الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Nº Réf :……………

Centre Universitaire
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées

Sur une variété des systèmes d'équations aux différences non linéaire : stabilité des points d'équilibres

Préparé par :

- **Bouheloufa Roukia**
- **Dif Naima**

Soutenue devant le jury:

Ch. Arroud	M.A.A	C. U. Abd Elhafid Boussouf, Mila	Président
Y. Halim	M.C.B	C. U. Abd Elhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
M. Khalfaoui	M.A.A	C. U. Abd Elhafid Boussouf, Mila	Examinateur

Année Universitaire : 2016/2017

REMERCIEMENT

Nous remercions d'abord et avant tout **Allah** qui nous a donné le courage et la patience pour réaliser ce travail.

Un remerciement particulier à notre encadreur Monsieur **Halim Yacine** pour sa présence, ses Précieux conseils et son aide durant toute la période du travail.

Nous adressons également nos vifs remerciements à Monsieur **Arroud Chems Eddine** et Monsieur **Khalfaoui Mohamed** les membres de jury qui ont bien voulu et accepter d'examiner ce modeste travail.

Sans oublier tous les enseignants qui ont contribué à notre formation durant notre vie scolaire surtout les enseignants de l'institut **(S-T)**.

Nous voudrons dire toute notre reconnaissance à **nos parents** pour leur dévouement sans limite et pour tout ce qu'ils nous ont donné sur tous les plants, et remercier **nos familles** et **nos amis** pour leur soutien constant.

Naima,Roukia

DÉDICACE

Je dédie ce modeste travail :

À celle qui m'a accordé la vie, le symbole de douceur, celle qui a beaucoup sacrifié pour mon bonheur et ma réussite, à ma mère ***Fatima***.

À mon père ***Laid*** , école de mon enfance, l'énorme aile qui m'encourage et me protège du mal et qui veille sur moi tout au long de ma vie.

À mes chers frères : ***Ilyes, Boubker, Lokmen, et Moussa***.

À ma seule soeur :***soumia***

À tous mes enseignants du primaire jusqu'à aujourd'hui.

À mon binôme ***Naima*** qui je la souhaite une vie plaine de joie et de prospérité.

À toute ma famille.

À mes très chères amies.

À tous mes collègues de la section.

À tous ceux qui me connaissent.

Roukia

DÉDICACE

Je dédie ce modeste travail :

À celle qui m'a accordé la vie, le mes très chers parents, pour leurs soutiens, leurs conseils et leurs encouragements et qui ma donné la tendresse et l'amour.

À ma source de tendresse ma mère ***Yamouna***

À mon exemplaire et source du savoir mon père ***Bouzid***.

À mon marie ***Assam Benbeghila*** et sa famille.

À mes très chers soeurs :***Souria, Wassila, Abla,et Souad.***

À mes frères.

À mon binôme ***Roukia*** qui je la souhaite une vie plaine de joie et de prospérité.

À toute ma famille.

À mes très chères amies.

À tous mes collègues de la section.

À tous ceux qui me connaissent.

Naima

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

La théorie des équations aux différences est un sujet attractif ces derniers temps au milieu des chercheurs et des scientifiques de différentes disciplines. En fait, le concept de récurrence, qui est la base de ce genre d'équations, est apparu à l'époque et il a été utilisé par des anciennes civilisations comme les Babyloniens au cours de leurs études des nombres, et elles ont connu plusieurs équations aux différences, et une des plus célèbres équation aux différences (linéaire) est celle qui décrit «le problème des lapins» apparu dans le Liber Abaci de Leonardo de Pise (en 1202), dite «suite de Fibonacci». Cependant, la théorie des équations aux différences n'a connu aucun développement jusqu'à le $18^{ème}$ siècle, grâce aux mathématiciens De Moivre, Euler, Lagrange, Poincaré, Laplace et autres. La modélisation mathématique a ouvrit aussi de nouvelles portes pour les équations aux différences lorsqu'elle avait conféré un tas de modèles discrets qui traduisent des phénomènes de la vie réelle, le champs d'applications des équations aux différences avait connu une diversité qui touche des domaines comme l'économie, la médecine et la biologie, $\cdots$ etc.

L'objectif de ce mémoire est d'étudier le comportement des solutions de certains systèmes d'équations aux différences non linéaires de type rationnelles. En plus de l'introduction, le mémoire est structuré en trois chapitres :
Dans le premier chapitre, on s'intéresse aux équations aux différences et système d'équation aux différences.

Dans la première partie du chapitre 2, on étude le comportement des solutions du système d'équations aux différences non linéaire suivante :

$$x_{n+1} = \frac{1}{1+y_{n-3}}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{1+x_{n-3}}, \; n \in \mathbb{N}_0$$

avec les valeurs initiales n'appartient pas à $\{-\frac{F_{2n+1}}{F_{2n}}, \; n = 1, 2, \cdots\}$.
Dans la deuxième partie de ce chapitre nous avons études la périodicité des solutions du système d'équations aux différences non linéaire suivante :

$$x_{n+1} = \frac{1}{1-y_{n-3}}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{1-x_{n-3}}, \; n \in \mathbb{N}_0$$

avec les valeurs initiales n'appartient pas à $\{0, \; 1\}$.
Dans le dernier chapitre, nous prouvons la stabilité du seul point d'équilibre positif du système d'équations aux différences non linéaire suivante :

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_{n-1}}{a + b y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{\alpha + \beta y_{n-1}}{a + b x_n}$$

où les paramètres $a, b, \alpha,$ et β et les valeurs initiales $x_0, x_{-1}, y_0,$ et y_{-1} sont des nombres réels strictement positifs.

CHAPITRE 1

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux équations aux différences et systèmes d'équations aux différences. Dans la premiére partie on présente quelques définitions et résultats généraux des équations aux différences linéaires et non linéaires. Dans la dernière partie, on s'intéresse aux systèmes aux différences. Dans tout la suite on définie l'ensemble $\mathbb{N}_{n_0}^{+}$ par l'ensemble des nombres $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$.

1.1 Equations aux différences

1.1.1 Equations aux différences linéaires

Définition 1.1.1 *Une équation de la forme*

$$x_{n+k} + p_1(n)x_{n+k-1} + \cdots + p_k(n)x_n = g_n \tag{1.1}$$

avec, $p_0(n) = 1, p_1(n), p_1(n), \cdots, g_n$, sont des fonctions définies sur $\mathbb{N}_{n_0}^+$, s'appelle équation aux différences linéaire d'ordre k, dés que $p_k(n) \neq 0$.
En générale on associe k conditions initiales avec l'équation (1.1)

$$x_{n_0} = c_1,\ x_{n_0+1} = c_2,\ \cdots,\ x_{n_0+k-1} = c_k \tag{1.2}$$

où les $c_i, i = 1, \cdots, k$ sont des constantes réelles ou complexes.

Théorème 1.1.1 *[4] L'équation aux différences* (1.1) *avec les conditions initiales* (1.2) *admet une et une seul solution.*

Définition 1.1.2 *L'équation aux différences* (1.1) *est dite homogène si $g(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{n_0}^+$. Alors elle prend la forme*

$$x_{n+k} + p_1(n)x_{n+k-1} + \cdots + p_k(n)x_n = 0. \tag{1.3}$$

Théorème 1.1.2 *L'ensemble S des solutions de l'équation* (1.3) *est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension k.*

preuve. Soit $S = \left\{x = (x_n)_{n \geq n_0}, x_i \in \mathbb{K} : x_{n+k} + p_1(n)x_{n+k-1} + \cdots + p_k(n)x_n = 0\right\}$ l'ensemble de toutes les solutions de l'équation aux différences (1.3). On a

$$S \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{(u_1, u_2, \cdots, u_n), u_i \in \mathbb{K}\}.$$

Sur l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on a les deux opérations " + " et "." définies par

$$(x_n + y_n)_{n \geq n_0} = (x_n)_{n \geq n_0} + (y_n)_{n \geq n_0},$$

$$(\lambda x_n)_{n \geq n_0} = \lambda (x_n)_{n \geq n_0},\ \lambda \in \mathbb{K}.$$

- $S \neq \phi$ car la suite à éléments tous nuls satisfait l'équation (1.3).

- Soient $(x_n)_{n \geq n_0}, (y_n)_{n \geq n_0} \in S$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned}
\alpha x_{n+k} + \beta y_{n+k} &= \alpha\left(-p_1(x)x_{n+k-1} - p_2(n)x_{n+k-2} - \cdots - p_k(n)x_n\right) \\
&+ \beta\left(-p_1(n)y_{n+k-1} - p_2(n)y_{n+k-2} - \cdots - p_k(n)y_n\right) \\
&= -p_1(n)\left(\alpha x_{n+k-1} + \beta y_{n+k+1}\right) - p_2(n)\left(\alpha x_{n+k-2} + \beta y_{n+k-2}\right) - \cdots - p_k(n)\left(\alpha x_n + \beta y_n\right).
\end{aligned}$$

Donc $\alpha(x_n)_{n\geq n_0} + \beta(y_n)_{n\geq n_0} \in S$. Alors S est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
Rest à montrer que $dim(S) = k$, pour cela on va montrer que S est isomorphe au sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{K}^k$ définit par

$$\mathbb{K}^k = \{(v_0, v_1, v_2, \cdots, v_{k-1}),\ v_i \in \mathbb{K}\}.$$

Posons

$$\begin{array}{rcl}
\varphi : \mathrm{S} & \rightarrow & \mathbb{K}^k \\
x & \mapsto & (x_{n_0}, x_{n_0+1}, \cdots, x_{n_0+k-1})
\end{array}.$$

Il est claire que φ est une application bien définie, montrons qu' elle est linéaire :
Soit $x, y \in S$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\alpha x + \beta y\right) &= \left((\alpha x + \beta y)_{n_0}, (\alpha x + \beta y)_{n_0+1}, \cdots, (\alpha x + \beta y)_{n_0+k-1}\right) \\
&= \alpha\left(x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+k-1}\right) + \beta\left(y_{n_0}, y_{n_0+1}, y_{n_0+k-1}\right) \\
&= \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y).
\end{aligned}$$

Donc φ est un homomorphisme d'espaces vectoriels.
On va montrer que φ est bijectif, commençons par l'injectivité.

1) On va montrer que φ injectif :

$$\begin{aligned}
ker(\varphi) &= \{x = x_n \in S, \varphi(x) = 0_{\mathbb{K}^k}\} \\
&= \{x \in S, (x_{n_0}, x_{n_0+1}, \cdots, x_{n_0+k-1}) = (0, 0, \cdots, 0)\} \\
&= \{x \in S, (x_{n_0} = 0, x_{n_0+1} = 0, \cdots, x_{n_0+k-1}) = 0\}
\end{aligned}$$

et comme toutes les termes de $\{x_n\}_{n\geq n_0}$ s'écrivent au fonction de $x_{n_0}, x_{n_0+1}, \cdots, x_{n_0+k-1}$, donc

$$\begin{aligned} ker(\varphi) &= \{x \in S, x_n = 0, \forall n \geq n_0\} \\ &= \{(0, 0, \cdots, 0)\} \\ &= 0_{\mathbb{K}^k} \end{aligned}$$

d'où φ injectif.

