

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



N° Réf :.....

Centre Universitaire
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

EN: Mathématiques
Spécialité : Mathématiques Fondamentales

Application de la théorie de Nevanlinna ultramétrique aux équations fonctionnelles aux q -différences

Préparé par : Mekhlouf Rima
Loucif Soria

Devant le jury :

Fadel Wahida	M.A.A	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Président
Bourourou Siham	M.C.B	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Rapporteur
Kecies Mohamed	M.A.A	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Examinateur

Année Universitaire : 2017/2018

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciement

*Nous tenons à remercier avant tout **DIEU** qui nous a donné la force, la volonté, le courage, et la patience de pouvoir réaliser ce modeste travail.*

*On tient aussi à remercier Madame **Bourourou Siham**, notre encadreur qui a su orienter notre travail, aussi pour sa disponibilité à nous prodiguer des conseils, pour sa confiance et pour sa précieuse aide, on la remercie du fond du cœur.*

Nous sincères remerciements sont adressés à tous les membres du jury qui ont accepté de juger notre modeste travail et à tous ceux qui, sans avoir été impliqués directement dans ce travail, ont toujours été d'un grand support : nos enseignants, nos familles, nos amis, nos collègues chacun son nom.

Dédicace

*A mes très chers parents
pour tous les soins et le suivi dont ils font preuve depuis ma naissance et au long de mes études
pour leurs soutien et surtout leurs conseils et amour*

*A mes très chères sœurs
A mes très chères frères
A ma grande famille
A toutes mes amies
A tous ceux qui m'aiment et que j'aime*

Rima

Dédicace

*Je dédie ce modeste travail
À cet source de tendresse, de patience et de générosité, à ma mère.
À tous mes frères et sœurs, ainsi que leurs enfants.
À mon fiancé et à ma belle famille.
À tous mes amis et collègues.
À tous les étudiants de la promotion 2017-2018.
À tous ceux qui, par un mot, m'ont donné la force de continuer...*

Soria

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
1 Notions Fondamentales En Analyse Ultramétrique	3
1.1 Corps valués ultramétriques	3
1.2 Propriétés des corps valués ultramétriques	4
1.3 Les corps des nombres p-adiques	6
1.3.1 Valuation et norme p-adique sur \mathbb{Q}	6
1.3.2 Complétion de \mathbb{Q}	9
1.3.3 L'anneau des entiers p-adiques	10
1.4 Propriétés topologiques et analytiques des nombres p-adiques . .	11
1.4.1 Propriétés topologiques	11
1.4.2 Propriétés analytiques	12
1.5 Le corps \mathbb{C}_p	14
1.6 Fonctions analytiques d'un corps ultramétrique	15
1.7 Zéros des fonctions analytiques	16
1.8 Fonctions méromorphes d'un corps ultramétrique	20
1.9 Polygone De Valuation	20
2 Théorie de Nevanlinna Sur Un Corps Ultramétrique	23
2.1 Formule De Jensen	23
2.2 Fonction De Nevanlinna	26
2.3 Théorème Fondamental De Nevanlinna	30
3 Application de la Théorie de Nevanlinna aux équations fonctionnelles linéaires aux q-différences	31
3.1 Équations aux q-différences	31
Bibliographie	37

INTRODUCTION

La théorie de Nevanlinna joue un rôle majeur dans les problèmes de distribution de valeurs, cette théorie a été introduite en 1989 par A.Boutabaa dans le corps des fonctions méromorphes p-adiques, et ensuite, en 2001, lui et Escassut ont étendu cette théorie aux fonctions méromorphes dans un disque ouvert.

Dans ce mémoire, on étudie quelques applications de la théorie de Nevanlinna aux équations fonctionnelles linéaires aux q-différence de la forme

$$\sum_{i=0}^s g_i(x)f(q^i x) = h(x),$$

où $q \in \mathbb{K}, 0 < |q| < 1$.

Nous étudions, en particulier, le comportement des solutions, dans le cas où elle existe, de ces équations. On insiste surtout sur l'étude de la solution méromorphe en général et la solution entière en particulier. Les caractéristiques de la solution dépendent particulièrement de la nature des coefficients de ces équations.

Ce mémoire est composé de l'introduction générale et trois chapitres.

Le premier chapitre, nous donnons tout d'abord quelques rappels sur les corps ultramétriques, et traitons quelques propriétés de \mathbb{Q}_p . Dans une seconde partie, nous allons introduire les notions et les propriétés nécessaires liées aux fonctions analytiques et méromorphes, en suite nous parlerons de quelques applications utiles et souvent étonnantes du polygone de valuation.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à la théorie de Nevanlinna ultramétrique qui est devenue l'une des champs mathématiques les plus intéressants. Pour cela on a besoin de définir les notions classiques de cette théorie ; la fonction de comptage de zéros de f avec multiplicités $Z(r, f)$, La fonction de comptage de pôles de f avec multiplicités $N(r, f)$, la fonction de compensa-

Introduction

tion $m(r, f)$, et en fin la fonction caractéristique $T(r, f)$. On va donner aussi la version ultramétrique de la formule de Jensen qu'on utilisera assez fréquemment au long de ce chapitre. En plus, on va présenter le théorème fondamental de Nevanlinna qu'est tout court une reformulation de la formule de Jensen.

Dans le dernier chapitre, on s'intéresse à l'application de la théorie de Nevanlinna ultramétrique aux équations fonctionnelles linéaires aux q -différences. On utilise les notions de base de la théorie de Nevanlinna ultramétrique pour caractériser la taille des solutions méromorphes de ces équations et étudier le comportement et l'ordre de croissance de ces solutions.

CHAPITRE 1

NOTIONS FONDAMENTALES EN ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

1.1 Corps valués ultramétriques

Dans ce chapitre, nous allons donner des notions fondamentales utilisées tout au long du mémoire, quelques résultats fondamentaux des corps ultramétriques et quelques concepts de base et théorèmes principaux de l'analyse p-adique.

Définition 1.1.1 Soit \mathbb{K} un corps. Une valeur absolue sur \mathbb{K} est une application $|\cdot| : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}_+$, vérifiant les trois propriétés suivantes

(i) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \forall x \in \mathbb{K}$

(ii) $|xy| = |x| \cdot |y|, \forall x, y \in \mathbb{K}$

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{K}$ (inégalité triangulaire)

On dit que la valeur absolue $|\cdot|$ est ultramétrique, si au lieu de (iii) on a

$$|x + y| \leq \max(|x|, |y|), \forall x, y \in \mathbb{K}.$$

Cette propriété est connue comme l'inégalité triangulaire forte ou ultramétrique ; elle est plus forte que la propriété (iii).

- Définition 1.1.2** – On appelle corps valué, tout couple de la forme $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ où \mathbb{K} est un corps et $|\cdot|$ est une valeur absolue sur \mathbb{K} .
- On appelle la distance induite sur \mathbb{K} par $|\cdot|$, la distance $d_{|\cdot|}$ sur \mathbb{K} définie par

$$\forall x, y \in \mathbb{K} : d_{|\cdot|}(x, y) = |x - y|.$$

- Si $|\cdot|$ est une valeur absolue ultramétrique, alors

$$\forall x, y, z \in \mathbb{K} : d_{|\cdot|}(x, y) \leq \max(d_{|\cdot|}(x, y), d_{|\cdot|}(y, z)),$$

et la distance induite par cette valeur absolue appelée distance ultramétrique.

- Lorsque \mathbb{K} muni de la distance ultramétrique, on dit que \mathbb{K} est un corps valué ultramétrique. Dans le cas contraire, on dit que \mathbb{K} est un corps valué archimédien.

1.2 Propriétés des corps valués ultramétriques

Théorème 1.2.1 [12]

Soit $|\cdot|$ une valeur absolue sur un corps \mathbb{K} .

Les conditions suivantes sont équivalentes

- (i) $|\cdot|$ est une valeur absolue ultramétrique,
- (ii) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $|n| \leq 1$.

Démonstration.

On démontre (i) \implies (ii) par récurrence; soit $n \in \mathbb{N}^*$, si $n = 1$, on a $|1| = 1$. Supposons $|k| \leq 1$ pour tout $k = 1, \dots, n - 1$, et montrons que $|n| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous avons

$$\begin{aligned} |n| = |(n - 1) + 1| &\leq \max(|n - 1|, |1|) \\ &\leq 1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Si $n \in \mathbb{Z}$, on a $n = -n', n' \in \mathbb{N}$. Nous avons toujours $|n| = |-n'| = |n'| \leq 1$, donc $|n| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, supposons que $|n| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Nous voulons prouver que pour deux éléments quelconques $x, y \in \mathbb{K}$, nous avons $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$. Si $y = 0$ c'est évident. Sinon, nous pouvons diviser par $|y|$, et nous voyons que cela équivaut à l'inégalité

$$\left| \frac{x}{y} + 1 \right| \leq \max\left\{ \left| \frac{x}{y} \right|, 1 \right\}.$$

Cela signifie que nous devons prouver l'inégalité le cas où le second terme de la somme est 1. D'autres termes, nous voulons prouver que pour tout $x \in \mathbb{K}$, on a

$$|x + 1| \leq \max\{|x|, 1\}.$$

Maintenant, soit n un entier positif. Alors, nous avons

$$\begin{aligned} |x + 1|^n &= |(x + 1)^n| = \left| \sum_{k=0}^n C_n^k x^k \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n |C_n^k| |x|^k. \end{aligned}$$

Puisque C_n^k est un entier, $|C_n^k| \leq 1$, donc on peut continuer avec

$$|x + 1|^n \leq \sum_{k=0}^n |x|^k \leq (n + 1) \max\{1, |x|^n\}$$

Pour la dernière étape, notons que la plus grande valeur de $|x|^k$, pour $k = 0, 1, 2, \dots, n$ est égale à $|x|^n$ si $|x| > 1$ et égal à 1 sinon. Prenant la n -ième racine sur les deux côtés donne

$$|x + 1| \leq \sqrt[n]{n + 1} \max\{1, |x|\}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

et on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n + 1} = 1$. Par conséquent,

$$|x + 1| \leq \max\{1, |x|\}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{K}$$

■

Corollaire 1.2.1 [12]

Soit \mathbb{K} un corps, alors la valeur absolue $|\cdot|$ est archimédienne si et seulement si $\sup\{|n|, n \in \mathbb{Z}\} = +\infty$,

Proposition 1.1 [12]

Soient a et x deux éléments d'un corps ultramétrique $(\mathbb{K}, |\cdot|)$, on a

$$|x - a| < |a| \implies |x| = |a|$$

Démonstration.

