

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



N° Réf :.....

Centre Universitaire  
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

## Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques  
Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées

# Algorithme d'optimisation chaotique basée sur la densité de l'application de Lozi

Préparé par : Sebaai Salima  
Barouk Sara

Devant le jury

<i>Kaouache Smail..... M.A.A</i>	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Président
<i>Bououden Rabah.....M.A.A</i>	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Rapporteur
<i>Mehazzem Allal .....M.A.A</i>	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Examineur

Année Universitaire : 2016/2017

## **Abstract**

Chaos optimization algorithms (COAs) usually utilize different chaotic maps(logistic, tent, Hénon, Lozi,...) to generate the pseudo-random numbers mapped as the design variables for global optimization. In this paper we are going to propose new technique to improve the chaotic optimization algorithm by using some transformations to modify the density of the map instead of changing it.

## **Résumé**

Les algorithmes d'optimisations chaotiques (COAs) utilisent habituellement différentes applications chaotiques (logistique, tente, Hénon, Lozi, ...) pour générer des nombres pseudo-aléatoires dans le but d'utiliser à l'optimisation globale. Dans cette mémoire, nous proposons une nouvelle technique pour améliorer l'algorithme d'optimisation chaotique en utilisant certaines transformations pour modifier la densité de l'application chaotique de changer elle-même.

# Remerciements

Nous tenons à remercier en premier et avant tout, notre créateur "ALLAH", qui nous aide à réaliser ce travail. Nous remercions nos chers parents, frères, sœurs et toute la famille pour leur inestimable soutien.

Nos sincères gratitudee et remerciements à notre encadreur

*"Bououden Rabah "*

pour le grand soutien moral et leur aides précieuses qui nous apportez durant la réalisation de notre projet de la fin d'étude.

Nous adressons également mes remerciements chaleureux aux notre jury :  
*"MS. Mehazzem Allal" & "Kaouache Smail"* et aussi aux membres de l'institut des sciences et de la technologie et à tous ceux qui ont pris part de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Nous souhaitons la réussite à tous les étudiants des sections Mathématiques et Informatique. Merci infiniment....

# Table des matières

<b>Introduction Générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Notion de système dynamique discret</b>	<b>3</b>
1.1 Système dynamique discret . . . . .	3
1.1.1 Point fixe et point périodique . . . . .	6
1.1.2 Étude graphique des systèmes dynamiques . . . . .	9
1.1.2.1 Systèmes dynamiques discrets de dimension 1 . . . . .	9
1.1.2.2 Systèmes dynamiques de dimension 2 (Portraits de phases)	10
1.2 Les attracteurs . . . . .	11
1.2.1 Attracteur . . . . .	12
1.2.2 Les différents types d'attracteurs . . . . .	13
1.2.2.1 Attracteurs réguliers . . . . .	13
1.2.2.2 Attracteur chaotique . . . . .	13
<b>2 Stabilité et bifurcation</b>	<b>16</b>
2.1 La stabilité des points fixes et des orbites périodiques . . . . .	16
2.1.1 Stabilité des points fixes . . . . .	16
2.1.2 Stabilité des orbites périodiques . . . . .	18
2.1.3 Étude de la stabilité d'un SDD de dimension 1 . . . . .	18
2.1.4 Étude de la stabilité d'un SDD de dimension $m$ . . . . .	20
2.2 Nature des singularités . . . . .	21
2.3 Bifurcations . . . . .	23
2.3.1 Bifurcations des systèmes dynamiques de dimension 1 . . . . .	23

---

2.3.1.1	Etude des différents types de bifurcations locales d'un système dynamique discret . . . . .	29
2.3.2	Systèmes dynamiques de dimension 2 : bifurcation de Hopf . . . . .	35
<b>3</b>	<b>introduction au chaos</b>	<b>39</b>
3.1	Définition du chaos . . . . .	40
3.2	Caractérisation numérique et graphique du chaos . . . . .	41
3.2.1	Un système transitive . . . . .	42
3.2.2	Dépendance sensible des conditions initiales . . . . .	42
3.2.3	Chaos et stabilité des orbites . . . . .	43
3.2.4	les exposant de Lyapounov . . . . .	44
3.2.4.1	Exposant pour une application unidimensionnelle . . . . .	44
3.2.4.2	Exposant pour une application multidimensionnelle . . . . .	45
3.2.4.3	Dimension de Lyapunov . . . . .	47
3.2.5	Attracteur étrange . . . . .	47
3.3	Exemples des systèmes chaotiques discrets . . . . .	47
3.3.0.1	Fonction logistique . . . . .	47
3.3.1	Système de Hénon . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Algorithme d'optimisation chaotique basée sur la densité de probabilité de l'application de Lozi</b>	<b>51</b>
4.1	L'idée principale . . . . .	51
4.2	Méthode d'optimisation chaotique (COM) . . . . .	53
4.3	Exemples numériques et discussion . . . . .	57
4.3.1	Quelques transformations . . . . .	57
4.3.2	Quelques fonctions de tests . . . . .	58
4.3.3	Résultats numériques . . . . .	59

---

---

## Introduction Générale

La théorie du chaos a connu un grand succès depuis ses premières années grâce à de larges applications dans d'autres sciences telles que la physique, la mécanique, l'électronique, la biologie, l'économie, l'astronomie, la météorologie, l'optimisation...ect [1, 2, 3, 4, 5]. D'une manière générale, le chaos a plusieurs caractéristiques importantes, comme la sensible aux conditions initiales, l'ergodicité, le pseudo-aléatoire et l'attracteur étrange. En ce qui concerne les problèmes d'optimisation de certaines fonctions habituelles qui sont continuellement différentiables, certains algorithmes d'optimisation traditionnels, tels que la méthode de Newton, la méthode de gradient et les méthodes de Hessiens [6, 7, 8], peuvent obtenir leurs points optimaux globaux avec l'avantage de convergence de vitesse et de haute précision. Cependant, ces algorithmes d'optimisation traditionnels peuvent facilement tombait à l'optimum locale dans la résolution des problèmes d'optimisation de certaines fonctions multimodales. De nombreux auteurs utilisent les applications chaotiques dans l'algorithme d'optimisation pour sortir de ce piège [12, 13, 14, 15]. Récemment, les chercheurs sont concentrés sur le développement d'algorithmes hybrides en combinant des algorithmes heuristiques avec la théorie du chaos pour résoudre un système d'équations non linéaire et des problèmes d'optimisation tels que l'optimisation chaotique de Monte Carlo, le BFGS chaotique, l'optimisation du noyau de particules chaotiques, les algorithmes génétiques chaotiques, la recherche d'harmonie chaotique, le recuit simulé chaotique et ainsi de suite [9, 10, 11]. En raison de la non-répétition du chaos, l'optimisation chaotique peut effectuer des recherches globales à des vitesses plus élevées que les recherches ergodiques stochastiques qui dépendent des probabilités. Différents types d'équations ont été considérés dans la littérature pour les applications dans les méthodes d'optimisation comme l'équation logistique et d'autres équations, telles que l'application tente, l'application de Gauss, l'application de Lozi, l'application de Hénon, ...ect [16, 17, 18, 19, 20, 21, 22]. L'inconvénient de cette méthode est que si la densité associé à l'application chaotique générées par la carte n'est pas élevée au voisinage d'optimum global, il est fort probable que nous ne trouverons pas ce point.

---

Motivé par cette raison, nous proposons notre idée principale. Elle est présentée à travers trois chapitres :

**Le 1er chapitre** est constitué de rappels sur les systèmes dynamiques avec un accent particulier porté sur les systèmes à temps discret.

**Le deuxième chapitre** : est consacré aux notions de stabilité des points fixes et des points périodiques et aux bifurcations.

**Dans le troisième chapitre** retrace un bref historique de la théorie du chaos déterministe. Dans ce chapitre nous balayerons les différents outils mathématiques qui nous servent à caractériser le comportement Chaotique, tels que les attracteurs étranges, les exposants de Lyapunov et les conditions de sensibilité initiale. **Dernièrement** on a une application qui donne une nouvelle méthode de trouver le minimum d'une fonction  $f(x)$ .

# Chapitre 1

## Notion de système dynamique discret

### 1.1 Système dynamique discret

Une modélisation discrète du temps peut être imposée soit par la nature même du processus soit par le besoin de "discrétiser" un modèle à temps continu pour le traiter numériquement. L'évolution du système est observée en choisissant certains moments du temps que nous allons supposer équidistants. Dans tous les cas le choix de l'unité de temps représente une partie importante de modélisation du système. Dans le modèle le temps sera donc noté par une variable  $n$  qui prend les valeurs entières

$$n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

**Définition 1.1** *Dans le cas général un système dynamique discret est décrit par un système d'équations aux différences finies, autrement dit, par une récurrence.*

**Exemple 1.1** *Soit un SDD en dimension 1 défini par la fonction  $f(x) = x^2$  sur l'intervalle  $[0, +1]$ . Prenons pour condition initiale  $x_0 = 1/2$ . L'orbite correspondante est*

$$x(0) = x_0 = 1/2$$

$$x(1) = f(x(0)) = 1/4$$



$$x(2) = f(x(1)) = 1/16$$

comme dans la figure 1.1 Remarquons que

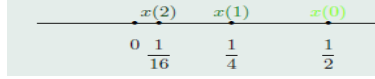


FIGURE 1.1 – L’orbite correspondant au point initiale  $x_0 = 1/2$ .

$$x(n) = f(x(n - 1)) = f^n(x(0)) = (1/2)^{2^n} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

Prenons un autre point initial,  $x_0 = 2$ . Alors

$$x(0) = 2$$

$$x(1) = f(x(0)) = 4$$

comme la figure 1.2 Dans ce cas, quand  $n \rightarrow \infty$  on a :



FIGURE 1.2 – L’orbite correspondant au point initiale  $x_0 = 2$ .

$$x(n) = f(x(n - 1)) = f^n(x(0)) = (1/2)^{2^{2^n}} \rightarrow \infty$$

Et enfin, si l’on choisit pour point initial  $x_0 = 1$  on voit que

$$O(x_0) = \{1, 1, x(n) = 1^{2^n} = 1, \dots\}.$$

*On observe donc ici trois comportements différents du même système en fonction du point initial choisi. Ainsi nous pouvons parler des propriétés d’un système, en décrivant toutes ses orbites possibles.*

**Définition 1.2** Soit  $D \subset \mathbb{R}^m$  un ensemble et  $f: D \rightarrow D$  une fonction continu et dérivable. On appelle "SDD" d’ordre 1 en dimension  $m$  la récurrente suivant :

$$x(0) = x_0 \in D, x_{n+1} = f(x_n), n \geq 0$$

**Systèmes dynamiques discrets autonomes et non-autonomes**

Si la fonction  $f$  ne dépend pas de la variable du temps  $n$  on dit que le système est autonome :

$$x(0) = x_0, x_{n+1} = f(x_n), n > 0$$

Si la fonction  $f$  est une fonction de l'état  $x$  et de la variable du temps  $n$  alors le système s'appelle non-autonome :

$$x(0) = x_0, x_{n+1} = f(n, x_n), n > 0$$

**Systèmes dynamiques discrets d'ordre supérieur** Ces systèmes sont décrits par des équations aux différences finies d'ordre  $r \geq 2$  autonomes ou non :

$$\vec{x}_{n+r} = f(\vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}, \dots, \vec{x}_{n+r-1}) \quad (1.1)$$

Il existe une procédure simple qui permet de transformer en un système d'ordre 1 tout système dynamique d'ordre supérieur. Pour cela il suffit de définir un nouvel espace de phases formé des vecteurs de la forme :

$$\vec{y}_n = \begin{pmatrix} \vec{x}_n \\ \vec{x}_{n+1} \\ \vdots \\ \vec{x}_{n+r-1} \end{pmatrix}$$

La dimension de cet espace sera  $m(r-1)$ . Dans cet espace on définit l'application  $g: R^{m(r-1)} \rightarrow R^{m(r-1)}$  par la formule :

$$\vec{g}(\vec{y}) = \begin{pmatrix} \vec{g}_1(\vec{y}) \\ \vec{g}_2(\vec{y}) \\ \vdots \\ \vec{g}_r(\vec{y}) \end{pmatrix}$$

$$\vec{g}_k(\vec{y}) = \begin{pmatrix} y_{k \times m+1} \\ y_{k \times m+2} \\ \vdots \\ y_{k \times m+m} \end{pmatrix}$$

$$\vec{g}_{r-1}(\vec{y}) = \vec{f}(\vec{y})$$

tel que  $k = 1, \dots, m-2$ . Alors, l'équation 1.1 est équivalente à l'équation suivante pour  $y_n$  :

$$y_{n+1} = g(y_n)$$

Dans certains cas (surtout linéaires) cette transformation permet d'appliquer aux systèmes d'ordre supérieur les mêmes méthodes d'analyse qu'aux systèmes d'ordre 1.

### 1.1.1 Point fixe et point périodique

**Définition 1.3** On appelle "point fixe" d'un système dynamique tout point  $x_s$  tel que  $x_s = f(x_s)$ . Parfois, ces points sont appelés aussi points stationnaires ou points d'équilibre.

**Théorème 1.1** Soit  $[a, b] \in \mathbb{R}$  un intervalle et soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable sur  $[a, b]$ . Alors, il existe un point  $c \in [a, b]$  tq :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

**Théorème 1.2** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Supposons que  $f$  est dérivable dans tous les points de l'intervalle  $[a, b]$  sauf éventuellement un nombre fini de points. Alors, pour tout couple de points  $x, y \in [a, b]$  il existe un point  $c \in [x, y]$  tq :

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y|$$

Les deux théorèmes qui suivent peuvent être utilisés pour analyser l'existence des points fixes des systèmes.

**Théorème 1.3** Soit  $I = [a, b]$  un intervalle fermé. Soit  $f: I \rightarrow I$  une fonction continue. Si  $I \subseteq f(I)$  alors  $f$  a un point fixe dans l'intervalle  $I$ .

**Théorème 1.4** Soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable sur  $[a, b]$ . Supposons que

$$|f'(x)| < 1, \forall x \in [a, b]$$

Alors la fonction  $f(x)$  a un unique point fixe  $x_s$  tel que  $f(x_s) = x_s$  dans l'intervalle  $[a, b]$

**Définition 1.4** Une orbite  $O(x_0)$  s'appelle périodique s'il existe un  $p > 0$  tq :

$$x(n+p) = x(n), \forall n. \quad (1.2)$$

Une orbite est dite éventuellement périodique s'il existe un  $p > 0$  et un  $N > 0$  tels que 1.2 est vérifié pour tout  $n > N$ . Une orbite périodique  $O(x_0)$  est toujours une suite de points périodique. Tous ces points s'appellent point périodique de période  $p$  du système.

**Définition 1.5** le plus petit nombre  $p$  qui vérifie 1.2 s'appelle "période fondamentale" de l'orbite  $O(x_0)$ .

**Définition 1.6** Un point  $x$  est dit périodique pour  $f$  s'il existe  $p > 0$  tel que  $f^p(x) = x$  et on définit la période comme étant le plus petit des entiers  $p$  strictement positifs vérifiant  $f^p(x) = x$  où  $f^p(x) = \underbrace{f(f(f(f(f \cdots f(x) \cdots))))}_{p \text{ fois}}$ .

**Remarque 1.1** Tout point fixe, est un point périodique de période  $p = 1$ .

**Exemple 1.2** Considérons un système de dimension 1 défini par la fonction

$$f(x) = ax(1-x), x \in \mathbb{R} \quad (1.3)$$

Ici  $a$  est un paramètre que nous allons supposer dans l'intervalle  $a \in ]0, 4[$ . Regardons si ce système a des points périodiques de période fondamentale 2. Ces points doivent être solutions de l'équation :

$$f(f(x)) = x \quad (1.4)$$

On doit exclure dès le départ les points fixes (c'est-à-dire, points de période 1) qui sont solutions de l'équation

$$ax(1-x) = f(x) = x \quad (1.5)$$

On en déduit que

$$x \neq 0, x \neq \left(1 - \frac{1}{a}\right)$$

Passons à l'équation

$$a^2x(1-x)(1-ax(1-x)) = x$$

Les points que nous recherchons sont donc racines d'un polynôme de degré 4 :

$$a^3x^4 - 2a^3x^3 + a^2(1+a)x^2 - (a^2-1)x = 0$$

Nous connaissons déjà deux de ses racines : ce sont les deux points fixes. Pour les éliminer et trouver plus facilement les deux autres racines nous allons factoriser ce polynôme en le divisant par le polynôme de l'équation :

$$a^3x^4 - 2a^3x^3 + a^2(1+a)x^2 - (a^2-1)x = (ax^2 - (a-1)x) \cdot (a^2x^2 - (a^2+a)x + a+1)$$

Donc les points périodiques que nous cherchons sont solutions réelles de l'équation.

$$a^2x^2 - (a^2+a)x + a+1 = 0$$

Les racines de ce polynôme sont de la forme :

$$x_{1,2} = \frac{a+1}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{(a-3)(a+1)}$$

Alors, si  $a > 3$  il y a deux points périodiques distincts. Ils appartiennent donc à la même orbite périodique de période 2.

