الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……………

Centre Universitaire
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie **Département de Mathématiques et Informatique**

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques
Spécialité : Mathématiques Appliquées

Application de la transformée de Laplace aux équations différentielles fractionnaires

Préparé par: Rezaiki Nabil
Atmani Amine

Devant le jury :

Labed Boudjemaa (M.A.A)	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Président
Boudjerida Nadjet (M.A.A)	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Rapporteur
Meskine Habiba (M.A.A)	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Examinateur

Année Universitaire : 2018/2019

Dédicaces

Au nom du **Dieu** le clément et le miséricordieux je dédie

Ce modeste travail à :

Mes chers parents qui ont toujours été dévoués pour que je puisse réaliser.

Ce travail de recherche dans les meilleures conditions.

A mon frère ***Bilal*** et mes sœurs ***Besma, Louiza***.

À ma fiancée ***Warda***.

A tous les membres de ma famille paternelle et maternelle.

A mes amies qui m'ont beaucoup aidé durant ces années d'études.

Mes collègues de département je remercie chacun de vous pour le soutien et l'aide qu'il m'a

Amine

Dédicaces

*Au nom du **DIEU** le clément et le miséricordieux je dédie*
ce modeste travail à :
Mes chers parents qui ont toujours été dévoués pour que je puisse réaliser.
ce travail de recherche dans les meilleures conditions.
À** ma très chère femme **SARA
*A mon frère **Halim** et mes soueurs **Nacira , Hayette, Nawel, Sana**.*
A tous les membres de ma famille paternelle et maternelle.
A mes amies qui m'ont beaucoup aidé durant ces années d'études.
Mes collègues de département je remercie chacun de vous pour le soutien et l.aide qu'il m'a apporté.

Nabil

Remerciements

*Avant tout nous remercions **ALLAH** le tout puissant et miséricordieux qui nous a donné la force, le courage et la*

patience d'accomplir ce modeste travail.

Un remerciement particulier à encadreur

*Ma. **Boudjerida Nadjet** .*

Pour sa présence, son aide et surtout pour ses précieux conseils durant toute la période du travail.

*Nous remercions également les membres de jury Mr. **Labed Boudjemaa** pour avoir accepté de présider et Ma. **Meskine Habiba** pour avoir accepté d'examiner notre travail.*

Nous remercions aussi le corps professoral et administratif de l'institut des sciences et de la technologie pour la richesse et la qualité de leur enseignement, qui déploient de grands efforts pour assurer à leurs étudiants une formation actualisée.

Nous tenons à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Amine. Nabil

Table des matières

Introduction

<<This is an apparent paradox from which, one day, useful consequences will be drawn.>> ce qui ce traduit par <<C'est un paradoxe apparent à partir duquel, un jour, les conséquences utiles en seront tirées>>.

Ces mots sont la réponse de Leibniz à la lettre de l'Hospital qui a lui posé la question suivante «Que faire si l'ordre sera de 1 / 2 ?». Donc l'histoire du calcul fractionnaire commença par une question clé, aujourd'hui cette lettre est admise comme le premier incident que nous appelons la dérivation fractionnaire et le fait que l' Hopital a demandé spécifiquement pour n=1/2 c est a dire pour un nombre rationnel, il a donné lieu au nom de cette partie mathématique.

la fin du 17ème siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral, mais ce n'est que lors des trois dernières décennies que le calcul fractionnaire a connu le plus d'intérêt et les applications des dérivées fractionnaires se sont le plus diversifiées.

La théorie de la dérivation non entière à été longuement considérée comme une branche relevant des mathématiques. Depuis la seconde moitié du 17ème siècle beaucoup de contributions autant théoriques que pratiques ont montré l'importance des systèmes d'ordre fractionnaire et leur intérêt dans différentes disciplines tels que : l'électricité, la chimie, la biologie, l'économie, l'automatique et le traitement du signal.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons aux quelques théorèmes et applications des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire. L'objectif principal de l'utilisation de la transformée de Laplace pour résoudre les équations fractionnaire en donnant des exemples d'applications comme cette du modèle circuit électrique et l'équation d'Abel.

Ce mémoire est organisé comme suit :

Le premier chapitre : sera consacré aux éléments de base du calcul fractionnaire, un rappel historique et quelques concepts préliminaires seront introduits comme la transformée de Laplace, la fonction gamma et la fonction de Mittag-Leffler qui joue un rôle important dans la théorie des équations différentielles fractionnaires.

Le deuxième chapitre : dans ce chapitre on va présenter Trois approches (Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville et Caputo) à la généralisation des notions de dérivations et d'intégrations fractionnaires et leurs propriétés ainsi ses transformées de Laplace.
Le troisième chapitre : ce chapitre sera dédié a la résolution de quelques équations différentielles et intégrales.

Chapitre 1

Préliminaire et notions générales

Dans ce chapitre, nous donnons des éléments nécessaires et des outils de bases dans le concept calcul fractionnaire comme la fonction Gamma, la fonction Bêta, la fonction de Mittag-Leffler et la transformée de Laplace.Ce fonction jouent un rôle très important dans la théorie du calcule différentiel d'ordre fractionnaire.

1.1 Fonctions usuelles pour la calcule fractionnaire

1.1.1 La fonction Gamma :

Soit $x \in \mathbb{C}$ et $Re(x) > 0$ la fonction Gamma (notée par Γ) est donné par l'intégrale suivant :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \tag{1.1}$$

avec $\Gamma(1) = 1$; $\Gamma(0_+) = +\infty$; $\Gamma(x)$ est une fonction strictement décroissante pour $0 < x \leq 1$.

Une propriété fondamentale de la fonction Gamma $\Gamma(x)$ est la relation de récurrence suivante.

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{1.2}$$

qu'on peut la démontrer par une intégration par parties

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^{(x+1)-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = \Big[-t^x e^{-t} \Big]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x)$$

La fonction gamma d'Euler généralise la factorielle car $\Gamma(n+1) = n!$; $\forall n \in \mathbb{N}$; en effet

$\Gamma(1) = 1$, et en utilisant(1.2) nous obtenons : $\Gamma(n) = (n-1)!$

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= 1.\Gamma(1) = 1!, \\
\Gamma(3) &= 2.\Gamma(2) = 2.1 = 2!, \\
\Gamma(4) &= 3.\Gamma(3) = 3.2.1 = 3!, \\
&\vdots \\
\Gamma(n+1) &= n.\Gamma(n) = n(n-1)! = n!.
\end{aligned}$$

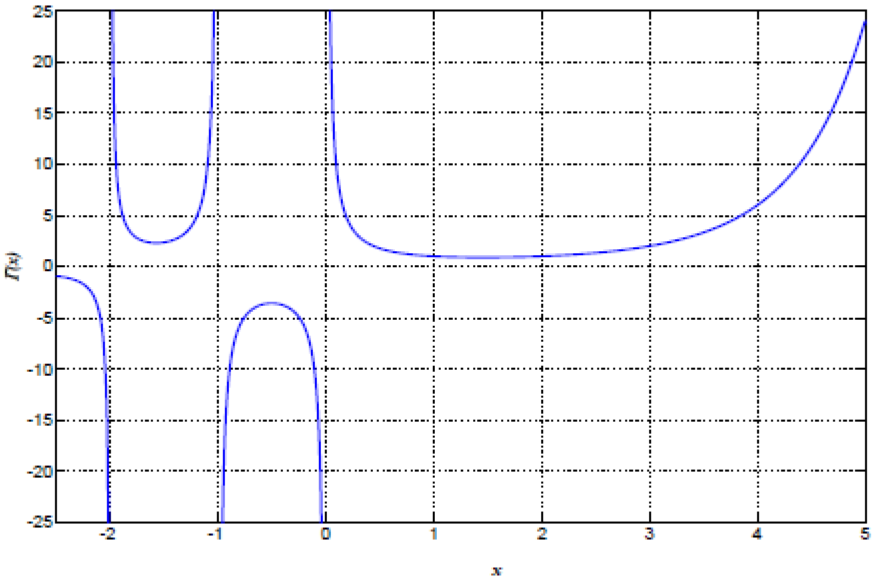

FIGURE 1.1 – Courbe représentative de la fonction gamma.