Soient $x, a \in \mathbb{K}$, par l'inégalité ultramétrique, on a

$$\begin{aligned} |x| &= |x - a + a| \leq \max\{|x - a|, |a|\} = |a|, \\ |a| &= |a - x + x| \leq \max\{|x - a|, |x|\}. \end{aligned}$$

Si $\max\{|x - a|, |x|\} = |x|$, on a le résultat. L'autre variante est contradiction avec l'hypothèse.

Corollaire 1.2.2 [12]

Dans un espace ultramétrique, tous les triangles sont isocèles.

1.3 Les corps des nombres p-adiques

Pour chaque p premier, on va construire de nouveaux nombres, appelés nombres p-adiques. Comme les nombres réels sont construits à partir des nombres rationnels, en complétant \mathbb{Q} suivant la topologie induite par la valeur absolue usuelle, les nombres p-adiques sont obtenus en complétant \mathbb{Q} , mais pour une topologie différente, celle induite par la distance p-adique.

1.3.1 Valuation et norme p-adique sur \mathbb{Q}

Définition 1.3.1 (Valuation p-adique sur \mathbb{Z} et \mathbb{Q})

Soit p un nombre premier. La valuation p-adique sur \mathbb{Z} est la fonction

$$v_p : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$$

$$a \rightarrow \begin{cases} v_p(a) & \text{si } a \neq 0 \\ +\infty & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

où $v_p(a)$ est le plus grand entier positif tel que $p^{v_p(a)}$ divise a i.e., $a = p^{v_p(a)} \cdot b$ avec p ne divise pas b .

On peut étendre la valuation p-adique v_p au corps \mathbb{Q} de la façon suivante, si $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, alors on pose,

$$v_p(x) = v_p\left(\frac{a}{b}\right) = v_p(a) - v_p(b) \in \mathbb{Z}.$$

Exemple 1.3.1 1. Soit $a = 315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. On a $v_3(a) = 2$, $v_5(a) = 1$, $v_7(a) = 1$ et $v_p(a) = 0$ pour tout nombre premier p différent de 3, 5 et 7.

2. On a $v_2\left(\frac{12}{25}\right) = 2$, $v_3\left(\frac{12}{25}\right) = 1$, et $v_5\left(\frac{12}{25}\right) = -2$. Pour p différent de 2, 3, 5, on a $v_p\left(\frac{12}{25}\right) = 0$.

3. On a $v_p(p^n) = n$, pour tout entier n .

La propriété fondamentale de la valuation p-adique est

Proposition 1.2 Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$, la valuation p-adique vérifie les propriétés suivantes

(i) $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$,

$$(ii) \ v_p(a + b) \geq \min\{v_p(a), v_p(b)\}.$$

Démonstration.

Pour (i) et (ii) soient a, b deux nombres entiers ne sont pas nuls, on peut écrire

$$\begin{aligned} a &= p^\alpha n_1 \text{ avec } \alpha = v_p(a) \text{ et } p \text{ ne divise pas } n_1, \\ b &= p^\beta n_2 \text{ avec } \beta = v_p(b) \text{ et } p \text{ ne divise pas } n_2. \end{aligned}$$

Donc,

$$ab = p^{\alpha+\beta}(n_1 n_2) \text{ avec } p \text{ ne divise pas } n_1 n_2,$$

d'où

$$v_p(ab) = \alpha + \beta = v_p(a) + v_p(b).$$

Pour (ii), on distingue trois cas,

Si $\alpha < \beta$, nous avons $a + b = p^\alpha(n_1 + p^{\beta-\alpha}n_2)$, d'où

$$v_p(a + b) = \alpha \geq \min[v_p(a), v_p(b)].$$

Si $\alpha > \beta$, nous avons $a + b = p^\beta(n_2 + p^{\alpha-\beta}n_1)$, d'où

$$v_p(a + b) = \beta \geq \min[v_p(a), v_p(b)].$$

Si $\alpha = \beta$, nous avons $a + b = p^\beta(n_1 + n_2)$, où p ne divise pas $n_1 + n_2$. D'où

$$v_p(a + b) = \alpha \geq \min[v_p(a), v_p(b)].$$

■

Définition 1.3.2 (Valeur absolue p -adique sur \mathbb{Q})

Soit p un nombre premier. On définit la valeur absolue p -adique comme l'application

$$\begin{aligned} |\cdot|_p : \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto |x|_p = \begin{cases} p^{-v_p(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Avec la définition, on voit que $|xy|_p = |x|_p |y|_p$ pour tous rationnels x et y , car $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$.

Ainsi, si x s'écrit $\prod_i p_i^{\alpha_i}$, où les α_i sont des entiers, alors $v_p(x) = \alpha_i$ et $|x|_{p_i} = \frac{1}{p_i^{\alpha_i}}$.

Notion que $1 = \prod_i p_i^0$, donc $v_p(1) = 0$ pour tout nombre premier p .

Exemple 1.3.2 1. On a $|\frac{12}{25}|_2 = \frac{1}{4}$, $|\frac{12}{25}|_3 = \frac{1}{3}$, $|\frac{12}{25}|_5 = 25$ et $|\frac{12}{25}| = 1$ pour p différent de 2,3,5.

2. On a $|p^n|_p = \frac{1}{p^n}$.

Proposition 1.3 Pour tout p premier l'application $x \longrightarrow |x|_p$ est une valeur absolue ultramétrique sur \mathbb{Q}

Démonstration.

Vérifions l'inégalité triangulaire forte, soient $x, y \in \mathbb{Q}$, si $x = 0$ (ou $y = 0$), on a le résultat, en effet, soit $y \neq 0, x = 0$, on a

$$|x + y|_p = |y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

Si $x + y = 0$, c'est à dire, $x = -y$ on a $|x|_p = |y|_p$ et

$$|x + y|_p = 0 \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

Si $x, y \neq 0$, on a $|x + y|_p = p^{-v_p(x+y)}$. Soit $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$, $a, c \in \mathbb{Z}, b, d \in \mathbb{Z}^*$, nous avons

$$x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

D'où,

$$\begin{aligned} v_p(x + y) &= v_p\left(\frac{ad + bc}{bd}\right) = v_p(ad + bc) - v_p(bd) \\ &= v_p(ad + bc) - v_p(b) - v_p(d) \\ &\geq \min\{v_p(a) + v_p(d), v_p(b) + v_p(c)\} - v_p(b) - v_p(d) \\ &= \min\{v_p(a) - v_p(b), v_p(c) - v_p(d)\} \\ &= \min\{v_p(x), v_p(y)\}. \end{aligned}$$

Donc $v_p(x + y) \geq \min\{v_p(x), v_p(y)\}$, i.e,

$$\begin{aligned} -v_p(x + y) &\leq -\min\{v_p(x), v_p(y)\} \\ &= \max\{-v_p(x), -v_p(y)\}. \end{aligned}$$

Si $\max\{-v_p(x), -v_p(y)\} = -v_p(x)$, on a $-v_p(x + y) \leq -v_p(x)$, donc

$$p^{v_p(x+y)} \leq p^{-v_p(x)} = \max\{p^{-v_p(x)}, p^{-v_p(y)}\}.$$

D'où $|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$.

Si $\max(-v_p(x), -v_p(y)) = -v_p(y)$, on a $-v_p(x + y) \leq -v_p(y)$, donc

$$p^{v_p(x+y)} \leq p^{-v_p(y)} = \max\{p^{-v_p(x)}, p^{-v_p(y)}\}$$

D'où, $|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$, et par suite, $|\cdot|_p$ est une valeur absolue ultramétrique sur \mathbb{Q} . ■

Remarque 1.1 On peut définir sur le corps des nombres rationnels \mathbb{Q} trois types de valeurs absolues

1. valeur absolue triviale

$$|x| = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. valeur absolue ordinaire

$$|x|_\infty = \max(x, -x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

3. valeur absolue p -adique $|\cdot|_p$.

Remarque 1.2 1. La valeur absolue p -adique définie sur \mathbb{Q} , prend ses images dans l'ensemble discret définie par

$$\{0\} \cup \{p^n, n \in \mathbb{Z}\}$$

Autrement dit,

$$|\mathbb{Q}|_p = \{0\} \cup \{p^n, n \in \mathbb{Z}\}.$$

2. Par définition de la valeur absolue p -adique, on a, pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $|x|_p \leq 1$.

1.3.2 Complétion de \mathbb{Q}

Ce paragraphe présente une construction du corps des nombres p -adique. La méthode utilisée pour construire ce corps est semblable à la construction de \mathbb{R} à partir de \mathbb{Q} .

Puisque \mathbb{Q} n'est pas complet pour la valeur absolue p -adique $|\cdot|_p$, on le complète et on obtient un espace complet que l'on note \mathbb{Q}_p et qui s'appelle le corps des nombres p -adiques.

On rappelle le procédé de complétion (qui est valable pour un espace métrique quelconque). Soit E l'ensemble des suites de Cauchy d'éléments de \mathbb{Q} (pour la

valeur absolue $|\cdot|_p$). On définit sur E une relation d'équivalence \mathcal{R} de la façon suivante; si $u = (u_n)_n$ et $v = (v_n)_n$ sont deux éléments de E , on a $u\mathcal{R}v$ si et seulement si $|u_n - v_n|_p$ tend vers zéro si n tend vers l'infini.

On montre alors que sur l'espace quotient $\mathbb{Q}_p = E/\mathcal{R}$, on peut prolonger la distance sur E , et que cet espace métrique quotient est un espace complet, qui contient \mathbb{Q} comme sous espace dense.

Nous indiquons comment prolonger la valeur absolue définie sur \mathbb{Q} à tout \mathbb{Q}_p . Soit x un élément de \mathbb{Q}_p et $(x_n)_n$ une suite de Cauchy d'éléments de \mathbb{Q} . La suite $(|x_n|_p)_n$ est une suite de Cauchy dans \mathbb{R}_+ car

$$||x_n|_p - |x_m|_p| \leq |x_n - x_m|_p,$$

donc elle converge vers une limite l dans \mathbb{R}_+ . Cette limite est appelée la valeur absolue p-adique de x , c'est une valeur absolue ultramétrique, et on a

$$|x|_p = \lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n|_p.$$

On peut également, étendre la valuation p-adique au \mathbb{Q}_p ; $v_p(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_p(x_n)$.

1.3.3 L'anneau des entiers p-adiques

Une partie intéressante de \mathbb{Q}_p est l'ensemble des éléments de la valeur absolue p-adique inférieure ou égale à 1 que l'on note \mathbb{Z}_p .