Si  $a < 3$ , il n'y a pas de points périodiques.

Enfin, si  $a = 3$ , il y a un seul point périodique, qui coïncide avec l'un des points fixes.

On peut observer dans cet exemple un phénomène très important dans la théorie des systèmes dynamiques : le changement des caractéristiques d'un système en fonction du choix de ses paramètres. Nous allons étudier ce phénomène plus tard, dans les cours qui suivent.

### 1.1.2 Étude graphique des systèmes dynamiques

Nous allons parler dans cette partie de moyens très simples de visualiser le comportement de certains systèmes. Ces représentations nous permettront de mieux comprendre les phénomènes que nous allons étudier.

#### 1.1.2.1 Systèmes dynamiques discrets de dimension 1

Soit un (SDD) de dimension 1 défini par une fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x(0) = x_0$ ,  $x_{n+1} = f(x_n)$ .

Prenons par exemple la fonction

$$f(x) = ax(1 - x), a = 1$$

Nous allons représenter l'orbite qui commence dans le point  $x_0 = 0.2$ . Traçons d'abord le graphe de la fonction  $f$  et la droite  $y = x$ . Sur le plan  $(x, y)$  l'orbite commence dans

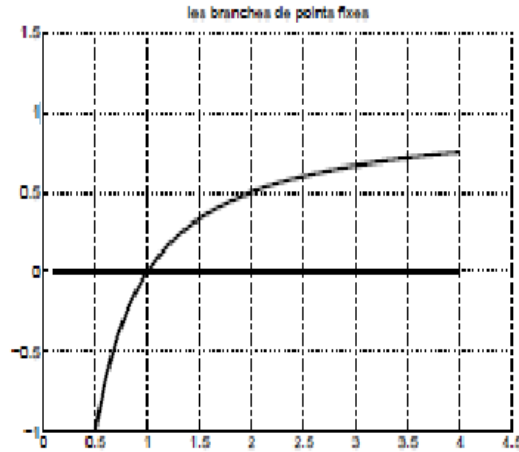
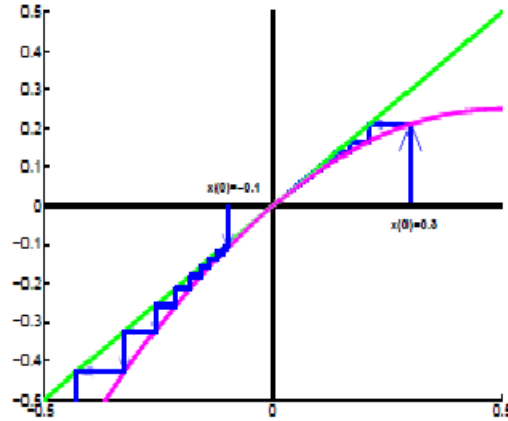


FIGURE 1.3 – Les branches de points fixes du système  $f(a, x) = ax(1 - x)$

le point  $(x_0, 0)$ . Nous traçons maintenant une ligne verticale du point  $(x(0), 0)$  jusqu'au graphe de la fonction  $f(x)$ . Le point d'intersection est exactement le point  $(x(0), x(1))$  avec  $x(1) = f(x(0))$ . Ensuite, nous traçons une ligne horizontale à partir du point  $(x(0), x(1))$  jusqu'au point  $(x(1), x(1))$  d'intersection avec la droite  $y = x$ . A partir de ce point nous traçons encore une ligne verticale vers le graphe de la fonction  $f(x)$  pour trouver le point suivant  $x(2) = f(x(1))$ . En continuant ainsi nous pouvons suivre l'évolution de l'orbite

FIGURE 1.4 – Étude graphique du système  $f(a, x) = ax(1 - x)$ 

sur autant de points que nous le voulons. Cette représentation graphique des systèmes est particulièrement utile parce qu'elle permet de voir clairement les points fixes ( ce sont les points d'intersection du graphe de la fonction  $f(x)$  et de la droite  $y = x$ ). On peut aussi observer les différents comportements des orbites autour des points fixes. Comme la figure 1.4.

### 1.1.2.2 Systèmes dynamiques de dimension 2 (Portraits de phases)

Un système dynamique discret de dimension 2 est décrit par deux équations :

$$\begin{cases} x_1(n+1) = f_1(x_1(n), x_2(n)) \\ x_2(n+1) = f_2(x_1(n), x_2(n)) \end{cases}$$

Pour étudier ces systèmes on utilise souvent des portraits de phases. Pour tracer le portrait de phases d'un système dynamique défini par l'application  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

On choisit sur le plan une grille de points  $(x_1, x_2)$  assez dense et l'on trace dans chaque point la direction du départ de l'orbite qui commence dans ce point. Cette direction pour un point initial

$$X(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$$

est définie par le vecteur

$$X(1) - X(0) = f(X(0)) - X(0)$$

Cela donne un aperçu (voir le figure 1.5) de toutes les orbites possibles du système. Si

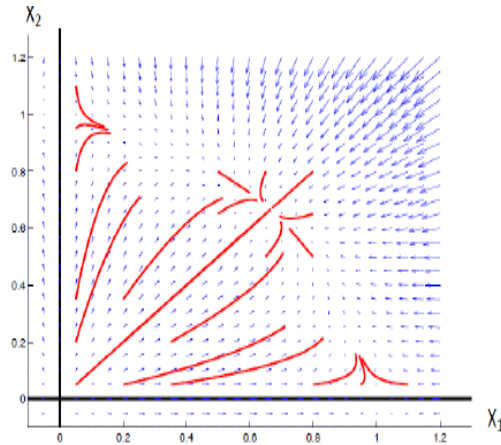


FIGURE 1.5 – Le portrait de phase de la fonction logistique

l'on s'intéresse à une orbite particulière, on peut la retrouver sur le portrait de phases, en suivant les directions du champ de vecteurs tracées à partir du point initial de l'orbite. On peut observer à l'aide d'un portrait de phases les points fixes du système. Ce sont les points tels que  $f(x_s) = x_s$ . Donc, le vecteur de direction du portrait de phases doit être nul dans un point fixe. Le comportement des orbites du système autour d'un point fixe est important. Le portrait de phases nous permet une première analyse qualitative de ce comportement. Sur la figure 1.5 sont tracées quelques orbites commençant dans des points proches des points fixes. Sur un portrait de phases on peut également apercevoir des orbites périodiques, si le système en a. Dans ce cas, on peut distinguer des courbes closes formées par un groupe de vecteurs de directions.

## 1.2 Les attracteurs

Lors de l'étude du comportement asymptotique des solutions d'un système dynamique, on trouve des objets dans l'espace des phases qui attirent un grand nombre de solutions



issues de conditions initiales différentes. Ces objets sont appelés attracteurs et ensembles attractantes.

**Définition 1.7 (ensemble invariant)**

Soit  $A$  un sous ensemble de l'espace des phases  $\mathbb{R}^n$ ,  $A$  est dit invariant (resp positivement invariant) par un flot  $\phi_t$ , si pour tout  $t$  dans  $\mathbb{R}^n$  (resp dans  $[0, +\infty]$ ),  $\phi_t(A)$  est inclus dans  $A$ .

**Définition 1.8 (ensemble attractant).** Un ensemble invariant fermé  $A$  est un ensemble attractant s'il existe un voisinage  $U$  tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} F(U) \subset U \\ \forall x \in U, F^n(x) \rightarrow A \quad \text{pour } n \rightarrow +\infty \end{array} \right.$$

### 1.2.1 Attracteur

**Définition 1.9** Dans la littérature on trouve plusieurs définitions d'attracteur. En général, un attracteur est défini comme une sous partie fermée de l'espace des phases qui "attire" toutes les autres orbites vers elle.

#### Attracteur dans le cas discret

**Définition 1.10 (Guckenheimer - Holmes)**

Soit  $(D, f)$  un système dynamique discret, une sous partie  $A$  de  $D$  est appelée attracteur si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :

1.  $A$  est fermée,
2.  $A$  est positivement invariante,
3.  $A$  est attractive, c'est-à-dire, il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $A$  tel que :
  - (a)  $U$  est positivement invariant,
  - (b)  $U$  est attiré par  $A$  :  $\forall u \in U$ ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} d(f^k(u), A) = 0$$

## 1.2.2 Les différents types d'attracteurs

Il existe deux types d'attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques.

### 1.2.2.1 Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution de systèmes non chaotiques, et peuvent être de trois sortes :

**points fixes** : L'attracteur "points fixes" est un point de l'espace de phase vers lequel tendent les trajectoires, c'est donc une solution stationnaire constante, satisfait  $f(x) = x$ . Cette définition bien qu'assez intuitive, n'est pas toujours facile à appliquer .

**Définition 1.11** *Un point fixe  $x_s$  s'appelle attractif s'il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que*

$$\forall x_s \in U_\varepsilon(x_s) , x(n) = f^n(x_0) \rightarrow x_s \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

**points périodiques** : L'attracteur "points périodiques" est une trajectoire fermée dans l'espace des phases vers laquelle tendent les trajectoires. C'est donc une solution périodique du système.

**Définition 1.12** *Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application définissant un SDD d'ordre 1. Soit  $O(x_0) = \{x(0) = x_0, x(1), x(2), \dots, x(r-1)\}$  une orbite périodique de période  $r$  de ce système. On dit que cette orbite est attractive (ou répulsive) si chacun de ses points est un point fixe attractif (respectivement un point répulsive) de l'application  $f^r(x)$ .*

**Courbe invariant** : Les courbes invariantes des systèmes discretes sont analogues au tore des flots continues, on peut réduire la dynamique sur une courbe fermée invariante à celle d'une application du cercle unité dans lui-même appelé "cercle application".

La dynamique sur la courbe fermée peut être complexe, en particulier lorsque les paramètres varient ces courbes perdent leur régularité et peuvent se transformer en des ensembles invariants.

### 1.2.2.2 Attracteur chaotique

Il existe des systèmes dynamiques déterministes très simples, pour lesquels deux trajectoires issues de points de départ dont la différence est trop petite pour être observable,

se séparent après un certain temps. Leur distance croît de façon exponentielle, jusqu'à ce que toute mémoire sur le point de départ soit perdue. On appelle ce phénomène sensibilité aux conditions initiales. Cette propriété du système est caractérisée par des coefficients, appelés exposants de Lyapounov, dont on rappellera la définition dans le cas d'un système dynamique discret et ceci pour faciliter la compréhension de ces exposants.

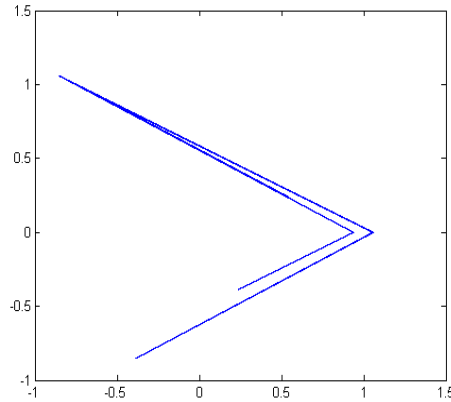


FIGURE 1.6 – Attracteur étrange de Lozi.

**Définition 1.13** Soit  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{N}, f)$  un système dynamique discret et  $F$  l'itération dans  $\mathbb{R}^n$  générée par le flot  $f$ , ( $F(x) = f(1, x)$ ), que nous supposons différentiable. Soit  $JF(x)$  la matrice jacobienne de  $F$  au point  $x$ . Soit  $JF^m(x_0)$  la matrice jacobienne de la composée  $m$  fois de  $F$  au point  $x_0$

$$JF^m(x_0) = JF(x_{m-1}) \times JF(x_{m-1}) \times \cdots \times JF(x_1) \times JF(x_0)$$

Où  $x_i = F^i(x_0)$ . Notons les valeurs absolues des valeurs propres de  $JF^m(x_0)$  en ordre décroissant par

$$J_1(m, x_0) \geq J_2(m, x_0) \geq \cdots \geq J_n(m, x_0)$$

Les exposants de Lyapounov de la trajectoire issue du point  $x_0$  sont définis par :

$$\lambda_i(x_0) = \ln \left( \lim_{m \rightarrow \infty} (J_i(m, x_0))^{1/m} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Et on a :  $\lambda_1(x_0) \geq \lambda_2(x_0) \geq \cdots \geq \lambda_n(x_0)$

On dit que l'on a la propriété de sensibilité aux conditions initiales, si au moins un des

exposants de Lyapounov est strictement positif.

**Définition 1.14** *Un attracteur est dit chaotique, s'il a la propriété de sensibilité aux conditions initiales pour presque tout point le constituant (c'est-à-dire sauf pour un ensemble de points de mesure de Lebesgue nulle).*

Généralement un attracteur chaotique est un fractal. Ceci résulte du caractère borné de l'attracteur, des phénomènes de contractions (exposants de Lyapounov négatifs) et d'étirements (exposants de Lyapounov positifs), qui conduisent à un pliage complexe et un feuilletage générant une structure fractale de l'attracteur chaotique. Sa dimension de Lyapounov [Far], qui est une dimension fractale, est alors non entière.

# Chapitre 2

## Stabilité et bifurcation

### 2.1 La stabilité des points fixes et des orbites périodiques

L'étude du comportement d'un système dynamique discret, correspond à l'étude de stabilité des points fixes et des points périodiques.

#### 2.1.1 Stabilité des points fixes

La notion de la stabilité est très important pour l'étude du comportement des systèmes autour de leurs points fixes .

Soit un SDD d'ordre 1 de dimension 1 défini par une fonction  $f: D \rightarrow D$ . Ici  $D = [a, b] \in \mathbb{R}$  est un intervalle. Supposons que ce système possède un point fixe  $x_s$ . Nous allons utiliser les notations suivants.

-Pour un nombre positif  $\delta > 0$  nous notons par  $U_\delta(x) = \{y: |y - x| < \delta\}$ .

-Nous notons par  $f^n(x)$  la  $n$ -ème itération d'une application  $f$ . Pour éviter toute confusion, la  $n$ -ème dérivée sera toujours notée par  $\frac{d^n f}{dx^n}$ .

**Définition 2.1** *Un point fixe  $x_s$  s'appelle stable si*

$\forall \varepsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$  tel que

si  $|x_0 - x_s| < \delta$  alors pour tout  $n > 0$   $|f^n(x_0) - x_s| < \varepsilon$ .

Autrement dit, tout les orbites qui commencent près du points  $x_s$  restent dans un voisinage de ce point

si  $x_0 \in U_\delta(x_s)$  alors pour tout  $n > 0$   $f^{(n)}(x_0) \in U_\delta(x_0)$ .

**Remarque 2.1** Il ya des exemples où toutes les orbites d'un système dynamiques convergent vers un points fixe. Cette situation n'est qu'un cas particulier d'un point fixe stable. La définition même de stabilité n'impose pas cette convergence. Il existe bien des situations quand les orbites restent près du point fixe sans converger. Voici un exemple.

**Exemple 2.1** Soit  $f(x) = 1 - x$ . Le seul point fixe est  $x_s = 0.5$ . Remarquons que pour tout autre point  $x_0 \neq 0.5$  l'orbite correspondante est périodique :

$$f(x_0) = 1 - x_0, f(f(x_0)) = x_0.$$

Aucune orbite ne converge donc vers le point fixe. Néanmoins, tous les éléments d'une orbite restent à la même distance du point  $x_s = 0.5$ . C'est donc un point fixe stable .

**Définition 2.2** Un point fixe s'appelle instable s'il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que  $\forall r > 0$  il existe un  $x_0 \in U_r(x_s)$  et il existe un  $n \in \mathbb{N}$  tel que

$$|f^{(n)}(x_0) - x_s| > \varepsilon.$$

Cela signifie que pour tout voisinage du point fixe  $x_s$  il existe une orbite qui, en commençant dans ce voisinage s'éloigne du point  $x_s$ .

**Remarque 2.2** Remarquons qu'il suffit d'une seule orbite qui diverge pour qu'un point fixe soit instable. Nous allons plus tard discuter le cas extrême d'instabilité quand toutes les orbites quittent le voisinage du point fixe.