2) On va montrer que φ surjectif : Soit $(c_1, c_2, \cdots, c_k) \in \mathbb{K}^k$, définissons la suite $(x_n)_{n\geq n_0} \in S$

$$x_{n_0} = c_1, x_{n_0+1} = c_2, \cdots, x_{n_0+k-1} = c_k, x_{n_0+k} = -p_1(n)x_{n+k-1} - p_2(n)x_{n+k-2} - \cdots - p_k(n)x_n,\ n \geq n_0$$

alors

$$\varphi\left((x_n)_{n\geq n_0}\right) = (c_1, c_2, \cdots, c_k)$$

donc φ est surjectif. Alors φ est bijectif.

de 1 et 2 φ est une isomorphisme, comme $dim(\mathbb{K}^k) = k$, on déduit que S est un espace vectoriel de dimension k. ■

Définition 1.1.3 *Le Casoratien $W(n)$ des solution $(x_n^1)_{n\geq n_0}, (x_n^2)_{n\geq n_0}, \cdots, (x_n^k)_{n\geq n_0}$ de l'équation aux différences* (1.3) *est donné par :*

$$W(n) = det\begin{pmatrix} x_n^1 & \cdots & x_n^k \\ x_{n+1}^1 & \cdots & x_{n+1}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n+k-1}^1 & \cdots & x_{n+k-1}^k \end{pmatrix}.$$

Définition 1.1.4 *Les suites $(x_n^1)_{n\geq n_0}, (x_n^2)_{n\geq n_0}, \cdots, (x_n^k)_{n\geq n_0}$ sont dites lieés si $\exists\ a_1, a_2, \cdots, a_k \in \mathbb{K}$ non nuls tels que :*

$$a_1x_n^1 + a_2x_n^2 + \cdots + a_kx_n^k = 0,\ \forall n \geqslant n_0.$$

On dit que $(x_n^1)_{n\geq 0}, \cdots, (x_n^k)_{n\geq n_0}$ *sont libres si :*

$$a_1x_n^1 + a_2x_n^2 + \cdots + a_kx_n^k = 0 \Rightarrow a_i = 0,\ i = \overline{1,k}.$$

Lemme 1.1.1 *[3](Lemme d'Abel) Soient* $(x_n^1)_{n\geq n_0}, (x_n^2)_{n\geq n_0}, \cdots, (x_n^k)_{n\geq n_0}$ *des solutions de l'équation homogène* (1.3)*, et soit* $W(n)$ *leur Casoratien alors, pour tout* $n \geq n_0$

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)}\left(\prod_{i=n_0}^{n-1} p_k(i)W(n_0)\right).$$

Corollaire 1.1.1 *Si* $p_k(n) \neq 0,\ \forall n \geq n_0$.
Alors le Casoratien $W(n) \neq 0,\ \forall n \geq n_0$ *si et seulement si* $w(n_0) \neq 0$.

preuve. Il découle directement du lemme d'Abel. ■

Proposition 1.1.1 *Soit* $B = \left\{(x_n^1)_{n\geq n_0}, (x_n^2)_{n\geq n_0}, \cdots, (x_n^k)_{n\geq n_0}\right\}$ *un ensemble des solutions de l'équation aux différences* (1.3)*, alors* B *est libre si et seulement si* $W(n) \neq 0,\ \forall n \geq n_0$.

preuve. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\alpha_1x_n^1 + \alpha_2x_n^2 + \cdots + \alpha_kx_n^k = 0,\ \forall n \geq n_0$$

donc

$$\begin{cases} \alpha_1(x_n^1) + \alpha_2(x_n^2) + \cdots + \alpha_k(x_n^k) = 0, \\ \alpha_1x_{n+1}^1 + \alpha_2x_{n+2}^2 + \cdots + \alpha_kx_{n+1}^k = 0, \\ \vdots \\ \alpha_1x_{n+k-1}^1 + \alpha_2x_{n+k-1}^2 + \cdots + \alpha_kx_{n+k-1}^k = 0, \end{cases}$$

ce système s'écrit

$$X(n)b = 0$$

avec

$$X(n) = \begin{pmatrix} x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^k \\ x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ x_{n+k-1}^1 & x_{n+k-1}^2 & \cdots & x_{n+k-1}^k \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}.$$

Donc le système admet le vecteur nul comme solution si et seulement si $X(n)$ est inversible, c'est à dire

$$detX(n) = W(n) \neq 0, \ \forall n \geq n_0.$$

Donc B est libre. ∎

Définition 1.1.5 *Un ensemble de k solutions libres de l'équation aux différences* (1.3) *dit ensemble fondamentale des solutions.*

Théorème 1.1.3 *(Théorème fondamental) Si $p_k(n) \neq 0, \ \forall n \geqslant n_0$ l'équation aux différences linéaire homogène* (1.3) *admet un ensemble fondamentale de solutions.*

Corollaire 1.1.2 *Soit $\left\{(x_n^1)_{n\geq n_0}, \ (x_n^2)_{n\geq n_0}, \ \cdots, \ (x_n^k)_{n\geq n_0}\right\}$ un ensemble fondamentale de solutions de l'équation homogène* (1.3).
Donc la solution générale de l'équation (1.3) *est donné par*

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} a_i x_n^i,$$

avec a_i sont des constants réels ou complexes.

Lemme 1.1.2 *Soient $(x_n)_{n\geq n_0}, \ (y_n)_{n\geq n_0}$ deux solutions de l'équation* (1.1)*, donc $(z_n)_{n\geq n_0} = (x_n - y_n)_{n\geq n_0}$ est une solution de l'équation* (1.3).

preuve. On a $(x_n)_{n\geq n_0}, \ (y_n)_{n\geq n_0}$ sont des solutions de l'équation (1.1), donc

$$x_{n+k} + p_1(n)x_{n+k-1} + \cdots + p_k(n)x_n = g_n$$

et

$$y_{n+k} + p_1(n)y_{n+k-1} + \cdots + p_k(n)y_n = g_n$$

donc

$$(x_{n+k} - y_{n+k}) + p_1(n)\left(x_{n+k-1} - y_{n+k-1}\right) + \cdots + p_k(n)\left(x_n - y_n\right) = 0$$

par conséquent $(z_n)_{n\geq n_0} = \left(x_n - y_n\right)_{n\geq n_0}$ est un solution de l'équation homogène (1.3). ∎

Théorème 1.1.4 *Soit* $\left\{(x_n^1)_{n\geq n_0},\ (x_n^2)_{n\geq n_0},\ \cdots,\ (x_n^k)_{n\geq n_0}\right\}$ *un ensemble fondamental de solution de l'équation* (1.3) *et* $(x_n^p)_{n\geq n_0}$ *une solution particulière de l'équation* (1.1), *donc toute solutions générale de l'équation* (1.1) *prend la forme*

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} a_i x_n^i + x_n^p,\ \forall n \geq n_0.$$

preuve. Si $(x_n)_{n\geq n_0}$ est la solution générale de (1.1), et $(x_n^p)_{n\geq n_0}$ une autre solution de (1.1)
alors d'après le lemme (1.1.2) $\left(x_n - x_n^p\right)_{n\geq n_0}$ est une solution de l'équation (1.3), ainsi

$$x_n - x_n^p = \sum_{i=1}^{k} a_i x_n^i,\ a_i \in \mathbb{K},\ \forall i = 1,\cdots,k,\ n \geq n_0.$$

∎

Les équations aux différences linéaires à coefficients constants

Dans toute la suite, on s'intéresse aux équations aux différences à coefficients constants homogènes, c'est à dire

$$x_{n+k} + p_1 x_{n+k-1} + p_2 x_{n+k-2} + \cdots + p_k x_n = 0. \tag{1.4}$$

Les p_i sont des constantes réels ou complexe.

Théorème 1.1.5 *L'équation* (1.4) *admet des solutions de la forme :*

$$x_n = \lambda^n$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ *et vérifie :*

$$p(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} p_i \lambda^{k-i} = 0. \tag{1.5}$$

preuve. En remplaçant par $x(n) = \lambda^n$ dans l'équation (1.4), on trouve

$$\lambda^n \sum_{i=0}^{k} p_i \lambda^{k-i} = 0$$

puisque

$$\sum_{i=0}^{k} p_i \lambda^{k-i} = 0.$$

Alors λ^n est une solutions de l'équation (1.4). ■

Définition 1.1.6 *Le polynôme*

$$p(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} p_i \lambda^{k-i}$$

s'appelle le polynôme caractéristique associé à l'équation (1.4).

Théorème 1.1.6 *Si les racines* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ *du polynôme caractéristique* $p(\lambda)$ *sont distinctes, alors* $\left\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \cdots, \lambda_k^n\right\}$ *est un ensemble fondamental des solutions pour l'équation* (1.4).

preuve. Si $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ sont des racines distinctes du $p(\lambda)$ alors $\left\{\lambda_1^n, \cdots, \lambda_k^n\right\}$ sont k solutions de l'équation (1.4). Montrons qu ils sont linéairement indépendantes. Il suffit de trouver un n_0 tel que $W(n_0) \neq 0$.

Le Casoratient des donné par

$$W(n) = \begin{vmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n & \cdots & \lambda_k^n \\ \lambda_1^{n+1} & \lambda_2^{n+1} & \cdots & \lambda_k^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n+k-1} & \lambda_2^{n+k-1} & \cdots & \lambda_k^{n+k-1} \end{vmatrix}$$

choisissons $n_0 = 0$, on obtient

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0.$$

Ainsi

$$W(0) \neq 0$$

alors $\left\{\lambda_1^n,\ \lambda_2^n,\ \cdots,\ \lambda_k^n\right\}$ est libre donc forme un ensemble fondamental des solutions pour l'équation (1.4). ∎

Corollaire 1.1.3 *Du théorème précédent, il résulte que toute solution de l'équation* (1.4) *s'écrit comme combinaison linéaire de $\lambda_i^n,\ i = 1,\ \cdots,\ k$, i.e,*

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i^n,\ a_i \in \mathbb{R}$$

avec : $\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_k$ sont des racines distinctes du polynôme caractéristique $p(\lambda)$.

Théorème 1.1.7 *Supposons $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$, $r < k$ sont les racines du polynôme caractéristique associé à l'équation* (1.4) *avec les multiplicités $m_1, m_2, \cdots, m_r$ respectivement $(\sum_{i=1}^{r} m_i = k)$ alors :*

$\{(\lambda_1^n)_{n\geq n_0}, (n\lambda_1^n)_{n\geq n_0}, \cdots, (n^{m_1-1}\lambda_1^n)_{n\geq n_0}, (\lambda_2^n)_{n\geq n_0}, (n\lambda_2^n)_{n\geq n_0}, \cdots,$

$(n^{m_2-1}\lambda_2^n)_{n\geq n_0}, \cdots, (\lambda_r^n)_{n\geq n_0}, (n\lambda_r^n)_{n\geq n_0}, \cdots, (n^{m_r-1}\lambda_r^n)_{n\geq n_0}\}$

est une ensemble fondamental pour l'équation (1.4).

Corollaire 1.1.4 *La solution générale de l'équation* (1.4) *s'écrit :*

$$y_n = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{m_i-1} a_{ij} n^j \lambda_i^n, \; a_{ij} \in \mathbb{R}$$

où

- *Le paramètre $r \leq k$ désigne le nombre de racines distinctes de l'équation caractéristique* (1.5).
- *Le paramètre λ_i désigne une racine distinctes de l'équation caractéristique* (1.5).
- *Le paramètre m_i désigne le multiplicités de la racine λ_i.*
- *Les coefficients a_{ij} sont des constantes qui sont déterminées à partir des conditions initiales.*

Exemple 1.1.1 *(Suite de Fibonacci)*

Définition 1.1.7 *La suite de Fibonacci est la suite $\{F_n\}_{n\geq 0}$*

$$\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \; n \geq 0 \\ F_0 = 0, \; F_1 = 1 \end{cases} . \tag{1.6}$$

Remarque 1.1.1 *La suite de Fibonacci est une équation aux différences linéaire à coefficients constantes homogène d'ordre* 2.

L'équation caractéristique de (1.6) *est*

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Ainsi, les racines caractéristiques sont

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \; \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

la solution générale de l'équation (1.6) *est donnée par la formule suivante :*

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \tag{1.7}$$

dite formule de Binet, avec

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Corollaire 1.1.5 *Soient $\{F_n\}$ la suite de Fibonacci et $n,\ r \in \mathbb{N}$. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+r}}{F_n} = \alpha^r.$$

preuve. *On a $\{F_n\}$ la suite de Fibonacci et $n,\ r \in \mathbb{N}$. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+r}}{F_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha^{n+r} \times \dfrac{1-\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n+r}}{\alpha-\beta}}{\alpha^n \times \dfrac{1-\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n}}{\alpha-\beta}} = \alpha^r.$$

■

Analyse de la stabilité de solutions

Définition 1.1.8 *On dit que la solution $\{\overline{x}_n\}_{n\geq n_0}$ de l'équation* (1.4) *est stable si pour toutes autres solution de* (1.4) $\{x_n\}_{n\geq n_0}$

$$e_n = \overline{x}_n - x_n,\ n \in \mathbb{N}^+_{n_0} \tag{1.8}$$

est borné.

Définition 1.1.9 *On dit que la solution $\{\overline{x}_n\}_{n\geq n_0}$ de l'équation* (1.4) *est asymptotiquement stable si $\{\overline{x}_n\}_{n\geq n_0}$ est stable et pour toutes autres solution de* (1.4)

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} (\overline{x}_n - x_n) = 0.$$

Théorème 1.1.8 *Une solution* $\{\overline{x}_n\}_{n\geq n_0}$ *de* (1.4) *est asymptotiquement stable si et seulement si les racines du polynôme caractéristique sont à l'intérieur du disque unité,*

$$\left(c'est\ à\ dire\ \{\overline{x}_n\}_{n\geq n_0}\ est\ asymptotiquement\ stable\ \Longleftrightarrow |\lambda_i| < 1,\ i = 1, \cdots, m\right).$$

preuve. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ les racines de $p(\lambda)$ avec les multiplicités $m_1, m_2, \cdots, m_r$ respectivement. $\{\overline{x}_n\}_{n\geq n_0}$ une solution de (1.4). On a

$$\overline{x}_n = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=o}^{m_i-1} \overline{c_{ij}} n^j \lambda_i^n$$

et

$$x_n = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=o}^{m_i-1} c_{ij} n^j \lambda_i^n$$

donc

$$\overline{x}_n - x_n = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=o}^{m_i-1} \left(\overline{c_{ij}} - c_{ij}\right) n^j \lambda_i^n. \tag{1.9}$$

- •) Si $|\lambda_i| < 1$, le membre de droite dans (1.9) tend vers zéro (car $\lim\limits_{n\to\infty} n^j \lambda_i^n = 0$) c'est à dire

$$\lim_{n\to\infty} |\overline{x}_n - x_n| = 0.$$

- •) Inversement si

$$\lim_{n\to\infty} |\overline{x}_n - x_n| = 0$$

supposons qu il existe λ_* tel que $|\lambda_*| \geq 1$ donc $\overline{x}_n - x_n$ tend pas ver zéro donc n'est pas asymptotiquement stable "contradiction".