Définition 1.3.3 1. On dit que le nombre p-adique $x \in \mathbb{Q}$, est un entier p-adique si le développement canonique de x ne contient que les puissances positives de p . Autrement dit $v_p(x) \geq 0$, on écrit

$$x = \alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 + \cdots + \alpha_n p^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n p^n, 0 \leq \alpha < p$$

2. On note par \mathbb{Z}_p l'ensemble des entiers p-adiques, où

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : x = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n p^n\} = \{x \in \mathbb{Q}_p : v_p(x) \geq 0\}.$$

Remarque 1.3 1. $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : v_p(x) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$.
Autrement dit \mathbb{Z}_p représente la boule unité fermée de \mathbb{Q}_p .

2. Le corps \mathbb{Q}_p est l'ensemble des fractions de \mathbb{Z}_p

$$\mathbb{Q}_p = \text{Frac}(\mathbb{Z}_p) = \left| \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}_p, b \neq 0 \right|.$$

1.4 Propriétés topologiques et analytiques des nombres p-adiques

1.4.1 Propriétés topologiques

Nous énonçons et démontrons dans cette section quelques propriétés topologiques importantes de \mathbb{Z}_p et de \mathbb{Q}_p . Nous commençons avec des propriétés qui est aussi vrai pour les corps muni d'une valeur absolue ultramétrique.

Soit r un réel strictement positif, et a un nombre p-adique. On note $D^+(a, r)$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q}_p, |x - a|_p \leq r\}$ et l'on appelle disque fermé. On note $D^-(a, r)$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q}_p, |x - a|_p < r\}$ et l'on appelle disque ouvert et $C(a, r) = D^+(a, r) \setminus D^-(a, r)$ le cercle de centre a et rayon r . La notation $D(a, r)$ désignera l'un ou l'autre de ces deux disque.

Proposition 1.4 [3]

Soient $a, b \in \mathbb{Q}_p$ et $r \in \mathbb{R}_+$. Alors

- (i) Si $b \in D(a, r)$, alors $D(b, r) = D(a, r)$. Autrement dit, tout point d'un disque est un centre de ce disque.
- (ii) Tout disque de l'espace topologique \mathbb{Q}_p est à la fois ouvert et fermé.
- (iii) Soient $D(a, r)$ et $D(b, s)$ deux disques, alors ils sont disjoints, ou l'un est inclus dans l'autre.

Démonstration.

- (i) Si $b \in D(a, r)$, on a par définition $|b - a|_p < r$. Prenant $x \in \mathbb{Q}_p$ tel que $|x - a|_p < r$, on a par l'inégalité ultramétrique,

$$|x - b|_p < \max\{|x - a|_p, |b - a|_p\} < r,$$

de telle sorte que $x \in D(b, r)$, et donc on a montré que $D(a, r) \subset D(b, r)$. En changeant simplement les rôles de a et b , on montre que $D(b, r) \subset D(a, r)$, d'où l'égalité.

- (ii) Soit $a \in \mathbb{Q}_p$ et considérons $D^-(a, r), r > 0$ le disque ouvert centré en a et le rayon r . Par définitions, c'est un ouvert de \mathbb{Q}_p . Il reste donc à montrer qu'il est aussi fermé dans le cas non-archimédienne. Alors, prenons un point x sur la frontière de $D^-(a, r)$, ce qui signifie que tout disque ouvert centré en x doit contenir des points qui sont dans $D^-(a, r)$. Choisissons un rayon $s < r$. Maintenant, puisque x est un point de la frontière de $D^-(a, r)$, $D^-(a, r) \cap D^-(x, s) \neq \emptyset$, il existe un élément $y \in D^-(a, r) \cap D^-(x, s)$.

Cela signifie que $|y - a|_p < r$ et $|y - x|_p < s < r$. Appliquant l'inégalité ultramétrique, nous obtenons

$$|x - a|_p < \max\{|x - y|_p, |y - a|_p\} < \max\{s, r\} < r,$$

d'où $x \in D^-(a, r)$. Cela montre que tout point sur la frontière de $D^-(a, r)$ appartient à $D^-(a, r)$, ce qui veut dire que $D^-(a, r)$ est un ensemble fermé.

(iii) Nous pouvons supposer que $r < s$. Si l'intersection n'est pas vide, il existe $c \in D(a, r) \cap D(b, s)$. En suite, nous avons, à partir de (i), que

$$D(a, r) = D(c, r) \text{ et } D(b, s) = D(c, s).$$

par conséquent,

$$D(a, r) = D(c, r) \subset D(c, s) = D(b, s).$$

■

1.4.2 Propriétés analytiques

Proposition 1.5 [12]

Soit $(a_n)_n$ une suite dans \mathbb{Q}_p . On a, $(a_n)_n$ est une suite de Cauchy si et seulement si,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0.$$

Démonstration.

Si $(a_n)_p$ est de Cauchy, alors on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_{n+m} - a_n|_p = 0, \forall m \geq 0,$$

d'où quand $m = 1$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0.$$

Inversement, on a

$$\begin{aligned} |a_{n+m} - a_n|_p &= |a_n - a_{n+1} - \cdots + a_{n+m-1} - a_{n+m}|_p \\ &\leq \max\{|a_n - a_{n+1}|_p, |a_{n+1} - a_{n+2}|_p, \dots, |a_{n+m-1} - a_{n+m}|_p\}. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0.$$

D'où $(a_n)_n$ est de Cauchy dans \mathbb{Q}_p .

■

Remarque 1.4 $(a_n)_n$ est convergente dans \mathbb{Q}_p si et seulement si $|a_{n+1} - a_n|_p \rightarrow 0$, quand $n \rightarrow +\infty$.

Proposition 1.6 [12]

Soit $(a_n)_n$ une suite dans \mathbb{Q}_p . Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ dans \mathbb{Q}_p , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n|_p = 0,$$

ou bien $\exists N_0 \in \mathbb{N}; |a_n|_p = |a_{N_0}|_p$ pour $n \geq N_0$ (la suite $(|a_n|_p)_{n \geq 0}$ est stationnaire à partir d'un rang N_0).

Démonstration.

Soit $n, m \in \mathbb{N}, n > m$, on a

$$||a_n|_p - |a_m|_p| < |a_n - a_m|_p \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty,$$

donc $(|a_n|_p)$ est de Cauchy dans \mathbb{R} qui est complet, donc $(|a_n|_p)_n$ est convergente. Supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n|_p \neq 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n|_p = \ell > 0$.

Posons $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$, donc il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N_1, |a_n|_p > \frac{\ell}{2}$.

De même, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m > N_2$ on a $|a_m - a_n|_p < \frac{\ell}{2}$. D'où, pour $n, m > \max(N_1, N_2) = N_0$, on a

$$|a_m|_p = |a_m - a_n + a_n|_p \leq \max\{|a_m - a_n|_p, |a_n|_p\} = |a_n|_p.$$

Si $n = N_0$, on aura $|a_m|_p \leq |a_{N_0}|_p$, pour $m \geq N_0$.

De même

$$|a_n|_p \leq \max\{|a_n - a_m|_p, |a_m|_p\} = |a_m|_p.$$

Alors $|a_{N_0}|_p \leq |a_m|_p$, pour $m \geq N_0$, d'où $|a_{N_0}|_p = |a_m|_p$, pour $m \geq N_0$. ■

Maintenant, soit la série $\sum_{k \geq 0} a_k$ et $a_k \in \mathbb{Q}_p$. On sait que la série $\sum_{k \geq 0} a_k$ converge

si et seulement si la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ converge dans \mathbb{Q}_p .

Proposition 1.7 [12]

Soit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ une série dans \mathbb{Q}_p ($a_k \in \mathbb{Q}_p$). Alors $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. Dans ce cas,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right|_p \leq \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|_p.$$

Démonstration.

La série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ converge dans \mathbb{Q}_p , donc S_n est une suite de Cauchy dans \mathbb{Q}_p , d'où

$$|S_n - S_{n-1}|_p \longrightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Mais $a_n = S_n - S_{n-1}$, donc (a_n) tend vers zéro dans \mathbb{Q}_p . Maintenant, supposons que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$, on a le résultat. Sinon, d'après la Propositions 1.6, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $N \geq N_0$, on a

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right|_p = \left| \sum_{n=1}^{N_0} a_n \right|_p. \quad (1.1)$$

D'autre part, on a

$$\max_{1 \leq n \leq N_0} \{|a_n|_p\} \leq \max_{n \in \mathbb{N}} \{|a_n|_p\}. \quad (1.2)$$

De (1.1),(1.2), on a

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right|_p = \left| \sum_{n=1}^{N_0} a_n \right|_p \leq \max_{1 \leq n \leq N_0} \{|a_n|_p\} \leq \max_{n \in \mathbb{N}} \{|a_n|_p\}.$$

■

1.5 Le corps \mathbb{C}_p

Définition 1.5.1 *On dit qu'un corps ultramétrique \mathbb{K} est algébriquement clos si chaque polynôme $P(x)$ dans $\mathbb{K}[x]$ admet des racine dans \mathbb{K} . Autrement dit, chacun des polynômes se décompose en facteurs linéaires dans $\mathbb{K}[x]$.*

Le corps \mathbb{Q}_p n'est pas algébriquement clos pour tout p premier, (considérer par exemple l'équation $x^2 - p = 0 \in \mathbb{Q}_p[x]$, puis on trouve que $v_p(x) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, pour tout $x \in \mathbb{Q}_p$, donc cette équation n'a pas de racine dans \mathbb{Q}_p (i.e. $\sqrt{\pm p} \notin \mathbb{Q}_p$)).

Pour faire convenablement de l'analyse, il est donc logique de considérer une clôture algébrique de \mathbb{Q}_p , que l'on note $\widetilde{\mathbb{Q}_p}$ et qui n'est pas complète (le corps $\widetilde{\mathbb{Q}_p}$

est constitué de toutes les racines des polynômes à coefficients dans \mathbb{Q}_p , donc nous avons besoin de la compléter pour former un plus grand corps complet, algébriquement clôt noté \mathbb{C}_p . On montre que l'on peut prolonger la valeur absolue à ce corps, qui possède donc aussi une valeur absolue ultramétrique, que l'on note toujours $|\cdot|_p$.

1.6 Fonctions analytiques d'un corps ultramétrique

On note \mathbb{K} un corps algébriquement clôt, complet par rapport à une valeur absolue ultramétrique.

Définition 1.6.1 Une série entière dans \mathbb{K} , c'est une série de fonction qui s'écrit sous la forme

$$\sum_{n \geq 0} a_n (x - a)^n, a_n \in \mathbb{K},$$

où x et a sont des nombres de \mathbb{K} .

Définition 1.6.2 Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière à coefficients dans

\mathbb{K} . Comme en analyse archimédienne, si $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \neq 0$, on pose $R =$

$$\frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Le nombre R est appelé le rayon de convergence de f . Donc, pour $x \in \mathbb{K}$, on a les situations suivantes,

- (i) $|x| < R$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| |x|^n = 0$ et alors la série est convergente,
- (ii) $|x| > R$. Donc la série est divergente,
- (iii) $|x| = R$. Donc on peut avoir ou bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| |x|^n = 0$ et alors la série est convergent sur la totalité du cercle $C(0, R)$, ou bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| |x|^n \neq 0$ et alors la série est divergent dans le cercle $C(0, R)$.