**Exemple 2.2** *Considérons la fonction  $f(x) = x + x^3$ . Le SDD correspondant a un seul point fixe  $x_s = 0$ . On remarque facilement que si  $x_0 > 0$  alors  $x(0) < x(1) < \dots < x(n) < \dots$  et que  $x(n) \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Si  $x_0 < 0$  alors  $x(0) > x(1) > \dots > x(n) > \dots$  et  $x(n) \rightarrow -\infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Aucune orbite ne reste près du point fixe. Il est donc instable.*

### 2.1.2 Stabilité des orbites périodiques

Rappelons qu'un point  $x_p$  est périodique de période  $r$  si

$$f^{(r)}(x_p) = x_p$$

Un point périodique de période  $r$  est donc un point fixe de l'application  $f^{(r)}$ . L'orbite qui commence en un tel point est une suite périodique, elle n'a que  $r$  points distincts. Chacun de ces  $r$  points est un point périodique de période  $r$ . Une telle orbite s'appelle orbite périodique de période  $r$ . On définit sa stabilité comme suit.

**Définition 2.3** *Soit  $x_p$  un point périodique de période  $r$  d'un SDD défini par une fonction  $f(x)$ . L'orbite périodique correspondante  $O(x_p)$  s'appelle stable (instable) si chacun de ses points est un point fixe stable (instable) de l'application  $f^r$ .*

**Exemple 2.3** *Soit  $f(x) = 1 - x$ . Tout point  $x \neq 0.5$  est un point périodique de période 2. Or l'application  $f^{(2)}(x) = 1 - (1 - x) = x$  est l'application identité. Tous les points sont des points fixes stables de cette application. Donc pour tout point  $x \neq 0.5$  l'orbite correspondante  $O(x) = \{x, 1 - x\}$  est une orbite périodique stable.*

### 2.1.3 Étude de la stabilité d'un SDD de dimension 1

**Théorème 2.1** *(Critères de stabilité des points fixes). Soit  $I = [a, b]$  un intervalle. Soit  $f: I \rightarrow I$  une fonction continue sur  $I$  ayant un point fixe  $x_s \in I$ . Supposons qu'il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que la fonction  $f$  est dérivable sur tout le voisinage  $U_\varepsilon(x_s)$  du point  $x_s$  et que la dérivée de la fonction  $f$  est continue au point  $x_s$ . Alors le point  $x_s$  est :*

- *Attractif si*

$$\left| \frac{d}{dx} f(x_s) \right| < 1$$

- *Répulsif si*

$$\left| \frac{d}{dx} f(x_s) \right| > 1$$

**Situation indéterminée :**  $\left| \frac{d}{dx} f(x_s) \right| = 1$ . On remarque que les théorème 2.1 est ne disent rien sur le comportement du système autour d'un point fixe si la dérivée de la fonction  $f(x)$  dans ce point est égale à  $\pm 1$ . Dans ce cas, il ya d'autre théorème qui déduire la nature de point fixe.

**Théorème 2.2** Soient  $I = [a, b]$  un intervalle et  $f: I \rightarrow I$  une fonction continue et dérivable sur  $I$ . Soit  $x_s \in I$  un point fixe de l'application  $f$  tel que :

$$\left| \frac{d}{dx} f(x_s) \right| = 1$$

Supposons qu'il existe un voisinage  $U_\varepsilon$  du point  $x_s$  tel que la seconde dérivée  $f''$  existe sur tout ce voisinage.

- i) Si  $f''(x_s) > 0$  ( $f'$  est strictement croissante) alors  $x_s$  est un point semi-stable à gauche.
- ii) Si  $f''(x_s) < 0$  ( $f'$  est strictement décroissante) alors  $x_s$  est un point semi-stable à droite.
- iii) Si  $f''(x_s) = 0$  ( $f'$  a un point d'extremum local) et si la troisième dérivée existe alors :

1. si  $f'''(x_s) < 0$  (maximum local)  $x_s$  est un point attractif faible.

2. si  $f'''(x_s) > 0$  (minimum local)  $x_s$  est une source faible.

**Théorème 2.3** (Critères de stabilité des points périodiques). Soient  $I = [a, b]$  un intervalle et  $f: I \rightarrow I$  une fonction continue sur  $I$ . Supposons que le SDD défini par la



fonction  $f(x)$  possède une orbite périodique  $O(x_0) = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}\} \subset I$  de période  $p$ . Supposons en plus qu'autour de chaque point de l'orbite  $x(i) \in O(x_0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, p-1$  il existe un voisinage  $U_{\delta_i}(x(i)) \subset I$  tel que la fonction  $f(x)$  est dérivable dans ce voisinage et que sa dérivée est continue en  $x(i)$ . Alors l'orbite  $O(x_0)$  est répulsive si :

$$\left| \frac{d}{dx} f^p(x_0) \right| = \left| \prod_{j=0}^{p-1} f'(x(j)) \right| > 1$$

Le cas est indéterminé si :

$$\left| \frac{d}{dx} f^p(x_0) \right| = \left| \prod_{j=0}^{p-1} f'(x(j)) \right| = 1$$

L'orbite  $O(x_0)$  est attractive si :

$$\left| \frac{d}{dx} f^p(x_0) \right| = \left| \prod_{j=0}^{p-1} f'(x(j)) \right| < 1$$

### 2.1.4 Étude de la stabilité d'un SDD de dimension $m$

**Théorème 2.4** (Critère de stabilité du point fixe). Soient  $U \in \mathbb{R}^m$  un ensemble ouvert et  $f: U \rightarrow U$  une application continue sur cet ensemble. Supposons que le système dynamique défini par la fonction  $f$  possède un point fixe  $x_s \in U$ . Supposons ensuite qu'il existe un voisinage  $U_\varepsilon(x_s)$  du point fixe tel que la fonction  $f$  est dérivable et que sa dérivée  $Df(x)$  est continue sur ce voisinage, c'est-à-dire que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un  $\delta > 0$  tel que

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|Df(x) - Df(y)\| < \varepsilon$$

Alors

- Si toutes les valeurs propres de la matrice  $Df(x_s)$  ont les valeurs absolues inférieure à 1 le point  $x_s$  est un point fixe attractif.
- Si la valeur absolue d'une valeur propre est supérieure à 1, le point  $x_s$  est un point fixe répulsif.

**Théorème 2.5** (*Critères de stabilité des points périodiques*). Soit  $x$  le point périodique d'un cycle d'ordre  $p$ . Si le spectre de la matrice  $Df^p(x)$  est contenu à l'intérieur du cercle unité, le cycle est stable, si une des valeurs propres a un module plus grand que un, le cycle est instable.

## 2.2 Nature des singularités

Pour caractériser la nature des singularités (points fixes et orbites), on introduit la notion des multiplicateurs caractéristiques :

- 1) Si la dimension de la récurrence  $p = 1$ , le multiplicateur d'un point fixe  $x_s$  est  $S = f'(x_s)$  et le multiplicateur d'un cycle d'ordre  $n$ ,  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est

$$S = \prod_{i=1}^n f'(x_i)$$

Un point fixe ou un cycle est dit attractif si  $|S| < 1$  et répulsif si  $|S| > 1$ .

- 2) Si  $p > 1$ , le multiplicateur d'un point fixe  $x_s$  ou d'un cycle d'ordre  $n$  sont les valeurs propres de la matrice jacobienne de  $f(x_s)$  ou de  $f^n(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

- 2.1) Si  $p = 2$ , on associe à un point fixe ou à un cycle, deux multiplicateurs  $S_i$  ( $i = 1, 2$ ) qui sont les valeurs propres de la linéarisation de  $f$  ou de  $f^n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) en ces singularités.

On distingue alors les singularités suivantes :

**Col** :  $S_1$  et  $S_2$  sont réels :  $|S_1| < 1$  et  $|S_2| > 1$  un col est un point instable :

- de type 1 si  $S_1 > 0$  et  $S_2 > 0$ .
- de type 2 si  $S_1 > 0$  et  $S_2 < 0$  (ou  $S_1 < 0$  et  $S_2 > 0$ ).
- de type 3 si  $S_1 < 0$  et  $S_2 < 0$ .

La figure illustre une trajectoire dans le cas d'un col de type 1.

**Noeud** :  $S_1$  et  $S_2$  sont réels

- stable si  $|S_i| < 1, i = 1, 2$ .
- instable si  $|S_i| > 1, i = 1, 2$ .

Comme pour le col, le noeud peut être de type 1, 2 ou 3.

La figure 2.1 illustre une trajectoire dans le cas d'un noeud de type 2 ;

**Foyer** :  $S_1$  et  $S_2$  sont conjuguées et  $\rho = |S_i|$ ,  $i = 1, 2$ .

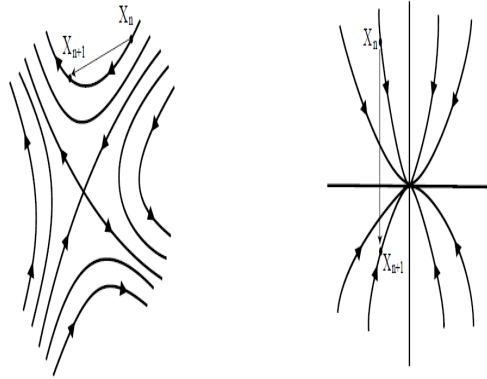


FIGURE 2.1 – A gauche : Col de type 1 , a droite : Noeud de type 2.

– stable si  $\rho < 1$ .

– instable si  $\rho > 1$ ,  $i = 1, 2$ .

Si  $Re(S_i)_{i=1,2} > 0$  foyer de type 1.

Si  $Re(S_i)_{i=1,2} < 0$  foyer de type 2.

2.2) Si  $p = 3$  il ya trois multiplicateurs  $S_i (i = 1, 2, 3)$  qui sont les valeurs propres d'un point fixe ou d'un cycle dans  $\mathbb{R}^3$ .

**Col** :  $S_1, S_2$  et  $S_3$  sont réels

– de type 1 si  $|S_i| < 1$ ,  $i = 1, 2$  et  $|S_3| > 1$

– de type 2 si  $|S_i| > 1$ ,  $i = 1, 2$  et  $|S_3| < 1$

**Col-foyer** :  $S_1$  et  $S_2$  sont complexes conjuguées, et  $S_3$  est réel

– de type 1 si  $|S_i| < 1$ ,  $i = 1, 2$  et  $|S_3| > 1$

– de type 2 si  $|S_i| > 1$ ,  $i = 1, 2$  et  $|S_3| > 1$

**Noeud** :  $S_1, S_2$  et  $S_3$  sont réels

– stable si  $|S_i| < 1$ ,  $i = 1, 2, 3$

– instable si  $|S_i| > 1$ ,  $i = 1, 2, 3$

**Noeud-foyer** :  $S_1$  et  $S_2$  sont complexes conjuguées, et  $S_3$  est réel

- stable si  $|S_i| < 1, i = 1, 2, 3$
- instable si  $|S_i| > 1, i = 1, 2, 3$

## 2.3 Bifurcations

Lorsque le système dynamique dépend continûment d'un ou de plusieurs paramètres, la variation de ces paramètres peut entraîner des changements qualitatifs dans l'espace des phases, tels que l'apparition ou la disparition de singularités, le changement de stabilité d'une singularité, le changement de type de singularités, etc.... Ces changements qualitatifs s'appellent bifurcations.

### 2.3.1 Bifurcations des systèmes dynamiques de dimension 1

Nous allons étudier ici des familles des systèmes dynamiques dépendant d'un paramètre réel  $\mu \in \mathbb{R}$

$$x(0) = x_0, x(n+1) = f(\mu, x(n)), n = 1, 2, 3, \dots$$

Notre but dans ce chapitre est d'observer les changements éventuels de dynamique d'un système en fonction des changements de ses paramètres. Intuitivement, le changement de la dynamique signifie le changement du nombre des points fixes ou de leur caractère (stabilité, attractivité, etc.). Si au passage d'une valeur du paramètre un tel changement se produit on dit que le système passe par un point de bifurcation. Pour décrire ce phénomène plus rigoureusement nous allons recourir à la notion de branche de points fixes qui permet de formaliser la dépendance des points fixes et des points périodiques du paramètre du système. Nous avons défini un point fixe comme étant solution de l'équation

$$f(\mu, x) = x$$

En présence d'un paramètre  $\mu$  qui varie dans un intervalle  $I \in \mathbb{R}$  toute solution de cette

équation est a priori une fonction de  $\mu$ . Avant l'étude des différents types de bifurcation nous allons présenter quelques définitions.

**Définition 2.4** *La bifurcation signifie un changement qualitatif de la dynamique du système, qui résulte du changement d'un des paramètres du système. Par exemple, déstabilisation d'un équilibre stable, apparition ou disparition d'un cycle ou d'un attracteur,...* La valeur du paramètre pour laquelle la bifurcation se produit est nommée le point de bifurcation.

**Définition 2.5** *Une famille d'applications  $f_\mu: X \rightarrow X$  dépendant d'un paramètre  $\mu$  admet une bifurcation en  $\mu_0$  si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\mu$  appartenant à  $\{\mu_0 - \varepsilon, \mu_0 + \varepsilon\}$  tel que  $f_\mu$  et  $f_{\mu_0}$  ne sont pas topologiquement conjuguées.*

**Proposition 2.1** *L'application  $f_\mu$  a une bifurcation en  $\mu_0$  si et seulement s'il existe un point fixe  $x_s$  de  $f_{\mu_0}$  tel que  $f'_{\mu_0}(x_s) = \pm 1$ . Il existe deux classes principales de bifurcations :*

1. **Bifurcations locales** *Qui peuvent être analysés entièrement par des changements dans les propriétés de stabilité locales (équilibres, orbites périodiques ou d'autres ensembles invariants comme paramètres traversent seuils critiques).*

*Des exemples des bifurcations locales :*

- Bifurcation Selle-noeud.
- Bifurcation transcritique.
- Bifurcation de fourche (Pitchfork en anglais).
- Bifurcation par doublement de Période (bifurcation de Flip).
- Bifurcation de Neimark-Sacker.

2. **Bifurcations globales** *Qui se produisent souvent lorsque les plus grands ensembles invariants du système entrent en collision avec l'autre, ou avec équilibres du système. Ils ne peuvent pas être détectés uniquement à une analyse de la stabilité des équilibres (points fixes).*

*Des exemples des bifurcations globales :*

- Bifurcation homocline dans lequel un cycle limite entre en collision avec un point selle.

- Bifurcation hétéroclinique dans laquelle un cycle limite entre en collision avec deux ou plusieurs points selles.
- Bifurcation de période infini dans la quel un noeud et un point selle stable se produisent simultanément sur un cycle limite.

### Branche de point fixe

**Définition 2.6** On appelle branche de point fixe toute application continue  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie la condition :

$$f(\mu, \gamma(\mu)) = \gamma(\mu), \forall \mu \in I$$

On définit de la même façon les branches des points périodiques.

**Exemple 2.4** Considérons la famille des fonctions

$$f(\mu, x) = \mu x(1 - x), x \in [0, 1], \mu \in [0, 4]$$

Nous avons déjà fait une analyse de ce système d'avance. Il a deux points fixes :

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{\mu - 1}{\mu}$$

Donc il a deux branches de points fixes. L'une est définie par l'application  $\gamma_1: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}, \gamma_1(\mu) \equiv 0$  est l'autre par  $\gamma_2: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}, \gamma_2(\mu) = \frac{\mu-1}{\mu}$ . Il est utile de représenter graphiquement l'information que nous pouvons tirer de cette analyse. On utilise pour cela les diagrammes de bifurcations. On trace dans un plan les graphes de toutes les branches de points fixes et de points périodiques du système. Sur l'axe des abscisses on note les valeurs du paramètre  $\mu$ . Sur la figure 2.2 sont représentées les branches de points fixes pour le système de cet exemple. Nous pouvons aussi représenter sur un diagramme des bifurcations le caractère attractif ou répulsif des points fixes. Pour étudier la stabilité des

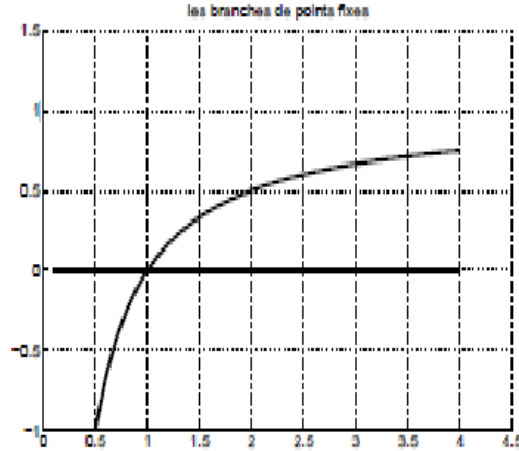


FIGURE 2.2 – Les branches de points fixes du système  $f(\mu, x) = \mu x(1 - x)$ .