Exemple 1.1.1. *Pour $x = \frac{1}{2}$, on a par définition*

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt. \tag{1.3}$$

on pose $t = u^2 \Rightarrow dt = 2udu$, alors

$$\begin{aligned}
\Gamma(\frac{1}{2}) &= \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \frac{1}{u} 2udu \\
&= 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du. \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

De façon équivalente, on peut écrire :

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy. \tag{1.5}$$

Si nous multiplions ensemble (1.4) et (1.5) nous obtenons :

$$[\Gamma(\frac{1}{2})]^2 = 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(u^2+y^2)} dudy. \tag{1.6}$$

On utilisant les coordonnés polaires

$$\begin{cases} u = r\cos\theta; \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$

On aurra

$$J(r;\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial u}{\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

$$\begin{aligned} \Gamma^2(\frac{1}{2}) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(u^2+y^2)}dudy \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} re^{-r^2}drd\theta \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Ainsi, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

1.1.2 Fonction Bêta

Comme la fonction gamma, la fonction bêta est elle aussi définie par une intégrale.

Définition 1.1.1. *Soient $x, y > 0$, la fonction Bêta est définie par :*

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

Proposition 1.1.1. *La fonction Bêta est reliée aux la fonction Gamma par la relation suivant*

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}; \quad (x,y) \in \mathbb{R}^+. \tag{1.7}$$

Preuve

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} t_1^{x-1}t_2^{y-1}e^{-t_1}e^{-t_2}dt_1dt_2 \\ &= \int_0^{+\infty} t_1^{x-1}(\int_0^{+\infty} t_2^{y-1}e^{-(t_1+t_2)}dt_2)dt_1. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de la variable $t_3 = t_2 + t_1$ on a

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} t_1^{x-1}(\int_0^{+\infty} (t_3-t_1)^{y-1}e^{-t_3}dt_2)dt_3. \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t_3}dt_3 \int_0^{+\infty} (t_3-t_1)^{y-1}t_1^{x-1}dt_1. \end{aligned}$$

on pose $t_4 = \frac{t_1}{t_3}$ alors

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} e^{-t_3} dt_3 \int_0^{+\infty} (t_3 t_4)^{x-1} (t_3 - t_3 t_4)^{y-1} t_3 dt_4 \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t_3} dt_3 \int_0^{+\infty} t_3^{x-1} (t_4)^{x-1} t_3^{y-1} (1 - t_4)^{y-1} t_3 dt_4 \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t_3} dt_3 \int_0^{+\infty} t_3^{x-1+y} (t_4)^{x-1} (1 - t_4)^{y-1} dt_4 \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t_3} t_3^{x-1+y} dt_3 \beta(x, y) \\
&= \Gamma(x + y)\beta(x, y).
\end{aligned}$$

donc $\beta(x, y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x + y)}$.

Proposition 1.1.2. *La fonction Bêta possède les propriétés suivants*

1. $\beta(x, y) = \beta(y, x)$; *symétrique*
2. $\beta(x, y) = \beta(x, y + 1) + \beta(x + 1, y)$
3. $\beta(x, y + 1) = \frac{y}{x}\beta(x + 1, y) + \frac{x}{x+y}\beta(x, y)$

1.1.3 La fonction Erreur

Soit $x \in \mathbb{R}$ alors la fonction Erreur est définie par l'intégral suivante :

$$Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt; \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{1.8}$$

Comme conséquences on a :

$$Erf(0) = 0.$$

et

$$Erf(\infty) = 1.$$

1.1.4 La fonction Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler est nommée d'après un mathématicien suédois qui l'a défini en 1903 : Cette fonction est une généralisation directe de la fonction exponentielle, e^x ; et il joue un rôle majeur dans le calcul fractionnaire. Les représentations de la fonction Mittag- Leffler à un et à deux paramètres peuvent être définies en terme d'une série de puissances :

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(1 + \alpha k)}; \quad \alpha > 0. \tag{1.9}$$

$$E_{\alpha,\beta}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)};\quad \alpha>0,\beta>0. \tag{1.10}$$

De la définition (1.10), il en résulte que :

$$E_{\alpha,\beta}(x)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}+xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x).$$

En effet, par définition on a,

$$\begin{aligned}
E_{\alpha,\beta}(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\\
&= \sum_{k=-1}^{+\infty}\frac{x^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1)+\beta)}\\
&= \sum_{k=-1}^{+\infty}\frac{xx^k}{\Gamma(\alpha k+(\alpha+\beta))}\\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)}+x\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+(\alpha+\beta))}\\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)}+xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x).
\end{aligned}$$

La fonction Mittag-Leffler se réduit à des fonctions simples. Par exemple,

$$\begin{aligned}
E_{1,1}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{\Gamma(n+1)}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x.\\
E_{1,2}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{\Gamma(n+2)}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{e^x+1}{x}.\\
E_{2,1}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{\Gamma(2n+1)}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n!}=\cosh(x).\\
E_{2,2}(x^2) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{\Gamma(2n+2)}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{x\Gamma(2n+1)!}=\frac{\sinh(x)}{x}.
\end{aligned}$$

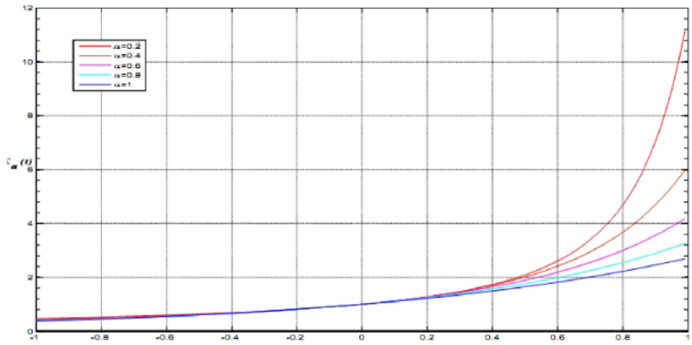

FIGURE 1.2 – La fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre.

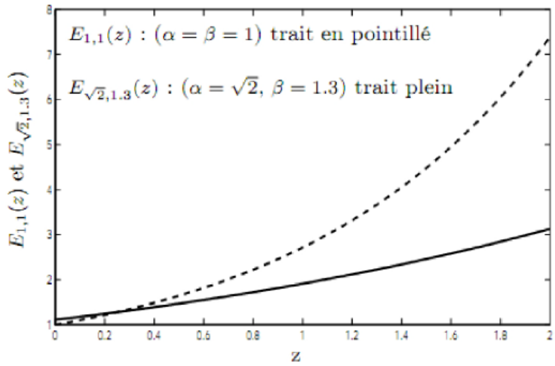

FIGURE 1.3 – La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres.

1.1.5 La fonction Mellin-Ross

Définition 1.1.2. *La fonction Mellin-ross est définie par :*

$$E_x(u,a) = x^u \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ax)^n}{\Gamma(n+u+1)} = x^u E_{1,u+1}(ax).$$

1.2 la transformé de Laplace

Une des méthodes les plus efficaces pour résoudre certaines équations différentielles est utilisé á la transformation de Laplace.
Une analogie est donnée par les logarithmes, qui transforment les produits en sommes, et donc simplifient les calculs.

La transformation de Laplace transforme des fonctions $f(t)$ en d'autres fonctions $F(s)$, on écrit

$$F = \mathcal{L}\{f\}$$

ou

$$F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$$

La transformée de Laplace permet donc de transformer le problème du domaine du temps en domaine de fréquence. Le problème ainsi obtenu sera plus simple à résoudre et la récupération de la solution du problème de départ se fera à l'aide de la transformée de Laplace inverse.
La transformation de Laplace inverse transforme $F(s)$ en $f(t)$, on écrit

$$f = \mathcal{L}^{-1}\{f\}$$

ou

$$f = \mathcal{L}^{-1}\{f\}(s)$$

On verra plus loin sur quelles fonctions ces transformations sont définies. La propriété essentielle est que, sous certaines conditions

$$\mathcal{L}\{f'\}(p) = s.F(s)$$

Ainsi, les équations différentielles deviennent des équations algébriques.