D'autre part, quand $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, on a $R = 0$ et donc f est convergente seulement quand $x = 0$.

Quand $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, on dit que le rayon de convergence de f est égal à $+\infty$ et donc ce cas f est convergente pour tout $x \in \mathbb{K}$. Le disque $D^-(0, R)$ est appelé le disque de convergence.

Définition 1.6.3 Soit f une fonction définie de $D^+(a, R)$ dans \mathbb{K} , on dit que f est une fonction analytique sur $D^+(a, R)$, s'il existe une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de \mathbb{K} , satisfaisant $|a_n|R^n \rightarrow +\infty$, et pour tout $x \in D^+(a, R)$, on a

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n(x - a)^n.$$

Autrement dit, on dit qu'une fonction f est analytique si elle est développable en série entière autour de chaque point de son domaine de définition.

Définition 1.6.4 Soit f une fonction de $D^-(a, R)$ dans \mathbb{K} , on dit que f est une fonction analytique sur $D^-(a, R)$, si pour tout $0 < r < R$, la restriction de f à $D^+(a, r)$ est une fonction analytique sur $D^+(a, r)$.

Définition 1.6.5 (Fonction entière)

Une fonction analytique dans le plan tout entier \mathbb{K} est dite entière.

Notation 1.1 On note par $\mathcal{A}(D^-(a, R))$ (resp. $\mathcal{A}(D^+(a, R))$) l'ensemble des fonctions analytiques dans le disque $D^-(a, R)$ (resp. $D^+(a, R)$).

On note par $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{A}(\mathbb{K}) \setminus \mathbb{K}[x]$) l'ensemble des fonctions entières sur \mathbb{K} , (resp. L'ensemble des fonctions entières sur \mathbb{K} qui ne sont pas des polynômes, et qui s'appellent fonctions transcendentes).

1.7 Zéros des fonctions analytiques

Dans cette partie on étudiera les zéros des fonctions analytique.

Définition 1.7.1 Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0, R))$) et soit $\gamma \in \mathbb{K}$ (resp. $\gamma \in D^-(0, R)$). Soit $r \in]0, +\infty[$ tel que $D^+(\gamma, r) \subset \mathbb{K}$ (resp. soit $r \in]0, R[$

tel que $D^+(\gamma, r) \subset D^-(\gamma, R)$), et soit $f(x) = \sum_{n=q}^{+\infty} a_n(x - \gamma)^n, \forall x \in D^+(\gamma, r)$, où

$a_q \neq 0$ et $q > 0$. On dit que dans ce cas γ est un zéro de f d'ordre de multiplicité q , et q sera appelé l'ordre de multiplicité de zéro γ .

Remarque 1.5 – Si $q = 0$, il faut comprendre que γ n'est pas un zéro.

- Si $q = 1$, On dit que γ est zéros simple.
- Si $q = 2$, On dit que γ est zéros multiple.
- Si $q = \infty$, il faut comprendre que la fonction est identiquement nulle sur un voisinage de γ .

Proposition 1.8 [3]

Une fonction analytique non nulle sur un disque vérifie le principe de zéros isolés, c'est à dire que si b est un zéro de f , il existe un disque de centre b , de rayon assez petit, où la fonction f n'admet comme zéro que b .

Démonstration.

Si b est un zéro de f , on peut écrire la fonction non nulle f sous la forme

$$f(x) = a_m(x - b)^m + a_{m+1}(x - b)^{m+1} + \dots,$$

tels que $m \geq 1$ est un entier, et $a_m \neq 0$. Il résulte que si $|x - b|$ est assez petit, et non nul,

$$|f(x)| = |a_m|_p |x - b|_p^m \neq 0.$$

■

Définition 1.7.2 Soit $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0, R))$). On définit le module maximum de f , pour $r \in]0, +\infty[$ (resp. $r \in]0, R[$), par la formule

$$|f|(r) = \max_{n \geq 0} |a_n| r^n.$$

Proposition 1.9 [3], [11]

Soient $0 < r < R$ et $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \in \mathcal{A}(D^+(0, r))$, telles que $|a_n| r^n$ ait pour limite 0. La fonction

$$f \mapsto |f|(r) = \max_{n \geq 0} |a_n| r^n,$$

est une norme ultramétrique sur $\mathcal{A}(D^+(0, r))$. Elle est appelée la valeur absolue de Gauss. De plus on a,

$$\|f\| = \max_{x \in D(0, r)} |f(x)| = |f|(r).$$

On a comme propriétés de la fonction $r \rightarrow |f|(r)$.

Proposition 1.10 [3]

On suppose que $f \in \mathcal{A}(D^+(0, r))$, $0 < r < R$. Si f n'est pas nulle, alors

- (i) La fonction $|f|(r)$ est croissante ;
- (ii) Si la fonction f a un zéro b dans le disque $D^+(0, r)$, la fonction $|f|(r)$ est strictement croissant si $r > |b|$;
- (iii) La fonction $|f|(r)$ est continue.

Démonstration.

- (i) On a déjà vu que $|f|(r)$ est la borne supérieure de $|f|(r)$ sur le disque $D^+(0, r)$, ce qui fournit le résultat immédiatement.
- (ii) Soit $r_0 > |b|$. On a $|f|(r_0) = |a_s|r_0^s$, pour un $s \geq 1$, en raison de la présence d'au moins un zéro dans le disque $D^+(0, r_0)$. Comme a_s n'est pas nul, si $r > r_0$, on a $|a_s|r^s > |a_s|r_0^s$, donc

$$|f|(r) = \max_{k \geq 0} |a_k|r^k \geq |a_s|r^s > |a_s|r_0^s = |f|(r_0).$$

- (iii) Fixons $\beta \in]0, r[$. Alors $|a_n|\beta^n$ tend vers 0 si $n \rightarrow +\infty$, de sorte qu'il existe N entier tel que

$$\max_{n \leq N} |a_n|\beta^n = \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|\beta^n.$$

Il en résulte que si $t \in [0, \beta]$, on a aussi

$$\max_{n \leq N} |a_n|t^n = \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|t^n = |f|(r).$$

Comme la fonction $t \rightarrow \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|t^n$ est clairement continue, on a démontré le résultat. ■

lemme 1.7.1 [3]

Soit $Q(x) = b_0 + \dots + b_s x^s$, un polynôme de $\mathbb{K}[x]$.

On suppose que $|b_s|r^s = \max_{0 \leq j \leq s} \{|b_j|r^j\} = |Q|(r)$. Alors le polynôme Q a toutes ses racines dans le disque $D^+(0, r)$ de \mathbb{K} .

Démonstration.

Montrons que le polynôme $Q(x)$ a toutes ses racines dans le disque $D^+(0, r)$.

On factorise $Q(x)$,

$$Q(x) = b_s(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_s),$$

où $b_s \neq 0$, et les α_i sont dans \mathbb{K} , et pas forcément distincts. D'où

$$|x - \alpha_i|(r) = \max\{|x|, |\alpha_i|\} = \max\{r, |\alpha_i|\},$$

et on a

$$|Q|(r) = |b_s|r^s = |b_s| \prod_{i=1}^s \max\{r, |\alpha_i|\}.$$

Alors $\prod_{i=1}^s \max\{r, |\alpha_i|\} = r^s$, et comme $\max\{r, |\alpha_i|\} \geq r$, pour tout i , donc $\max\{r, |\alpha_i|\} = r$ et $|\alpha_i| \leq r$, pour tout i . On a donc bien montré que toutes les racines de Q sont dans le disque $D^+(0, r)$. ■

Théorème 1.7.1 [3] ,

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathcal{A}(D^+(0, r))$ et soit s un indice tel que l'on ait $|a_s| r^s = |f|(r)$, et $|a_j| r^j < |a_s| r^s$ pour $j > s$. Il existe alors un couple (Q, H) , Q étant un polynôme de $\mathbb{K}[x]$, $Q(x) = b_0 + \dots + b_s x^s$, avec $|b_s| r^s = |Q|(r) = |f|(r)$, et $H(x)$ une série entière appartenant à $\mathcal{A}(D^+(0, r))$, telle qu' $|H - 1|(r) < 1$, vérifiant $f(x) = Q(x)H(x)$.

Théorème 1.7.2 [3]

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathcal{A}(D^+(0, r))$ et soit s un indice tel que l'on ait $|a_s| r^s = |f|(r)$ et $|a_j| r^j < |a_s| r^s$ pour $j > s$. Alors

- (i) Si $s \geq 1$ la fonction f a exactement s zéros dans le disque $D^+(0, r)$, compte tenu des multiplicités ;
- (ii) La fonction f n'a aucun zéro dans le disque $D^+(0, r)$ si et seulement si $s = 0$, et sa valeur absolue y est alors constante dans ce disque.

Démonstration.

On va utiliser le Théorème 1.7.1. On a donc $f = QH$, avec les propriétés indiquées.

- (i) comme $|H - 1|(r) < 1$, on a $|H(x)| = 1$, pour tout $x \in D^+(0, r)$, donc $H(x)$ ne s'annule pas. Comme le polynôme Q qui intervient dans la factorisation a tout ses racines dans le disque $D^+(0, r)$. D'après le lemme 1.7.1, f a exactement s zéros compte tenu des multiplicités dans ce disque.
- (ii) Si f n'a aucun zéro dans le disque, on doit avoir $s = 0$ par (i). Si $s = 0$, le polynôme Q qui intervient dans la décomposition $f = QH$ est un polynôme de degré 0, donc une constante c , non nulle puisque f est non nulle. Comme $|H - 1| < r$ pour tout $x \in D^+(0, r)$, et par suite $|f(x)| = |c|$

■

1.8 Fonctions méromorphes d'un corps ultramétrique

Définition 1.8.1 On dit qu'une fonction f est méromorphe sur \mathbb{K} (resp. Sur $D(0, R)$) si elle est analytique sur \mathbb{K} (resp. sur $D(0, R)$) sauf aux point de singularités isolées qui sont des pôles.

Remarque 1.6 Le quotient de deux fonction entières est une fonction méromorphe. C'est à dire, si la fonction f est méromorphe dans \mathbb{K} (resp. $D(0, R)$), alors on peut écrire $f = \frac{g}{h}$ tel que $g, h \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{A}(D(0, R))$) sans zéros communs.

