optimal regularization method for ill-posed Cauchy problems*, Electron. J. Differential Equations 2006(147) (2006) 1–15.

[4] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle*. Théorie et applications. Masson, Paris, (1983).

[5] G.W. Clark, S.F. Oppenheimer, *Quasireversibility methods for non-well posed problems*, Elect. J. Differential. Eqns., 8 (1994), 1-9.

[6] L.Elden , T.Berntsson , T.Reginska , *Wavelet and Fourier methods for solving the sideways heat equation*, J. Sci.SIAM Comput. 21 (6) (2000), 2187-2205.

[7] H.W.Engl, *Discrepancy principles for Tikhonov regularization of ill-posed problems leading to optimal convergence rates*, J. Optim. Th. and Appl., 52, (1987), 209-215.

[8] M.A. Fury, *Modified quasi-revrsibility method for non autonomous semilinear problems*, Journal of Differential Equations, Conference 20, San Marcos, (October 31, 2013), 65-78.

[9] H. Gajewski, K. Zaccharias, *Zur regularisierung einer klass nichtkorrekter probleme bei evolution gleichungen*, J. Math. Anal. Appl., Vol. 38 (1972), 784-789.

[10] A.V. Gulshak, *Properties of solutions of equations containing powers of an unbounded operator*, Diff. Eq., Vol.39, No. 10 (2003), 1428-1439.

[11] J. Hadamard, *Lecture note on Cauchy's problem in linear partial differential equations*,Yale Uni Press, New Haven, (1923).

[12] W.W. Hager, H. Zhang , *A new conjugate gradient method with guaranteed descent and an efficient line search*, J.SIAM Optim., 16, (2005), 170-192.

[13] B.M.C. HETRICK, *Quasirevrsibility for Inhomogeneous ill-posed problems in hilbert* , Electronic Journal of Differential Equations, Conf. 19, San Marcos, (September 25, 2010), 37–44.

[14] Y. Huang, Q. Zheng, *Regularization for ill-posed Cauchy problems associated with generators of analytic semigroups*, J. Differential Equations, Vol. 203(2004), No. 1, 38-54.

[15] Y. Huang, Q. Zheng, *Regularization for a class of ill-posed Cauchy problems*, Proc.Amer. Math. Soc.,133(2005), 3005-3012.

[16] A. Jana, M.T. Nair, *Truncated spectral regularization for an ill-posed nonhomogeneous parabolic problem*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, India, (9 February 2016), 351–372.

[17] J.B. Keller, *Inverse problems*, Amer. Math. Monthly, 83, (1976), 107-110.

[18] R. Lattès, J. L. Lions, *The Method of Quasireversibility*, Applications to Partial Differential Equations, Amer. Elsevier, New-York, (1969).

[19] I.V. Melnikova, *The method of quasi-reversibility for abstract parabolic equations in a Banach space*, Trudy Inst. Mat. i Meh. Ural. Nau·cn. Centr Akad. Nauk SSSR Vyp.17Metody Resenija Uslovno-korrekt. Zada·c., Russian, (1975), 27-38.

[20] I.V. Melnikova, *General theory of ill-posed Cauchy problem, J. Inverse Ill-posed Problems*, 3 (1995), 149-171.

[21] M.T. Nair, *Linear Operator Equations : Approximation and Regularization*, World Scientific, Singapore, 2009.

[22] P.T. Nam, *An approximate solution for nonlinear backward parabolic equations*, Universitetsparken 5, 2100 Copenhagen, Denmark, (2010), 3-4.

[23] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and application to partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, (1983).

[24] W. Rudin, *Functional analysis*, Mc Graw-hill Inc, New-York, (1991).

[25] V. Trénoguine, B. Pissarevski, T. Soboléva, *Problèmes et exercices d'analyse fonctionnelle*, Editions Mir, moscou, (1987).

[26] N.H. Tuan, *Regularization for class of backward parabolic problems*, Bull. Math. Anal. Appl. 2(2) (2010) 18–26.

[27] N.H. Tuan, D.D. Trong, *A simple regularization method for the ill-posed evolution equation*, Czechoslovak Math. J. 61 (136)(1) (2011) 85–95.

[28] X. Xiong, Z. Qian, *Fourier regularization for a backward heat equation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Republic of China, (2007), 472–480.

[29] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

Résumé

Le présent mémoire est consacré à l'étude de certaines méthodes de régularisation des Problèmes inverses et mal posés celle de Fourier, gradient conjugué et de troncature spectrale.

Les résultats de convergence et les estimations des erreurs ont été obtenus.

Mots clés : problème inverse, problème mal posé, régularisation, gradient conjugué, Fourier, troncature spectrale.

Abstract

This work is devoted to the study of certain different methods of regularization, Fourier, conjugate gradient and truncated spectral for an inverses and ill posed problems.

The results of convergence and the error estimates are obtained.

Key words: inverse problem, ill posed problem, regularization, conjugate gradient, Fourier, truncated spectral.

تلخيص

ترتكز هذه المذكرة على دراسة بعض طرق تعديل المسائل السيئة الطرح و المسائل العكسية على غرار طريقة متوافقة التدرج، طريقة تعديل فوري و طريقة الاقتطاع الطيفي.

من خلال هذه الطرق تم الحصول على النتائج المتقاربة و الارتياب النسبي في الخطأ.

الكلمات المفتاحية: المسائل العكسية، المسائل السيئة الطرح، تعديل، متوافقة التدرج، تعديل فوري ، طريقة الاقتطاع الطيفي.