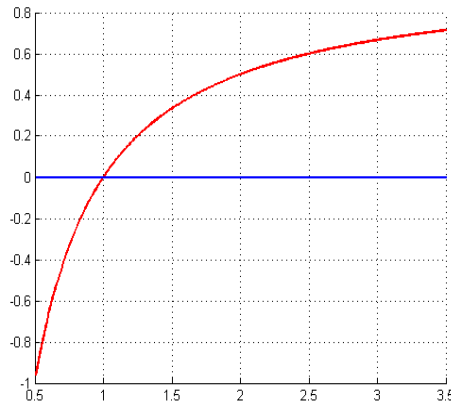


FIGURE 2.3 – Les branches de points fixes du système  $f(\mu, x) = \mu x(1 - x)$ .

points fixes on calcule tout d'abord la dérivée de la fonction  $f(\mu, x)$  :

$$f'_x(\mu, x) = \mu - 2\mu x.$$

Calculons la valeur de la dérivée dans les deux points fixes :

$$f'_x(\mu, \gamma_1(\mu)) = f'_x(\mu, 0) = \mu f'_x(\mu, \gamma_2(\mu)) = f'_x(\mu, \frac{\mu-1}{\mu}) = 2 - \mu. \quad (2.1)$$

Quand  $\mu < 1$  nous avons :  $|f'(\mu, \gamma_1(\mu))| < 1$  et donc le point fixe  $\gamma_1(\mu)$  est attractif. Quant au deuxième point fixe, il est répulsif car  $|f'(\mu, \gamma_2(\mu))| > 1$ . Quand  $\mu = \mu_0 = 1$  les deux points fixes se trouvent dans la situation indéterminée  $|f'(\mu_0, \gamma_1(\mu_0))| = |f'(\mu_0, \gamma_2(\mu_0))| = 1$ .

Enfin, pour les valeurs  $1 < \mu < 3$  on remarque que le premier point fixe perd son attractivité et devient répulsif :  $|f'(\mu, \gamma_1(\mu))| > 1$  tandis que le deuxième devient attractif :  $|f'(\mu, \gamma_2(\mu))| < 1$ .

Pour représenter ces effets sur le diagramme des bifurcations ( voir figure 2.3) nous traçons des flèches verticales orientées vers une branche de points fixes si elle attractive et partant de la branche si elle répulsive. On peut observer que lorsque le paramètre  $\mu$  passe

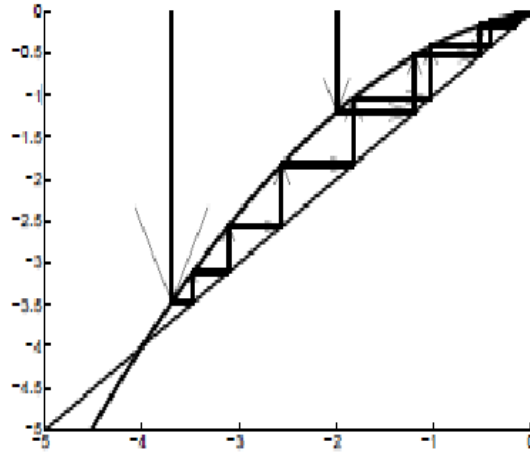


FIGURE 2.4 – Système  $x(n + 1) = \mu x(n)(1 - x(n))$ ,  $\mu < 1$  : l'origine attire les orbites.

par la valeur 1 les propriétés du système changent. Plus précisément c'est la stabilité des points fixes qui change. Sur la figure 2.4 on peut observer ce changement sur les orbites du système. Le point  $\mu_0 = 1$  est un point de bifurcation.

### Point de bifurcation

**Définition 2.7** Soit une famille de SDD de dimension 1 dépendant d'un paramètre réel  $\mu \in I$  tel que :

$$x(0) = x_0, x_{n+1} = f(\mu, x_n), n = 1, 2, 3, \dots$$

Un point  $\mu_0 \in I$  s'appelle point de bifurcation de cette famille de systèmes s'il existe au moins deux branches différentes de point périodique qui se croisent en le point  $\mu_0$ . Autrement dit, si le point  $\mu_0$  vérifie les conditions suivantes :

i)  $\exists \gamma_1(\mu) : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\exists \gamma_2(\mu) : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$  deux branches de point périodique de  $f$  tels que :

$$\gamma_1(\mu_0) = \gamma_2(\mu_0)$$



ii)  $I_1 \cap I_2 \neq \{\mu_0\}$  et  $\gamma_1(\mu) = \gamma_2(\mu)$  pour tout  $\mu \in I_1 \cap I_2 \setminus \{\mu_0\}$

**Diagramme de bifurcation :** En mathématiques, en particulier dans les systèmes dynamiques, un diagramme de bifurcation indique les valeurs visités ou approchés asymptotiquement (points fixes, orbites périodiques ou attracteurs chaotiques) d'un système en fonction d'un paramètre de bifurcation. Il est habituel de représenter des valeurs stables avec une ligne solide et des valeurs instables avec une ligne en pointillés, diagrammes de bifurcation permettent la visualisation de la théorie des bifurcations.

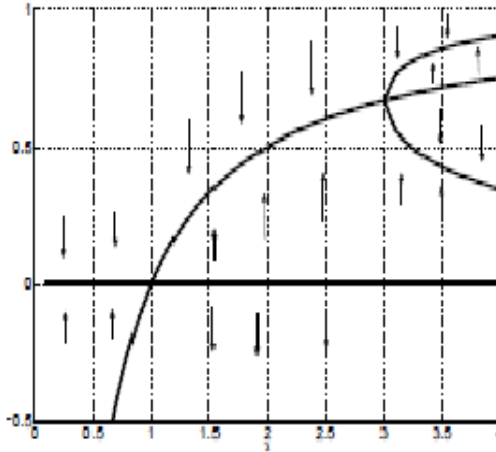


FIGURE 2.5 – Le diagramme des bifurcations du système  $f(\mu, x) = \mu x(1 - x)$ .

**Définition 2.8** (Codimension). *La codimension d'une bifurcation est le nombre de paramètres qui doivent être modifiés pour que la bifurcation se produise. Ceci correspond à la codimension de l'ensemble des paramètres pour lequel la bifurcation se produit dans l'espace rempli des paramètres. Bifurcations noeud-selle et bifurcations de Hopf sont les seuls bifurcations locales génériques qui sont vraiment de codimension un (les autres ayant tous codimension ultérieure). Cependant, bifurcation transcritiques et bifurcation de fourche sont également souvent considérés de codimension un, parce que les formes normales peuvent être écrites avec un seul paramètre.*

**Théorème 2.6** *Soit  $f(\mu, x)$  une famille de fonctions ayant des dérivées partielles continues en  $x$  et en  $\mu$ . Supposons qu'il existe un couple  $(\mu_0, x_0)$  tel que  $f(\mu_0, x_0) = x_0$  et*

$\frac{\partial f}{\partial x}(\mu_0, x_0) \neq 1$  Alors, il existe des intervalles ouverts  $I \ni x_0$  et  $J \ni \mu_0$  et une application continue  $\gamma: J \rightarrow I$  telle que  $\gamma(\lambda_0) = x_0$  et  $f(\lambda, \gamma(\mu)) = \gamma(\mu)$ .

Autrement dit,  $\gamma(\mu)$  est une branche de points fixes. De plus, la famille  $f(\gamma(\mu), x)$  n'a pas d'autres points fixes quand  $\mu \in J$ .

Ce théorème est bien évidemment applicable aux points périodiques de période fondamentale  $p$ , en remplaçant  $f(\mu, x)$  par  $f^p(\mu, x)$ . Il nous dit que la bifurcation ne peut avoir lieu que si la dérivée est égale à 1. Il existe plusieurs types de bifurcation selon les propriétés des secondes dérivées de la famille des fonctions  $f(\mu, x)$ . Nous allons présenter ces différents types de bifurcation par des exemples et donner des théorèmes qui les définissent rigoureusement.

Pour abrégé les notations nous allons noter les dérivées partielles de façon suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} = f_\mu, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = f_x$$

On notera aussi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$

### 2.3.1.1 Etude des différents types de bifurcations locales d'un système dynamique discret

Nous allons étudier des familles de systèmes dynamiques :

#### 1. Bifurcation de type noeud-col

**Théorème 2.7** Soit une famille de fonctions  $f(\mu, x)$ . Supposons qu'il existe un couple  $(\mu_0, x_0)$  tel que le système

$$x(n+1) = f(\mu_0, x(n))$$

a un point fixe en  $x_0$  :

$$f(\mu_0, x_0) = x_0$$

et que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mu_0, x_0) = 1$$

Supposons aussi que  $f_\mu(\mu_0, x_0) \neq 0$  et  $f_{xx}(\mu_0, x_0) \neq 0$

On dit alors que le système subit au point  $\mu_0$  une bifurcation de type noeud-col. Cela se traduit par les propriétés suivantes des branches de points fixes autour de  $(\mu_0, x_0)$ .

Il existe un voisinage du couple  $(\mu_0, x_0)$

$$V = \{(\mu, x) | \mu \in J \ni \mu_0, x \in I \ni x_0\}$$

tel que

(a) Si  $f_\mu(\mu_0, x_0) \cdot f_{xx}(\mu_0, x_0) < 0$  les assertions ci-dessus sont vérifiées :

- i. il n'existe aucun point fixe dans le voisinage  $V$  quand  $\mu < \mu_0$
- ii. Pour  $\mu > \mu_0$  il existe exactement deux branches de points fixes  $\gamma_1(\mu) > \gamma_2(\mu)$
- iii.  $\gamma_1(\mu_0) = \gamma_2(\mu_0) = 0$
- iv. La branche supérieure  $\gamma_1$  est attractive et la branche inférieure  $\gamma_2$  est répulsive.

(b) Si  $f_\mu(\mu_0, x_0) \cdot f_{xx}(\mu_0, x_0) > 0$  les assertions ci-dessus sont vérifiées :

- i. il n'existe aucun point fixe dans le voisinage  $V$  quand  $\mu > \mu_0$
- ii. Pour  $\mu < \mu_0$  il existe exactement deux branches de points fixes  $\gamma_1(\mu) > \gamma_2(\mu)$
- iii.  $\gamma_1(\mu_0) = \gamma_2(\mu_0) = 0$

iv. La branche supérieure  $\gamma_1$  est répulsive et la branche inférieure  $\gamma_2$  est attractive .

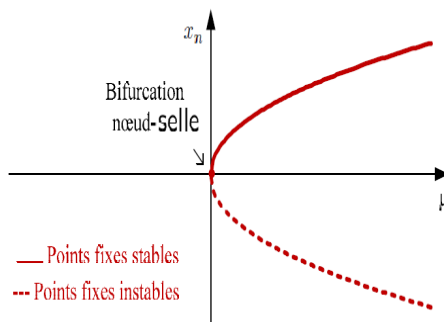


FIGURE 2.6 – Diagramme de bifurcation pli(neoud-selle).

## 2. Bifurcation transcryptique

**Théorème 2.8** Soit une famille de fonctions  $f(\mu, x)$ . Supposons qu'il existe un couple  $(\mu_0, x_0)$  tel que le système

$$x(n+1) = f(\mu_0, x(n))$$

a un point fixe en  $x_0$  :

$$f(\mu_0, x_0) = x_0$$

et que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mu_0, x_0) = 1$$

Supposons aussi que

$$f_\mu(\mu_0, x_0) = 0, f_{xx}(\mu_0, x_0) \neq 0 \text{ et } (f_{\mu x}^2 - f_{xx} * f_{\mu\mu})|_{(\mu_0, x_0)} \neq 0$$

On dit alors que le système subit au point  $\mu_0$  une bifurcation transcritique. Cela se traduit par les propriétés suivantes des branches de points fixes autour de  $(\mu_0, x_0)$ .

Il existe deux branches de points fixes  $\gamma_1(\mu)$  et  $\gamma_2(\mu)$  qui se croisent dans le point  $\mu_0$ :  $\gamma_1(\mu_0) = \gamma_2(\mu_0) = x_0$ . Si  $f_{xx} < 0$  la branche supérieure est attractive et la branche inférieure est répulsive.

Si  $f_{xx} > 0$  les propriétés de stabilité sont inversées.

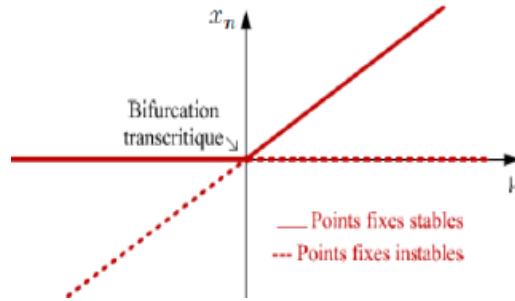


FIGURE 2.7 – Diagramme de bifurcation transcritique.

### 3. Bifurcation de type fourche

**Théorème 2.9** Soit une famille de fonctions  $f(\mu, x)$ . Supposons qu'il existe un couple  $(\mu_0, x_0)$  tel que le système

$$x(n+1) = f(\mu_0, x(n))$$

a un point fixe en  $x_0$  :

$$f(\mu_0, x_0) = x_0$$

et que

$$f_x(\mu_0, x_0) = 1$$

Supposons aussi que

$$f_\mu(\mu_0, x_0) = f_{xx}(\mu_0, x_0) = 0, \quad f_{\mu x}(\mu_0, x_0) \neq 0, \quad f_{xxx}(\mu_0, x_0) \neq 0$$

On dit alors que le système subit au point  $\mu_0$  une bifurcation de type fourche. Cela se traduit par les propriétés suivantes des branches de points fixes autour de  $(\mu_0, x_0)$ . Il existe un voisinage du couple  $(\mu_0, x_0)$

$$V = \{(\mu, x) | \mu \in J \ni \mu_0, x \in I \ni x_0\}$$

tel que trois branches différentes de points fixes sont définies dans ce voisinage et se croisent dans le point  $(\mu_0, x_0)$ .

Plus précisément il existe une branche de points fixes  $\gamma_1(\mu)$  qui passe par le point  $(\mu_0, x_0)$  de telle façon qu'elle est attractive pour les valeurs  $\mu < \mu_0$  et répulsive pour  $\mu > \mu_0$ , si  $f_{\mu z} < 0$  ces propriétés de stabilité sont renversées par rapport au point  $\mu_0$ .

Il existe deux autres branches  $\gamma_2(\mu)$  et  $\gamma_3(\mu)$  qui prennent origine au point  $(\mu_0, x_0)$  et sont tangentes de la ligne verticale  $\mu = \mu_0$ . Elles sont définies pour  $\mu < \mu_0$  si  $f_{\mu x} \cdot f_{xxx} > 0$  et pour  $\mu > \mu_0$  si  $f_{\mu z} \cdot f_{xxx} < 0$ .

(Ainsi dans le voisinage  $V$  il y a exactement trois point fixes pour chaque valeur de  $\mu > \mu_0$  si  $f_{\mu x} \cdot f_{xxx} < 0$ ).

Les deux branches  $\gamma_2(\mu)$  et  $\gamma_3(\mu)$  sont attractives si  $\mu < \mu_0$  et  $f_{\mu z} < 0$  ou si  $\mu > \mu_0$  et  $f_{\mu z} > 0$ . Sinon elles sont répulsives.

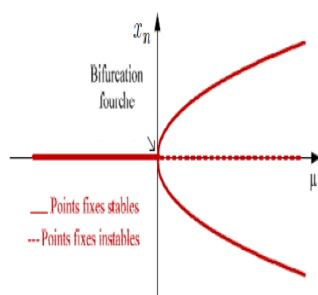


FIGURE 2.8 – Diagramme de la bifurcation fourche.

#### 4. Bifurcation de doublement de période

**Théorème 2.10** *Soit une famille de fonctions  $f(\mu, x)$ . Supposons qu'il existe un couple  $(\mu_0, x_0)$  tel que le système*

$$x(n+1) = f(\mu_0, x(n))$$

*a un point fixe en  $x_0$  :*

$$f(\mu_0, x_0) = x_0$$

*et que*

$$f_x(\mu_0, x_0) = -1$$

*Supposons aussi que*

$$u(\mu_0, x_0) = 2f_{\mu x}(\mu_0, x_0) + f_\mu(\mu_0, x_0) \cdot f_{xx}(\mu_0, x_0) \neq 0$$

*et que*

$$v(\mu_0, x_0) = \frac{1}{2}f_{xx}^2(\mu_0, x_0) + \frac{1}{3}f_{xxx}(\mu_0, x_0) \neq 0$$

*On dit alors que le système subit au point  $\mu_0$  une bifurcation de dédoublement de période. Cela se traduit par les propriétés suivantes des branches de points fixes autour de  $(\mu_0, x_0)$ .*

*Il existe un voisinage du couple  $(\mu_0, x_0)$*

$$V = \{(\mu, x) \mid \mu \in J \ni \mu_0, x \in I \ni x_0\}$$

*tel que trois branches différentes de points fixes sont définies dans ce voisinage et se croisent dans le point  $(\mu_0, x_0)$ .*

*Il existe une branche de points fixes  $\gamma_1(\mu)$  qui passe par le point  $(\mu_0, x_0)$  de telle façon qu'elle est attractive pour les valeurs  $\mu < \mu_0$  et répulsive pour  $\mu > \mu_0$ , si*

$u(\mu_0, x_0) > 0$  les propriétés de stabilité sont permutées.