Notation 1.2 On note par $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{M}(D(0, R))$) le corps des fonctions méromorphes dans \mathbb{K} (resp. Dans $D(0, R)$), c'est à dire le corps de fractions de $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. De $\mathcal{A}(D(0, R))$). La valeur absolue $|\cdot|(r)$ définie sur $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. sur $\mathcal{A}(D^-(0, R))$) quand $r \in]0, +\infty[$ (resp. $r \in]0, R[$), s'étend d'une manière naturelle à $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. à $\mathcal{M}(D^-(0, R))$) en posant $|f|(r) = \frac{|g|(r)}{|h|(r)}$ quand $f = \frac{g}{h}$ et $g, h \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $g, h \in \mathcal{A}(D^-(0, R))$).

1.9 Polygone De Valuation

Dans cette section, nous allons présenter les propriétés de polygone de valuation qui détermine la distribution des fonction entières (aussi des polygômes).

Soit $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une fonction non nulle de $\mathcal{A}(D^-(0, R))$ et soit $0 < r < R$,

et regardons la fonction $r \mapsto |f|(r)$, pour $r \in]0, +\infty[$. Pour simplifier, supposons que $a_0 \neq 0$, alors pour $|x|$ assez petit, on aura $|f(x)| = |a_0|$, de sorte que $|f|(r) = |a_0| = \text{constant}$, pour r assez petit. Soit r_1 la première valeur de r et s_1 la plus grande valeur de k telle que $|a_k|r_1^k = |a_0|$, alors f a exactement s_1 zéros sur le cercle $|x| = r_1$ et aucun dans le disque ouvert de centre 0, rayon r_1 . On a $|f|(r) = |a_{s_1}|r^{s_1}$, pour $r \geq r_1$ et assez proche de r_1 . En général, on s'arrête quand il existe une valeur $k > s_1$ et un $r > r_1$ tels que $|a_k|r^k = |a_{s_1}|r^{s_1}$; soit r_2 la première valeur de r telle qu'il en soit ainsi, et s_2 le plus grand des entiers $k > s_1$ tels que $|a_k|r_2^k = |a_{s_1}|r_2^{s_1}$. Alors, sur le cercle $|x| = r_2$, f a $s_2 - s_1$ zéros, et aucun dans la couronne ouverte de centre 0 et de rayon r_1, r_2 . On a $|f|(r) = |a_{s_1}|r^{s_1}$, pour $r \in [r_1, r_2]$. Et ainsi de suite, on trouve des cercles où se trouvent les zéros r_k (suite fini ou infinie), le nombre des zéros sur ces cercle est

$s_k - s_{k-1}$ et en plus, on a le fait que la fonction $|f|(r)$ est continue et monomiale par morceaux, c'est à dire qu sur $[r_k, r_{k+1}]$, il existe une constante c_k et un entier s_k tels que $|f|(r) = c_k r^{s_k}$. Les rayons r_k s'appellent les rayons exceptionnels pour la série entière f .

On fabrique maintenant une fonction ϕ_f définie par

$$\begin{aligned} \phi : I =]-\infty, \log R[&\rightarrow \mathbb{R} \\ \log r &\mapsto \phi_f(\log r) = \log |f|(r) = \max_{n \geq 0} \{\log |a_n| + n \log r\}. \end{aligned}$$

Notation 1.3 On note par $v^+(f, r)$ (resp. $v^-(f, r)$) le plus grand (resp. Le plus petit) entier j tel que

$$\log |a_j| + j \log r = \phi_f(\log r) = \max_{n \geq 0} \{\log |a_n| + n \log r\}.$$

C'est à dire que, $|a_j| r^j = \max_{n \geq 0} |a_n| r^n$.

Théorème 1.9.1 [11]

La fonction ϕ_f vérifient les propriétés suivant

- (i) C'est une fonction convexe, continue et affine par morceau ;
- (ii) Si f un zéro dans $D^-(0, r)$, la fonction ϕ_f est strictement croissante pour $\log r > \log |b|$;
- (iii) La fonction ϕ_f est dérivable à gauche et à droite en chaque point $\log r \in I$. Sa dérivée à gauche en $\log r$ est à $v^-(f, r)$ et sa dérivée à droite en $\log r$ est égale à $v^+(f, r)$;
- (iv) le nombre de zéros de f dans le cercle $C(0, r)$, en prenant en compte les multiplicités, est égale à $v^+(f, r) - v^-(f, r)$, où $v^+(f, r)$ (resp. $v^-(f, r)$) est le nombre des zéros de f dans le disque $D^+(0, r)$ (resp. $D^-(0, r)$).

Remarque 1.7 La représentation de la fonction ϕ_f est connue en analyse ultramétrique comme "polygône de valuation".

Exemple 1.9.1 Polygône de valuation des polynômes

1. Soient $r, s \in]0, +\infty[$ tel que $r < s$, et soit $P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + \dots + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ où $a_0 \neq 0$.
Supposons $|a_0| = |a_1| r > |a_2| r^2$, on a $|P|(r) = |a_0| = |a_1| r$, donc $v^+(P, r) = 1$ et $v^-(P, r) = 0$. Par conséquent, le polynôme P admet un zéro dans le cercle $C(0, r) = 1$. Par conséquent, le polynôme P admet un zéro le cercle $C(0, s)$. D'autre part, $v^+(P, \rho) = v^-(P, \rho) = 1$, $\forall \rho \in]r, s[$ et $v^+(P, \rho) = v^-(P, \rho) = 2$, $\forall \rho > s$.

2. Soit p un nombre premier et soit $P(x) = 2p^2 + p^4 + (p + p^5)x + (p^2 + p^3)x^2$.
 Pour $r = \frac{1}{p}$. On a $|a_0|r = \frac{1}{p^2}$, $|a_1|r = \frac{1}{p^2}$ et $|a_2|r^2 = \frac{1}{p^4}$, donc $v^+(P, r) = 1$
 et $v^-(P, r) = 0$. Par conséquent, le polynôme P admet un zéro dans le
 cercle $C(0, \frac{1}{p})$.

Pour $r = \frac{1}{p^2}$. On a $|a_0| = \frac{1}{p^2}$, $|a_1|r = \frac{1}{p^3}$ et $|a_2|r^2 = \frac{1}{p^6}$ donc $v^+(P, r) =$
 $v^-(P, r) = 0$.

Donc P n'a aucun zéro dans le cercle $C(0, \frac{1}{p^2})$.

Pour $r = 1$. On a $|a_0| = \frac{1}{p^2}$, $|a_1|r = \frac{1}{p}$ et $|a_2|r^2 = \frac{1}{p^2}$, donc P n'a aucun
 zéro dans le cercle $C(0, 1)$.

Interprétation géométrique

Soit $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une fonction non nulle de $\mathcal{A}(D^+(0, r))$ et soit $0 < r < R$.

Pour chaque n de nous construisons le graphe $\gamma_n(\log r)$ qui décrit $\log |a_n| + n \log r$ comme fonction de $\log r$. Soit $\gamma_n(r, f)$ le bord de l'intersection des demi-plans situés sous les droites $\gamma_n(\log r)$ de la pente n . Alors dans chaque segment $[\log r_k, \log r_{k+1}]$, $0 < \log r_k < \log r_{k+1} < R$, il existe un nombre fini de $\gamma_n(\log r)$ qui interviennent dans $\gamma_n(r, f)$. On déduit que $\gamma_n(r, f)$ est une ligne polgônale qui s'appelle le polygône de valuation de la fonction $f(x)$. Nous appelons le point $\log r > 0$ où $\gamma_n(r, f)$ un sommet des points critique de $f(x)$. Chaque segment fini $[\log r_k, \log r_{k+1}]$ ne contient qu'un nombre fini de points critiques de $f(x)$.

CHAPITRE 2

THÉORIE DE NEVANLINNA SUR UN CORPS ULTRAMÉTRIQUE

Parmi les méthode utilisées dans les problèmes de distribution de valeur, la théorie de Nevanlinna ultramétrique, qui joue un rôle majeur dans ce domaine. Cette théorie a été introduite en 1989 par A. Boutabaa . Elle s'applique non seulement à des fonction méromorphes dans tout le corps \mathbb{K} . Dans ce chapitre, nous s'intéresse de cette théorie.

Notation 2.1 *À partir d'ici et tout au long de ce travail, on notera \mathbb{K} un corps algébriquement clos, complet par rapport à une valeur absolue ultramétrique $|\cdot|$.*

2.1 Formule De Jensen

Dans cette section, nous s'intéresse de la version ultramétrique de la formule de Jensen qu'on utilise pour obtenir le théorème fondamental de Nevanlinna.

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0, R))$). Pour tout $r \in]0, +\infty[$ (resp. $r \in]0, R[$) et $\alpha \in D^-(0, r)$, on note

$$z(r, f) = \sum_{|\alpha|=r} \max(0, \omega_\alpha(f)) \text{ et } p(r, f) = - \sum_{|\alpha|=r} \min(0, \omega_\alpha(f)) = z(r, \frac{1}{f}).$$

C'est à dire que, $z(r, f)$ (resp. $p(r, f)$) est le nombre de zéros (resp. pôles) de f sur le cercle $|x| = r$, comptés avec leurs multiplicités, où $\omega_\alpha(f)$ est l'entier

relatif i_α de \mathbb{Z} tel que $f(x) = \sum_{i \geq i_\alpha} a_i(x - \alpha)^i$ avec $a_{i_\alpha} \neq 0$.

Théorème 2.1.1 [7] ,[8]

Soit $f \in \mathcal{M}(D^-(0, R))$ n'ayant ni zéro ni pôle en θ , pour $r \in]0, R[$, on a

$$\log |f|(r) = \log |f(0)| + \sum_{|\alpha| \leq r} \left\{ z(r, f) - z(r, \frac{1}{f}) \right\} \log \frac{r}{|\alpha|}.$$

Démonstration.

La démonstration de cette formule est une conséquence des propriétés de polygône de valuation.

Soit $f \in \mathcal{A}(D^-(0, R))$ telle que $f(0) \neq 0$. Le polygône de valuation de f donne pour $r \in]0, R[$

$$\log |f|(r) = \log |f(0)| + \sum_{|\alpha| \leq r} z(r, f) \log \frac{r}{|\alpha|}. \tag{2.1}$$

Pour montre l'égalité (2.1), soient $0 < r_1 < r_2 < \dots < r_k < \dots < r$ et $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_k < \dots < n$.

On pose, $\log |f|(r) = \max_{n \geq 0} \{ \log |a_n| + n \log r \}$.