Définition 1.2.1. *La transformée de Laplace d'une fonction f réelle et continue est donnée par l'expression suivante :*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

où le symbole $\{f(t)\}$ veut dire la transformée de Laplace de $f(t)$ On utilise aussi l'expression $F(s)$ pour décrire la transformée de Laplace :

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

1.2.1 L'existence de la transformée de Laplace

Définition 1.2.2. *On dit que la fonction f est d'ordre exponentielle, s'il existe $M > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que :*

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}.$$

Théorème 1.2.1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)avec $f(t) = 0$ pour $t < 0$. Si les conditions suivantes sont réunies :*

1. *f est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$*

2. *f est exponentielle d'ordre γ*
3. *pour tout $t_0 > 0$; $\int_t^{t_0} |f(t)|dt$ existe (soit $\int_t^{t_0} |f(t)|dt < +\infty$)alors :*

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) \quad \text{existe pour} \quad s > \gamma.$$

Le domaine de définition de $F(s)$ contient donc l'intervalle $]\gamma; +\infty[$.

Preuve :
On doit vérifier que

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^x e^{-st} f(t)dt; \quad \text{existe}$$

Une condition suffisante est que :

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^x e^{-st} |f(t)|dt < +\infty.$$

Mais on a :

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-st}|f(t)|dt &= \int_0^{t_0} e^{-st}|f(t)|dt + \int_{t_0}^x e^{-st}|f(t)|dt \\ &\leq \int_0^{t_0} |f(t)|dt + \int_{t_0}^x a e^{\gamma t} e^{-st} dt. \end{aligned}$$

ce qui permet d'établir la preuve car on a supposé que $\int_0^{t_0} |f(t)|dt$ existe et on a :

$$\int_{t_0}^x a e^{\gamma t} e^{-st} dt = \frac{a}{\gamma - s} \left[e^{(\gamma - s)t} \right]_{t_0}^x.$$

et bien sûr $\lim_{t \to +\infty} e^{(\gamma - s)x} = 0$.

1.3 Exemples sur la transformée de Laplace

1.3.1 La transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac

Le Dirac, s'il n'est pas physiquement réalisable (valeur infinie pendant un temps infiniment court) est utilisé pour décrire la réponse des systèmes dynamiques à des sollicitations très brèves. On peut approcher la fonction Dirac par une fonction porte d'amplitude $T = 1$ sur un intervalle T. On considère donc la fonction :

$$d_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} & t \in]0, +T[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La transformée de Laplace de $d_0(t)$ est donnée par :

$$\mathcal{L}\{d_0(t)\} = \int_0^{+\infty} d_0(t) e^{-st} dt = \int_0^T \frac{e^{-st}}{T} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-sT} \right]_0^T = \frac{e^{-sT} - 1}{-sT}.$$

Écrivons le développement en série de ce résultat :

$$\mathcal{L}\{d_0(t)\} = \frac{e^{-sT}-1}{-sT} = \frac{-1+\sum\limits_{k>0}\frac{(-sT)^k}{k!}}{-sT} = \sum_{k\geq 0}\frac{(-sT)^{k-1}}{k!} = 1 - \frac{s\,T}{2} + \frac{s^2\,T^2}{6} - \frac{s^3\,T^3}{24} + \cdots$$

La limite de cette somme lorsque $T \to 0$ donne la transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac :

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim_{T\to 0}\sum_{k\geq 1}\frac{(-sT)^{k-1}}{k!} = 1$$

1.3.2 La transformée de Laplace de l'échelon unitaire

La fonction échelon unitaire, aussi connue sous le nom de fonction de Heaviside et notée $u(t)$ est définie par :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 & \text{si} \quad t > 0. \end{cases}$$

La transformée de Laplace de l'échelon unitaire est donc donnée par :

$$\mathcal{L}(u(t)) = \int_0^{+\infty} u(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} e^{-st}dt = [\frac{e^{-st}}{-s}]_0^T$$

La partie réelle de s étant positive, la limite en $t \to +\infty$ de e^{-st} est nulle. On a donc finalement :

$$\mathcal{L}(u(t)) = \frac{1}{s}$$

1.4 Les propriétés de la transformée de Laplace

1. **La transformées Opérationnelles :**

   (a) **Linéarité :**

   La transformation de Laplace est linéaire :

$$\mathcal{L}(f+g) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g).$$

   et

$$\mathcal{L}(kf) = k\mathcal{L}(f); \quad k \in \mathbb{R}.$$

   Preuve :

   La linéarité de la transformation de Laplace est une conséquence directe des propriétés de l'integrale.

Exemple 1.4.1. *Calculons la transformée de Laplace de la fonction f définie par :*

$$F(s) = 3\mathcal{L}[tu(t)] + 4\mathcal{L}[u(t)] = \frac{3}{s^2} + \frac{4}{s}.$$

(b) **Addition (Soustraction) :**

L'addition (soustraction) dans le domaine du temps correspond àune addition(soustraction) dans le domaine de Laplace. Donc, si

$$\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s).$$

$$\mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s).$$

$$\mathcal{L}\{f_3(t)\} = F_3(s).$$

alors

$$\mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t) - f_3(t)\} = F_1(s) + F_2(s) - F_3(s).$$

(c) **La transformée de Laplace de la translation :**

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction vérifiant $f(t) = 0$ si $t < 0$ et admettant une transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)(s)$. On considére la fonction $f_\alpha$définie par $f_\alpha(t) = f(t-\alpha); \alpha > 0$.

Proposition 1.4.1.

$$\mathcal{L}(f_\alpha)(s) = e^{-\alpha s}\mathcal{L}(f)(s).$$

(d) **La transformé de Laplace de l'homothétie** :

Soit $k > 0$ et $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction vérifiant $f(t) = 0$ si $t < 0$ et admettant une transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)(s)$. Soit f_k la fonction définie par :$f_k(t) = f(kt)$

Proposition 1.4.2.

$$\mathcal{L}(f_k)(s) = \frac{1}{k}\mathcal{L}(f)(\frac{s}{k}).$$

preuve :

$$\mathcal{L}(f_k)(s) = \int_0^{+\infty} f_k(t)e^{-ts}dt = \int_0^{+\infty} f(kt)e^{-ts}dt.$$

On change la variable $y = kt$; $dt = \frac{dy}{k}$ alors

$$\mathcal{L}(f_k)(s) = \frac{1}{k}\int_0^{+\infty} f(y)e^{\frac{-ys}{k}}dy = \frac{1}{k}\mathcal{L}(f_k)(\frac{s}{k}).$$

(e) **L'effet de la multiplication par e^{-at} :**

Théorème 1.4.1. *La transformation de Laplace de la fonction définie par $f(t)e^{-at}u(t)$ est :*

$$\mathcal{L}[f(t)e^{-at}u(t)] = F(s+a)$$

preuve

$$\mathcal{L}[f(t)e^{-at}u(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-at}u(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(at+st)}u(t)dt = F(s+a)$$

(f) **La transformée de Laplace de la dérivée :**

On s'intéresse à la transformée de Laplace de la dérivée et à la dérivée de la transformée d'une fonction.