Il existe deux branches de points périodiques de période 2  $\gamma_2(\mu)$  et  $\gamma_3(\mu)$  qui prennent début au point  $(\mu_0, x_0)$ . Elles sont définies pour  $\mu < \mu_0$  si  $uv > 0$  et pour  $\mu > \mu_0$  si  $uv < 0$ .

L'orbite périodique qui bifurque est attractive si elle coexiste avec un point fixe répulsif et vice versa.

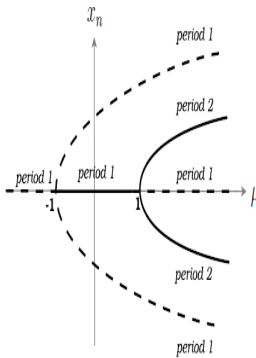


FIGURE 2.9 – Diagramme de la bifurcation doublement période.

### 2.3.2 Systèmes dynamiques de dimension 2 : bifurcation de Hopf

Dans le cas de systèmes de dimension  $m \geq 2$  les effets de bifurcations sont plus riches et plus complexes. On y retrouve tous les types de bifurcation qui existent pour les systèmes de dimension 1 mais aussi des types nouveaux. Souvent l'étude mathématique de ces phénomènes est très difficile. Dans ce cours nous allons considérer seulement un type de bifurcation, propre aux systèmes multidimensionnels, bifurcation de Hopf.

Soit un SDD défini dans l'espace  $\mathbb{R}^2$  par une application  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ :

$$x(n+1) = f(x(n)), x(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix}, f(x) = \begin{pmatrix} f_1(n) \\ f_2(n) \end{pmatrix}$$

Soit  $x_0$  son point fixe. Rappelons que le comportement local des orbites du système autour de ce point fixe est déterminé par les valeurs propres du jacobien de l'application  $f$  évalué



au point  $x_0$

$$J(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Soit une boule de centre  $x_0$  et de rayon  $\varepsilon$  assez petit :  $U_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 :$

$\|x - x_0\| < \varepsilon\}$ . On peut approcher la fonction  $f$  dans le voisinage  $U_\varepsilon(x_0)$  par l'application linéaire suivante

$$f(x_0 + \Delta x) \cong f(x_0) + J(x_0)\Delta x = x_0 + J(x_0)\Delta x, \|\Delta x\| < \varepsilon$$

Ainsi la dynamique du système autour du point  $x_0$  est approximativement la même que celle de l'application linéaire  $J(x_0)\Delta x$  autour de l'origine. Cette dernière, nous le savons, est déterminée par les valeurs propres de la matrice  $J(x_0)$ , en fonction de leur disposition dans le plan complexe par rapport au cercle unité :  $C_1 = \{z : |z| = 1\}$ . Si les deux valeurs propres  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont à l'intérieur du cercle  $C_1$ , l'origine est attractif, si elles sont toutes les deux à l'extérieur, l'origine est répulsif. Quand l'une des deux se trouve à l'intérieur et l'autre à l'extérieur l'origine est un point selle. Et enfin les valeurs propres sont sur le cercle unité, alors le système possède une orbite périodique ou apériodique. Après ce bref rappel, passons maintenant à l'étude d'une famille de systèmes dynamiques dans l'espace  $\mathbb{R}^2$  dépendant d'un paramètre réel  $\mu$

$$x(n+1) = f(\mu, x(n))$$

Comme pour les systèmes de dimension 1 nous nous intéressons aux changements de dynamique en fonction du paramètre  $\mu$ . Nous pouvons sans problèmes généraliser pour le cas multidimensionnel la notion de branche de points fixes : c'est une application continue  $\gamma(\mu) : J \rightarrow \mathbb{R}^m$  telle que

$$f(\mu, \gamma(\mu)) \equiv \gamma(\mu)$$

Nous avons montré ci-dessus en considérant des systèmes de dimension 1 que la dyna-

mique de système peut changer en passant par un point  $\mu_0$  si  $|f_x(\mu_0, \gamma(\mu_0))| = 1$ . Dans  $\mathbb{R}^m$  cela correspond à la situation où le jacobien a des valeurs propres sur le cercle unité. Ainsi on va dire que  $\mu_0$  est un point de bifurcation si le système défini dans  $\mathbb{R}^m$  par  $f(\mu_0, x)$  possède un point fixe  $x_0$  tel que le jacobien correspondant à ce point a des valeurs propres de valeur absolue égale à 1.

Une valeur propre réelle égale à 1 provoque les mêmes types de bifurcations que dans le cas de dimension 1 : fourche, transcritique ou noeud-col. Un phénomène nouveau, in-existant en dimension 1, peut arriver quand le jacobien a deux valeurs propres complexes conjuguées sur le cercle unité. Supposons que le système possède une branche de points fixes  $\gamma(\mu)$  définie sur un intervalle  $I$  qui contient un point  $\mu_0$ . Considérons le jacobien du système évalué dans les points fixes de la branche :  $J(\mu, \mu_0)$ .

Supposons que pour chaque valeur de  $\mu \in I$  le jacobien a deux valeurs propres complexes conjuguées

$$\lambda_1(\mu) = \alpha(\mu).e^{i\theta(\mu)} = \alpha(\mu)(\cos(\theta(\mu)) + i \sin(\theta(\mu)))$$

$$\lambda_2(\mu) = \alpha(\mu).e^{-i\theta(\mu)} = \alpha(\mu)(\cos(\theta(\mu)) - i \sin(\theta(\mu)))$$

Ici  $\alpha(\mu) = |\lambda_1(\mu)| = |\lambda_2(\mu)|$  et  $\theta(\mu) = \arg \lambda_1(\mu)$ . Soit  $\mu_0 \in I$  le point tel que

$$\alpha(\mu) < 1, \forall \mu \in I: \mu < \mu_0$$

$$\alpha(\mu_0) = 1$$

$$\alpha(\mu) > 1, \forall \mu \in I: \mu > \mu_0$$

Cela veut dire que quand le paramètre  $\mu$  passe par la valeur  $\mu_0$  les deux valeurs propres  $\lambda_1(\mu)$  et  $\lambda_2(\mu)$  croisent le cercle  $C_1$ . Supposons que

1.  $\frac{d}{d\mu}\alpha(\mu_0) > 0$  ( les deux valeurs  $\lambda_1(\mu)$  et  $\lambda_2(\mu)$  croisent le cercle unité avec une vitesse non-nulle).
2.  $\theta(\mu_0) = \omega$  où  $\omega$  est irrationnel ou rationnel :  $\omega = \frac{2m}{n}$  avec  $m$  et  $n$  relativement premiers et  $n \neq 3, 4$ .

Alors on dit que le système subit au point  $(\mu_0, x_0)$  une bifurcation de Hopf. Cette bifurcation a les propriétés suivantes :

- (a) pour  $\mu < \mu_0$  le point fixe  $\gamma(\mu)$  est attractif et il n'y a pas d'autres points fixes ou périodiques.
- (b) pour  $\mu > \mu_0$  le point fixe  $\gamma(\mu)$  devient répulsif et un cycle limite attractif apparaît. Ce cycle est une orbite périodique de période fondamentale  $n$  si  $\omega = \frac{2m}{n}$  ou une courbe elliptique si  $\omega$  est irrationnel.

# Chapitre 3

## introduction au chaos

Il existe un comportement entre la régularité et l'aspect aléatoire. Ce comportement s'appelle chaos. Chaos, ou un système chaotique c'est un système produira des comportements très différents à long terme lorsque les conditions initiales sont perturbées très légèrement. A la fin de **XIX** siècle le mathématicien, philosophe français **Henri Poincaré** avait déjà mis en évidence le phénomène de sensibilité aux conditions initiales lors de l'étude astronomique du problème des trois corps. Et dans le même siècle le mathématicien russe **Alexandre Lyapunov** effectue des recherches sur la stabilité du mouvement. Il introduit l'idée de mesure de l'écart entre deux trajectoires ayant des conditions initiales voisines. Lorsque cet écart évolue exponentiellement on parle de sensibilité aux conditions initiales. En 1963, **Edward Lorenz**, météorologue au Massachusetts Institut de Technologie, met en évidence le caractère chaotique des conditions météorologiques. Pour prévoir ces dernières **Lorenz** étudie alors numériquement des équations différentielles représentant approximativement la convection thermique dans l'atmosphère. Il constate, par hasard, qu'une modification minime des données initiales (de de un pour mille) sur son ordinateur entraînent des résultats très différents. Il illustrera ce fait caractéristique par la célèbre métaphore : " battement d'ailes d'un papillon au Brésil peut provoquer une tornade au Texas ". " L'effet papillon " sera par la suite souvent invoqué pour faire allusion à la sensibilité aux conditions initiales. Depuis la fin des années 70, la théorie du chaos a envahi la plupart des sciences : Physique, Chimique, Mécanique Géophysique, Astronomie, Psychologie, Economie, Sociologie, elle a même envahi le flux et le reflux

de la vie élargissant considérablement les possibilités d'emploi des modèles déterministes.

### 3.1 Définition du chaos

Il n'existe pas de définition à la fois formelle et générale du chaos. Cependant, le chaos est défini généralement comme un comportement particulier d'un système dynamique caractérisé par :

**La non-linéarité** : si le système est linéaire, il ne peut pas être chaotique.

**Le déterminisme** : un système chaotique a des règles fondamentales déterministes (plutôt que probabilistes).

**La sensibilité aux conditions initiales** : de très petits changements sur l'état initial peuvent mener à un comportement radicalement différent dans son état final.

**L'imprévisible** : en raison de la sensibilité aux conditions initiales, qui peuvent être connues seulement à un degré fini de précision.

**L'irrégularité** : ordre caché comprenant un nombre infini de modèles périodiques instables (ou mouvements). Cet ordre caché forme l'infrastructure des systèmes chaotiques "ordre dans le désordre" plus simplement.

**Chaos au sens de Devaney** Soit  $S$  un ensemble dans l'espace topologique  $\mathbb{R}$  et soit  $f^p$  la fonction définie par :

$$f : S \rightarrow S$$

on a :

$$f^p = f(f^{p-1}), p = 1, 2, \dots$$

et

$$f^0 = I$$

Soit  $x \in S$ , ce dernier est appelé point périodique de période  $p$  s'il satisfait :

$$x = f^p(x)$$

**Théorème 3.1** (de Devaney). Une fonction  $f : S \rightarrow S$  est chaotique si :

- La fonction  $f$  est sensible aux conditions initiales, dans le sens que pour tout  $x \in S$  et un voisinage  $V$  de  $x$  dans  $S$ , il existe un  $\delta > 0$ , tel que :

$$|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$$

pour un point  $y \in V$  et pour  $n \geq 0$ .

- La fonction  $f$  est topologiquement transitive, dans le sens que pour toute paire de sous ensembles ouverts  $U, V \subset S$ , il existe un nombre entier  $n > 0$  tel que :

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset$$

- Les points périodiques de la fonction  $f$  sont denses dans  $S$ .

## 3.2 Caractérisation numérique et graphique du chaos

Ce chapitre offre des outils mathématiques permettant de caractériser les systèmes dynamiques chaotiques. Ceux-ci étant définis par un attracteur étrange. Plusieurs propriétés permettent cette caractérisation. L'une des propriétés géométriques la plus remarquable d'un attracteur étrange est qu'un "zoom" répété indéfiniment sur l'une de ses parties reproduit toujours le même motif feuilleté. Un attracteur étrange possède en fait une structure fractale dont la dimension, qui traduit sa complexité, peut être estimée par le calcul de la dimension de corrélation. L'autre propriété majeure est la sensibilité aux conditions initiales. Le degré de sensibilité aux conditions initiales quantifie le caractère chaotique du système. Il est évalué par les valeurs numériques des exposants de Lyapunov. De la sensibilité aux conditions initiales dépendent les possibilités de prévision de l'état du système. Possibles à court terme du fait de la nature déterministe des systèmes chaotiques, elles deviennent impossibles à long terme. Le degré de prédictibilité des systèmes chaotiques peut être estimé par l'entropie de Kolmogorov-Sinai.[18, 19].

### 3.2.1 Un système transitive

**Définition 3.1** soient  $\mathbb{D}$  un espace métrique et  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ . On dit que l'application  $f$  est topologiquement transitive si pour toute paire d'ensemble ouverts  $U, V \in \mathbb{D}$  il existe un élément  $x_0 \in U$  et un nombre naturel  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $f^{(n)} \in V$ .

On dit souvent qu'une application topologiquement transitive "brasse bien" le domaine de sa définition. En effet, si  $U$  est un ensemble ouvert, alors dans tout voisinage de tout point de  $\mathbb{D}$  il y a une itération d'un des points de  $U$ . Cette définition n'est pas toujours facile à vérifier en pratique. Voici un critère

**Théorème 3.2** Soit  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction. Supposons qu'il existe un point  $x_0 \in \mathbb{D}$  tel que son orbite

$$O(x_0) = f^{(n)}(x_0), n = 1, 2, 3, \dots$$

est dense dans  $\mathbb{D}$ . Autrement dit, quel que soit l'ensemble ouvert  $U \in \mathbb{D}$  il contient au moins un point de l'orbite  $O(x_0)$ . Alors  $f(x)$  est topologiquement transitive

### 3.2.2 Dépendance sensible des conditions initiales

**Définition 3.2** On dit qu'une application  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  exhibe une dépendance sensible des conditions initiales s'il existe une constante  $\varepsilon > 0$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{D}$  et pour tout  $\delta > 0$  il existe un  $y \in \mathbb{D}$  et un nombre  $n \in \mathbb{N}$  tels que

$$d(x, y) < \delta \text{ et } d(f^{(n)}(x), f^{(n)}(y)) > \varepsilon$$

Propriété caractérise la part de l'imprévisible dans le comportement d'un système dynamique. En effet, même si les conditions initiales de deux orbites sont très proches elles s'éloignent l'une de l'autre au bout de quelque temps. Cette propriété peut s'avérer très gênante et rend souvent les effets chaotiques indésirables dans des systèmes. Par exemple le traitement numérique d'un tel système est difficile car mêmes des erreurs minimales de calculs peuvent entraîner une déviation considérable des résultats numériques par rapport à la réalité. Nous sommes prêts maintenant à donner une définition de système chaotique.

**Définition 3.3** Soit  $f$  une application. Supposons que le système dynamique correspondant possède un attracteur  $A$ . On dit que ce système est chaotique sur son attracteur si

1.  $f : A \rightarrow A$  est topologiquement transitive ;
2. L'ensemble de points périodiques de  $f$  est dense dans  $A$  ;
3.  $f$  a une dépendance sensible des conditions initiales.

**Théorème 3.3** Soit  $f : A \rightarrow A$  une application. Supposons que

1.  $f : A \rightarrow A$  est topologiquement transitive ;
2. L'ensemble de points périodiques de  $f$  est dense dans  $A$  ;

Alors si  $A$  contient un nombre infini de points le système dynamique défini par  $f$  est chaotique sur  $A$ .

**Théorème 3.4** Si  $f : A \rightarrow A$  une application est continue et topologiquement transitive alors ses points périodiques sont denses dans  $A$ .

**Définition 3.4** Soient  $(\mathbb{D}, f)$  et  $(E, g)$  deux systèmes dynamiques topologiquement conjugués. Cela signifie qu'il existe un homéomorphisme  $h : \mathbb{D} \rightarrow E$  tel que

$$h \circ f = g \circ h$$

Alors

1. les points périodiques de  $f$  sont denses dans  $\mathbb{D}$  si et seulement si les points périodiques de  $g$  sont denses dans  $E$ .
2. l'application  $f$  est topologiquement transitive sur  $\mathbb{D}$  si et seulement si  $g$  l'est sur  $E$  ;
3.  $f$  est chaotique sur  $\mathbb{D}$  si et seulement si  $g$  est chaotique sur  $E$

### 3.2.3 Chaos et stabilité des orbites

Nous avons défini déjà la notion de dépendance sensible des conditions initiales comme une des caractéristiques principales de comportement chaotique d'un système. Même si dans la plupart des cas nous pouvons établir la présence du chaos sans vérifier directement cette propriété, elle reste essentielle pour comprendre et pour "mesurer" ce phénomène.



Une des conséquences directes de la dépendance sensible des conditions initiales est l'instabilité de toutes les orbites du système sur l'attracteur.

**Définition 3.5** Soit  $f : A \rightarrow A$  une application. Une orbite  $O(x_0)$  s'appelle stable si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un  $\delta > 0$  tel que pour tout  $y_0$  tel que  $d(x_0, y_0) < \delta$  on a :

$$d(f^n(x_0) - f^n(y_0)) < \varepsilon$$

Une orbite  $O(x_0)$  s'appelle instable s'il existe un  $\varepsilon = \varepsilon(x_0)$  tel que pour tout  $\delta > 0$  il existe un  $y_0$  et un numéro  $n \in \mathbb{N}$  tels que :

$$d(x_0, y_0) < \delta, d(f^n(x_0) - f^n(y_0)) > \varepsilon$$

**Théorème 3.5** La dépendance sensible des conditions initiales implique l'instabilité de toutes les orbites sur l'attracteur du système.