Le cas où r_1 plus proche de zéros, f n'a pas de zéros à valeur absolue entre 0 et r_1 , on a

$$\log |f|(r_1) = \log |f(0)| = \log |a_0| + n_0 \log r_1.$$

Le cas où $0 < r_1 < r_2$, on a

$$\log |f|(r_2) = \log |a_{n_1}| + n_1 \log r_2.$$

Le cas où $r_{k-1} < r_k$, on a

$$\log |f|(r_k) = \log |a_{n_{k-1}}| + n_{k-1} \log r_k.$$

Le cas où $r_k < r$, on a

$$\log |f|(r) = \log |a_{n_k}| + n_k \log r.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
 \log |f|(r) &= [\log |f|(r) - \log |f|(r_k)] + [\log |f|(r_k) - \log |f|(r_{k-1})] + \cdots + [\log |f|(r_2) - \log |f|(r_1)] \\
 &+ \log |f|(r_1) \\
 &= [\log |a_{n_k}| + n_k \log r - \log |a_{n_k}| - n_k \log r_k] + [\log |a_{n_{k-1}}| + n_{k-1} \log r_k - \log |a_{n_{k-1}}| \\
 &- n_{k-1} \log r_{k-1}] + \cdots + [\log |a_{n_1}| + n_1 \log r_2 - \log |a_{n_1}| - n_1 \log r_1] + \log |f(0)| \\
 &= n_k \log \frac{r}{r_k} + n_{k-1} \log \frac{r}{r_{k-1}} + \cdots + n_1 \log \frac{r_2}{r_1} + \log |f(0)| \\
 &= n_k \log \frac{r}{r_k} + n_{k-1} \left(\log \frac{r}{r_{k-1}} - \log \frac{r}{r_k} \right) + \cdots + n_1 \left(\log \frac{r}{r_1} - \log \frac{r}{r_2} \right) + \log |f(0)| \\
 &= (n_k - n_{k-1}) \log \frac{r}{r_k} + (n_{k-1} - n_{k-2}) \log \frac{r}{r_{k-1}} + \cdots + (n_2 - n_1) \log \frac{r}{r_2} \\
 &+ (n_1 - n_0) \log \frac{r}{r_1} + \log |f(0)| \\
 &= \sum_{i=1}^k (n_i - n_{i-1}) \log \frac{r}{r_i} + \log |f(0)|.
 \end{aligned}$$

Où $(n_i - n_{i-1})$ le nombre des f dans le cercle $|x| = r_i$, donc

$$\log |f|(r) = \log |f(0)| + \sum_{0 < |\alpha| \leq r} z(r, f) \log \frac{r}{|\alpha|}.$$

Soit maintenant $f \in \mathcal{M}(D^-(0, R))$ tel que $f(0) \neq 0, \infty$. On pose $f = \frac{g}{h}$ tel que $g, h \in \mathcal{A}(D^-(0, R))$. Soit α (resp. β) un zéro de g (resp. de h), on a

$$\begin{aligned}
 \log |f|(r) &= \log \left| \frac{g}{h} \right|(r) \\
 &= \log |g|(r) - \log |h|(r) \\
 &= \log |g(0)| + \sum_{0 < |\alpha| \leq r} z(r, g) \log \frac{r}{|\alpha|} - \log |h(0)| - \sum_{0 < |\beta| \leq r} z(r, h) \log \frac{r}{|\beta|} \\
 &= \log \left| \frac{g(0)}{h(0)} \right| + \sum_{0 < |\alpha| \leq r} z(r, f) \log \frac{r}{|\alpha|} - \sum_{0 < |\beta| \leq r} z(r, \frac{1}{f}) \log \frac{r}{|\beta|} \\
 &= \log |f(0)| + \sum_{0 < |\alpha| \leq r} z(r, f) \log \frac{r}{|\alpha|} - \sum_{0 < |\beta| \leq r} z(r, \frac{1}{f}) \log \frac{r}{|\beta|}.
 \end{aligned}$$

Donc,

$$\log |f|(r) = \sum_{0 < |\alpha| \leq r} \left\{ z(r, f) - z(r, \frac{1}{f}) \right\} \log \frac{r}{|\alpha|} + \log |f(0)|.$$

■

Remarque 2.1 Si $f(x)$ a un zéro ou pôle d'ordre de multiplicité λ en $x = 0$, de facon que $f(x) = a_\lambda x^\lambda + \dots$, alors la fonction $g(x) = x^{-\lambda} f(x)$ n'a ni zéro ni pôle à l'origine et a les mêmes zéro et les mêmes pôles que $f(x)$ ailleurs. La formule du Théorème 2.1.1 appliquée dans cas sur la fonction $g(x)$.

2.2 Fonction De Nevanlinna

Soit $f \in \mathcal{M}(D^-(0, R))$. Pour tout $r \in]0, R[$. Notons par $Z(r, f)$ la fonction de comptage des zéros de f dans le disque $D^+(0, r)$, comptés avec leurs multiplicités.

On pose,

$$Z(r, f) = \sum_{|\alpha| \leq r, \omega_\alpha(f) > 0} \omega_\alpha(f) \log \frac{r}{|\alpha|}.$$

On a aussi,

$$\bar{Z}(r, f) = \sum_{|\alpha| \leq r} \log \frac{r}{|\alpha|},$$

la fonction de comptage des zéros de f dans le disque $D^+(0, r)$ sans prendre en compte les multiplicités.

De la même manière, notons par $N(r, f)$ la fonction de comptage des pôles de f dans le disque $D^+(0, r)$, comptés avec leurs multiplicités, on pose

$$N(r, f) = - \sum_{|\alpha| \leq r, \omega_\alpha(f) < 0} \omega_\alpha(f) \log \frac{r}{|\alpha|}.$$

Et

$$\bar{N} = \bar{Z}(r, \frac{1}{f}).$$

Pour $x > 0$, on pose $\log^+ x = \max(0, \log x)$, telle que $x > 0$ et \log est une fonction logarithmique réelle. On définit pour $r \in]0, R[$

$$m(r, f) = \log^+ |f|(r) = \max(0, \log |f|(r)),$$

la fonction de compensation.

En fin, on définit la fonction de Nevanlinna (appelée aussi la fonction caractéristique de f), quand f n'a ni zéro ni pôle en 0, par

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f).$$

Tout au long de ce chapitre, on supposera que la fonction f intervenant dans les fonctions $m(r, f)$, $N(r, f)$ et $T(r, f)$ n'a pas de zéro en 0, si $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0, R))$), et n'a ni zéro ni pôle en 0, si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0, R))$).

Par les notations précédentes, on peut réécrire Théorème 2.1.1 sous forme,

Théorème 2.2.1 [5]

Soit $R > 0$, et soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0, R))$) n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Alors

$$\log |f|(r) = Z(r, f) - N(r, f) + \log |f(0)|, \quad (2.2)$$

pour tout $r \in]0, +\infty[$ (resp. $r \in]0, R[$).

Corollaire 2.2.1 [9]

Soit $f \in \mathcal{M}(D^-(0, R))$ n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Alors, pour tout $r \in]0, R[$, on a

$$T(r, \frac{1}{f}) = T(r, f) + O(1).$$

Démonstration.

D'après le Théorème 2.2.1, nous avons

$$\log |f(0)| = N(r, f) - Z(r, f) + \log |f|(r).$$

Puisque $\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}$, pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} \log |f(0)| &= N(r, f) - Z(r, f) + \log^+ |f|(r) - \log^+ |\frac{1}{f}|(r) \\ &= N(r, f) - N(r, \frac{1}{f}) + m(r, f) - m(r, \frac{1}{f}) \\ &= N(r, f) + m(r, f) - N(r, \frac{1}{f}) - m(r, \frac{1}{f}) \\ &= T(r, f) - T(r, \frac{1}{f}). \end{aligned}$$

■

Proposition 2.1 [8]

Soient $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f, g \in \mathcal{M}(D^-(0, R))$) non identiquement nulle et n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Alors pour tout $r \in]0, +\infty[$ (resp. $r \in]0, R[$), nous avons

- i) $N(r, f + g) \leq N(r, f) + N(r, g)$,
- ii) $N(r, fg) \leq N(r, f) + N(r, g)$.

Démonstration.

Les inégalités i) et ii) sont vérifiés puisque l'ordre de multiplicité de pôles de

$f + g$ (ou fg) au point x est au plus égal à la somme d'ordre de multiplicité de pôles de f et g au point x . D'où

$$\begin{aligned} Z(r, \frac{1}{f+g}) &\leq Z(r, \frac{1}{f}) + Z(r, \frac{1}{g}) \\ Z(r, \frac{1}{fg}) &\leq Z(r, \frac{1}{f}) + Z(r, \frac{1}{g}). \end{aligned}$$

■

Théorème 2.2.2 Soient $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f, g \in \mathcal{M}(D^-(0, R))$) et $a \in \mathbb{K}$. Pour tout $r \in]0, +\infty[$ (resp. $r \in]0, R[$), on a

- i) $m(r, f + g) \leq \max\{m(r, f), m(r, g)\}$,
- ii) $m(r, f - a) = m(r, f) + O(1)$,
- iii) $m(r, fg) \leq m(r, f) + m(r, g)$,
- iv) $m(r, af) = m(r, f) + O(1)$.

Démonstration.

Puisque $|\cdot|(r)$ est une valeur absolue ultramétrique et grâce à la croissance de la fonction logarithmique on enduit sans difficulté i), iii) et iv).

Si $|f|(r) > |a|$, pour r assez grand (resp. assez proche de R), on a

$$|f - a|(r) = \max\{|f|(r), |a|\} = |f|(r),$$

d'où

$$m(r, f - a) = m(r, f).$$

Alors que, si $|f|(r) \leq |a|$, on a

$$|f - a|(r) \leq \max\{|f|(r), |a|\} \leq |a|,$$

ce qui entraîne

$$|m(r, f - a) - m(r, f)| \leq \max\{m(r, f - a), m(r, f)\} \leq \log^+ |a|,$$

et ainsi $m(r, f - a) = m(r, f) + O(1)$, d'où ii).

On donne une autre définition de la fonction caractéristique de la Nevanlinna.

Théorème 2.2.3 [5]

Soit $f \in \mathcal{M}(K)$ (resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0, r))$) n'ayant ni zéro ni pôle en 0 . Alors pour tout $r \in]0, +\infty[$ (resp. $r \in]0, R[$), on a

$$T(r, f) = \max\{Z(r, f) + \log |f(0)|, N(r, f)\}$$

.