Théorème 1.4.2. *Soit $f : [0;1) \to R$ une fonction de type exponentielle à l'infini dont la dérivée est continue. Alors $\mathcal{L}(f')$ existe et elle est donnée par :*

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) = s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0).$$

Preuve :

$$\mathcal{L}(\frac{df(t)}{dt}) = sF(s) - f(0^-).$$

On obtient cette relation en utilisant la définition de la transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}(\frac{df(t)}{dt}) = \int_0^{+\infty} (\frac{df(t)}{dt})e^{-st}dt.$$

Une intégration par partie est utilisée. Soit $u = e^{-st}$ et $dv = \frac{df(t)}{dt}dt$ on obtient :

$$\mathcal{L}(\frac{df(t)}{dt}) = e^{-st}f(t)|_{0^-}^{+\infty} - \int_{0^-}^{+\infty} f(t)(-se^{-st})dt$$

Le premier terme donne $f(0^-)$, puisque e^{-st} donne 1 pour l'évaluation à 0^- et 0 à l'infini. Le côté droit de la dernière équation devient donc :

$$-f(0^-) + s\int_{0^-}^{+\infty} f(t)(e^{-st})dt = sF(s) - f(0^-).$$

Le résultat vas être généraliser au cas on a des points de discontinuité

Corollaire 1.4.1. *Si f est de type exponentielle et admet des dérivées d'ordre $k(k \leq n)$ avec f^n continue. Alors :*

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(s) = s^n\mathcal{L}(f(t))(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

(g) **La transformée du produit de convolution :**

Définition 1.4.1. *Le produit de convolution de deux fonction $f(t)$ et $g(t)$ est définie par l'intégrale :*

$$(f \star g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt = \int_0^x f(x-t)g(t)dt.$$

Et sa transformée de Laplace est donnée par :

$$\mathcal{L}\{f(x) \star g(x)\} = \mathcal{L}(f(t))\mathcal{L}(g(t)) = F(s)G(s).$$

et

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t) \star g(t).$$

2. **Les transformées fonctionnelles :**
   Une transformée fonctionnelle est tout simplement la transformée de Laplace d'une fonction spécifique de t. Dans ce qui suit, on considère que les fonctions sont nulles pour $t < 0$.

   (a) **La transformée de Laplace de la fonction sinus :**
   La fonction sinus peut s'écrire sous la forme d'une somme d'exponentielles complexes :
   $$sin(wt) = \frac{e^{iwt} - e^{-iwt}}{2i}.$$
   Donc la transformée de Laplace du sinus se calcule comme suit :
   $$\mathcal{L}\{\sin(wt)\} = \frac{1}{2i}\int_0^{\infty} e^{iwt-st} - e^{-iwt-st}dt = \frac{1}{2i}\left[\frac{e^{iwt-st}}{iw-s} + \frac{e^{-iwt-st}}{iw+s}\right]_0^{\infty}.$$
   La partie réelle de p étant positive, la limite en $t \to +\infty$ de e^{-st} est nulle. Il vient donc :
   $$\mathcal{L}\{sin(wt)\} = -\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{iw-s} + \frac{1}{iw+s}\right) = \frac{w}{w^2+s^2}.$$

   (b) **La transformée de Laplace de la fonction cosinus :**
   La fonction cosinus peut s'écrire sous la forme d'une somme d'exponentielles complexes
   $$\cos(wt) = \frac{e^{iwt} + e^{-iwt}}{2}.$$
   Donc la transformée de Laplace du sinus se calcule comme suit :
   $$\mathcal{L}\{\cos(wt)\} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{iwt-st} + e^{-iwt-st}dt = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{iwt-st}}{iw-s} - \frac{e^{-iwt-st}}{iw+s}\right]_0^{\infty}.$$
   La partie réelle de p étant positive, la limite en $t \to +\infty$ de e^{-st} est nulle. Il vient donc :
   $$\mathcal{L}\{cos(wt)\} = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{iw-s} + \frac{1}{iw+s}\right) = \frac{s}{w^2+s^2}.$$
   On peut également obtenir ce résultat en remarquant que la dérivation de la fonction sinus donne :
   $$\frac{d\sin(wt)}{dt} = w\cos(wt).$$

En utilisant la linéarité et la propriété de la transformée de Laplace d'une fonction dérivée, il vient :

$$\mathcal{L}\{\cos(wt)\} = \frac{1}{w}(s\mathcal{L}(\sin(wt)) - \sin(0)) = \frac{s}{w}\frac{w}{w^2+s^2} = \frac{s}{w^2+s^2}.$$

On retrouve donc bien le résultat établi plus haut.

(c) **La transformée de Laplace de l'exponentielle :**

La transformée de Laplace de la fonction $f(t) = e^a t$ se calcule directement par :

$$\mathcal{L}(e^{-at}) = \int_0^\infty e^{-at-st}dt = \left[-\frac{e^{(-a-s)t}}{a+s}\right]_0^\infty = \frac{1}{a+s}.$$

Fonction	$f(t)$	$\mathcal{L}(f(t))$
impulsion	$\delta(t)$	1
échelon	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
rampe	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
polynme (général)	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
exponentiel	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
sinus	$\sin(wt)u(t)$	$\frac{w}{s^2+w^2}$
cosinus	$\cos(wt)u(t)$	$\frac{s}{s^2+w^2}$
sinus amorti	$e^{-at}\sin(wt)u(t)$	$\frac{w}{(s+a)^2+w^2}$
cosinus amorti	$e^{-at}\cos(wt)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+w^2}$

TABLE 1.1 – tableau de transformées de Laplace

Chapitre 2

La dérivation et l'intégration fractionnaire

Il existe plusieurs définitions mathématique de l'intégration et de la dérivation d'ordre fractionnaire. ces définitions ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais sont équivalentes pour un large gamme de fonctions Dans ce chapitre, nous présentons différentes approches de généralisation de la notion de différentiation et intégration. Le choix étant réduit aux définitions qui sont liées aux applications.

2.1 L'approche de Grünwald-Letnikov

2.1.1 Unification des dérivées et intégrales d'ordre entier :

L'idée principale de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov est de donner une généralisation de la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres arbitraires.
La dérivée première (d'ordre 1) d'une fonction f au point t est donnée par :

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x) - f(x-h)}{h}. \tag{2.1}$$

Par dérivation successive de la fonction f, on obtient une généralisation de la formule (2.1) à l'ordre n (n est un entier positif ou nul) de la forme :

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}f(t-jh). \tag{2.2}$$

où

$$\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-j+1)}{j!}. \tag{2.3}$$

Considérons la formule suivant qui généralise les fractions dans (2.2)

$$f_h^{(p)}(t) = \frac{1}{h^p} \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \binom{p}{j} f(t - jh). \tag{2.4}$$

avec p un entier arbitraire et n aussi un entier, pour $p \leq n$ on a

$$\lim_{h \to 0} f_h^{(p)}(t) = f^{(p)}(t) = \frac{d^p f(t)}{dt^p} \tag{2.5}$$

car dans un tel cas, comme entraîné de (2.3), tous les coefficients du numérateur après $\binom{p}{p}$ sont nuls.

Pour les valeurs négatives de p, et Par commodité, on note :

$$\begin{bmatrix} p \\ j \end{bmatrix} = \frac{p(p+1)(p+2)\cdots(p+j-1)}{j!}. \tag{2.6}$$

donc

$$\binom{-p}{j} = \frac{-p(-p-1)(-p-2)\cdots(-p-j+1)}{j!} = (-1)^j \begin{bmatrix} p \\ j \end{bmatrix}$$

et en remplaçant p dans (2.4) par $(-p)$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} f_h^{(-p)}(t) &= \frac{1}{h^{-p}} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j (-1)^j \begin{bmatrix} p \\ j \end{bmatrix} f(t - jh) \\ &= \frac{1}{h^{-p}} \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} p \\ j \end{bmatrix} f(t - jh) \end{aligned} \tag{2.7}$$

où p est un nombre entier positif.

* Si n fini, alors $f_h^{(-p)}(t)$ tend vers 0 lorsque $h \to 0$.