### 3.2.4 les exposant de Lyapounov

Les exposants de Lyapounov permettent de caractériser le chaos temporel et plus particulièrement la sensibilité aux conditions initiales que peut présenter un attracteur étrange. Autrement dit, nous allons exposer comment calculer le taux de divergence entre l'évolution de trajectoires issues de conditions initiales proches au sein de cet espace borné qu'est l'attracteur étrange.

#### 3.2.4.1 Exposant pour une application unidimensionnelle

Soit une application discrète  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui applique  $x_n$  sur  $x_{n+1}$  :  
 Choisissons deux conditions initiales très proches, soit  $x_0$  et  $x_{0+\varepsilon}$  et regardons comment se comportent les trajectoires qui en sont issues. Supposons qu'elles s'écartent en moyenne à un rythme exponentielle. On pourra trouver un réel  $\lambda$  tel qu'après  $n$  itérations on a :

$$|f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)| \cong \varepsilon \exp(n\lambda)$$

d'où

$$n\lambda \cong \ln \frac{|f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)|}{\varepsilon}$$

et pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  on a :

$$\begin{aligned} n\lambda &\cong \ln \frac{|f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)|}{\varepsilon} = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{dx_0} \right| \\ &\cong \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{df^{n-1}(x_0)} \cdot \frac{df^{n-1}(x_0)}{df^{n-2}(x_0)} \cdots \frac{df^1(x_0)}{dx_0} \right| \\ &\cong \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df(x_{n-1})}{d(x_{n-1})} \cdot \frac{df(x_{n-2})}{d(x_{n-2})} \cdots \frac{df(x_0)}{dx_0} \right| \\ &\cong \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(x_i)}{dx_i} \right| \end{aligned}$$

Facilement pour  $n \rightarrow +\infty$  on a :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \quad (3.1)$$

Avec

$$f'(x_i) = \frac{df(x_i)}{dx_i}$$

$\lambda$  est appelé exposant de Lyapunov il indique le taux moyen de divergence.

Si  $\lambda > 0$ , alors il y a une sensibilité aux conditions initiales.

Si  $\lambda < 0$ , les trajectoires se rapprochent et on perd l'information sur les conditions initiales.

Appliquant la formule précédente pour  $x_i = x_s$  tel que  $x_s$  est le point d'équilibre, il faut que  $\lambda = \ln |f'(x_s)|$ .

### 3.2.4.2 Exposant pour une application multidimensionnelle

Soit  $f$  une application discrète de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^m$  :

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Un système  $m$  dimensionnel possède  $m$  exposants de Lyapounov, chacun d'entre eux mesure le taux de divergence suivant un des axes du système, de sorte qu'en moyenne un hyper-volume initiale  $V_0$  évolue selon une loi de type :

$$V = V_0 \exp (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m)n$$

Pour avoir du chaos, il est nécessaire qu'un  $\lambda_i$  soit positif, pour avoir étirement selon au moins un axe. Mais il faut aussi que la somme des  $\lambda_i$  soit négative. Puisque, dans le cas contraire, le volume initiale finirait par remplir tout l'espace dans lequel il est immergé et on'aurait plus un attracteur de faible dimension, ce qui signifie qu'on n'aura pas du chaos déterministe. Tout d'abord nous devons calculer les  $\lambda_i$ . Nous fixent une hyper sphère dans notre espace  $m$  dimensionnel de rayon  $\varepsilon$  (petit) de conditions initiales, et examinons son évolution. Comme précédemment, nous nous intéressons à :

$$f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)$$

Posons  $x'(0) = x_0 + \varepsilon$ , on a le développement en série limité d'ordre 1 de  $f^n(x_0)$  au voisinage de  $x'_0$  suivant :

$$x_n - x'_n \approx \frac{df^n(x_0)}{dx_0}(x_0 - x'_0)$$

$$\approx J(x_0)J(x_1) \cdots J(x_n)(x_0 - x'_0)$$

$$\approx \prod_{i=1}^n J(x_i)(x_0 - x'_0)$$

$J(x_i)$  par  $J^n(x_0)$ , ainsi

$$x_n - x'_n \approx J^n(x_0 - x'_0)$$

$J^n(x_0)$  est la matrice jacobienne de  $f^n$  au point  $x_0$ . Il s'agit d'une matrice carré  $m * m$ , si elle est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible  $P_n$  telle que  $D_m^t = P_n^{-1} J^n P_n^m$ ,  $D_m^t$  est une matrice diagonale des valeurs propres  $u_i(f^n(x_0))$ ,  $i = 1, \cdots, m$  de  $J^n$ . On définit alors les  $m$  exposants de Lyapounov de la manière suivante :

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |u_i(f^n(x_0))|, i = 1, 2, \cdots, m$$

Pour le point d'équilibre  $x_s$  la formule précédent devient

$$\lambda_i = \ln |u_i(x_s)|, i = 1, 2, \dots, m .$$

### 3.2.4.3 Dimension de Lyapunov

**Définition 3.6** Soient  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \dots \geq \lambda_n$ , les exposants de Lyapounov d'un attracteur d'un système dynamique et soit  $j$  le grand entier naturel tel que :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j \geq 0$$

Alors la dimension de Lyapounov définit par Karlan et Yorke est donné par :

$$D_l = j + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j}{|\lambda_{j+1}|}$$

### 3.2.5 Attracteur étrange

L'attracteur étrange est une forme géométrique complexe qui caractérise l'évolution des systèmes dynamiques chaotiques.

## 3.3 Exemples des systèmes chaotiques discrets

### 3.3.0.1 Fonction logistique

Le système chaotique le plus connu est l'application logistique, cette fonction a été proposée par le biologiste May en 1976 pour représenter de manière très simplifiée l'évolution annuelle d'une population d'insectes. La fonction logistique très connue dans la théorie des systèmes non linéaires, est une application non bijective du domaine  $[0, 1]$  dans lui-même qui sert de récurrence à la suite :

$$x_{n+1} = f(x_n) = ax_n(1 - x_n).$$

Où  $n = 0, 1, \dots$  dénote le temps discret,  $x$  la variable dynamique et  $a$  un paramètre réel.

### a) Sensibilité aux conditions initiales

La sensibilité aux conditions initiales de la fonction logistique est illustré sur la figure 3.1 pour deux conditions initiales très proche  $x_1 = 0.1$  et  $y_1 = 0.1001$ .

### b) L'exposant de Lyapounov

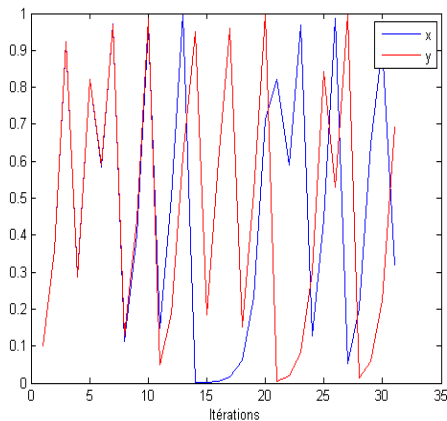


FIGURE 3.1 – Sensibilité aux conditions initiales de la fonction logistique pour  $x_1 = 0.1$  et  $y_1 = 0.1001$ .

Comme nous avons vu précédemment la fonction logistique est défini par :

$$x_{n+1} = f(x_n) = ax_n(1 - x_n)$$

Pour  $a = 4$  les points fixes sont :  $x_{s_1} = 0$  et  $x_{s_2} = 3/4$ . En utilisant la formule  $\lambda = \ln|f'(x_s)|$  pour calculer l'exposant de Lyapounov de la fonction logistique on trouve  $\lambda_1 = \ln 2 > 0$ , d'où la comportement est chaotique ou voisinage de  $x_{s_2}$ . Voir le figure 3.2 .

### 3.3.1 Système de Hénon

Le modèle de Hénon consiste en une itération à deux dimensions qui peut prendre différentes formes. On utilisera la forme suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2 \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$$

### a) Sensibilité aux conditions initiales

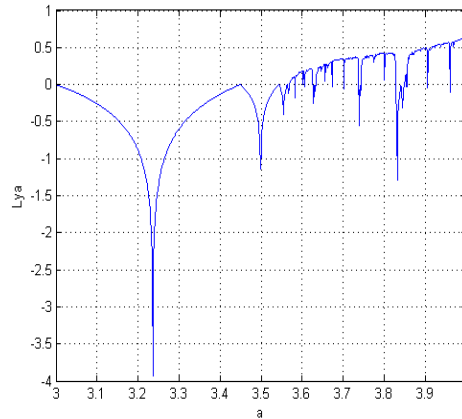


FIGURE 3.2 – Exposant de Lyapounov du système logistique en fonction du paramètre  $a$ .

La sensibilité aux conditions initiales de système de Hénon est illustré sur la figure 3.3 pour les conditions initiales  $x_1 = 0.1, y_1 = 0.1001, z = 0.10$  et  $k_1 = 0.10001$ .

### b) L'exposant de lyapunov

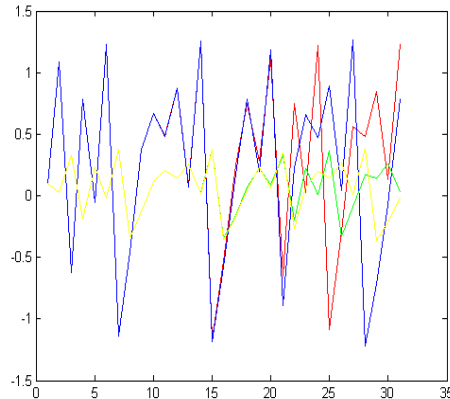
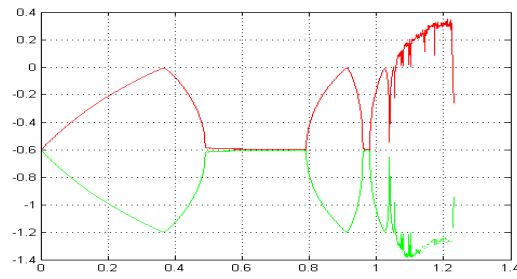
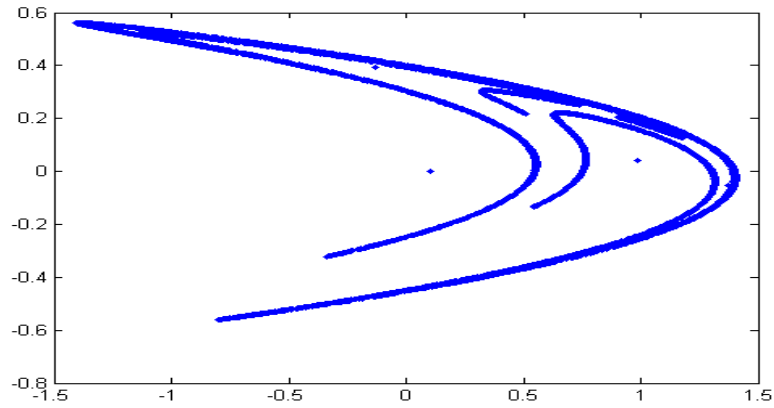


FIGURE 3.3 – Sensibilité aux conditions initiales de système de Hénon pour  $x_1 = 0.1, y_1 = 0.1001, z = 0.10$  et  $k_1 = 0.10001$ .

On utilise l'algorithme de A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney and J. A. Vastano [7] pour calculer l'exposants de lyapunov pour  $a = 1.4, b = 0.3$ , on trouve  $\lambda_1 = 0.42311, \lambda_2 = -1.6271$ , la dimension de Lyapunov est égale à  $D_L = 1.26$ . Voir le figure 3.4.

### c) Attracteur étrange

L'attracteur chaotique de Hénon est représenté sur la Figure 3.5 pour les valeurs numériques  $a = 1.4$  et  $b = 0.3$ .

FIGURE 3.4 – Exposant de Lyapunov du système de Hénon pour  $a = 1.4$  et  $b = 0.3$ FIGURE 3.5 – Attracteur de Hénon pour  $a = 1.4$  et  $b = 0.3$

# Chapitre 4

## Algorithme d'optimisation chaotique basée sur la densité de probabilité de l'application de Lozi

### 4.1 L'idée principale

Comme nous avons dit dans la densité de probabilité des points chaotique gènèrent par l'application chaotique a un grand effet sur l'algorithme d'optimisation chaotique. Si beaucoup de points chaotiques se trouvent à proximité de l'optimum global, alors on a une grande chance de trouver l'optimum globale dans notre recherche. Autrement dit, si la densité de probabilité associé a l'application chaotique a une grande valeur au voisinage de l'optimum globale alors la chance de trouver l'optimum globale est très grande. Cela a donné naissance à l'idée principale de ce travaille. Notre idée est la suivante : au lieu de changer l'application chaotique utilisée dans l'algorithme d'optimisation, nous choisissons une application qui a un comportement chaotique , puis nous utilisons des transformations pour modifier la densité de cette application dans le but d'enrichir la recherche. Après cela, pour toute fonction de test, nous utilisons la transformation qui donne les meilleurs résultats.

Il est important de noter que dans ce travaille on va utiliser l'application de Lozi défini



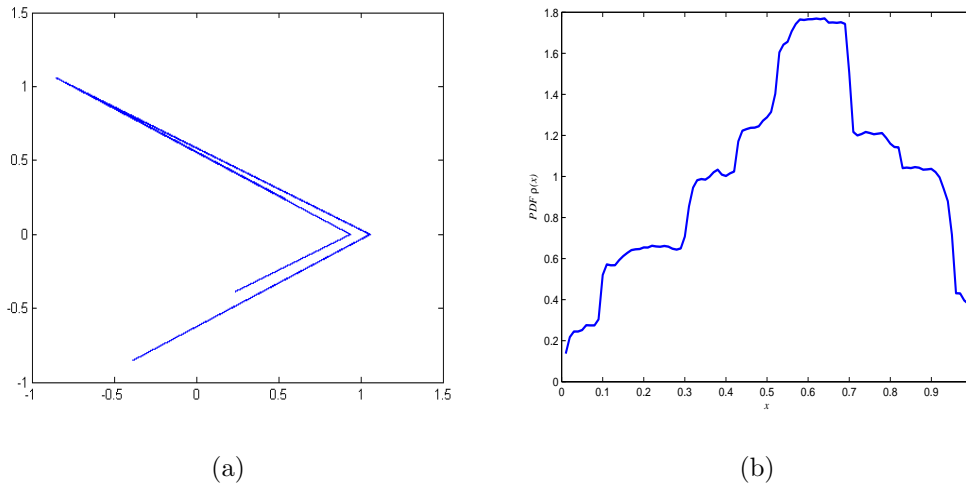


FIGURE 4.1 – (a) Attracteur de Lozi obtenus pour  $a = 1.7$  et  $b = 0.3$ . (b) Densité des itérations  $x(k)$  de l'application de Lozi.

par [23] :

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ L_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - a|x| + by \\ x \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

C'est une application inversible a 2-dimension qui donne un attracteur (dit attracteur de Lozi) chaotique pour  $a = 1.4$  et  $b = 0.3$  comme dans la figure 4.1 (a). Calcul numérique de la densité  $\rho(s)$  associé a l'application de Lozi est donnée par la figure 4.1 (b). Dans cette figure les itérations  $x(k)$  sont normalisées dans l'intervalle  $[0, 1]$  i.e.  $\int_0^1 \rho(x) dx = 1$ . Nous remarquons dans cette figure que la plus grande valeur de  $\rho$  est environ 1.8 pour  $s$  au voisinage de 0.6.