■

Théorème 1.1.9 *Une solution* $\{\overline{x}_n\}_{n\geq n_0}$ *de* (1.4) *est stable si et seulement si les modules des racines de* $p(\lambda)$ *est inferieur ou égale avec les racines de module égale à un sont simple.*

preuve. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ des racines de $p(\lambda)$ avec les multiplicités $m_1, m_2, \cdots, m_r$

$$\overline{x}_n - x_n = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=o}^{m_i-1} \left(\overline{c_{ij}} - c_{ij}\right) n^j \lambda_i^n. \tag{1.10}$$

- •) Il est clair si n est finie la quantité (1.10) est bornée. Il nous reste à étudier quand $n \to \infty$ si $n \longrightarrow \infty$ les termes correspondants les λ_i :
  $|\lambda_i| < 1$, tend vers zéro,
  $|\lambda_i| = 1$, est bornée.
- •) Inversement supposons si existe λ_* tel que $|\lambda_i| > 1$ donc la quantité (1.10) n'est pas borné donc n'est pas stable "contradiction".

■

1.1.2 Equations aux différences non linéaires

Définition 1.1.10 *Une équation aux différences non linéaire d'ordre* $(k+1)$ *est une équation de la forme*

$$x_{n+k} = f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-k}) \tag{1.11}$$

avec $f : I^{k+1} \to I$ *est une fonction continue, I un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et*

$$(x_0, x_{-1}, \cdots, x_{-k}) \in I^{k+1}$$

sont les conditions initiales.

Remarque 1.1.2 *Toute solution* $\{x_n\}_{n=-k}^{+\infty}$ *de l'équation* (1.11) *est uniquement déterminée par les conditions initiales.*

Définition 1.1.11 *Un point* $\overline{x} \in I$ *est dit point d'équilibre pour l'équation* (1.11) *si*

$$\overline{x} = f(\overline{x}, \overline{x}, \cdots, \overline{x})$$

autrement dit

$$x_n = \overline{x},\ \forall n \geq -k.$$

Définition 1.1.12 *Une solution* $\{x_n\}_{n=-k}^{+\infty}$ *de l'équation* (1.11) *est dite périodique de période p si*

$$x_{n+p} = x_n,\ \forall n \geq -k.$$

Définition 1.1.13 *Un intervalle* $J \subseteq I$ *est dit intervalle invariant pour l'équation* (1.11) *si*

$$x_{-k}, x_{-k+1}, \cdots, x_0 \in J \Rightarrow x_n \in J,\ n > n_0.$$

Stabilité des équations aux différences non linéaires

Définition 1.1.14 *Soit* $\overline{x}$ *un point d'équilibre de l'équation* (1.11).

1. $\overline{x}$ *est dit localement stable si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ \forall x_{-k}, \cdots x_0 \in I : |x_{-k} - \overline{x}| + \cdots + |x_0 - \overline{x}| < \delta$$

   alors

$$| x_n - \overline{x} | < \varepsilon,\ \forall n \geq -k.$$

2. $\overline{x}$ *est dit localement asymptotiquement stable si*
   - $\overline{x}$ *est localement stable,*
   - $\exists \gamma > 0,\ \forall x_{-k}, \cdots x_0 \in I : |x_{-k} - \overline{x}| + \cdots + |x_0 - \overline{x}| < \gamma$ *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \overline{x}$.
3. $\overline{x}$ *est dit globalement attractif si*

$$\forall x_{-k}, \cdots x_0 \in I,\ \lim_{n \to +\infty} x_n = \overline{x}.$$

4. $\overline{x}$ *est dit globalement asymptotiquement stable si*
   - $\overline{x}$ *est localement stable,*
   - $\overline{x}$ *est globalement attractif.*

5. *Le point $\overline{x}$ est dit instable s'il est non localement stable.*

Linéarisation des équations aux différences non linéaires

Supposons en plus que f est une fonction différentiable au voisinage du point d'équilibre $\overline{x}$. Considérons la fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & I^{k+1} & \rightarrow & I \\ & (u_0, u_1, \cdots, u_k) & \mapsto & f(u_0, u_1, \cdots, u_k). \end{array}$$

Définition 1.1.15 *On appelle équation aux différences linéaire associée à l'équation* (1.11) *l'équation*

$$y_{n+1} = p_0 y_n + p_1 y_{n-1} + \cdots + p_k y_{n-k} \tag{1.12}$$

avec

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}(\overline{x}, \overline{x}, \cdots, \overline{x}), i = 0, \cdots, k.$$

Pour laquelle on associé le polynôme caractéristique

$$p(\lambda) = \lambda^{k+1} - p_0 \lambda^k - \cdots - p_k.$$

Remarque 1.1.3 *La stabilité de l'équation* (1.11) *est caractérisé par la stabilité de l'équation aux différences linéaire associé* (1.12).

Le théorème suivant du Clark, donne une condition suffisante de la stabilité locale asymptotique de l'équation (1.11).

Théorème 1.1.10 *Une condition suffisante de la stabilité locale asymptotique de l'équation* (1.11)

$$|p_0| + |p_1| + \cdots + |p_k| < 1.$$

Pour montrer ce théorème, on utilisant le théorème de Rouché.

Théorème 1.1.11 (Théorème de Rouché) *[9] Supposons que :*

1. *Les fonction $f(\lambda)$ et $g(\lambda)$ sont analytique à l'intérieur est sur une simple conteur fermé γ dans le domaine complexe.*

2. *$|f(\lambda)| > |g(\lambda)|$ pour tout les points sur γ.*

Alors $f(\lambda)$ et $f(\lambda) + g(\lambda)$ ont le même nombre de zéros à l'intérieur du disque unité.

preuve. (Théorème(1.1.10)) Soit

$$p(\lambda) = \lambda^{k+1} - p_0\lambda^k - \cdots - p_k$$

le polynôme caractéristique associé à l'équation (1.11). Soit f et g deux fonctions complexes définies par

$$f(\lambda) = \lambda^{k+1}, \; g(\lambda) = p_0\lambda^k + \cdots + p_k.$$

On a pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$

$$\begin{array}{rcl} |g(\lambda)| & = & |p_0\lambda^k + \cdots + p_k| \\ & \leq & |p_0| + |p_1| + \cdots + |p_k| \\ & < & 1 \end{array}$$

i.e.,

$$|g(\lambda)| < |f(\lambda)|.$$

Alors par le Théorème de Rouché $f(\lambda)$ et $f(\lambda) + g(\lambda)$ ont le même nombre de zéros $(k+1)$ à l'intérieur du disque unité. Ainsi les racines du polynôme $p(\lambda)$ sont de modules inférieures à 1, et le résultat découle du théorème (1.1.8). ∎

1.1.3 Stabilité par linéarisation

Théorème 1.1.12

1. *Si toutes les racines du polynôme caractéristique de l'équation aux différences linéaire associée sont dans le disque unité ouvert* $|\lambda| < 1$, *alors le point d'équilibre* $\overline{x}$ *de l'équation* (1.11) *est asymptotiquement stable.*

2. *Si au moins une racine du polynôme caractéristique de l'équation aux différences linéaire associée a un module supérieur à un, alors le point d'équilibre* $\overline{x}$ *de l'équation* (1.11) *est instable.*

preuve. Soit l'équation aux différences (1.11)

$$x_{n+1} = f(x_n,\ x_{n-1},\ \cdots,\ x_{n-k}),\ n = 0,\ 1,\ \cdots,$$

et la fonction

$$\begin{array}{llll} f: & I^k & \to & I \\ & (u_0, \cdots, u_k) & \mapsto & f(u_0, \cdots, u_k). \end{array}$$

Si en faire un développement de Taylor de la fonction f autour du point d'équilibre $(\overline{x},\ \overline{x},\ \cdots,\ \overline{x})$ on obtient
$x_{n+1} = \frac{\partial f}{\partial u_0}(\overline{x},\ \overline{x},\ \cdots,\ \overline{x})y_n + \frac{\partial f}{\partial u_1}(\overline{x},\ \overline{x},\ \cdots,\ \overline{x})y_{n-1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_k}(\overline{x},\ \overline{x},\ \cdots,\ \overline{x})y_{n-k} + o(x - \overline{x})$.
Quand $n \to +\infty$, $o(x - \overline{x}) \to 0$, donc

$$x_{n+1} = p_0 y_n + p_1 y_{n-1} + \cdots + p_k y_{n-k}$$

et le polynôme caractéristique est

$$p(\lambda) = \lambda^{k+1} - p_0 \lambda^k - \cdots - p_k.$$

Donc d'après le Théorème (1.1.8) $(\overline{x_n})_{n \geq n_0}$ est asymptotiquement stable $\Leftrightarrow |\lambda_i| < 1,\ i = 1,\ \cdots,\ s.$ ■

1.2 Systèmes d'équations aux différences

Dans cette section, on s'intéresse aux systèmes d'équations aux différences non linéaires.

1.2.1 Stabilité des systèmes d'équations aux différences non linéaires

Soient f, g deux fonctions continument différentiables

$$f : I^{k+1} \times J^{k+1} \rightarrow I \ , \ g : I^{k+1} \times J^{k+1} \rightarrow J$$

où I, J sont des intervalles réels. Considérons le système d'équations aux différences

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, \cdots, y_{n-k}) \\ y_{n+1} = g(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, \cdots, y_{n-k}) \end{cases} \tag{1.13}$$

où $n, k \in \mathbb{N}_0$, $(x_{-k}, x_{-k+1}, \cdots, x_0) \in I^{k+1}$ et $(y_{-k}, y_{-k+1}, \cdots, y_0) \in J^{k+1}$.
Définissons la fonction

$$H : I^{k+1} \times J^{k+1} \rightarrow I^{k+1} \times J^{k+1}$$

par

$$H(W) = (f_0(W), f_1(W), \cdots, f_k(W), g_0(W), g_1(W), \cdots, g_k(W))$$

avec

$$W = (u_0, u_1, \cdots, u_k, v_0, v_1, \cdots, v_k)^T,$$

$$f_0(W) = f(W), f_1(W) = u_0, \cdots, f_k(W) = u_{k-1},$$

$$g_0(W) = g(W), g_1(W) = v_0, \cdots, g_k(W) = v_{k-1}.$$

Posons

$$W_n = (x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, \cdots, y_{n-k})^T.$$

Ainsi, le système (1.13) est équivalent au système

$$W_{n+1} = H(W_n), n = 0, 1, \cdots, \tag{1.14}$$

c'est à dire

$$\begin{cases} x_{n+1} &= & f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, \cdots, y_{n-k}) \\ x_n &= & x_n \\ & \vdots & \\ x_{n-k+1} &= & x_{n-k+1} \\ y_{n+1} &= & g(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, \cdots, y_{n-k}) \\ y_n &= & y_n \\ & \vdots & \\ y_{n-k+1} &= & y_{n-k+1} \end{cases}.$$

Définition 1.2.1

1. *Un point* $(\overline{x}, \overline{y})$ *est dit point d'équilibre pour le système* (1.13) *si*

$$\begin{aligned} \overline{x} &= f(\overline{x}, \overline{x}, \cdots, \overline{x}, \overline{y}, \overline{y}, \cdots, \overline{y}), \\ \overline{y} &= g(\overline{x}, \overline{x}, \cdots, \overline{x}, \overline{y}, \overline{y}, \cdots, \overline{y}). \end{aligned}$$

2. *Un point* $\overline{W} = (\overline{x}, \overline{x}, \cdots, \overline{x}, \overline{y}, \overline{y}, \cdots, \overline{y}) \in I^{k+1} \times J^{k+1}$ *est point d'équilibre du système* (1.14) *si*

$$\overline{W} = H(W).$$

Définition 1.2.2 *Soient* $\overline{W}$ *un point d'équilibre du système* (1.14) *et* $\|.\|$ *une norme, par exemple la norme euclidienne.*

1. *Le point d'équilibre* $\overline{W}$ *est dit stable (ou localement stable) si pour chaque* $\epsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que* $\|W_0 - \overline{W}\| < \delta$ *implique* $\|W_n - \overline{W}\| < \epsilon$ *pour* $n \geq 0$.