On suppose que $n \to 1$ lorsque $h \to 0$ et $h = \frac{t-a}{n}$avec a un constant réel, et notons

$$\lim_{h \to 0} f_h^{(-p)}(t) = {}_a^G D_t^{-p} f(t). \tag{2.8}$$

Considérons quelques cas particuliers :

pour $p = 1$ on a :

$$f_h^{(-1)}(t) = h \sum_{j=0}^{n} f(t - jh). \tag{2.9}$$

En tenant compte de $t - nh = a$ et que la fonction $f(t)$ supposée continue, on conclut que

$$\lim_{h \to 0} f_h^{(-1)}(t) = {}_a^G D_t^{-1} f(t) = \int_0^{t-a} f(t - z) dz = \int_a^t f(\tau) d\tau. \tag{2.10}$$

pour $p = 2$:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ j \end{bmatrix} = \frac{2.3 \cdots (2 + j - 1)}{j!} = j + 1. \tag{2.11}$$

et on a :

$$f_h^{(-2)}(t) \quad = h \sum_{j=0}^{n} (j + 1) h f(t - jh). \tag{2.12}$$

on pose $t + h = y$, on obtient

$$f_h^{(-2)}(t) \quad = h \sum_{j=1}^{n+1} (jh) f(y - jh). \tag{2.13}$$

si $h \to 0$, alors

$$\lim_{h \to 0} f_h^{(-2)}(t) = {}_a^G D_t^{-2} f(t) = \int_0^{t-a} z f(t - z) dt = \int_a^t (t - \tau) f(\tau) d\tau. \tag{2.14}$$

car $y \to t$ quand $h \to 0$.

pour $p = 3$: nous verrons la formule générale de ${}_a^G D_t^{-p}$.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ j \end{bmatrix} = \frac{3.4 \cdots (3 + j - 1)}{j!} = \frac{(j + 1)(j + 2)}{1.2}. \tag{2.15}$$

et on a :

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1.2} \sum_{j=0}^{n} (j + 1)(j + 2) h^2 f(t - jh). \tag{2.16}$$

on pose $t + 2h = y$, on obtient

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1.2} \sum_{j=1}^{n+1} j(j + 1) h^2 f(y - jh) \tag{2.17}$$

$$= \frac{h}{1.2} \sum_{j=1}^{n+1} (jh)^2 f(y - jh) + \frac{h^2}{1.2} \sum_{j=1}^{n+1} (jh) f(y - jh). \tag{2.18}$$

Faisons h tendre vers zéro, nous obtenons :

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^{-3} f(t) &= \frac{1}{2!} \int_0^{t-a} z^2 f(t - z) dz \\ &= \frac{1}{2!} \int_a^t (t - \tau)^2 f(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{2.19}$$

car $y \to t$ quand $h \to 0$, et

$$\lim_{h \to 0} \frac{h^2}{1.2} \sum_{j=1}^{n+1} jh \;\; f(y - jh) = \lim_{h \to 0} h \int_a^t (t - \tau) f(\tau) d\tau = 0. \tag{2.20}$$

De (2.10) et (2.19) on obtient la formule générale suivante

$$
\begin{aligned}
{}_a^G D_t^{-p} f(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{h^p}{} \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} p \\ j \end{bmatrix} \; f(y - jh) \\
&= \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau. \qquad (2.21)
\end{aligned}
$$

Pour la démonstration de la formule (2.21), on procède par récurrence (voir [4,p 49]). Montrons maintenant, que (2.21) est une représentation d'une intégrale répétée $p-$fois. En ingérant la relation

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\; {}_a^G D_t^{-p} f(t)) &= \frac{1}{(p-2)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-2} f(\tau) d\tau \\
&= \; {}_a^G D_t^{-p+1} f(t).
\end{aligned}
$$

de a à t ; nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
{}_a^G D_t^{-p} f(t) &= \int_a^t ({}_a^G D_t^{-p+1} f(\tau)) d\tau \\
{}_a^G D_t^{-p+1} f(t) &= \int_a^t ({}_a^G D_t^{-p+2} f(\tau)) d\tau \\
&\vdots \\
{}_a^G D_t^{-p} f(t) &= \int_a^t d(\tau) \int_a^t ({}_a^G D_t^{-p+2} f(\tau)) d\tau \\
&= \int_a^t d\tau \int_a^t ({}_a^G D_t^{-p+3} f(\tau)) d\tau \\
&= \underbrace{\int_a^t d\tau \int_a^t d\tau \cdots \int_a^t f(\tau)) d\tau}_{n \;\, fois}
\end{aligned}
$$

On remarque que la dérivée d'ordre entier n et l'intégrale répétée n-fois d'une fonction continue $f(t)$ sont des cas particuliers de la formule générale :

$$
{}_a^G D_t^{-p} f(t) = \lim_{h\to 0} \; h^{-p} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{p}{j} f(t - jh). \qquad (2.22)
$$

qui représente la dérivée d'ordre m si $p = m$ et l'intégrale répétée m-fois si $p = -m$.

2.1.2 L'intégration d'ordre arbitraire :

Pour p non entier ($p < 0$) on remplace p par $-p$ dans (2.22) on obtient

$$
{}_a^G D_t^{-p} f(t) = \lim_{h\to 0} \; h^p \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} p \\ j \end{bmatrix} f(t - jh). \qquad (2.23)
$$

où les valeurs de n et h sont reliées par $nh = t - a$. Pour prouver l'existence de la limite dans (2.23) et évaluer cette limite on a besoin du théorème suivant

Théorème 2.1.1. *Prenons une suite $(\beta_k)_{k=1,2,...}$ et supposons que*

$$\lim_{k\to\infty}\beta_k = 1. \tag{2.24}$$

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_{n,k} = 0; \qquad \textit{pour tout } k,. \tag{2.25}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{n,k} = A; \qquad \textit{pour tout } k. \tag{2.26}$$

$$\sum_{k=1}^{n}|\alpha_{n,k}| < K; \qquad \textit{pour tout } n. \tag{2.27}$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{n,k}\beta_k = A \tag{2.28}$$

Preuve *: Pour la démonstration, on revoit à [4]*

2.1.3 dérivation d'ordre arbitraire

Pour p non entier tel que $(p > 0)$ on a :

$${}_a^G D_t^p f(t) = \lim_{h\to 0} h^{-p}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{p}{j}f(t-jh) = \lim_{h\to 0} f_h^{(p)}(t). \tag{2.29}$$

où

$$f_h^{(p)}(t) = h^{-p}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{p}{j}f(t-jh). \tag{2.30}$$

Afin de calculer la limite (2.30), commençons par transformer tout d'abord la formule de $f_h^{(p)}(t)$ comme suit : en utilisant la propriété connue des coefficients du binôme

$$\binom{p}{j} = \binom{p-1}{j} + \binom{p-1}{j-1}. \tag{2.31}$$

on peut écrire

$$f_h^{(p)}(t) = h^{-p}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{p-1}{j}f(t-jh) + h^{-p}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{p-1}{j-1}f(t-jh).$$

d'où

$$f_h^{(p)}(t) = h^{-p}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{p-1}{j}f(t-jh) + h^{-p}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{j+1}\binom{p-1}{j}f(t-(j+1)h)$$
$$= (-1)^n\binom{p-1}{n}h^{-p}f(a) + h^{-p}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{p-1}{j}\Delta(t-jh). \tag{2.32}$$

où nous notons par

$$\Delta f(t-jh) = f(t-jh) - f(t-(j+1)h).$$

En appliquant la propriété (2.31) des coefficients du binôme répétée m-fois, on obtient en partant de (2.32) :

$$f_h^{(p)}(t) = (-1)^n\binom{p-1}{j}h^{-p}f(a) + (-1)^{n-1}\binom{p-2}{n-1}h^{-p}\Delta f(a+h)$$
$$+ h^{-p}\sum_{j=0}^{n-2}(-1)^j\binom{p-2}{j}\Delta^2 f(t-jh)$$
$$= (-1)^n\binom{p-1}{j}h^{-p}f(a) + (-1)^{n-1}\binom{p-2}{n-1}h^{-p}\Delta f(a+h)$$
$$+ (-1)^{n-2}\binom{p-3}{n-3}h^{-p}\Delta^2 f(a+2h)$$
$$+ h^{-p}\sum_{j=0}^{n-3}(-1)^j\binom{p-3}{j}\Delta^3 f(t-jh)$$
$$\vdots$$
$$= \sum_{k=0}^{m}(-1)^{n-k}\binom{p-k-1}{n-k}h^{-p}\Delta^k f(a+kh)$$
$$+ h^{-p}\sum_{k=0}^{n-m-1}(-1)^j\binom{p-m-1}{j}\Delta^{m+1}f(t-jh). \tag{2.33}$$