Pour bien comprendre cette idée, nous vous proposons l'exemple suivant

**Exemple 4.1** Soit la transformation  $S$  définit sur l'intervalle  $[0, 1]$  dans lui même par

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x & \text{if } 0 \leq x \leq 0.75 \\ 3x - 2 & \text{if } 0.75 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (4.2)$$

alors la densité des itérations  $S(x(k))$  est donnée par la figure 4.2 (b). Nous remarquons que la majorité des points  $S(L_1)$  sont aux voisinage de 0.2 ; alors si la fonction de test a

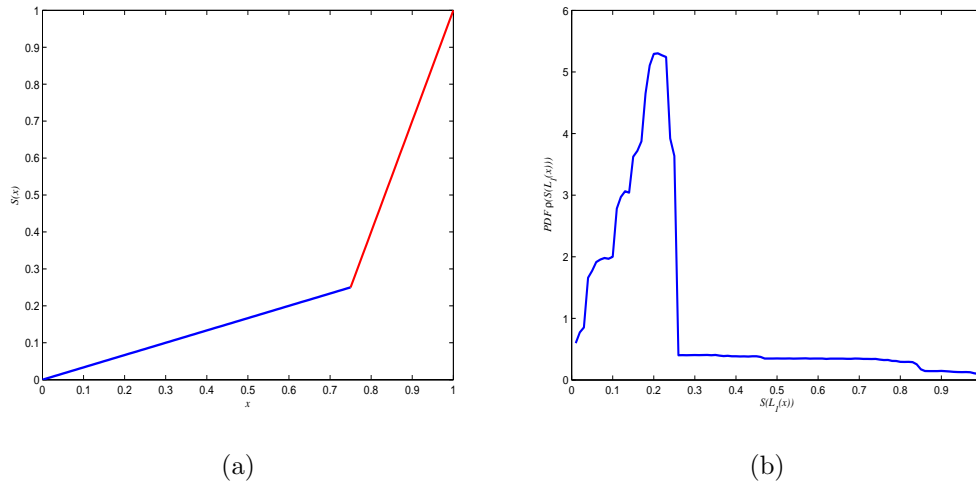


FIGURE 4.2 – (a) La transformation  $S$ . (b) Densité de probabilité de  $S(L_1)$ .

*sont optimum globale au voisinage de 0.2 il est tout à fait possible de le trouver.*

## 4.2 Méthode d'optimisation chaotique (COM)

De nombreux problèmes d'optimisation sans contraintes avec des variables continues peuvent être formulés comme le problème d'optimisation fonctionnelle suivant.

Trouver  $x$  pour minimiser  $f(x)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  tels que  $x_i \in [L_i, U_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , où  $f$  est la fonction de de test,  $x$  est le vecteur des variables et  $L_i$  (resp  $U_i$ ) est la borne inférieur (resp borne supérieur) de la variable  $x_i$ . Pour tester l'efficacité de cette idée, nous allons la combiner avec l'algorithme d'optimisation chaotique proposée par Coelho dans [24] et améliorée par T. Hamaizia et R. Lozi dans [25] et nous l'utilisons pour trouver l'optimum Solution de certaines fonctions de tests. Les différentes étapes de l'algorithme d'optimisation chaotique [25] est les suivantes :

Tout d'abord, l'application de Lozi est adoptée pour avoir un comportement chaotique. On utilise cette application pour générer plusieurs séquences des points en utilisant différentes conditions initiales (le nombre de séquences est égal à la dimension de la fonction objectif). Deuxièmement, nous utilisons une transformation pour modifier la densité de l'application de Lozi comme dans l'exemple ci-dessus.

Troisièmement, chaque séquence  $\{y(i), i = 1, 2, \dots, n\}$  est normalisée dans l'intervalle  $[0, 1]$  comme suit :

$$z(i) = \frac{y(i) - \alpha}{\beta - \alpha} \quad (4.3)$$

pour toute  $i = 1, 2, \dots, n$ , où  $\alpha = \min\{y(i), i \geq 1\}$ ,  $\beta = \max\{y(i), i \geq 1\}$ .

Le reste est

**Les entrées :**

$M_g$  : Nombre maximal d'itérations dans la recherche globale.

$Mgl_1$  : Nombre maximal d'itérations dans la première recherche locale dans la recherche globale.

$Mgl_2$  : Nombre maximal d'itérations dans la deuxième recherche locale dans la recherche globale.

$M_l$  : Nombre maximal d'itérations dans la recherche locale.

$Mt = M_g(Mgl_1 + Mgl_2) + M_l$  : Critère d'arrêt de l'algorithme.

$\lambda_{gl1}$  : Paramètre pour la première recherche Globale-Locale.

$\lambda_{gl2}$  : Paramètre pour la seconde recherche Globale-Locale.

$\lambda$  : Paramètre pour la recherche locale.

**Les sorties :**

$\bar{x}$  : Meilleure solution de la recherche chaotique actuelle.

$\bar{f}$  : valeur optimale de la fonction  $f$ .

**Step 1 :** Initialisation des nombres  $M_g$ ,  $Mgl_1$ ,  $Mgl_2$ ,  $M_l$ , des paramètres  $\lambda_{gl1}$ ,  $\lambda_{gl2}$ ,  $\lambda$  et conditions initiales. Pour  $k = 1$  on pose  $y_1(1)$ ,  $y_2(1)$ ,  $a = 1.1$ ,  $b = 0.3$  et  $\bar{f} = +\infty$ .

**-Step 2 : Algorithme de la recherche globale**

**while**  $k \leq M_g$  **do**

$x_i(k) = L_i + z_i(k)(U_i - L_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$

**if**  $f(x(k)) < \bar{f}$ , **then**

$\bar{x} = x(k)$ ,  $\bar{f} = f(x(k))$

**end if**

**-Step 2-1 : Sous algorithme de la première recherche globale-locale :**

---

```

while  $j \leq M_{gl1}$  do
for  $i = 1$  to  $n$  do
if  $r \leq 0.5$  then (where  $r$  is a uniformly distributed random variable with range
 $[0, 1]$ )
 $x_i(j) = \bar{x}_i + \lambda_{gl1} z_i(j)(U_i - \bar{x}_i)$ 
else
 $x_i(j) = \bar{x}_i - \lambda_{gl1} z_i(j)(\bar{x}_i - L_i)$ 
end if
end for
if  $f(x(j)) < \bar{f}$ , then
 $\bar{x} = x(j)$ ,  $\bar{f} = f(x(j))$ 
end if
 $j = j + 1$ 
end while

- Step 2-2 : Sous algorithme de la deuxième recherche globale-locale :
while  $s \leq M_{gl2}$  do
for  $i = 1$  to  $n$  do
if  $r \leq 0.5$  then
 $x_i(s) = \bar{x}_i + \lambda_{gl2} z_i(s)(U_i - \bar{x}_i)$ 
else
 $x_i(s) = \bar{x}_i - \lambda_{gl2} z_i(s)(\bar{x}_i - L_i)$ 
end if
end for
if  $f(x(s)) < \bar{f}$ , then
 $\bar{x} = x(s)$ ,  $\bar{f} = f(x(s))$ 
end if
 $s = s + 1$ 
end while
 $k = k + 1$ 
end while

```

---

- **Step 3 : Algorithme de la recherche locale**

**while**  $k \leq M_g(Mgl_1 + Mgl_2) + M_l$  **do**

**for**  $i = 1$  to  $n$  **do**

**if**  $r \leq 0.5$  **then**

$$x_i(k) = \bar{x}_i + \lambda z_i(k)(U_i - \bar{x}_i)$$

**else**

$$x_i(k) = \bar{x}_i - \lambda z_i(k)(\bar{x}_i - L_i)$$

**end if**

**end for**

**if**  $f(x(k)) < \bar{f}$ , **then**

$$\bar{x} = x(k), \bar{f} = f(x(k))$$

**end if**

$k = k + 1$

**end while**

Dans le but d'enrichir notre étude, nous allons utiliser différentes valeurs des paramètres  $\lambda$ ,  $\lambda_{gl1}$  et  $\lambda_{gl2}$  et différentes valeurs pour les nombres  $M_g$ ,  $Mgl_1$ ,  $Mgl_2$  et  $M_l$  comme dans le tableau 4.1.

	$\lambda$	$\lambda_{gl1}$	$\lambda_{gl2}$	$M_g$	$M_l$	$Mgl_1$	$Mgl_2$	$Mt$
C1	0.01	0.04	0.01	50	10	5	5	510
C2	0.01	0.4	0.01	50	10	5	5	510
C3	0.01	0.04	0.01	100	50	5	5	1050
C4	0.001	0.04	0.01	200	100	5	5	2100

TABLE 4.1 – L'ensemble des paramètres pour chaque exécution de l'algorithme COM

## 4.3 Exemples numériques et discussion

### 4.3.1 Quelques transformations

Dans cette section, nous proposons des transformations afin de les utiliser pour changer la densité de l'application de Lozi.

1.

$$S_1(x) = x^2 + 3x \quad (4.4)$$

2. Soit  $m$  être le minimum de la séquence générée par l'application de Lozi et  $M$  le maximum de cette séquence et soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres réels. Nous définissons la transformation  $S_2$  comme suit :

$$S_2(x) = \frac{-2\alpha}{m - M}x + \beta - \alpha - \frac{-2\alpha}{m - M}m. \quad (4.5)$$

Nous notons que si on a un doute que le point optimal est  $x^*$  alors on peut choisir  $\alpha$  et  $\beta$  de sorte que la majorité des points  $S_2(x)$  sont aux voisinage de  $x^*$ . Dans cette mémoire on pose  $\alpha = 0.001$  et  $\beta = \frac{1}{2}$ .

3.

$$S_3(x) = \tan(x) \quad (4.6)$$

4.

$$S_4(x) = \log(|x|) \sin(x) \quad (4.7)$$

La figure 4.3 (a) représente la densité de probabilité  $\rho_1$  de  $S_1(L_1)$  par lequel nous voyons que la fonction  $\rho_1$  est décroissante sur l'intervalle  $[0.5, 1]$  qui contient moins de points de  $S_1(L_1)$  que l'intervalle  $[0, 0.5]$ . La densité  $\rho_2$  de  $S_2(L_1)$  est présenté dans la figure 4.3 (b); nous notons que la majorité des points se situent aux voisinage de 0.5. La densité  $\rho_3$  de  $S_3(L_1)$  est présenté dans la figure 4.4 (a) elle semblable à la densité normale. Enfin, la fonction de densité de  $S_4(L_1)$  est comme la densité de l'application logistique 4.4.

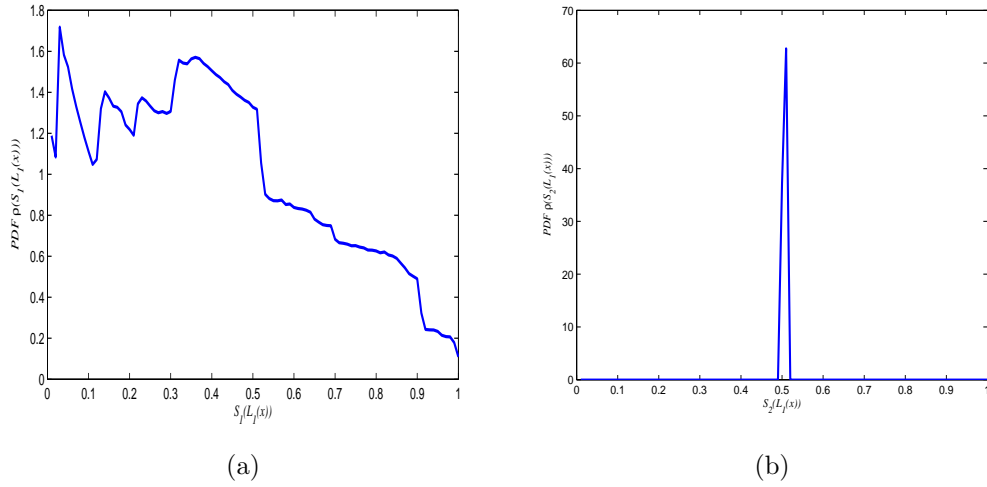


FIGURE 4.3 – (a) Densité de probabilité de  $S_1(L_1)$ . (b) Densité de probabilité de  $S_2(L_1)$ .

### 4.3.2 Quelques fonctions de tests

Dans cette sous section, nous allons donner des fonctions de tests qui permettent d'examiner l'efficacité de cette nouvelle méthode.

1.

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i^4 - 16x_i^2 + 5x_i)}{2} \quad (4.8)$$

où  $-5 \leq x_i \leq 5$  pour tout  $1 \leq i \leq n$

2.

$$f_2(x_1, x_2) = x_1^4 - 7x_1^2 + x_2^4 - 9x_2^2 - 5x_2 + 11x_1^2x_2^2 + 99 \sin(71x_1) + 137 \sin(97x_1x_2) + 131 \sin(51x_2). \quad (4.9)$$

où  $-10 \leq x_1 \leq 10$  et  $-10 \leq x_2 \leq 10$ .

3.

$$f_3(x_1, x_2) = [1 + (x_1 + x_2 + 1)^2(19 - 14x_1 + 3x_1^2 - 14x_2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2)] \times [30 + (2x_1 - 3x_2)^2(18 - 32x_1 + 12x_1^2 + 48x_2 - 36x_1x_2 + 27x_2^2)] \quad (4.10)$$

où  $-2 \leq x_1 \leq 2$  et  $-2 \leq x_2 \leq 2$ .

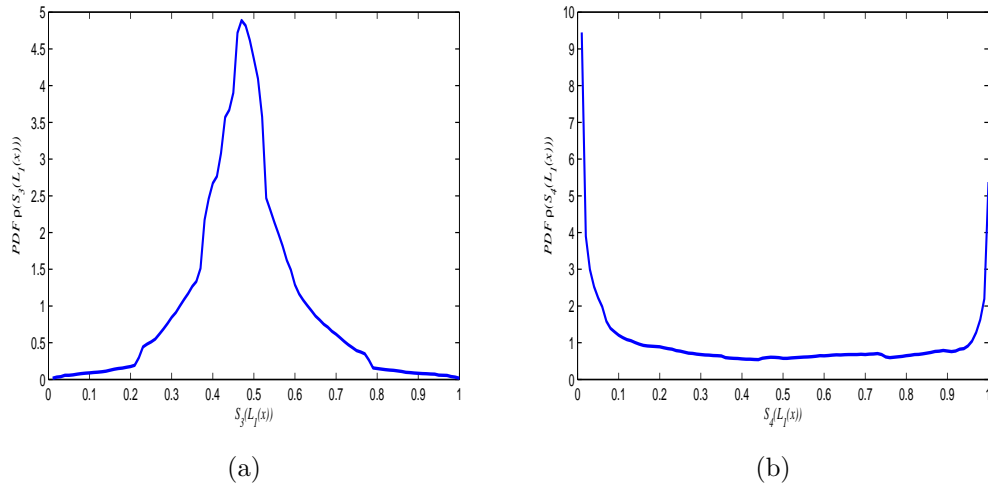


FIGURE 4.4 – (a) Densité de probabilité de  $S_3(L_1)$ . (b) Densité de probabilité de  $S_4(L_1)$ .

4.

$$f_4(x_1, x_2) = 100\sqrt{|x_2 - 0.01x_1^2|} + 0.01|x_1 + 10| \quad (4.11)$$

où  $-15 \leq x_1 \leq -5$  et  $-3 \leq x_2 \leq 3$ .

La figure 4.5 (a) présente la fonction de Styblinski-Tang function.  $f_1$  est une fonction  $d$ -dimensionnelle, et généralement évalué sur  $x_i \in [-5, 5]$ , pour tout  $i = 1, \dots, d$  où  $d$  est la dimension de  $f_1$ , elle a un minimum globale  $-39.16617 \times d \leq f_1(-2.903534, \dots, -2.903534) \leq -39.16616 \times d$ . Concernant la fonction  $f_2$  montré sur la figure 4.6 (a), elle a des centaines minimums locales. La fonction de Goldstein-Price  $f_3$  est généralement évalué sur le rectangle  $x_1 \in [-2, 2]$  et  $x_2 \in [-2, 2]$ , elle a plusieurs minimums locales et un minimum globale  $f_3(0, -1) = 3$ . La fonction de Bukin  $f_4$  est généralement évalué sur le rectangle  $x_1 \in [-15, -5]$  et  $x_2 \in [-3, 3]$ , elle a plusieurs minimums locales et un minimum globale  $f_4(-10, 1) = 0$ .