2. *Le point d'équilibre* $\overline{W}$ *est dit asymptotiquement stable (ou localement asymptotiquement*

stable) s'il est stable et s'il existe $\gamma > 0$, tel que $\|W_0 - \overline{W}\| < \gamma$ implique

$$\|W_n - \overline{W}\| \to 0,\ n \to +\infty.$$

3. *Le point d'équilibre $\overline{W}$ est dit globalement attractif (respectivement globalement attractif de bassin d'attraction l'ensemble $G \subseteq I^{k+1} \times J^{k+1}$), si pour chaque W_0 (respectivement pour chaque $W_0 \in G$)*
$$\|W_n - \overline{W}\| \to 0,\ n \to +\infty.$$

4. *Le point d'équilibre $\overline{W}$ est dit globalement asymptotiquement stable (respectivement globalement asymptotiquement stable par rapport à G) si est localement stable, et si pour chaque W_0 (respectivement pour chaque $W_0 \in G$),*
$$\|W_n - \overline{W}\| \to 0,\ n \to +\infty.$$

5. *Le point d'équilibre $\overline{W}$ est dit instable s'il n'est pas localement stable.*

Remarque 1.2.1 *Il est claire que $(\overline{x}, \overline{y}) \in I \times J$ est un point d'équilibre du système* (1.13) *si et seulement si $\overline{W} = (\overline{x}, \overline{x}, \cdots, \overline{x}, \overline{y}, \overline{y}, \cdots, \overline{y}) \in I^{k+1} \times J^{k+1}$ est un point d'équilibre du système* (1.14).

1.2.2 Stabilité par linéarisation

Le système linéaire associé au système (1.14) autour du point d'équilibre

$$\overline{W} = (\overline{x}, \overline{x}, \cdots, \overline{x}, \overline{y}, \overline{y}, \cdots, \overline{y})$$

est donné par

$$W_{n+1} = AW_n, n = 0, 1, \cdots,$$

où A est la matrice Jacobienne de la fonction H au point d'équilibre $\overline{W}$, donnée par

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial u_0}(\overline{W}) & \frac{\partial f_0}{\partial u_1}(\overline{W}) & \cdots & \frac{\partial f_0}{\partial u_k}(\overline{W}) & \frac{\partial f_0}{\partial v_0}(\overline{W}) & \frac{\partial f_0}{\partial v_1}(\overline{W}) & \cdots & \frac{\partial f_0}{\partial v_k}(\overline{W}) \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_0}(\overline{W}) & \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(\overline{W}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_k}(\overline{W}) & \frac{\partial f_1}{\partial v_0}(\overline{W}) & \frac{\partial f_1}{\partial v_1}(\overline{W}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial v_k}(\overline{W}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial u_0}(\overline{W}) & \frac{\partial f_k}{\partial u_1}(\overline{W}) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial u_k}(\overline{W}) & \frac{\partial f_k}{\partial v_0}(\overline{W}) & \frac{\partial f_k}{\partial v_1}(\overline{W}) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial v_k}(\overline{W}) \\ \frac{\partial g_0}{\partial u_0}(\overline{W}) & \frac{\partial g_0}{\partial u_1}(\overline{W}) & \cdots & \frac{\partial g_0}{\partial u_k}(\overline{W}) & \frac{\partial g_0}{\partial v_0}(\overline{W}) & \frac{\partial g_0}{\partial v_1}(\overline{W}) & \cdots & \frac{\partial g_0}{\partial v_k}(\overline{W}) \\ \frac{\partial g_1}{\partial u_0}(\overline{W}) & \frac{\partial g_1}{\partial u_1}(\overline{W}) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_k}(\overline{W}) & \frac{\partial g_1}{\partial v_0}(\overline{W}) & \frac{\partial g_1}{\partial v_1}(\overline{W}) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial v_k}(\overline{W}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial u_0}(\overline{W}) & \frac{\partial g_k}{\partial u_1}(\overline{W}) & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial u_k}(\overline{W}) & \frac{\partial g_k}{\partial v_0}(\overline{W}) & \frac{\partial g_k}{\partial v_1}(\overline{W}) & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial v_k}(\overline{W}) \end{pmatrix}.$$

Théorème 1.2.1 *(Stabilité par linéarisation)*

1. *Si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne A sont dans le disque unité ouvert $|\lambda| < 1$, alors le point d'équilibre $\overline{W}$ du système* (1.14) *est asymptotiquement stable.*

2. *Si au moins une valeur propre de la matrice Jacobienne A a un module supérieur à un, alors le point d'équilibre $\overline{W}$ du système* (1.14) *est instable.*

1.2.3 Théorème de convergence

On donne dans cette section un théorème de convergence pour les systèmes d'équations aux différences d'ordre deux, utile pour la démonstration de nos résultats.

Théorème 1.2.2 *[5] Considérons le système d'équations aux différences définie par*

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_{n-1}, y_n) \\ y_{n+1} = g(x_n, y_{n-1}) \end{cases} \tag{1.15}$$

avec

$$\begin{aligned} f : [0,\infty[\times[0,\infty[&\to [0,\infty[\\ g : [0,\infty[\times[0,\infty[&\to [0,\infty[. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Supposons que f et g sont des fonctions continues et $a,\ b,\ c,$ et d sont des nombres réels positifs.

Avec $a < b,\ c < d$ de plus

$$\begin{aligned} f : [a,b] \times [c,d] &\rightarrow [a,b] \\ g : [a,b] \times [c,d] &\rightarrow [c,d] \end{aligned} \tag{1.17}$$

telle que

1. *f est croissante par rapport à x et décroissante par rapport à y et g est décroissante par rapport à x et croissante par rapport à y.*

2. *Si $m_1,\ M_1,\ m_2$, et M_2 sont des nombres réels telle que*

$$m_1 = f(m_1, M_2),\ M_1 = f(M_1, m_2),\ m_2 = g(M_1, m_2),$$

   et

$$M_2 = g(m_1, M_2),$$

   alors $m_1 = M_1$ et $m_2 = M_2$.

Alors le système (1.15) *a un seul point d'équilibre $(\overline{x}, \overline{y})$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n, y_n) = (\overline{x}, \overline{y})$.*

CHAPITRE 2

COMPORTEMENT DES SOLUTIONS DE CERTAINS SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES D'ORDRES QUATRE

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude du comportement des solutions des systèmes d'équations aux différences suivants :

$$x_{n+1} = \frac{1}{1 \pm y_{n-3}}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{1 \pm x_{n-3}}, \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Avec les valeurs initiales sont des nombres réel avec $x_{-3},\ x_{-2},\ x_{-1},\ x_0,\ y_{-3},\ y_{-2},\ y_{-1},$ et , $y_0 \notin \{0,\ 1\} \cup \{-\frac{F_{2n+1}}{F_{2n}},\ n = 1,\ 2,\ \cdots\}$.

2.2 Le système $x_{n+1} = \frac{1}{1+y_{n-3}},\ y_{n+1} = \frac{1}{1+x_{n-3}}$

Dans cette section nous étudions le comportement des solutions du systèmes d'équations aux différences

$$x_{n+1} = \frac{1}{1+y_{n-3}}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{1+x_{n-3}},\ n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.1}$$

Avec les valeurs initiales $x_{-3},\ x_{-2},\ x_{-1},\ x_0,\ y_{-3},\ y_{-2},\ y_{-1},$ et , $y_0 \notin \{-\frac{F_{2n+1}}{F_{2n}},\ n = 1,\ 2,\ \cdots\}$.

2.2.1 Forme des solutions

Le théorème suivant décrit la forme des solutions du système (2.1).

Théorème 2.2.1 *Soit* $\{x_n, y_n\}_{n\geq -4}$ *une solution du système* (2.1). *Alors pour* $n = 0,\ 1,\ \cdots,$

$$x_{8n+i} = \frac{F_{2n+1} + F_{2n}y_{i-4}}{F_{2n+2} + F_{2n+1}y_{i-4}}, \quad y_{8n+i} = \frac{F_{2n+1} + F_{2n}x_{i-4}}{F_{2n+2} + F_{2n+1}x_{i-4}}, \quad i = 1,2,3,4,$$
$$x_{8n+i} = \frac{F_{2n+2} + F_{2n+1}x_{i-8}}{F_{2n+3} + F_{2n+2}x_{i-8}}, \quad y_{8n+i} = \frac{F_{2n+2} + F_{2n+1}y_{i-8}}{F_{2n+3} + F_{2n+2}y_{i-8}}, \quad i = 5,6,7,8.$$

preuve. Par un calcul direct, on obtient de (2.1) que

$$x_1 = \frac{1}{1+y_{-3}},\ x_2 = \frac{1}{1+y_{-2}},\ x_3 = \frac{1}{1+y_{-1}},\ x_4 = \frac{1}{1+y_0},$$
$$y_1 = \frac{1}{1+x_{-3}},\ y_2 = \frac{1}{1+x_{-2}},\ y_3 = \frac{1}{1+x_{-1}},\ y_4 = \frac{1}{1+x_0},$$

et

$$x_5 = \frac{1+x_{-3}}{2+x_{-3}},\ x_6 = \frac{1+x_{-2}}{2+x_{-2}},\ x_7 = \frac{1+x_{-1}}{2+x_{-1}},\ x_8 = \frac{1+x_0}{2+x_0},$$
$$y_5 = \frac{1+y_{-3}}{2+y_{-3}},\ y_6 = \frac{1+y_{-2}}{2+y_{-2}},\ y_7 = \frac{1+y_{-1}}{2+y_{-1}},\ y_8 = \frac{1+y_0}{2+y_0}.$$

Donc le résultat est vérifié pour $n = 0$. Supposons que $n > 0$ et que le résultat est vérifié pour $n-1$, c'est à dire,

$$x_{8(n-1)+i} = \frac{F_{2n-1} + F_{2n-2}y_{i-4}}{F_{2n} + F_{2n-1}y_{i-4}}, \ i = 1, \cdots, 4, \tag{2.2}$$
$$y_{8(n-1)+i} = \frac{F_{2n-1} + F_{2n-2}x_{i-4}}{F_{2n} + F_{2n-1}x_{i-4}}, \ i = 1, \cdots, 4, \tag{2.3}$$
$$x_{8(n-1)+i} = \frac{F_{2n} + F_{2n-1}x_{i-8}}{F_{2n+1} + F_{2n}x_{i-8}}, \ i = 5, \cdots, 8, \tag{2.4}$$
$$y_{8(n-1)+i} = \frac{F_{2n} + F_{2n-1}y_{i-8}}{F_{2n+1} + F_{2n}y_{i-8}}, \ i = 5, \cdots, 8. \tag{2.5}$$

Il découle de système (2.1) et de l'hypothèse de la récurrence que, pour $i = 1, \cdots, 4$,

$$\begin{aligned}
x_{8n+i} &= \frac{1}{1 + y_{8n-4+i}} \\
&= \frac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + x_{8(n-1)+i}}} \\
&= \frac{1 + x_{8(n-1)+i}}{2 + x_{8(n-1)+i}} \\
&= \frac{1 + \dfrac{F_{2n-1} + F_{2n-2}y_{i-4}}{F_{2n} + F_{2n-1}y_{i-4}}}{2 + \dfrac{F_{2n-1} + F_{2n-2}y_{i-4}}{F_{2n} + F_{2n-1}y_{i-4}}} \\
&= \frac{F_{2n} + F_{2n-1} + (F_{2n-1} + F_{2n-2})y_{i-4}}{2F_{2n} + F_{2n-1} + (2F_{2n-1} + F_{2n-2})y_{i-4}} \\
&= \frac{F_{2n+1} + F_{2n}y_{i-4}}{F_{2n+2} + F_{2n+1}y_{i-4}},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
y_{8n+i} &= \frac{1}{1+x_{8n-4+i}} \\
&= \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+y_{8(n-1)+i}}} \\
&= \frac{1+y_{8(n-1)+i}}{2+y_{8(n-1)+i}} \\
&= \frac{1+\dfrac{F_{2n-1}+F_{2n-2}x_{i-4}}{F_{2n}+F_{2n-1}x_{i-4}}}{2+\dfrac{F_{2n-1}+F_{2n-2}x_{i-4}}{F_{2n}+F_{2n-1}x_{i-4}}} \\
&= \frac{F_{2n}+F_{2n-1}+(F_{2n-1}+F_{2n-2})x_{i-4}}{2F_{2n}+F_{2n-1}+(2F_{2n-1}+F_{2n-2})x_{i-4}} \\
&= \frac{F_{2n+1}+F_{2n}x_{i-4}}{F_{2n+2}+F_{2n+1}x_{i-4}}.
\end{aligned}$$