Calculons la limite du $k - ime$ terme de la première somme de (2.33) :

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}(-1)^{n-k}\begin{pmatrix}p-k-1\\ n-k\end{pmatrix}h^{-p}\Delta^k f(a+kh)\\
&= \lim_{h\to 0}(-1)^{n-k}\begin{pmatrix}p-k-1\\ n-k\end{pmatrix}(n-k)^{p-k}\\
&\times\Big(\frac{n}{n-k}\Big)^{p-k}(nh)^{-p+k}\frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k}\\
&= (t-a)^{-p+k}\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-k}\begin{pmatrix}p-k-1\\ n-k\end{pmatrix}(n-k)^{p-k}\\
&\times\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{n}{n-k}\Big)^{p-k}\times\lim_{h\to\infty}\frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k}\\
&= \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)}
\end{aligned}\tag{2.34}$$

car en utilisant (2.4) on a

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-k}\begin{pmatrix}p-k-1\\ n-k\end{pmatrix}(n-k)^{p-k}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(-p+k+1)(-p+k+2)\cdots(-p+n)}{(n-k)^{-p+k}(n-k)!}\\
&= \frac{1}{\Gamma(-p+k+1)}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{n}{n-k}\Big)^{p-k} &= 1,\\
\lim_{h\to 0}\frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k} &= f^{(k)}(a)
\end{aligned}$$

Connaissant la limite (2.34) on peut facilement écrire la limite de la première somme de (2.33).

Pour calculer la limite de la seconde somme dans (2.33), écrivons la sous la forme :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(-p+m+1)}\sum_{j=0}^{n-m-1}(-1)^j\Gamma(-p+m+1)\begin{pmatrix}p-m-1\\ j\end{pmatrix}j^{-m+p}\\
&\times h(jh)^{m-p}\ \frac{\Delta^{m+1}f(x-jh)}{h^{m+1}}
\end{aligned}\tag{2.35}$$

Pour appliquer le théorème 2.1.1 on prend

$$\beta_j = (-1)^j\Gamma(-p+m+1)\begin{pmatrix}p-m-1\\ j\end{pmatrix}j^{-m+p}\tag{2.36}$$

$$\alpha_{n,j} = h(jh)^{m-p}\ \frac{\Delta^{m+1}f(t-jh)}{h^{m+1}},\ \ h = \frac{t-a}{n}\tag{2.37}$$

En s'aidant toujours de l'identité

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)...(s+n)}$$

on peut vérifier que

$$\lim_{j\to\infty}\beta_j = \lim_{j\to\infty}(-1)^j\Gamma(-p+m+1)\binom{p-m-1}{j} j^{-m+p} = 1 \tag{2.38}$$

En résumé, si $m - p > -1$, alors

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-m-1}\alpha_{n,j} &= \lim_{h\to 0}\sum_{j=0}^{n-m-1} h(jh)^{m-p}\ \frac{\Delta^{m+1}f(t-jh)}{h^{m+1}} \\ &= \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau)d\tau \end{aligned}\tag{2.39}$$

En tenant compte de (2.38) et (2.39) et en appliquant le théorème 2.1.1, on conclut que

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} h^{-p}\sum_{j=0}^{n-m-1}(-1)^j\binom{p-m-1}{j}\Delta^{m+1}f(t-jh) \\ &= \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau)d\tau \end{aligned}\tag{2.40}$$

Utilisant (2.34) et (2.40), on obtient finalement la limite (2.29) :

$$\begin{aligned}{}_a^G D_t^p f(t) &= \lim_{h\to\infty} f_h^{(p)}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(-p+k+1)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau)d\tau. \end{aligned}\tag{2.41}$$

La formule (2.41) est obtenue sous l'hypothèse que les dérivées $f^{(k)}(x), (k = 1, 2, \cdots, m+1)$ sont continues dans l'intervalle fermé $[a, t]$ et que m est un nombre entier vérifiant la condition $m > p - 1$. La plus petite valeur possible de m est déterminée par l'inégalité :

$$m < p < m + 1$$

.

Exemple 2.1.1. 1. ***La dérivée de $f(t) = C$ au sens de Grünwald-letnikov :*** *En générale la dérivée d'une fonction constante notée C au sens de Grünwald- Letnikov ni nulle ni* *constante. Si $f(t) = C$ et p non entier, on a $f^{(k)}(t) = 0$ pour $k = 1, 2, 3, \cdots, m + 1$*

$$
\begin{aligned}
{}_a^G D_t^p f(t) &= \underbrace{\frac{f(a)(t-a)^{-p}}{\Gamma(1-p)} \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(k-p+1)}}_{0} \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{\Gamma(m+1-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)(\tau)d\tau}}_{0} \\
&= \frac{C}{\Gamma(1-p)} (t-a)^{-p}
\end{aligned}
$$

2. ***La dérivée de $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ au sens de Grünwald-letnikov :***

   Soit la fonction $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ avec $\alpha > m$ et p un nombre non entier, tel que $0 \leq m < p < m + 1$ On a $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, \cdots, m$ et

$$
f^{(m+1)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-m)} (\tau - a)^{\alpha-m-1} \tag{2.42}
$$

car

$$
\begin{aligned}
f(\tau) &= (\tau - a)^{\alpha} \\
f'(\tau) &= \alpha(\tau - a)^{\alpha-1} \\
f''(\tau) &= \alpha(\alpha-1)(\tau - a)^{\alpha-2} \\
&\vdots \\
f^{(m+1)}(\tau) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m)(\tau-a)^{\alpha-m-1} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-m)} (\tau-a)^{\alpha-m-1} \qquad (2.43)
\end{aligned}
$$

D'où

$$
{}_a^G D_t^p f(t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-m)\Gamma(m+1-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} (\tau-a)^{\alpha-m-1} d\tau. \tag{2.44}
$$

On utilisant le changement de variable $\tau = a + s(x-a)$, on obtient

$$
\begin{aligned}
{}_a^G D_t^p (t-a)^{\alpha} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-m)\Gamma(m+1-p)} \int_0^1 (t-a)^{\alpha-p} (1-s)^{m-p} s^{\alpha-m-1} ds. \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-m)\Gamma(m+1-p)} \beta(m+1-p, \alpha-m)(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p} \qquad (2.45)
\end{aligned}
$$

par exemple pour $p = \frac{2}{3}$ et $\alpha = 1$, on aurra :

$$
\begin{aligned}
{}_0^G D_t^{\frac{2}{3}} f(t) &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1 - \frac{2}{3} + 1)} t^{1-\frac{2}{3}} \\
&= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{4})} (t)^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}
$$

Propriété 2.1.1. 1. ***Composition avec les dérivées d'ordre entier :***

Pour n un entier positif et p non entier on a :

- $\frac{d^n}{dt^n}({}_a^G D_t^p f(t)) = {}_a^G D_t^{p+n} f(t)$
- ${}_a^G D_t^p \left(\frac{d^n}{dt^n f(t)} \right) = {}_a^G D_t^{p+n} f(t) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-n}}{\Gamma(k-p-n+1)}$

Preuve

• *On a p non entier avec $m < p < m+1$ et m entier positif, donc*

$$\frac{d^n}{dt^n}({}_a^G D_t^p f(t)) = \sum_{k=0}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-(p+n)}}{\Gamma(k-(p+n)+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f^{(n+m)}(\tau) d\tau$$

D'où :

$$\frac{d^n}{dt^n}({}_a^G D_t^p f(t)) = {}_a^G D_t^{p+n} f(t)$$

$$\begin{aligned}
\bullet \; {}_a^G D_t^p (\frac{d^n}{dt^n} f(t)) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(n+k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f^{(n+m)}(\tau) d\tau \\
&= \sum_{k=0}^{m+n+1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-n}}{\Gamma(k-p-n+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f^{(n+m)}(\tau) d\tau \\
&- \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-n}}{\Gamma(k-p-n+1)} \\
&= {}_a^G D_t^{p+n} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-n}}{\Gamma(k-p-n+1)}
\end{aligned}$$

On déduit que l'opérateur de dérivation fractionnaire de Grünwald-letnikov ${}_a^G D_t^p$ est commute avec $\frac{d^n}{dx^n}$, tel que :

$$\frac{d^n}{dt^n}({}_a^G D_t^p f(t)) = {}_a^G D_t^p (\frac{d^n}{dt^n} f(t)) = {}_a^G D_t^{p+n} f(t)$$

si et seulement si $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, \cdots, n-1$ en la borne inférieur $x = a$.