Corollaire 2.2.2 [5]

Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0, R))$) non nulle. Alors pour tout $r \in]0, +\infty[$ (resp. $r \in]0, R[$), on a

$$T(r, f) = Z(r, f) + O(1).$$

De plus, il existe $\rho \in]0, +\infty[$ (resp. $\rho \in]0, R[$) tel que pour $b \neq f(0)$, on a pour tout $r \in]0, +\infty[$ (resp. $r \in]0, R[$)

$$Z(r, f) = Z(r, f - b).$$

Théorème 2.2.4 [8]

Soient $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0, R))$) non identiquement nulle et n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Alors pour tout $r \in]0, +\infty[$ (resp. $r \in]0, R[$)

i) $T(r, f + g) \leq T(r, f) + T(r, g).$

ii) $T(r, fg) \leq T(r, f) + T(r, g),$

De plus, si $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $f, g \in \mathcal{A}(D^-(0, R))$), on a

iii) $T(r, f + g) \leq \max\{T(r, f), T(r, g)\},$

Démonstration.

i) Puisque

$$m(r, f + g) \leq \max\{m(r, f), m(r, g)\},$$

et

$$N(r, f + g) \leq N(r, f) + N(r, g),$$

on déduit que

$$\begin{aligned} m(r, f + g) + N(r, f + g) &\leq \max\{m(r, f), m(r, g)\} + N(r, f) + N(r, g), \\ &\leq m(r, f) + m(r, g) + N(r, f) + N(r, g). \end{aligned}$$

D'où $T(r, f + g) \leq T(r, f) + T(r, g).$

ii) De même, on déduit que

$$m(r, fg) + N(r, fg) \leq m(r, f) + m(r, g) + N(r, f) + N(r, g).$$

D'où $T(r, fg) \leq T(r, f) + T(r, g).$

iii) Puisque $N(r, f) = N(r, g) = 0$, l'inégalité est immédiate.

Proposition 2.2 [8]

Soient $f \in \mathcal{M}(D^-(0, R))$ et $a \in \mathbb{K}, a \neq 0$ tels que $f(0) \neq 0, f(0) \neq a$ et $f(0) \neq \infty$. Pour $r \in]0, R[$ on a

- i) $T(r, af) = T(r, f) + O(1)$
- ii) $T(r, f - a) = T(r, f) + O(1)$.

Démonstration.

Puisque

$$N(r, f) = N(r, af) = N(r, f - a),$$

$$m(r, f - a) = m(r, f) + O(1) \text{ et } m(r, af) = m(r, f) + O(1),$$

alors

$$T(r, af) = T(r, f) + O(1),$$

et

$$T(r, f - a) = T(r, f) + O(1).$$

■

2.3 Théorème Fondamental De Nevanlinna

Théorème 2.3.1 Soient $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0, R))$) et $a \in \mathbb{K}$ tels que $f(0) \neq 0, f(0) \neq \infty$ et $f(0) \neq a$. Pour tout $r \in]0, +\infty[$ (resp. $r \in]0, R[$), on a

$$T\left(r, \frac{1}{f - a}\right) = T(r, f) + O(1).$$

Démonstration.

La démonstration est facile, elle découle de Corollaire 2.2.1 et la propriété(ii) de la Proposition 2.2

■

Proposition 2.3 [8] Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ n'ayant ni zéro ni pôle en 0. On a les équivalences suivantes,

- i) f est une constante $\Leftrightarrow T(r, f) = o(\log r), r \rightarrow +\infty,$
- ii) $f \in \mathbb{K}(x) \Leftrightarrow T(r, f) = O(\log r), r \rightarrow +\infty,$
- iii) f est non constante \Leftrightarrow il existe $c \in \mathbb{R}$ et $A > 0$ tels que

$$T(r, f) \geq \log r + c, \text{ pour } r > A.$$

CHAPITRE 3

APPLICATION DE LA THÉORIE DE NEVANLINNA AUX ÉQUATIONS FONCTIONNELLES LINÉAIRES AUX Q-DIFFÉRENCES

Le bute chapitre est d'étudier la comportement de la solution méromorphes, de certaines équations fonctionnelles linéaires aux q -différences en utilisant les notations classiques de la théorie de Nevanlinna présentées dans le deuxième chapitre.

3.1 Équations aux q -différences

Définition 3.1.1 Une équation fonctionnelle linéaire aux q -différence est une équation dont la variable est une fonction, et qui s'écrit sous forme

$$\sum_{i=0}^s g_i(x) f(q^i x) = h(x),$$

où $q \in \mathbb{K}, 0 < |q| < 1$ et \mathbb{K} corps ultramétrique complet et algébriquement clos, avec $h(x), g_0(x), \dots, g_s(x)$ sont des coefficients, tel que $g_0(x)g_s(x) \neq 0$.

Application de la Théorie de Nevanlinna aux
Chapitre 3 équations fonctionnelles linéaires aux q-différences

Nous considérons l'équation aux q-différence de la forme

$$\sum_{i=0}^s g_i(x)f(q^i x) = h(x), \quad (3.1)$$

où $q \in \mathbb{K}, 0 < |q| < 1$ et $h(x), g_0(x), \dots, g_s(x)$ ($s \geq 1$) sont des éléments de $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ tels que $g_0(x)g_s(x) \neq 0$. Notons par $T(r)$ la fonction,

$$T(r) = \max\{T(r, h); T(r, g_0); \dots; T(r, g_s)\}, \text{ pour tout } r > 0.$$

Alors, nous avons

Remarque 3.1 *La première observation dans l'équation (3.1) est que nous pouvons prendre $h(x) = 0$ sans perte de généralité. En effet, supposons que $h(x) \neq 0$ et $f(x)$ est une solution méromorphe de l'équation(3.1). Alors, il est facile de voir que $f(x)$ est une solution de l'équation non triviale de la forme*

$$h(x) \sum_{i=0}^s g_i(qx)f(q^{i+1}x) - h(qx) \sum_{i=0}^s g_i(x)f(q^i x) = 0.$$

Nous pouvons également supposer que $g_0(x), \dots, g_s(x)$ sont des fonctions entières.

Alors, dans tout la suite, on suppose que l'équation (3.1) est de la forme

$$\sum_{i=0}^s g_i(x)f(q^i x) = 0, \quad (3.2)$$

où $q \in \mathbb{K}, 0 < |q| < 1$ et $h(x), g_0(x), \dots, g_s(x)$ ($s \geq 1$) sont des éléments de $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ tels que $g_0(x)g_s(x) \neq 0$.

lemme 3.1.1 [5]

Soient $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K}), r > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, nous avons

1. $|f(q^n x)|(r) = |f|(|q|^n r),$
2. $m(r, f(q^n x)) = m(|q|^n r, f),$
3. $N(r, f(q^n x)) = N(|q|^n r, f),$
4. $T(r, f(q^n x)) = T(|q|^n r, f).$

Proposition 3.1 [5]

Soit f une solution méromorphe dans \mathbb{K} de l'équation (3.2).

Alors, si α est un pôle de f , $\alpha \neq 0$, il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ et un zéro θ de g_0 différent de zéro tels que $\alpha = q^{-m}\theta$ et $\omega_\theta(g_0) + \omega_\alpha(f) \geq 0$.

Chapitre 3

Démonstration.

Soit $\alpha \neq 0$ un pôle de f . Si $\omega_\theta(g_0) + \omega_\alpha(f) \geq 0$, on a le résultat, car il suffit de prendre $\theta = \alpha$.

Supposons que $\omega_\theta(g_0) + \omega_\alpha(f) < 0$. Cela signifie que, α est un pôle de $g_0(x)f(x)$, alors il existe au moins un indice $i_1 \in \{1, \dots, s\}$ tel que $g_{i_1}(\alpha)f(q^{i_1}\alpha) = \infty$, et en particulier $\alpha_1 = q^{i_1}\alpha$ est un pôle de f . Si $\omega_{\theta_1}(g_0) + \omega_{\alpha_1}(f) < 0$, de la même manière, on trouve un indice $i_2 \in \{1, \dots, s\}$ tel que $\alpha_2 = q^{i_2}\alpha_1 = q^{i_1+i_2}\alpha$ est un pôle de f , etc...

Comme nous ne pouvons pas avoir une suite de pôles de f avec modules strictement décroissante, le processus ci-dessus doit arrêter à un certain rang, et cela complète la preuve de notre assertion. ■

Théorème 3.1.1 [5]

Si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ est une solution de l'équation (3.1), alors nous avons

$$T(r, f) = O(T(r) \log r), \text{ quand } r \rightarrow +\infty.$$

Démonstration.

Comme indiqué dans la Remarque 3.1, tout le problème est ramené au cas de l'équation (3.2). Alors, soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ une solution de l'équation (3.1). On peut aussi supposer que f n'a pas de pôle à l'origine.

Estimation de $N(r, f)$.

Si la fonction entière $g_0(x)$ n'a pas de zéro différent de 0, pas la Propositions 3.1, la fonction f est entière, donc $N(r, f) = 0$. Supposons alors que $g_0(x)$ admet au moins un zéro différent de 0 et soit $r_0 = \min\{|x|/x \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \text{ et } g_0(x) = 0\}$. Pour tout $r > 0$, nous avons

$$N(r, f) = - \sum_{0 < |\alpha| \leq r, f(\alpha) = \infty} \omega_\alpha(f) \log \frac{r}{|\alpha|}.$$

Mais ; par la Proposition 3.1, tout pôle α de f dans $D^+(0, r) \setminus \{0\}$ est de la forme $\alpha = q^{-n}\beta$, où $n \in \mathbb{N}$ et $\beta \in D^+(0, r) \setminus \{0\}$ tel que $g_0(\beta) = 0$. Ceci implique que

$$0 \leq n \leq \left\lceil \frac{1}{\log |q|} \log \frac{r_0}{r} \right\rceil,$$

où $[t]$ désigne la partie entière du nombre réel t .

Par conséquent,

$$N(r, f) \leq \left(\left\lceil \frac{1}{\log |q|} \log \frac{r_0}{r} \right\rceil + 1 \right) \sum_{0 < |\beta| \leq r, g_0(\beta) = 0} \omega_\beta(g_0) \log \frac{r}{|\beta|},$$

i.e,

$$N(r, f) \leq \left(\left[\frac{1}{\log |q|} \log \frac{r_0}{r} \right] + 1 \right) N\left(\frac{1}{g_0}, r\right).$$

Par hypothèse, on a $N\left(\frac{1}{g_0}, r\right) \leq T(r, g_0) + O(1) \leq T(r) + O(1)$, $r \rightarrow \infty$. Nous voyons aussi que

$$\left[\frac{1}{\log |q|} \log \frac{r_0}{r} \right] + 1 = O(\log r), \quad r \rightarrow \infty.$$

Il en résulte que

$$N(r, f) = O(T(r) \log r), \quad r \rightarrow \infty. \quad (3.3)$$

Estimations de $\log |f|(r)$.

Sans perte de généralité, on peut supposer que f n'a ni zéro ni pôle à l'origine. Alors, il existe $\epsilon > 0$ telle que f n'a ni zéros ni pôles dans $D^+(0, \epsilon)$, donc $|f|(t)$ est constante pour $0 \leq t \leq \epsilon$.