De même, pour $i = 5, \cdots, 8$, de (2.1) on obtient

$$\begin{aligned}
x_{8n+i} &= \frac{1}{1+y_{8n-4+i}} \\
&= \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+x_{8(n-1)+i}}} \\
&= \frac{1+x_{8(n-1)+i}}{2+x_{8(n-1)+i}} \\
&= \frac{1+\dfrac{F_{2n}+F_{2n-1}x_{i-8}}{F_{2n+1}+F_{2n}x_{i-8}}}{2+\dfrac{F_{2n}+F_{2n-1}x_{i-8}}{F_{2n+1}+F_{2n}x_{i-8}}} \\
&= \frac{F_{2n+1}+F_{2n}+(F_{2n}+F_{2n-1})x_{i-8}}{2F_{2n+1}+F_{2n}+(2F_{2n}+F_{2n-1})x_{i-8}} \\
&= \frac{F_{2n+2}+F_{2n+1}x_{i-8}}{F_{2n+3}+F_{2n+2}x_{i-8}},
\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
y_{8n+i} &= \frac{1}{1+x_{8n-4+i}} \\
&= \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+y_{8(n-1)+i}}} \\
&= \frac{1+y_{8(n-1)+i}}{2+y_{8(n-1)+i}} \\
&= \frac{1+\dfrac{F_{2n}+F_{2n-1}y_{i-8}}{F_{2n+1}+F_{2n}y_{i-8}}}{2+\dfrac{F_{2n}+F_{2n-1}y_{i-8}}{F_{2n+1}+F_{2n}y_{i-8}}} \\
&= \frac{F_{2n+1}+F_{2n}+(F_{2n}+F_{2n-1})y_{i-8}}{2F_{2n+1}+F_{2n}+(2F_{2n}+F_{2n-1})y_{i-8}} \\
&= \frac{F_{2n+2}+F_{2n+1}y_{i-8}}{F_{2n+3}+F_{2n+2}y_{i-8}}.
\end{aligned}
$$

■

2.2.2 Stabilité global des solutions positives

Dans cette section, nous étudions le stabilité asymptotique globale des solutions positives du système (2.1). Soit $I = J =]0,+\infty[$ et on considérons les fonctions

$$f : I^4 \times J^4 \to I \ , \ g : I^4 \times J^4 \to J$$

définies par

$$
\begin{aligned}
f(u_0,u_1,u_2,u_3,v_0,v_1,v_2,v_3) &= \frac{1}{1+v_3}, \\
g(u_0,u_1,u_2,u_3,v_0,v_1,v_2,v_3) &= \frac{1}{1+u_3}.
\end{aligned}
$$

Lemme 2.2.1 *Le système* (2.1) *admet dans* $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ *un seul point d'équilibre, et il est* *donné par*

$$E = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right).$$

preuve. Il est claire que le système

$$\overline{x} = \frac{1}{1+\overline{y}}, \quad \overline{y} = \frac{1}{1+\overline{x}},$$

a une solution unique dans $I \times J$ laquelle

$$E = (\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right).$$

■

Théorème 2.2.2 *Le point d'équilibre E est localement asymptotiquement stable.*

preuve. Le système linéaire associé au système (2.1) autour du point d'équilibre

$$\overline{E} = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right) \in I^4 \times J^4$$

est donné par

$$X_{n+1} = AX_n, \quad X_n = (x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}, y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, y_{n-3})^T \tag{2.6}$$

où A est la matrice Jacobienne donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-3+\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Est son polynôme caractéristique

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= det\,(A - \lambda I_8) \\ &= \lambda^8 - \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Considérons les deux fonctions définies par

$$a(\lambda) = \lambda^8, \quad b(\lambda) = \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)^2.$$

On a

$$\left|\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right| < 1.$$

Alors

$$|b(\lambda)| < |a(\lambda)|, \ \forall \lambda : |\lambda| = 1.$$

Donc, d'après le Théorème de Rouché, tous les zéros de $P(\lambda) = a(\lambda) - b(\lambda)$ sont dans $|\lambda| < 1$. D'où, d'après le Théorème (1.2.1), E est localement asymptotiquement stable. ■

La stabilité asymptotique globale du système (2.1), fera l'objet du théorème suivant :

Théorème 2.2.3 *Le point d'équilibre E est globalement asymptotiquement stable.*

preuve. Soit $\{x_n, \ y_n\}_{n \geq -4}$ une solution positive du système (2.1). D'après le Théorème (2.2.2) il suffit de prouver que E est globalement attractif, c'est à dire

$$\lim_{n \to +\infty} (x_n, y_n) = E.$$

Pour cela, on prouve que pour $i = 1, \cdots, 8$ on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} (x_{8n+i}) &= \lim_{n \to +\infty} (y_{8n+i}) \\ &= \frac{-1+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Pour $i = 1, \ 2, \ 3, \ 4$, il d'écoule du Théorème (2.2.1) que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}(x_{8n+i}) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{F_{2n+1}+F_{2n}y_{i-4}}{F_{2n+2}+F_{2n+1}y_{i-4}}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1+\dfrac{F_{2n}}{F_{2n+1}}y_{i-4}}{\dfrac{F_{2n+2}}{F_{2n+1}}+y_{i-4}},
\end{aligned}\tag{2.7}$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}(y_{8n+i}) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{F_{2n+1}+F_{2n}x_{i-4}}{F_{2n+2}+F_{2n+1}x_{i-4}}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1+\dfrac{F_{2n}}{F_{2n+1}}x_{i-4}}{\dfrac{F_{2n+2}}{F_{2n+1}}+x_{i-4}}.
\end{aligned}\tag{2.8}$$

On utilise le corollaire (1.1.5), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}=\frac{1}{\alpha},\tag{2.9}$$

de même, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{F_{2n+2}}{F_{2n+1}}=\alpha.\tag{2.10}$$

Donc, de (2.9) et (2.10), on aura

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}(x_{8n+i}) &= \frac{1+\frac{1}{\alpha}y_{i-4}}{\alpha+y_{i-4}}=\frac{1}{\alpha}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\\
\lim_{n\to+\infty}(y_{8n+i}) &= \frac{1+\frac{1}{\alpha}x_{i-4}}{\alpha+x_{i-4}}=\frac{1}{\alpha}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.
\end{aligned}$$

Pour $i=5,\ 6,\ 7,\ 8$, il d'écoule du Théorème (2.2.1) que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}(x_{8n+i}) &= \frac{F_{2n+2}+F_{2n+1}x_{i-8}}{F_{2n+3}+F_{2n+2}x_{i-8}}\\
&= \frac{1+\dfrac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}}x_{i-8}}{\dfrac{F_{2n+3}}{F_{2n+2}}+x_{i-8}},
\end{aligned}\tag{2.11}$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}(y_{8n+i}) &= \frac{F_{2n+2}+F_{2n+1}y_{i-8}}{F_{2n+3}+F_{2n+2}y_{i-8}} \\
&= \frac{1+\dfrac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}}y_{i-8}}{\dfrac{F_{2n+3}}{F_{2n+2}}+y_{i-8}}. \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

On utilise le corollaire (1.1.5), on trouve

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}}=\frac{1}{\alpha}, \qquad (2.13)$$

de même, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{F_{2n+3}}{F_{2n+2}}=\alpha. \qquad (2.14)$$

Donc, de (2.13) et (2.14), on aura

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}(x_{8n+i}) &= \frac{1+\frac{1}{\alpha}x_{i-8}}{\alpha+x_{i-8}}=\frac{1}{\alpha}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \\
\lim_{n\to+\infty}(y_{8n+i}) &= \frac{1+\frac{1}{\alpha}y_{i-8}}{\alpha+y_{i-8}}=\frac{1}{\alpha}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.
\end{aligned}$$

■

2.2.3 Exemples numériques

Pour confirmer les résultats de cette partie, nous considérons les exemples numériques suivants :

Exemple 2.2.1 *Supposons* $x_0 = 2$, $x_{-1} = 1$, $x_{-2} = 2/3$, $x_{-3} = 5$, *et*, $y_0 = 3/2$, $y_{-1} = 4$, $y_{-2} = 1/2$, $y_{-3} = 1/4$.

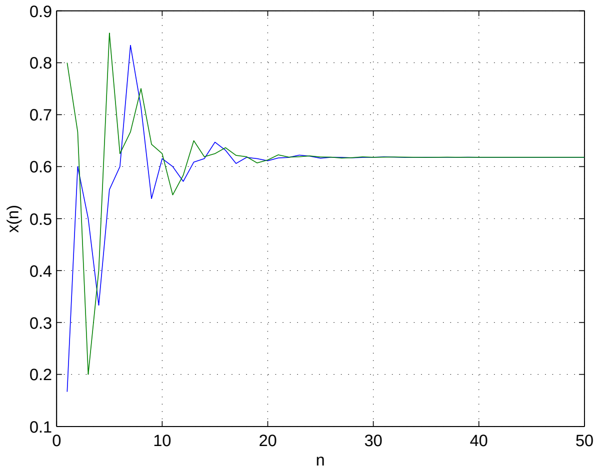

FIGURE 2.1 – Ce graphique représente le comportement de la solution du système (2.1).

Exemple 2.2.2 *Supposons* $x_0 = 3$, $x_{-1} = 9$, $x_{-2} = 35$, $x_{-3} = 16$, *et*, $y_0 = 17$, $y_{-1} = 29$, $y_{-2} = 21$, $y_{-3} = 4$.

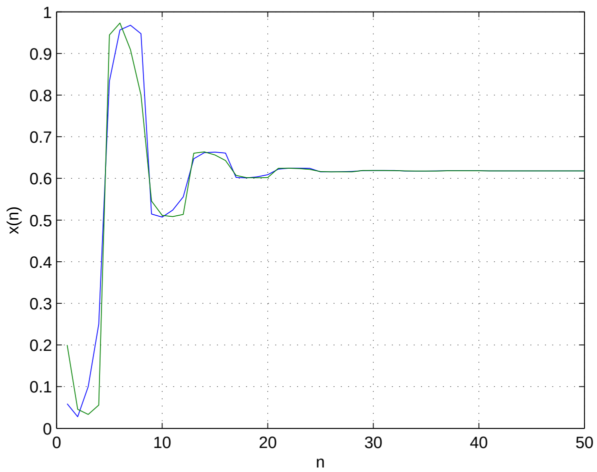

FIGURE 2.2 – Ce graphique représente le comportement de la solution du système (2.1).

2.3 Le système $x_{n+1} = \frac{1}{1-y_{n-3}},\ y_{n+1} = \frac{1}{1-x_{n-3}}$

Dans cette section nous étudions le comportement des solutions du systèmes d'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{1}{1-y_{n-3}}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{1-x_{n-3}},\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.15}$$

avec les valeurs initiales $x_{-3},\ x_{-2},\ x_{-1},\ x_0,\ y_{-3},\ y_{-2},\ y_{-1},$ et , $y_0 \notin \{0, 1\}$.

2.3.1 Périodicité des solutions

Le résultat suivant est consacré à la périodicité des solutions du systèmes (2.15).

Lemme 2.3.1 *Soit* $\{x_n, y_n\}_{n\geq -4}$ *une solution du système* (2.15). *Alors pour* $n = 0,\ 1,\ \cdots,$

$$\begin{aligned} x_{n+24} &= x_n, \\ y_{n+24} &= y_n, \end{aligned}$$

c'est à dire toute solution $\{x_n,\ y_n\}_{n\geq -4}$ *du système* (2.15) *sont périodique de période* 24.

preuve.

$$\begin{aligned} x_{n+24} &= x_{(n+23)+1} = \frac{1}{1-y_{n+20}} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{1-x_{n+16}}} \\ &= \frac{-1+x_{n+16}}{x_{n+16}} \\ &= \frac{-1+\frac{1}{1-y_{n+12}}}{\frac{1}{1-y_{n+12}}} = y_{n+12}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
x_{n+24} &= \frac{1}{1-x_{n+8}}\\
&= \frac{1}{1-\dfrac{1}{1-y_{n+4}}}\\
&= \frac{-1+y_{n+4}}{y_{n+4}}\\
&= \frac{-1+\dfrac{1}{1-x_n}}{\dfrac{1}{1-x_n}} = x_n.
\end{aligned}$$

Donc

$$x_{n+24} = x_n.$$

De même, on obtient

$$\begin{aligned}
y_{n+24} &= y_{(n+23)+1} = \frac{1}{1-x_{n+20}}\\
&= \frac{1}{1-\dfrac{1}{1-y_{n+16}}}\\
&= \frac{-1+y_{n+16}}{y_{n+16}}\\
&= \frac{-1+\dfrac{1}{1-x_{n+12}}}{\dfrac{1}{1-x_{n+12}}} = x_{n+12}\\
&= \frac{1}{1-y_{n+8}}\\
&= \frac{1}{1-\dfrac{1}{1-x_{n+4}}}\\
&= \frac{-1+x_{n+4}}{x_{n+4}}\\
&= \frac{-1+\dfrac{1}{1-y_n}}{\dfrac{1}{1-y_n}} = y_n.
\end{aligned}$$

Donc

$$y_{n+24} = y_n.$$

■

2.3.2 Forme des solutions

Le théorème suivant décrit la forme des solutions du système (2.15).