2. ***Composition avec les dérivées d'ordre fractionnaire :***

   (a) *Si : $p < 0$ et $q < 0$ alors*

$$ {}_a^G D_t^q ({}_a^G D_t^p f(t)) = {}_a^G D_t^{p+q} f(t)$$

(b) *Si : $p < 0$ et $0 \leq n < q < n+1$ alors*

$$ {}_a^G D_t^q ({}_a^G D_t^p f(t)) = {}_a^G D_t^{p+q} f(t)$$

(c) *Si : $0 \leq m < p < m+1$ et $q < 0$ alors*

$$ {}_a^G D_t^q ({}_a^G D_t^p f(t)) = {}_a^G D_t^{p+q} f(t)$$

seulement si $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, \cdots, m-1$

(d) *Si : $0 \leq m < p < m+1$ et $0 \leq n < q < n+1$ alors*

$$ {}_a^G D_t^q ({}_a^G D_t^p f(t)) = {}_a^G D_t^{p+q} f(t)$$

Preuve

• *Si : $p < 0$ et $q < 0$ alors*

3. *Si : $p < 0$ et $q < 0$ alors*

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^q ({}_a^G D_t^p f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_a^t (t-\tau)^{-q-1} ({}_a^G D_t^p f(\tau)) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(-q)\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-q-1} d\tau \int_a^\tau (\tau-\epsilon)^{-p-1} d\epsilon \\ &= \frac{1}{\Gamma(-q)\Gamma(-p)} \int_a^t f(\epsilon) d\epsilon \int_\epsilon^t (t-\tau)^{-q-1} (\tau-\epsilon)^{-p-1} d\tau \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable : $\tau = \epsilon + s(t-\epsilon) \Rightarrow d\tau = (t-\epsilon)ds$

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^q ({}_a^G D_t^p f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(-q)\Gamma(-p)} \int_a^t f(\epsilon) d\epsilon \int_0^1 (t-\tau)^{-q-p-1} (1-s)^{-q-1} s^{-p-1} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(-q)\Gamma(-p)} \beta(-p,-q) \int_a^t (t-\epsilon)^{-q-p-1} f(\epsilon) d\epsilon \\ &= \frac{1}{\Gamma(-p-q)} \int_a^t (t-\epsilon)^{-q-p-1} f(\epsilon) d\epsilon \\ &= {}_a^G D_t^{p+q} f(t) \end{aligned}$$

• *Si : $p < 0$ et $0 \leq n < q < n+1$ on a : $q = (n+1) + (q-n-1)$ avec$q-n-1 < 0$ alors*

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^q ({}_a^G D_t^p f(t)) &= \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \{ {}_a^G D_t^{q-n-1} ({}_a^G D_t^p f(t)) \} \\ f(t) &= \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} {}_a^G D_t^{p+q-n-1} f(t) \\ &= {}_a^G D_t^{p+q} \end{aligned}$$

Donc si $p < 0$ on a ${}_a^G D_t^q ({}_a^G D_t^p f(t)) = {}_a^G D_t^{p+q}$ pour tout $q \in \mathcal{R}$.

• *Si : $0 \leq m < p < m+1$ et $q < 0$ on a :*

$$ {}_a^G D_t^p f(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-p+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau$$

et $(t-a)^{k-p}$ *ont des singularités non intégrables donc* ${}_a^GD_t^q({}_a^GD_t^p f(t)))$ *existe seulement si* $f^{(k)}(a) = 0$ *pour tout* $k = 0, 1, 2, ..., m-1$ *et dans ce cas on a*

$$ {}_a^GD_t^p f(t) = \frac{f^{(m)}(a)(t-a)^{m-p}}{\Gamma(m-p-1)} +{}_a^G D_t^{p-m-1} f^{(m+1)}(t) $$

tel que

$$ {}_a^GD_t^{p-m-1} f^{(m+1)}(t) = \frac{1}{\Gamma(m-p+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau $$

donc

$$ \begin{aligned} {}_a^GD_t^q({}_a^GD_t^p f(t)) &= \frac{f^{(m)}(a)(t-a)^{m-p-q}}{\Gamma(m-p-q+1)} +{}_a^G D_t^{p+q-m-1} f^{(m+1)}(t) \\ &= \frac{f^{(m)}(a)(t-a)^{m-(p+q)}}{\Gamma(m-(p+q)+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-(p+q)+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-(p+q)} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \\ &={}_a^G D_t^{(p+q)} f(t) \end{aligned} $$

• *Si :* $0 \leq m < p < m+1$ *et* $0 \leq n < q < n+1$ *on a :*

$$ {}_a^GD_t^q({}_a^GD_t^p f(t)) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \{{}_a^GD_t^{q-n-1}({}_a^GD_t^p f(t))\} $$

si $f^{(k)}(a) = 0$ *pour tout* $k = 0, 1, ..., m-1$ *on a*

$$ {}_a^GD_t^{q-n-1}({}_a^GD_t^p f(t)) ={}_a^G D_t^{p+q-n-1} f(t) $$

donc

$$ \begin{aligned} {}_a^GD_t^q({}_a^GD_t^p f(t)) &= \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} ({}_a^GD_t^{p+q-n-1} f(t)) \\ &={}_a^G D_t^{p+q} f(t) \end{aligned} $$

2.1.4 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov

Soit f une fonction qui possède la transformée de Laplace $F(s)$. Pour $0 \leq p < 1$;

$$ {}_0^GD_t^\alpha f(t) = \frac{f(0)t^{-p}}{\Gamma(1-p)} + \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_0^t (t-\tau)^{-p} f'(\tau) d\tau $$

alors,

$$ \begin{aligned} \mathcal{L}\{{}_0^GD_t^p f(t)\}(s) &= \frac{f(0)t}{s^{1-p}} + \frac{1}{s^{1-p}}[sF(s) - f(0)], \\ &= s^p F(s). \end{aligned} \tag{2.46} $$

Dans les applications, il faut savoir que la formule (2.46) a un sens dans le cas classique seulement pour $0 < p < 1$; mais pour $p > 1$ elle a lieu au sens des distributions.(voir [4])

2.2 L'approche de Riemann-Liouville

2.2.1 Unification des dérivées et intégrales d'ordre entier :

On considère la fonction $f(\tau)$ intégrable et continue sur l'intervalle $[a;t]$, on a :

$$f^{(-1)}(t) = \int_a^t f(\tau)d\tau$$

existe.

$$\begin{aligned} f^{(-2)}(t) &= \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} f(\tau)d\tau \\ &= \int_a^t f(\tau)d\tau \int_\tau^t d\tau_1 \\ &= \int_a^t (t-\tau)f(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned} f^{(-3)}(t) &= \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} d\tau_2 \int_a^{\tau_2} f(\tau)d\tau \\ &= \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} (\tau_1-\tau)f(\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{2}\int_a^t (t-\tau)^2 f(\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{2.48}$$

et par récurrence dans le cas général, on a la formule de Cauchy

$$f^{(-n)}(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau. \tag{2.49}$$

Supposons maintenant que $n \geq 1$ est fixé et prenons un entier $k \geq 0$. Évidemment, on obtiendra

$$f^{(-k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^{-k} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau. \tag{2.50}$$

avec le symbole $D^{-k}(k \geq 0)$ désigne k intégrations itérées. D'autre part, pour un $n \geq 1$ et un entier $k \geq n$, la $(k-n)$ dérivée de la fonction $f(t)$ peut s'écrire comme

$$f^{(k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^{k} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau. \tag{2.51}$$

avec le symbole $D^k(k \geq 0)$ désigne k différentiations itérées. On voit que les formules (2.50), (2.51) peuvent être considérées comme des cas particuliers l'une de l'autre, à savoir, dans laquelle $n(n \geq 1)$ est fixé et le symbole D^k signifie k intégration si $k \leq 0$ et k différentiations si$k > 0$. Si $k = n-1; n-2; \cdots$ alors la formule (2.51) donne les intégrales itérées de $f(t)$, pour $k = n$ elle donne la fonction $f(t)$, pour $k = n+1; n+2; n+3; \cdots$ elle donne les dérivée d'ordre $k-n = 1; 2; 3; \cdots$ de la fonction $f(t)$.