### 4.3.3 Résultats numériques

Chaque méthode d'optimisation a été implémentée avec Matlab (MathWorks). Tous les programmes ont été exécutés sur un processeur i3, 2.53 GHz, i3 et une rame 4 GB. D'autre part, puisque l'algorithme COM donne des résultats aléatoires, alors, on va exécuté le programme 50 fois de manière indépendantes ; chaque fois on utilise 50 conditions



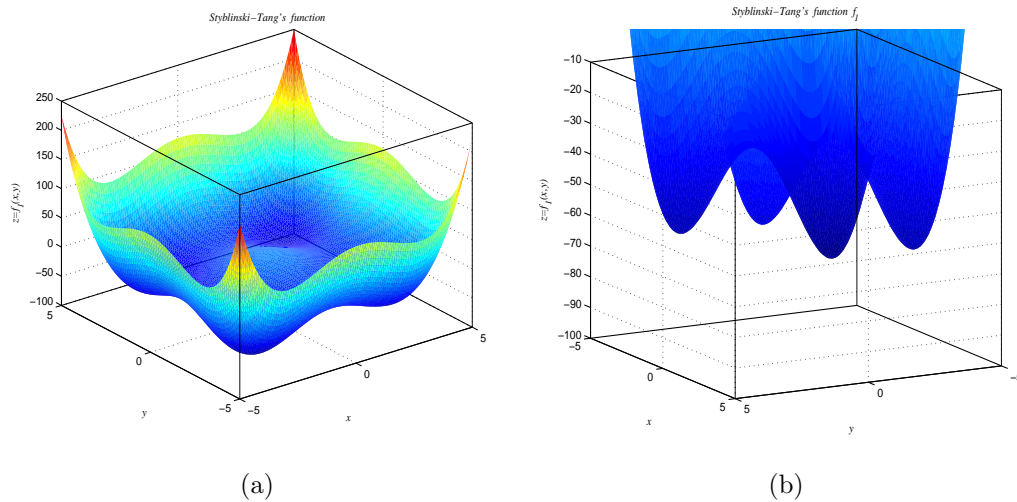


FIGURE 4.5 – (a) La fonction de Styblinski-Tang  $f_1$ . (b) Grossissement de la fonction de Styblinski-Tang  $f_1$

initiales différentes. Le tableau 4.2 présente les résultats numériques de la recherche globale pour la fonction de Styblinski-Tang  $f_1$  ; nous remarquons que la meilleure transformation qu'on peut utiliser pour trouver l'optimum de  $f_1$  est  $S_4$ . Les résultats numériques pour la fonction  $f_2$  sont présentés dans le tableau 4.3 et les meilleurs résultats sont obtenus par la transformation  $S_3$  and  $S_4$ . Les résultats numériques pour la fonction Goldstein-Price  $f_3$  sont présentés dans le tableau 4.4 et les meilleurs résultats sont obtenus par la transformation  $S_4$ . On fin les résultats de la recherche globale pour la fonction  $f_4$  sont présentés dans le tableau 4.5 et la transformation qui donne les meilleurs résultats est  $S_1$ .

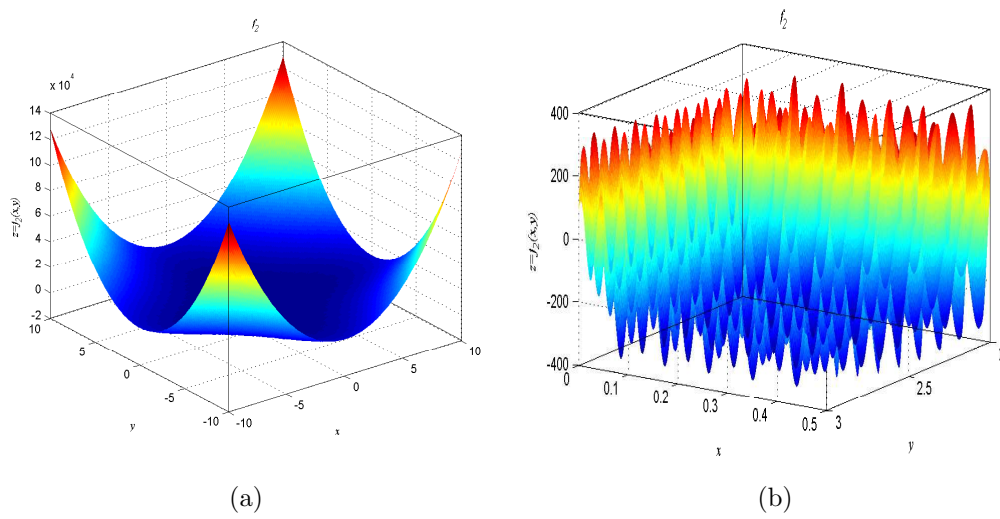


FIGURE 4.6 – (a) La fonction  $f_2$ . (b) Grossissement de la fonction  $f_2$ .

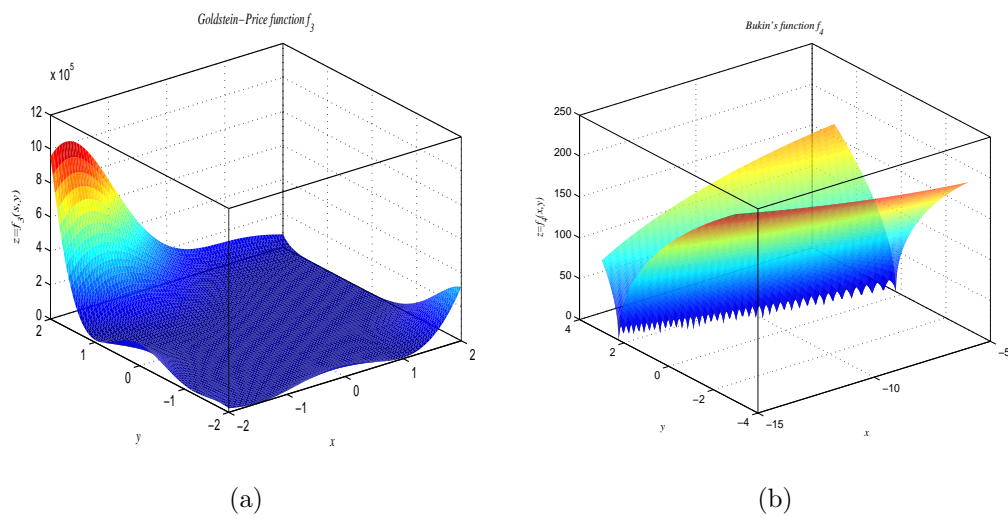


FIGURE 4.7 – (a) La fonction de Goldstein-Price  $f_3$ . (b) La fonction de Bukin  $f_4$ .

T.F	Trans	Cases	Optimal solu	Optimal point	Mean value	Std.Dev
$f_1$	$S_1$	C1	-117.4985	(-2.9045,-2.9044,-2.9026)	-117.4980	0.0003
		C2	-117.4969	(-2.9108,-2.9044,-2.8972)	-117.4532	0.0294
		C3	-117.4985	(-2.9031,-2.9041,-2.9023)	-117.4982	0.0001
		C4	-117.4985	(-2.9033,-2.9035,-2.9043)	-117.4984	0.0001
	$S_2$	C1	-117.4970	(-2.9095,-2.9059,-2.9103)	-117.4888	0.0061
		C2	-117.4584	(-2.9356,-2.9020,-2.9390)	-116.5590	0.5693
		C3	-117.4980	(-2.9047,-2.9049,-2.9085)	-117.4939	0.0025
		C4	-117.4984	(-2.9050,-2.9016,-2.9031)	-117.4949	0.0029
	$S_3$	C1	-117.4947	(-2.9022,-2.8920,-2.8941)	-117.4773	0.0105
		C2	-116.5576	(-2.7716,-3.0596,-3.0117)	-114.5126	1.2206
		C3	-117.4979	(-2.9040,-2.8978,-2.9018)	-117.4805	0.0103
		C4	-117.4958	(-2.9132,-2.9113,-2.9055)	-117.4816	0.0082
	$S_4$	C1	-117.4985	(-2.9035,-2.9037,-2.9037)	-117.4985	0.0000
		C2	-117.4985	(-2.9039,-2.9039,-2.9030)	-117.4980	0.0002
		C3	-117.4985	(-2.9034,-2.9034,-2.9038)	-117.4985	0.0000
		C4	-117.4985	(-2.9035,-2.9036,-2.9035)	-117.4985	0.0000

TABLE 4.2 – Résultats numériques pour la fonction  $f_1$ .

Test function	Transformations	Cases	Optimal solution	Optimal point	Mean value	Std.Dev
$f_2$	$S_1$	C1	-395.6748	(0.1533,2.4332)	-389.4862	7.8471
		C2	-395.4022	(0.1535,2.4322)	-384.5009	4.5688
		C3	-395.8736	(0.2433,2.0636)	-389.2662	8.1911
		C4	-395.8498	(0.2433,2.0632)	-377.1366	7.8063
	$S_2$	C1	-395.8338	(0.2433,2.0641)	-378.3163	8.2958
		C2	-395.7457	(0.2431,2.0644)	-378.7449	6.2101
		C3	-395.7776	(0.2434,2.0640)	-381,5902	9.5200
		C4	-395.7475	(0.2435,2.0634)	-381.9671	8.9664
	$S_3$	C1	-395.8474	(0.2432,2.0636)	-393.0928	1.4983
		C2	-388.3178	(0.0661,1.6989)	-385.7685	0.3642
		C3	-395.7612	(0.2431,2.0635)	-393.6255	1.0753
		C4	-395.7959	(0.2432,2.0642)	-387.6166	7.0161
	$S_4$	C1	-385.1566	(1.9246,0.0925)	-373.0012	3.1790
		C2	-395.6758	(0.2432,2.0647)	-389.1207	5.6259
		C3	-395.8349	(0.2432,2.0641)	-392.9497	2.1407
		C4	-395.8751	(0.2433,2.0635)	-393.5276	1.2457

TABLE 4.3 – Résultats numériques pour la fonction  $f_2$ .

Test function	Transformations	Cases	Optimal solution	Optimal point	Mean value	Std.Dev
$f_3$	$S_1$	C1	3.0000	(-0.0000,-1.0000)	3.0000	0.0000
		C2	3.0003	(-0.0011,-0.9998)	3.0028	0.0021
		C3	3.0000	(-0.0000,-1.0000)	3.0000	0.0000
		C4	3.0000	(-0.0000,-1.0000)	3.0000	0.0000
	$S_2$	C1	3.0000	(-0.0000,-1.0002)	3.0008	0.0012
		C2	3.0003	(-0.0002,-0.9992)	3.0639	0.0689
		C3	3.0000	(-0.0003,-1.0000)	3.0004	0.0003
		C4	3.0000	(-0.0003,-0.9997)	3.0005	0.0003
	$S_3$	C1	3.0000	(-0.0002,-0.9999)	3.0042	0.0038
		C2	3.0574	(-0.0100,-0.9933)	3.1461	0.0501
		C3	3.0002	(-0.0003,-0.9995)	3.0045	0.0041
		C4	3.0001	(0.0004,-0.9997)	3.0045	0.0034
	$S_4$	C1	3.0000	(-0.0000,-1.0000)	3.0000	0.0000
		C2	3.0000	(-0.0000,-1.0000)	3.0000	0.0000
		C3	3.0000	(-0.0000,-1.0000)	3.0000	0.0000
		C4	3.0000	(-0.0000,-1.0000)	3.0000	0.0000

TABLE 4.4 – Résultats numériques pour la fonction  $f_3$ .

Test function	Transformations	Cases	Optimal solution	Optimal point	Mean value	Std.Dev
$f_4$	$S_1$	C1	0.0173	(-10.7026,1.1455)	0.1600	0.0720
		C2	0.0247	(-11.4549,1.3121)	0.4569	0.2221
		C3	0.0058	(-9.6433,0.9299)	0.0916	0.0517
		C4	0.0054	(-10.3195,1.0649)	0.0764	0.0423
	$S_2$	C1	0.0126	(-10.1153,1.0232)	0.2494	0.1133
		C2	0.0440	(-9.3116,0.8671)	0.6132	0.3021
		C3	0.0138	(-10.2609,1.0529)	0.1403	0.0776
		C4	0.0103	(-10.4391,1.0897)	0.1029	0.0532
	$S_3$	C1	0.0203	(-10.0553,1.0111)	0.2316	0.01306
		C2	0.0821	(-12.3331,1.5211)	0.8963	0.4186
		C3	0.0185	(-9.9977,0.9995)	0.1903	0.1097
		C4	0.0100	(-10.2287,1.0463)	0.1183	0.0615
	$S_4$	C1	0.0291	(-12.6313,1.5955)	0.0911	0.0338
		C2	0.0220	(-9.3076,0.8663)	0.2144	0.1155
		C3	0.0247	(-12.4120,1.5406)	0.0780	0.0212
		C4	0.0299	(-12.9314,1.6722)	0.0665	0.0200

TABLE 4.5 – Résultats numériques pour la fonction  $f_4$ .

# Conclusion

Dans cette mémoire, nous avons présenté une nouvelle technique d'optimisation chaotique en utilisant certaines transformations afin de modifier la densité de l'application de Lozi. Afin de tester l'efficacité de cette nouvelle technique, nous avons utilisé quatre fonctions de test. Le résultat de cette étude est : il n'y a pas une application chaotique qui donne de bons résultats pour toutes les fonctions de test. Alors pour trouver l'optimum global d'une certaine fonction on choisit une application qui a un bon comportement chaotique et on choisit aussi la transformation qui donne les bons résultats pour cette fonction.

# Bibliographie

- [1] G.Q. Zhong, F. Ayrom, Experimental confirmation of chaos from Chua's circuit, *International Journal of Circuit Theory and Applications*. (1985)vol.13, no.1, 93-98.
- [2] L. Illing, Digital communication using chaos and non linear dynamics, *Nonlinear Anal.*71(2009) 2958-2964.
- [3] G.I. Bischi, L. Gardini, M. Kopel, Analysis of global bifurcations in a market share attraction model, *J. Econ. Dyn. Control* 24(5), (2000) 855-879.
- [4] H.N. Agiza, A.S. Hegazi, A.A. Elsadany, The dynamics of Bowley's model with bounded rationality, *Chaos Soliton and Fractals* 12(9) (2001) 1705-1717.
- [5] Q. Lin, K.W. Wong, J. Chen, An enhanced variable-length arithmetic coding and encryption scheme using chaotic maps, *J. Syst. Softw.* 86(2013) 1384-1389.
- [6] Z. Povalej, Quasi-Newton's method for multi objective optimization, *J. Comput. Appl. Math.* 255 (2014) 765-777.
- [7] J. Liu, S. J. Li, New hybrid conjugate gradient method for unconstrained optimization, *Appl. Math. Comput.* 245 (2014) 36-43.
- [8] T.W.C. Chen, V. S. Vassiliadis, Solution of general nonlinear optimization problems using the penalty/ modified barrier method with the use of exact Hessians, *Comput. Chem. Eng.* 27(4) (2003) 501-525.
- [9] E. Canale, F. Robledo, P. Romero, P. Sartor, Monte Carlo methods in diameter-constrained reliability, *Opt. Switch. Netw.*14(2)(2014) 134-148.
- [10] J. A.T. Machado, Optimal tuning of fractional controllers using genetic algorithms, *Nonlinear Dyn.* 62(12)(2010) 447-452.



- 
- [11] D. Bunnag , M. Sun, Genetic algorithm for constrained global optimization in continuous variables, *Appl. Math. Comput.*171(1)(2005) 604-636.
- [12] L. Chen, K. Aihara, Optimization by chaotic simulated annealing, *Proceedings of International Conference of Sino-Japanese Young Scientist*, vol. 3, 1995, pp. 57-59.
- [13] Y. Hu, Y.C. Li, J.X. Yu, H.D. Chao, Steeped-up chaos optimization algorithm and its application, *J. System Eng.* 17 (1) (2002) 41-44.
- [14] V.T. Jovanovic, Chaotic descent method and fractal conjecture, *Internat. J. Numer. Methods Eng.* 48 (2000) 137-152.
- [15] B. Li, W.S. Jiang, Optimizing complex function by chaos search, *Cybernetics and Systems* 29 (4) (1998) 409-419.
- [16] L. S. Coelho. "Tuning of PID controller for an automatic regulator voltage system using chaotic optimization approach", *Chaos, Solitons and Fractals*, 39, 2009, 1504-1514.
- [17] B. Li, W.S. Jiang, Chaos optimization method and its application, *Journal of Control Theory and Application* 14 (4) (1997) 613-615.
- [18] C. Choi, J.J. Lee, Chaotic local search algorithm, *Artificial Life and Robotics* 2 (1) (1998) 41-47.
- [19] C. Zhang, L. Xu, H. Shao, Chaos optimization algorithm based on linear search and its application to nonlinear constraint optimization problems, *Chinese Journal of Control and Decision* 16 (1) (2001) 123-128.
- [20] Hung ML, Lin JS, Yan JJ, Liao TL. Optimal PID control design for synchronization of delayed discrete chaotic systems. *Chaos, Solitons Fractals* 2008;35(4) :781-5.
- [21] Pan H, Wang L, Liu B. Chaotic annealing with hypothesis test for function optimization in noisy environments. *Chaos, Solitons Fractals* 2008;35(5) :888-94.
- [22] D. Yang, Z Liu, J Zhou. Chaos optimization algorithms based on chaotic maps with different probability distribution and search speed for global optimization, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 19 (2014) 1229–1246
- [23] Lozi. R, Un attracteur étrange du type attracteur de Hénon, *Journal de Physique. Colloque C5, Supplément au n0 8*, 39, 9-10 (1978) .
-

- [24] L. S. Coelho. "Tuning of PID controller for an automatic regulator voltage system using chaotic optimization approach", *Chaos, Solitons and Fractals*, 39, 2009, 1504-1514.
- [25] T. Hamaizia, R. Lozi, N. Hamri, Fast chaotic optimization algorithm based on locally averaged strategy and multifold chaotic attractor, *Applied Mathematics and Computation* 219 (2012) 188–196.