D'après l'équation (3.1), pour tout $r > 0$, on a

$$|f|(r) \leq \max \left\{ \left| \frac{g_1}{g_0} \right|(r) |f|(|q|r), \left| \frac{g_2}{g_0} \right|(r) |f|(|q|^2 r), \dots, \left| \frac{g_s}{g_0} \right|(r) |f|(|q|^s r) \right\}.$$

Puisque g_0 est une fonction entière non nulle, on a $|g_0|(r) \geq 1$, pour $r > 1$ assez grand. De plus, comme $g_0, \dots, g_s \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ et $T(r, g_i) \leq T(r)$, $\forall i$, on a pour $r > 0$ assez grand

$$|f|(r) \leq e^{T(r)} \max \left\{ |f|(|q|r), |f|(|q|^2 r), \dots, |f|(|q|^s r) \right\}. \quad (3.4)$$

Prenons r assez grand pour assurer que l'entier $k = \left\lfloor \frac{\log r - \log \epsilon}{-\log |q|} \right\rfloor + 1 \geq s$, on a par (3.4),

$$|f|(r) \leq e^{T(r)} \max \left\{ |f|(|q|r), |f|(|q|^2 r), \dots, |f|(|q|^s r), \dots, |f|(|q|^k r) \right\}. \quad (3.5)$$

Posons

$$\begin{cases} u_1 = & |f|(|q|^k r), \\ u_2 = & \max\{|f|(|q|^{k-1} r), |f|(|q|^k r)\} \\ \vdots & \\ u_{k-1} = & \max\{|f|(|q|^2 r), \dots, |f|(|q|^s r), \dots, |f|(|q|^k r)\}, \\ u_k = & \max\{|f|(|q|r), |f|(|q|^2 r), \dots, |f|(|q|^s r), \dots, |f|(|q|^k r)\} \end{cases} \quad (3.6)$$

Donc, (3.5) devient

$$|f|(r) \leq e^{T(r)} u_k. \quad (3.7)$$

D'autre part, nous avons $|q|\epsilon \leq |q|^k r < \epsilon$. Donc, en utilisant le fait que $|f|(t)$ est constante pour $0 \leq t \leq \epsilon$, on a

$$|f|(|q|^k r) = |f|(|q|^{k+1} r) = |f|(|q|^{k+2} r) = \dots = u_1 = C = \text{Constant} . \quad (3.8)$$

On remplace r dans (3.5) successivement par $|q|r, |q|^2 r, \dots, |q|^{k-1} r$, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} |f|(|q|r) \leq e^{T(|q|r)} u_{k-1}, \\ |f|(|q|^2 r) \leq e^{T(|q|^2 r)} u_{k-2}, \\ \vdots \\ |f|(|q|^{k-2} r) \leq e^{T(|q|^{k-2} r)} u_2, \\ |f|(|q|^{k-1} r) \leq e^{T(|q|^{k-1} r)} u_1 \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Il résulte de (3.6) et (3.9) que pour $r > 0$ assez grand

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = C, \\ u_2 \leq e^{T(|q|^{k-1} r)} u_1, \\ \vdots \\ u_{k-1} \leq e^{T(|q|^2 r)} u_{k-2}, \\ u_{k-2} \leq e^{T(|q|r)} u_{k-1} \end{array} \right. \quad (3.10)$$

De (3.2) et (3.10), nous avons : $|f|(r) \leq e^{\sum_{i=0}^{k-1} T(|q|^i r)} C$.

Comme $T(|q|^i r) \leq T(r), \forall i = 0, \dots, k-1$, il en résulte que

$$|f|(r) \leq e^{kT(r)} C. \quad (3.11)$$

Puisque $k = O(\log r)$, quand $r \rightarrow +\infty$, il est facile de voir que

$$\log^+ |f|(r) = O(T(r) \log r), \quad r \rightarrow +\infty \quad (3.12)$$

Enfin, par les relation (3.3) et (3.12) on a

$$T(r, f) = O(T(r) \log r), \quad r \rightarrow +\infty$$

Ceci achève la démonstration de Théorème 3.1.1. ■

Comme une conséquence immédiate du Théorème 3.1.1, nous avons les résultats suivants

Définition 3.1.2 On appelle ordre de croissance d'une fonction méromorphe $f(x)$ et on note $\rho(f)$ la quantité définie par

$$\rho(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}.$$

Application de la Théorie de Nevanlinna aux
équations fonctionnelles linéaires aux q-différences

Chapitre 3

En particulier, si $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$, on a

$$\rho(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log(\log |f|(r))}{\log r}.$$

Pour plus détails sur l'ordre de croissance voir [6].

Corollaire 3.1.1 [5]

Soit $k = \max\{\rho(h), \rho(g_0), \dots, \rho(g_s)\}$ le maximum de l'ordre de croissance des coefficients h, g_0, \dots, g_s de l'équation (3.1). Alors l'ordre $\rho(f)$ de toute solution méromorphe f de l'équation (3.1) satisfait $\rho(f) \leq k$.

Démonstration.

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ une solution de l'équation (3.1). D'après le Théorème 3.1.1, nous avons

$$T(r, f) = O(T(r) \log r), \text{ quand } r \rightarrow +\infty.$$

i.e. Pour un certain $r_0 > 0$ et pour un certain $C > 0$, on a

$$T(r, f) \leq CT(r) \log r, \text{ pour } r \geq r_0,$$

donc, $T(r, f) \leq C \max\{T(r, h), T(r, g_0), \dots, T(r, g_s)\} \log r$. Par conséquent, pour $r \geq r_0$, on a

$$\log(T(r, f)) \leq \log C + \max\{\log(T(r, h)), \log(T(r, g_0)), \dots, \log(T(r, g_s))\} + \log(\log r).$$

Et donc, pour $r \geq r_0$, on a

$$\frac{\log(T(r, f))}{\log r} \leq \frac{\log C}{\log r} + \max\left\{\frac{\log(T(r, h))}{\log r}, \frac{\log(T(r, g_0))}{\log r}, \dots, \frac{\log(T(r, g_s))}{\log r}\right\} + \frac{\log(\log r)}{\log r}.$$

Et par suite, puisque $\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log(\log r)}{\log r} = 0$, nous avons

$$\rho(f) = \max\{\rho(h), \rho(g_0), \dots, \rho(g_s)\} = k.$$

■

Corollaire 3.1.2 [5]

Si les fonctions h, g_0, \dots, g_s ci-dessus sont d'ordre zéro, alors toute solution méromorphe f de l'équation (3.1) est d'ordre zéro.

Notation

- p un nombre premier, $p = 1, 3, 5, 7 \dots, 2011, \dots$
- \mathbb{N} l'ensemble des nombres naturels.
- \mathbb{Z} l'ensemble des nombres entiers réels.
- \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels.
- \mathbb{Q} l'ensemble des nombres rationnels.
- \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes.
- \mathbb{Z}_p l'ensemble des entiers p -adiques.
- \mathbb{Q}_p l'ensemble des nombres p -adiques.
- \mathbb{C}_p l'ensemble des nombres complexes p -adiques.
- $|\cdot|_\infty$ la valeur absolue usuelle.
- $|\cdot|_p$ la valeur absolue p -adique.
- $v_p(\cdot)$ la valuation p -adique.
- $[x]$ la partie entière de x .
- C_n^k coefficients binomiaux (combinaison de k parmi n).
- $K[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} .
- $K(x)$ l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans \mathbb{K} .
- \widetilde{Q} la clôture algébrique de \mathbb{Q}_p .
- $D^+(0, r)$ le disque fermé de centre 0 et de rayon r .
- $D^-(0, r)$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon r .
- $C(0, r)$ le cercle de centre 0 et de rayon r .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Y.Aihara, Introduction to p-adic Analysis. Research reports of the Nevanlinna theory and its applications II. Nippon Institute of Technology,1998.
- [2] Y. Amice, Les nombres p-adiques. Presses Universitaire de France(1975).
- [3] J.P. Bézivin, Dynamique des fractions rationnels p-adiques. Cours DEA de Mathématiques, Université de CAEN. 23 mai 2005.
- [4] J.P. Bézivin, Sur les équations fonctionnelles aux q-différences, Aequationes Mathematica, 43(2-3)(1992),p. 159-176.
- [5] S. Bourourou, Résolution de certaines classes d'équations fonctionnelles aux q-différences et aux différences dans l'espace des fonctions méromorphes p-adiques. Thèse de Doctorat, Université de Jijel. 2016.
- [6] A. Boussaf, A. Boutabaa and A. Escassut, Growth of p-adic entire functions and applications. Houston J. Math. 40,3 p 715-736,(2014).
- [7] A. Boutabaa, Application de la théorie Nevanlinna p-adique. Collectanea Mathematica 42,1 p 75-93,(1991).
- [8] A. Boutabaa, Théorie de Nevanlinna p-adique. Manuscripta Math. 67, p. 251-269 (1990).
- [9] A. Boutabaa and A.Escassut. Applications of the p- adic Nevanlinna theory to functional equation. Annales de l'Institut Fourier, T.50(3),p751-766 (2000).
- [10] B. Diarra, Analyse p-adique. Cours DEA-Algèbre commutative FAST- Université du Mali. Décembre 1999-Mars 2000.
- [11] A.Escassut, Analytic Elements in p-adic Analysis. Word Scientific Publishing (1995).

Bibliographie

- [12] S.Katok, Real and p-adic analysis. Cours notes for Math 497 C, Mass program, Fall 2000 (2001).
- [13] A.Robert, A course in p-adic Analysis. Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, No. 198 (2000).

Résumé

s'intéresse ce mémoire à l'étude de le comportement des solutions méromorphes, dans un corps complet ultramétrique et algébriquement clôt \mathbb{K} , de certaines équations fonctionnelles linéaires aux q -différences de la forme

$$\sum_{i=0}^s g_i(x)f(q^i x) = h(x),$$

où $q \in \mathbb{K}, 0 < |q| < 1$. On a utilisé la version ultramétrique de la théorie de Nevanlinna pour donner les caractérisations de l'ordre de croissance de ces solutions

Mots.clés :

p -adique, corps ultramétrique, théorème ultramétrique de Nevanlinna, solutions méromorphes, équation aux q -différence.

Abstract

We focus in this work to the study of the behavior of meromorphic solutions in a complete ultrametric algebraically closed field, of some q -difference functional equations of the form

$$\sum_{i=0}^s g_i(x)f(q^i x) = h(x),$$

or $q \in \mathbb{K}, 0 < |q| < 1$. We used the ultrametric version of Nevanlinna theorem, to give some characterizations of the order of growth of these solutions.

Keywords :

p -adic, ultrametric field, ultrametric Nevanlinna theorem, meromorphic solution, q -difference equation.