Théorème 2.3.1 *Soit* $\{x_n, y_n\}_{n\geq -4}$ *une solution du système* (2.15). *Alors pour* $n = 0,\ 1,\ \cdots,$

$$\begin{array}{lll}
x_{24n+i} = -\dfrac{1}{-1+y_{-4+i}}, & y_{24n+i} = -\dfrac{1}{-1+x_{-4+i}}, & i = 1,\ \cdots,\ 4,\\
x_{24n+i} = \dfrac{-1+x_{-8+i}}{x_{-8+i}}, & Y_{24n+i} = \dfrac{-1+x_{-8+i}}{x_{-8+i}}, & i = 5,\ \cdots,\ 8,\\
x_{24n+i} = y_{-12+i}, & Y_{24n+i} = x_{-12+i}, & i = 9,\ \cdots,\ 12,\\
x_{24n+i} = -\dfrac{1}{-1+x_{-16+i}}, & Y_{24n+i} = -\dfrac{1}{-1+y_{-16+i}}, & i = 13,\ \cdots,\ 16,\\
x_{24n+i} = \dfrac{-1+y_{-20+i}}{y_{-20+i}}, & Y_{24n+i} = \dfrac{-1+x_{-20+i}}{x_{-20+i}}, & i = 17,\ \cdots,\ 20,\\
x_{24n+i} = x_{-24+i}, & Y_{24n+i} = y_{-24+i}, & i = 21,\ \cdots,\ 24.
\end{array}$$

preuve. Pour $i = 1,\ \cdots,\ 4,$
par un calcule directe, on obtient de (2.15) que

$$x_i = -\frac{1}{-1+y_{-4+i}}, \quad y_i = -\frac{1}{-1+x_{-4+i}},$$

et on a d'après le lemme (2.3.1) les solutions sont périodique de période 24 donc

$$x_{24n+i} = x_i = -\frac{1}{-1+y_{-4+i}}, \quad y_{24n+i} = y_i = -\frac{1}{-1+x_{-4+i}}.$$

Pour $i = 5,\ \cdots,\ 8,$
par un calcule directe, on obtient de (2.15) que

$$x_i = \frac{-1+x_{-8+i}}{x_{-8+i}}, \quad y_i = \frac{-1+y_{-8+i}}{y_{-8+i}},$$

et on a d'après le lemme (2.3.1) les solutions sont périodique de période 24 donc

$$x_{24n+i} = x_i = \frac{-1 + x_{-8+i}}{x_{-8+i}}, \quad y_{24n+i} = y_i = \frac{-1 + y_{-8+i}}{y_{-8+i}}.$$

Pour $i = 9, \cdots, 12$,

par un calcule directe, on obtient de (2.15) que

$$x_i = y_{-12+i}, \quad y_i = x_{-12+i},$$

et on a d'après le lemme (2.3.1) les solutions sont périodique de période 24 donc

$$x_{24n+i} = x_i = y_{-12+i}, \quad y_{24n+i} = y_i = x_{-12+i}.$$

Pour $i = 13, \cdots, 16$,

par un calcule directe, on obtient de (2.15) que

$$x_i = -\frac{1}{-1 + x_{-16+i}}, \quad y_i = -\frac{1}{-1 + y_{-16+i}},$$

et on a d'après le lemme (2.3.1) les solutions sont périodique de période 24 donc

$$x_{24n+i} = x_i = -\frac{1}{-1 + x_{-16+i}}, \quad y_{24n+i} = y_i = -\frac{1}{-1 + y_{-16+i}}.$$

Pour $i = 17, \cdots, 20$,

par un calcule directe, on obtient de (2.15) que

$$x_i = \frac{-1 + y_{-20+i}}{y_{-20+i}}, \quad y_i = \frac{-1 + x_{-20+i}}{x_{-20+i}},$$

et on a d'après le lemme (2.3.1) les solutions sont périodique de période 24 donc

$$x_{24n+i} = x_i = \frac{-1 + y_{-20+i}}{y_{-20+i}}, \quad y_{24n+i} = y_i = \frac{-1 + x_{-20+i}}{x_{-20+i}}.$$

Pour $i = 21, \cdots, 24$,

par un calcule directe, on obtient de (2.15) que

$$x_i = x_{-24+i}, \quad y_i = y_{-24+i},$$

et on a d'après le lemme (2.3.1) les solutions sont périodique de période 24 donc

$$x_{24n+i} = x_i = x_{-24+i}, \quad y_{24n+i} = y_i = y_{-24+i}.$$

■

2.3.3 Exemples numériques

Nous considérons les exemples numériques suivants :

Exemple 2.3.1 *Supposons* $x_0 = 2,\ x_{-1} = 9,\ x_{-2} = 3/2,\ x_{-3} = 6$, *et*, $y_0 = 1/2,\ y_{-1} = 4,\ y_{-2} = 1/3,\ y_{-3} = 1/8.$

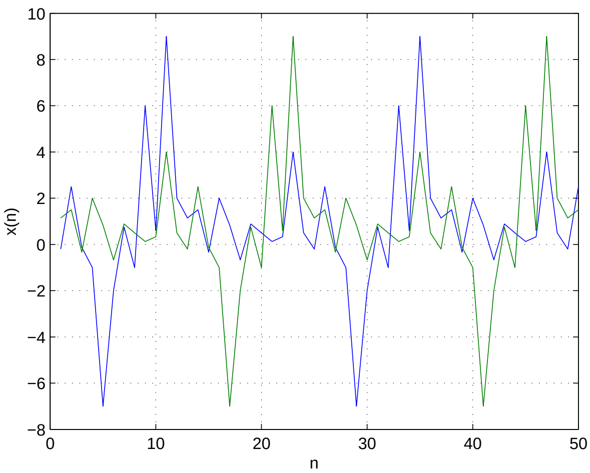

FIGURE 2.3 – Ce graphique représente le comportement de la solution du système (2.15), avec les valeurs initiales $x_0 = 2,\ x_{-1} = 9,\ x_{-2} = 3/5,\ x_{-3} = 6$, et, $y_0 = 1/2,\ y_{-1} = 4,\ y_{-2} = 1/3,\ y_{-3} = 1/8.$

Exemple 2.3.2 *Supposons* $x_0 = 10,\ x_{-1} = 2/9,\ x_{-2} = 21,\ x_{-3} = 88$, *et*, $y_0 = 11,\ y_{-1} = 29/13,\ y_{-2} = 24,\ y_{-3} = 106.$

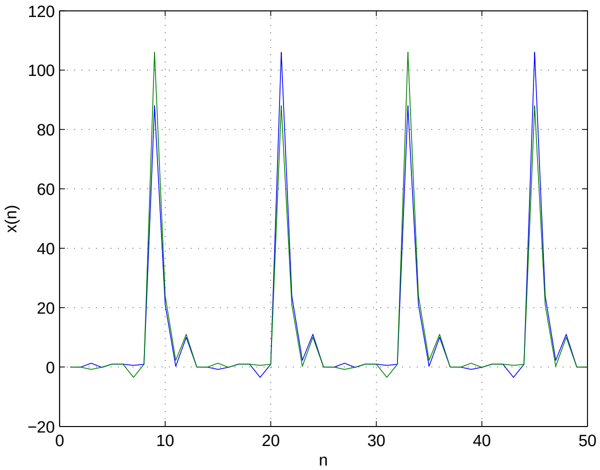

FIGURE 2.4 – Ce graphique représente le comportement de la solution du système (2.15), avec les valeurs initiales $x_0 = 10,\ x_{-1} = 2/9,\ x_{-2} = 21,\ x_{-3} = 88$, et, $y_0 = 11,\ y_{-1} = 29/13,\ y_{-2} = 24,\ y_{-3} = 106.$

CHAPITRE 3

LA STABILITÉ GLOBALE D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES D'ORDRES DEUX

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions la stabilité globale de la solution du système d'équations aux différences

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_{n-1}}{a + b y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{\alpha + \beta y_{n-1}}{a + b x_n}. \tag{3.1}$$

Où les paramètres $a, b, \alpha,$ et β et les valeurs initiales $x_0, x_{-1}, y_0,$ et y_{-1} sont des nombres réels strictement positifs.

3.2 L'invariance

Dans le théorème suivant nous prouvons que les solutions du système (3.1) sont bornées.

Théorème 3.2.1 *Supposons que $\beta < a$, $x_0 > x_{-1}$, et $y_0 > y_{-1}$, alors pour tout solution positive $\{x_n, y_n\}_{n\geq -1}$ du système* (3.1) *est borné.*

preuve. Pour chaque solution positif $\{x_n, y_n\}_{n\geq -1}$ de système (3.1), on a

$$x_{n+1} \leq A + Bx_{n-1}, \quad y_{n+1} \leq A + By_{n-1},\ n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{3.2}$$

avec $A = \frac{\alpha}{a}$ et $B = \frac{\beta}{a}$. Considérons le système d'équations aux différences linéaire

$$u_{n+1} = A + Bu_{n-1},\ n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{3.3}$$

$$v_{n+1} = A + Bv_{n-1},\ n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{3.4}$$

L'équation caractéristique de (3.3) et (3.4) est

$$\lambda^2 - B - A = 0.$$

- La solution de l'équation homogène
  l'équation caractéristique est
  $$\lambda^2 - B = 0.$$
  Les racines caractéristiques sont $\lambda_1 = \sqrt{B},\ \lambda_2 = -\sqrt{B}$
  donc, les solutions d'équations homogènes associées à (3.3) et (3.4) sont
  $$u_n = C_1 B^{n/2} + C_2(-\sqrt{B})^n,\ n = 1, 2, \cdots,$$
  $$v_n = C_3 B^{n/2} + C_4(-\sqrt{B})^n,\ n = 1, 2, \cdots.$$
- La solution particulière
  on a A est un constant donc la solution particulière est un constant C.

C est un solution de (3.3) et (3.4) donc

$$C = A + CB$$

donc

$$C = \frac{A}{1-B}.$$

- Les solutions générales d'équations (3.3) et (3.4) sont données par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{A}{1-B} + C_1 B^{n/2} + C_2(-\sqrt{B})^n, n = 1, 2, \cdots, && (3.5) \\ v_n &= \frac{A}{1-B} + C_3 B^{n/2} + C_4(-\sqrt{B})^n, n = 1, 2, \cdots, && (3.6) \end{aligned}$$

avec C_i pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ dépendant aux conditions initiales, $u_{-1}, u_0, v_{-1},$ et, v_0.
On a $\beta < a$, donc $B < 1$, alors $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ sont bornées. D'autre part supposons que $u_0 > u_{-1}$, $v_0 > v_{-1}$ alors $\{u_n\}$, et $\{v_n\}$ sont croissantes. En effet

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= A + Bu_{n-1} - (A + Bu_{n-2}) \\ &= B(u_{n-1} - u_{n-2}) \\ &= B^2(u_{n-3} - u_{n-4}) \\ &= B^3(u_{n-5} - u_{n-6}) \\ &\vdots \\ &= B^{\frac{n+2}{2}}(u_0 - u_{-1}) > 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{A}{1-B} = \frac{\alpha}{a-\beta}, \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{A}{1-B} = \frac{\alpha}{a-\beta}.$$

Donc

$$u_n \le \frac{\alpha}{a-\beta},$$

$$v_n \le \frac{\alpha}{a-\beta}.$$

On suppose que $u_{-1} = x_{-1}, u_0 = x_0, v_{-1} = y_{-1}$, et, $v_0 = y_0$, donc par comparaison on trouve

$$x_n \leq \frac{\alpha}{a-\beta} = U, \quad y_n \leq \frac{\alpha}{a-\beta} = U,\ n = 1, 2, \cdots. \tag{3.7}$$

De (3.1) et (3.7), on obtient

$$x_{n+1} \geq \frac{\alpha}{a+by_n} \geq \frac{\alpha(a-\beta)}{a(a-\beta)+b\alpha} = L, \quad y_{n+1} \geq \frac{\alpha}{a+bx_n} \geq \frac{\alpha(a-\beta)}{a(a-\beta)+b\alpha} = L. \tag{3.8}$$

Donc, de (3.7) et 3.8), on aura

$$L \leq x_n \leq U, \quad L \leq y_n \leq U,\ n = 1, 2, \cdots. \tag{3.9}$$

■

Corollaire 3.2.1 *Soit* $\{(x_n, y_n)\}$ *est un solution du système* (3.1)*. Supposons que* $\beta < a$*, et* $x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 \in [L, U]$ *avec* $x_0 > x_{-1}$*,* $y_0 > y_{-1}$*. Alors,* $[L, U] \times [L, U]$ *est un intervalle invariant du système* (3.1).

3.3 Stabilité locale et globale des points d'équilibres

Le théorème suivant montre l'existence et l'unicité d'un point d'équilibre positif du système (3.1).

Théorème 3.3.1 *Supposons que* $\beta < a$*. Alors, il existe un seul point d'équilibre positif du système* (3.1) *dans* $[L, U] \times [L, U]$*, si la condition suivant est satisfaite :*

$$\alpha^2 b^2 < \left(a^2 + b(a-\beta)L - 2a\beta + \alpha b + \beta^2\right)^2. \tag{3.10}$$

preuve. Considérons le système d'équations suivantes :

$$x = \frac{\alpha+\beta x}{a+by}, \quad y = \frac{\alpha+\beta y}{a+bx}. \tag{3.11}$$

Supposons que $(x, y) \in [L, U] \times [L, U]$, et on utilise le système (3.11). Alors

$$x = \frac{\alpha}{a - \beta + by}, \quad y = \frac{\alpha}{a - \beta + bx}. \tag{3.12}$$

Posons

$$F(x) = \frac{\alpha}{a - \beta + bf(x)} - x, \tag{3.13}$$

où

$$f(x) = \frac{\alpha}{a - \beta + bx}, \; x \in [L, U]. \tag{3.14}$$

Alors, on obtient

$$f(L) = \frac{\alpha}{a - \beta}\left(\frac{a(a-\beta) + b\alpha}{a(a-\beta) + 2b\alpha}\right) < \frac{\alpha}{a - \beta}. \tag{3.15}$$

Donc

$$\begin{aligned} F(L) &= \frac{\alpha}{a - \beta + bf(L)} - L > \frac{\alpha(a-\beta)}{(a-\beta)^2 + b\alpha} - L \\ &= \frac{\alpha(a-\beta)}{(a-\beta)^2 + b\alpha} - \frac{\alpha(a-\beta)}{a(a-\beta) + b\alpha} > 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

De même, on obtient

$$\begin{aligned} F(U) &= \frac{\alpha}{a - \beta + bf(U)} - U \\ &= \frac{\alpha}{a - \beta}\left(\frac{(a-\beta)^2 + \alpha b}{(a-\beta)^2 + 2\alpha b} - 1\right) < 0. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Donc $F(x) = 0$ admet au moins une solution positive dans $[L, U]$. D'autre part, si la condition (3.10) est satisfait, on obtient

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\alpha^2 b^2\left(\left(a^2 + abx - 2a\beta + \alpha b + \beta^2 - \beta bx\right)^2\right)^{-1}\right) - 1 \\ &\leq \left(\alpha^2 b^2\left(\left(a^2 + b(a-\beta)L - 2a\beta + \alpha b + \beta^2\right)^2\right)^{-1}\right) - 1 < 0. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Alors F est décroissante, donc $F(x) = 0$ admet une seul solution dans $[L, U]$. ∎

Théorème 3.3.2 *Supposons que*

$$b^2U^2 + \beta^2 + 2\beta(a + bL) < (a + bL)^2.$$

Alors, le seul point d'équilibre $(\overline{x}, \overline{y})$ *du système* (3.1) *est localement asymptotiquement stable.*

preuve. Le système linéaire associée au système (3.1) autour du point d'équilibre $(\overline{x}, \overline{y})$ est donné par

$$x_{n+1} = F_j(\overline{x}, \overline{y})x_n, \quad x_n = (x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}).$$

Où $F_j(\overline{x}, \overline{y})$ est la matrice Jacobienne donnée par

$$F_j(\overline{x}, \overline{y}) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\beta}{a + b\overline{y}} & -\dfrac{b\overline{x}}{a + b\overline{y}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{b\overline{y}}{a + b\overline{x}} & 0 & 0 & \dfrac{\beta}{a + b\overline{x}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est son polynôme caractéristique est

$$p(\lambda) = \lambda^4 - \left(\frac{b^2\overline{xy}}{(a + b\overline{y})(a + b\overline{x})} + \frac{\beta}{a + b\overline{y}} + \frac{\beta}{a + b\overline{x}}\right)\lambda^2 + \frac{\beta^2}{(a + b\overline{y})(a + b\overline{x})}. \tag{3.19}$$

Considérons les deux fonctions définies par

$$\phi(\lambda) = \lambda^4,$$

et

$$\psi(\lambda) = \left(\frac{b^2\overline{xy}}{(a + b\overline{y})(a + b\overline{x})} + \frac{\beta}{a + b\overline{y}} + \frac{\beta}{a + b\overline{x}}\right)\lambda^2 - \frac{\beta^2}{(a + b\overline{y})(a + b\overline{x})}.$$

Supposons que

$$b^2U^2 + \beta^2 + 2\beta(a + bL) < (a + bL)^2$$

et $|\lambda| = 1$, alors

$$
\begin{aligned}
|\psi(\lambda)| &< \left(\frac{b^2\overline{xy}}{(a+b\overline{y})(a+b\overline{x})} + \frac{\beta}{a+b\overline{y}} + \frac{\beta}{a+b\overline{x}}\right) + \frac{\beta^2}{(a+b\overline{y})(a+b\overline{x})} \\
&< \frac{b^2U^2}{(a+bL)^2} + \frac{2\beta}{a+bL} + \frac{\beta^2}{(a+bL)^2} \\
&= \frac{b^2U^2+\beta^2+2\beta(a+bL)}{(a+bL)^2} < 1.
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

Donc, d'après le théorème de Rouché, tous les zéros de $p(\lambda) = \phi(\lambda) - \psi(\lambda)$ sont dans $|\lambda| < 1$. D'où, d'après le théorème (1.2.1), $(\overline{x}, \overline{y})$ est localement asymptotiquement stable.

■

La stabilité asymptotique globale du système (3.1), sera l'objet du théorème suivant :

Théorème 3.3.3 *Supposons que*

$$\alpha^2 b^2 < \left(a^2 + b(a-\beta)L - 2a\beta + \alpha b + \beta^2\right)^2,$$

$$b^2U^2 + \beta^2 + 2\beta(a+bL) < (a+bL)^2,$$

$$(a-\beta+bL)^4 > \alpha^2 b^2.$$

Alors, le point d'équilibre $(\overline{x}, \overline{y})$ *du système* (3.1) *est globalement asymptotiquement stable.*

preuve. Soit $\{(x_n, y_n)\}_{n\geq -1}$ une solution positive du système (3.1) avec $x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 \in [L, U]$. D'après le théorème (3.3.2) il suffit de prouver que $(\overline{x}, \overline{y})$ est globalement attractif, c'est à dire

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n, y_n) = (\overline{x}, \overline{y}).$$

Soient f, g deux fonctions définies par

$$
\begin{aligned}
f : [L,U]\times[L,U] &\to [L,U] \\
(x,y) &\mapsto \frac{\alpha+\beta x}{a+by}
\end{aligned}
,\qquad
\begin{aligned}
g : [L,U]\times[L,U] &\to [L,U] \\
(x,y) &\mapsto \frac{\alpha+\beta y}{a+bx}
\end{aligned}
.
$$

Il est claire que f est croissante par rapport à x et décroissante par rapport à y et g est décroissante par rapport à x et croissante par rapport à y.
Supposons que (m_1, M_1, m_2, M_2) est un solution du système

$$\begin{aligned} m_1 &= f(m_1, M_2), \quad M_1 = f(M_1, m_2), \\ m_2 &= g(M_1, m_2), \quad M_2 = g(m_1, M_2). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Donc, on a

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{\alpha + \beta m_1}{a + bM_2}, \quad M_1 = \frac{\alpha + \beta M_1}{a + bm_2}, \\ m_2 &= \frac{\alpha + \beta m_2}{a + bM_1}, \quad M_2 = \frac{\alpha + \beta M_2}{a + bm_1}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} L &\leq m_1, \quad M_1 \leq U, \\ L &\leq m_2, \quad M_2 \leq U. \end{aligned} \tag{3.23}$$

De (3.22), on obtient

$$m_1 = \frac{\alpha}{a - \beta + bM_2}, \quad M_1 = \frac{\alpha}{a - \beta + bm_2}, \tag{3.24}$$

$$m_2 = \frac{\alpha}{a - \beta + bM_1}, \quad M_2 = \frac{\alpha}{a - \beta + bm_1}. \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned} M_1 - m_1 &= \alpha\left(\frac{1}{a - \beta + bm_2} - \frac{1}{a - \beta + bM_2}\right) \\ &= \frac{\alpha b\,(M_2 - m_2)}{(a - \beta + bm_2)\,(a - \beta + bM_2)} \\ &\leq \frac{\alpha b\,(M_2 - m_2)}{(a - \beta + bL)^2}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

De même, de (3.25), on obtient

$$M_2 - m_2 \leq \frac{\alpha b(M_1 - m_1)}{(a - \beta + bL)^2}. \tag{3.27}$$

De (3.26) et (3.27), on aura

$$\left(k - \alpha^2 b^2\right)(M_1 - m_1) \leq 0, \tag{3.28}$$

et

$$\left(k - \alpha^2 b^2\right)(M_2 - m_2) \leq 0, \tag{3.29}$$

avec

$$k = (a - \beta + bL)^4 > \alpha^2 b^2.$$

Alors $M_1 - m_1 \leq 0$ et $M_2 - m_2 \leq 0$
et on a $M_1 \geq m_1$ et $M_2 \geq m_2$ donc $M_1 = m_1$ et $M_2 = m_2$.
Donc, d'après le théorème (1.2.2)

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n, y_n) = (\overline{x}, \overline{y}). \tag{3.30}$$

Alors, le seul point d'équilibre $(\overline{x}, \overline{y})$ du système (3.1) est globalement attractif, et d'après le théorème (3.3.2), $(\overline{x}, \overline{y})$ est globalement asymptotiquement stable. ■

3.4 L'ordre de convergence

Les résultats suivants [3], [8] donnent l'ordre de convergence pour les solutions d'un système d'équations aux différences.
Soit le système d'équations aux différences

$$X_{n+1} = (A + B_n)X_n, \; n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.31}$$

où X_n est un vecteur, $A \in C^{m\times m}$ est une matrice constante, et $B : \mathbb{Z}^+ \to C^{m\times m}$ est une matrice fonctionnelle satisfaisant

$$||B_n|| \to 0, \tag{3.32}$$

quand $n \to \infty$.

Théorème 3.4.1 *(Première Théorème de Perron) Supposons que la condition* (3.32) *est vérifier. Si X_n est une solution de* (3.31)*, alors soit $X_n = 0$ pour chaque n assez grand où*

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{||X_{n+1}||}{||X_n||}, \tag{3.33}$$

existe et est égale au module de l'une des valeurs propres de la matrice $F_j(\overline{x}, \overline{y})$.

Théorème 3.4.2 *(Deuxième Théorème de Perron) Supposons que la condition* (3.32) *est vérifier.*
Si X_n est une solution de (3.31)*, alors soit $X_n = 0$ pour chaque n assez grand, où*

$$\rho = \lim_{n\to\infty} (||X_n||)^{1/n}, \tag{3.34}$$

existe et est égale au module de l'une des valeurs propres de la matrice $F_j(\overline{x}, \overline{y})$.

On s'intéresse ici à l'estimation de l'ordre de convergence d'une solution du système (3.1) qui converge vers le point d'équilibre $(\overline{x}, \overline{y})$, avec $(\overline{x}, \overline{y}) \in [L, U] \times [L, U]$.
On a pour $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - \overline{x} &= \frac{\alpha + \beta x_{n-1}}{a + by_n} - \frac{\alpha + \beta\overline{x}}{a + b\overline{y}} \\
&= \frac{(\alpha + \beta x_{n-1})(a + b\overline{y}) - (\alpha + \beta\overline{x})(a + by_n)}{(\alpha + \beta y_n)(a + b\overline{y})} \\
&= \frac{a\alpha + b\alpha\overline{y} + a\beta x_{n-1} + b\beta x_{n-1}\overline{y} - a\alpha - b\alpha y_n - a\beta\overline{x} - b\beta\overline{x}y_n}{(\alpha + by_n)(a + b\overline{y})} \\
&= \frac{\overline{x}(a + b\overline{y} - \beta)b\overline{y} + a\beta x_{n-1} + b\beta\overline{y}x_{n-1} - (a + b\overline{y} - \beta)b\overline{x}y_n - a\beta\overline{x} - b\beta\overline{x}y_n}{(a + by_n)(a + b\overline{y})} \\
&= \frac{ab\overline{xy} + b^2\overline{xy}^2 - b\beta\overline{xy} + a\beta x_{n-1} + b\beta\overline{y}x_{n-1} - ab\overline{x}y_n - b^2\overline{xy}y_n + b\beta\overline{x}y_n - a\beta\overline{x} - b\beta\overline{x}y_n}{(a + by_n)(a + b\overline{y})}.
\end{aligned}$$

Après simplification, on obtient

$$
\begin{aligned}
x_{n+1}-\overline{x} &= \frac{(\beta x_{n-1}-\beta\overline{x}-b\overline{x}y_n+b\overline{xy})(a+b\overline{y})}{(a+by_n)(a+b\overline{y})}\\
&= \frac{\beta(x_{n-1}-\overline{x})-b\overline{x}(y_n-\overline{y})}{a+by_n}\\
&= \frac{\beta(x_{n-1}-\overline{x})}{a+by_n}-\frac{b\overline{x}(y_n-\overline{y})}{a+by_n}, \qquad (3.35)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
y_{n+1}-\overline{y} &= \frac{\alpha+\beta y_{n-1}}{a+bx_n}-\frac{\alpha+\beta\overline{y}}{a+b\overline{x}}\\
&= \frac{(\alpha+\beta y_{n-1})(a+b\overline{x})-(\alpha+\beta\overline{y})(a+bx_n)}{(\alpha+\beta x_n)(a+b\overline{x})}\\
&= \frac{a\alpha+b\alpha\overline{x}+a\beta y_{n-1}+b\beta y_{n-1}\overline{x}-a\alpha-b\alpha x_n-a\beta\overline{y}-b\beta\overline{y}x_n}{(\alpha+bx_n)(a+b\overline{x})}\\
&= \frac{\overline{y}(a+b\overline{x}-\beta)b\overline{x}+a\beta y_{n-1}+b\beta\overline{x}y_{n-1}-(a+b\overline{x}-\beta)b\overline{y}x_n-a\beta\overline{y}-b\beta\overline{y}x_n}{(a+bx_n)(a+b\overline{x})}\\
&= \frac{ab\overline{yx}+b^2\overline{yx}^2-b\beta\overline{yx}+a\beta y_{n-1}+b\beta\overline{x}y_{n-1}-ab\overline{y}x_n-b^2\overline{yx}x_n+b\beta\overline{y}x_n-a\beta\overline{y}-b\beta\overline{y}x_n}{(a+bx_n)(a+b\overline{x})}.
\end{aligned}
$$

Après simplification, on obtient

$$
\begin{aligned}
y_{n+1}-\overline{y} &= \frac{(\beta y_{n-1}-\beta\overline{y}-b\overline{y}x_n+b\overline{yx})(a+b\overline{x})}{(a+bx_n)(a+b\overline{x})}\\
&= \frac{\beta(y_{n-1}-\overline{y})-b\overline{y}(x_n-\overline{x})}{a+bx_n}\\
&= \frac{\beta(y_{n-1}-\overline{y})}{a+bx_n}-\frac{b\overline{y}(x_n-\overline{x})}{a+bx_n}. \qquad (3.36)
\end{aligned}
$$

Soit $e_n^1=x_n-\overline{x}$ et $e_n^2=y_n-\overline{y}$, alors on a

$$
\begin{aligned}
e_{n+1}^1 &= a_ne_{n-1}^1+b_ne_n^2,\\
e_{n+1}^2 &= c_ne_n^1+d_ne_{n-1}^2,
\end{aligned}
$$

avec

$$\begin{array}{ll} a_n = \frac{\beta}{a+by_n}, & b_n = -\frac{b\overline{x}}{a+by_n}, \\ c_n = -\frac{b\overline{y}}{a+bx_n}, & d_n = \frac{\beta}{a+bx_n}. \end{array} \tag{3.37}$$

Puisque $\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$ et $\lim_{n\to\infty} y_n = \overline{y}$, on obtient

$$\begin{array}{ll} \lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{\beta}{a+b\overline{y}}, & \lim_{n\to\infty} b_n = -\dfrac{b\overline{x}}{a+b\overline{y}}, \\ \lim_{n\to\infty} c_n = -\dfrac{b\overline{y}}{a+b\overline{x}}, & \lim_{n\to\infty} d_n = \dfrac{\beta}{a+b\overline{x}}. \end{array} \tag{3.38}$$

C'est à dire on peut être écrite le système sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} e^1_{n+1} \\ e^1_n \\ e^2_{n+1} \\ e^2_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\beta}{a+b\overline{y}} & -\dfrac{b\overline{x}}{a+b\overline{y}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{b\overline{y}}{a+b\overline{x}} & 0 & 0 & \dfrac{\beta}{a+b\overline{x}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} e^1_n \\ e^1_{n-1} \\ e^2_n \\ e^2_{n-1} \end{bmatrix}.$$

De les équations linéaires associés au système (3.1) autour du point d'équilibre $(\overline{x}, \overline{y})$. En utilisant les théorèmes de perron, on obtient le résultat suivant :

Théorème 3.4.3 *Soient* $\{(x_n, y_n)\}$ *est une solution positive du système* (3.1) *où* $\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$ *et* $\lim_{n\to\infty} y_n = \overline{y}$ *avec* $(\overline{x}, \overline{y}) \in [L, U] \times [L, U]$. *Alors, le vecteur d'erreur*

$$e_n = \begin{bmatrix} e^1_n \\ e^1_{n-1} \\ e^2_n \\ e^2_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Satisfait les relations asymptotiques

$$\begin{array}{rcl} \lim_{n\to\infty} (\|e_n\|)^{1/n} & = & |\lambda_{1,2,3,4} F_j(\overline{x}, \overline{y})|, \\ \lim_{n\to\infty} \dfrac{\|e_{n+1}\|}{\|e_n\|} & = & |\lambda_{1,2,3,4} F_j(\overline{x}, \overline{y})|. \end{array} \tag{3.39}$$

Avec ρ égale le module de l'une des valeurs propres de la matrice Jacobienne $F_j(\overline{x}, \overline{y})$.

3.5 Exemples numériques

Pour confirmer les résultats de cet chapitre, nous considérons les exemples numériques suivant :

Exemple 3.5.1 *Si on prend $\alpha = 4, \beta = 9, a = 12$, et $b = 0,04$, le système* (3.1) *prend la forme*

$$x_{n+1} = \frac{4 + 9x_{n-1}}{12 + 0,04y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{4 + 9y_{n-1}}{12 + 0,04x_n}. \tag{3.40}$$

Toutes les conditions du théorème (3.3.3) *sont satisfaites et* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (\overline{x}, \overline{y})$. *Soient* $x_{-1} = 0,4,\ x_0 = 1,25,\ y_{-1} = 0,8,\ y_0 = 1,2$.

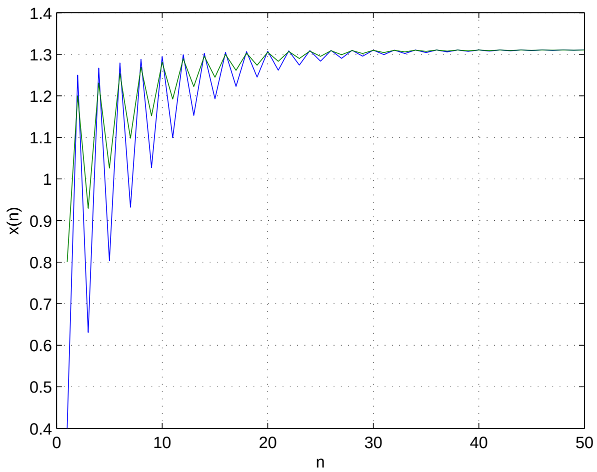

Figure 3.1 – Ce graphique représente le comportement de la solution du système (3.40).

Exemple 3.5.2 *Si on prend $\alpha = 10, \beta = 14, a = 15,5$, et $b = 0,002$, le système* (3.1) *prend la forme*

$$x_{n+1} = \frac{10 + 14x_{n-1}}{15,5 + 0,002y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{10 + 14y_{n-1}}{15,5 + 0,002x_n}. \tag{3.41}$$

Toutes les conditions du théorème (3.3.3) *sont satisfaites et* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (\overline{x}, \overline{y})$. *Soient* $x_{-1} = 0,5,\ x_0 = 6,\ y_{-1} = 1,\ y_0 = 5$.

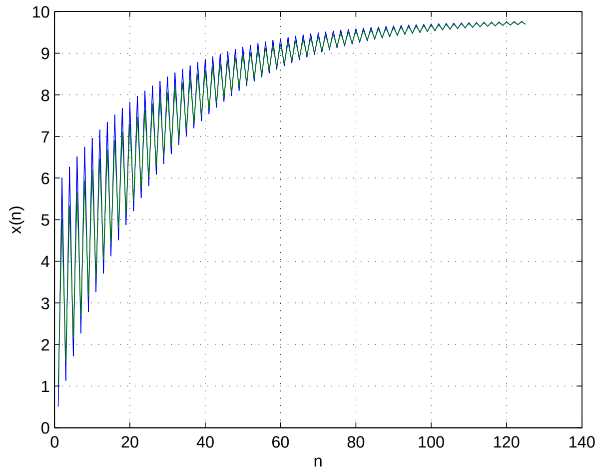

FIGURE 3.2 – Ce graphique représente le comportement de la solution du système (3.41).

Exemple 3.5.3 *Si on prend* $\alpha = 3, \beta = 6, a = 6$, *et* $b = 27$, *le système* (3.1) *prend la forme*

$$x_{n+1} = \frac{3 + 6x_{n-1}}{6 + 27y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{3 + 6y_{n-1}}{6 + 27x_n}. \tag{3.42}$$

Les conditions du théorème (3.3.3) *sont pas satisfaites. Soient* $x_{-1} = 0,4$, $x_0 = 2$, $y_{-1} = 0,66$, $y_0 = 2,5$.

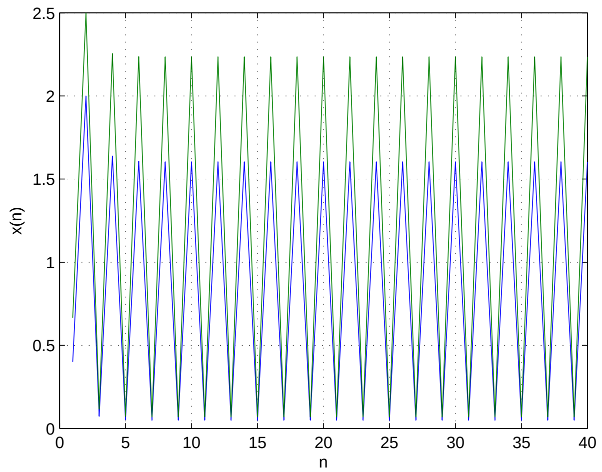

FIGURE 3.3 – Ce graphique représente le comportement de la solution du système (3.42).

CONCLUSION

Le but de ce mémoire est l'étude de comportement des solutions de quelques systèmes d'équations aux différences non linéaires.
Nous nous somme intéresse dans le deuxième chapitre a la forme et la périodicité des solutions des deux système d'équation suivant :

$$x_{n+1} = \frac{1}{1 + y_{n-3}}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{1 + x_{n-3}}, \ n \in \mathbb{N}_0,$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{1 - y_{n-3}}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{1 - x_{n-3}}, \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Le troisième chapitre a été consacré à l'étude de la stabilité globale du seul point d'équilibre positif du système suivant :

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_{n-1}}{a + b y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{\alpha + \beta y_{n-1}}{a + b x_n}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] I. Dekkar, *Variations sur les équations aux différences (non) autonomes*,Thèse De Doctorat, Université Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel, (2017).

[2] Q. Din, T. F. Ibrahim, K. A. Khan, *Behavior of a competitive system of second-order difference equations*, The Scientific World Journal, (2014), Article ID 283982, 9 pages.

[3] S. Elaydi, *An introduction to difference equation*, Springer, 1999.

[4] N. Finizio and G. Ladas, *An introduction to differential equation and difference equations, fourier series, and partial differential equation*, Wadsworth publishing company, 1982.

[5] E. A. Grove and G. Ladas, *Periodicities in nonlinear difference equations*, Vol. 1 of *Advances in Discrete Mathematics and Application*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Fla, USA, 2005.

[6] Y. Halim, *Global character of systems of rational difference equations*, Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications, (3)(1)(2015), 204-214.

[7] Y. Halim, *A system of difference equations with solutions associated to fibonacci numbers*, International Journal of Difference Equations, (11)(2016), 65-77.

[8] M. Pituk, *More on Poincare's and Peron's theorems for difference equations*, Journal of Difference Equations and Applications, (8)(2002), 201-216.

[9] E. M. E. Zayed, M. A. El-moneam, Finizio and G. Ladas, *An introduction to differential equation and difference equations, fourier series, and partial differential equation*, Wadsworth publishing company, 1982.

Résumé

L’objectif principal de ce mémoire est l’étude du comportement des solutions, et l’existence des solutions périodiques de certains systèmes d’équations aux différences non linéaires de type rationnelles.

Mots clés : *Systèmes d’équations aux différences, stabilité asymptotique, périodicité, l’ordre de convergence.*

Abstract

The aim of this work is to study the behavior of solutions, and existence of periodic solutions of some systems of nonlinear rational difference equations.

Keywords: *Systems of difference equations, asymptotic stability, periodicity, rate of convergence.*

ملخــــص

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة السلوك التقاربي للحلول و وجود حلول دورية لمجموعة جمل معادلات فروق كسرية غير خطية.

الكلمات الأساسية: جمل معادلات الفروق، الاستقرار، الدورية، رتبة التقارب.