2.2.2 Intégration d'ordre arbitraire :

Pour trouver l'intégration non entier d'ordre n, on remplace n par le réel p $(p > 0)$ dans la formule de Cauchy (2.49) on obtient

$$ {}_{a}^{RL}D_{t}^{-p} f = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau. \tag{2.52} $$

pour $(-\infty \leq a < t < +\infty)$.

Pour $\alpha = 0$, on a :

$$ I_{a}^{0} := I \text{ (l'opérateur identité)} $$

Pour $\alpha = n \in \mathbb{N}^{*}, I_{a}^{\alpha}$ coïncide avec l'intégrale répétée $n-$fois de la forme :

$$ \begin{aligned} (I_{a}^{\alpha} f)(t) &= \int_{a}^{t} dt_{1} \int_{a}^{t_{1}} dt_{2} ... \int_{a}^{t_{n-1}} f(t_{n}) dt_{n} &\quad (2.53) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{a}^{t} (x-t)^{n-1} f(t) dt &\quad (2.54) \end{aligned} $$

Remarque 2.2.1. *Si f est de classe C^{m+1}, faisant des intégration par parties dans la formule (2.52) on obtient*

$$ I^{\alpha} f(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k+1)} + (I^{p+m+1} f^{(m+1)})(x) \tag{2.55} $$

Exemple 2.2.1. *Soit $f(t) = (t-a)^{c}$,*

$$ I^{p} f(t-a)^{c} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{p-1} (\tau-a)^{c} d\tau. $$

En effet,le changement de variable : $\tau = a + s(t-a) \Rightarrow d\tau = (t-a)ds$

$$ \begin{aligned} I_{a}^{p} f(t-a)^{c} &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_{0}^{1} (t-a)^{c+p} (1-s)^{p-1} s^{c} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \beta(p, c+1)(t-a)^{c+p} \\ &= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(c+p+1)} (t-a)^{c+p}. \end{aligned} $$

Dans le cas $a = 0$ on a,

$$ I_{0}^{\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(\alpha+c+1)} (x)^{\alpha+c}. $$

Propriété 2.2.1. *1. I^{α} est un opérateur linéaire.*

2. Pour $\alpha = 0$ on a : $I^{0} f(t) = f(t)$.

3. Pour $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$ on a : $I^{\alpha} I^{\beta} = I^{\beta} I^{\alpha} = I^{\alpha+\beta}$.

4. *$F(s)$ est la Transformée de Laplace de la fonction $f(t)$, nous avons :*
   $\mathcal{L}\{I^{\alpha}f(t)\}(s) = s^{-\alpha}F(s)$.

Preuve

1/. Soit $f, g : [a;b] \to \mathbb{R}$ et $\lambda, \mu \in K$: $I^{\alpha}(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda I^{\alpha} f(t) + \mu I^{\alpha} g(t)$, donc I^{p} est un opérateur linéaire.

2/. Dans la formule (2.55), on pose $\alpha = 0$ on aura :

$$\begin{aligned}
(If)(t) &= f(a) + (If')(t) \\
&= f(a) + \int_a^t f'(\tau)d\tau \\
&= f(a) + [f(\tau)]_a^t \\
&= f(t)
\end{aligned}$$

3/.

$$\begin{aligned}
(I^{\alpha}(I^{\beta}f))(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(I^{\beta}f(t))d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{\tau} (\tau - s)^{\beta-1} f(s)ds)d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}d\tau \int_s^t (\tau - s)^{\beta-1} f(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t f(s)ds \int_t^{\tau} (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau - s)^{\beta-1}d\tau
\end{aligned}$$

D'après le changement de variable :$\tau = s + x(t-s) \Rightarrow d\tau = (t-s)ds$, on a :

$$\begin{aligned}
(I^{\alpha}(I^{\beta}f))(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t f(s)ds \int_0^1 (t-s)^{\alpha+\beta-1}(1-x)^{\alpha-1}x^{\beta-1}dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \beta(\alpha, \beta) \int_a^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s)ds \\
&= (I^{\alpha+\beta})(s).
\end{aligned}$$

4/.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{I^{\alpha}f(t)\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st}(I^{\alpha}f)(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-st}(t-\lambda)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \Big(\int_{\tau}^{+\infty} e^{-st}(t-\tau)^{\alpha-1}dt \Big) f(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

D'après le changement de variable : $t - \tau = x$ on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(I^{\alpha} f)(s) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-s\tau}\Big(\int_0^{+\infty} e^{-sx} x^{\alpha-1} dx\Big) f(\tau) d\tau \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-sx} s^{-\alpha} f(\tau) d\tau \\ &= s^{-\alpha} F(s).\end{aligned}$$

2.2.3 Dérivation d'ordre arbitraire :

Soit f une fonction intégrable sur $[a, t]$ alors la dérivée fractionnaire d'ordre p (avec $n - 1 \leq p \leq n$) est définie par :

$$ {}_a^{RL}D_t^p f(t) = D^n I_a^{n-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \Big(\frac{d}{dt}\Big)^n \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau \tag{2.56}$$

Remarque 2.2.2. *Si f est de classe C^{n+1}, on obtient*

$$\begin{aligned} {}_a^{RL}D_t^p f(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \\ &= {}_a^{G}D_t f(t) \end{aligned} \tag{2.57}$$

Exemple 2.2.2. 1. ***La dérivée de $f(x) = C$ au sens de Riemann-Liouville :*** *En générale la dérivée d'ordre fractionnaire d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle ni constant, mais pour $n \leq \alpha < n + 1$, soit C une constante réelle on a :*

$$\begin{aligned} {}_a^{RL}D_x^{\alpha} C = D^{n+1}(I^{n+1-\alpha} C) &= \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha} C dt \\ &= \frac{C}{\Gamma(n+1-\alpha)} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha} dt \\ &= \frac{C}{\Gamma(n+1-\alpha)} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \Big[\frac{-1}{n+1-\alpha} (x-t)^{n+1-\alpha}\Big]_a^x \\ &= \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha} \end{aligned}$$

2. ***La dérivée de $f(x) = (x-a)^c$ au sens de Riemann-Liouville :*** *Soit p non entier et $(0 \leq m < p < m + 1$et $m \in \mathbb{N}^*)$ avec $c > m$,on a*

$$ {}_a^{RL}D_x^p (x-a)^c = \frac{1}{\Gamma(m+1-p)} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} \int_a^x (x-\tau)^{m-p} (\tau - a)^c d\tau $$

On utilisation le changement de variable $\tau = a + s(x-a)$, on obtient

$$\begin{aligned}
{}_{a}^{RL}D_{x}^{p}(x-a)^{c} &= \frac{1}{\Gamma(m+1-p)}\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\int_{0}^{1}(x-a)^{m+1-p+a}(1-s)^{m-p}s^{c}ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(m+1-p)}\beta(m+1-p,c+1)\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x-a)^{c-p+m+1} \\
&= \frac{\Gamma(c+m-p+2)\beta(m+1-p,c+1)}{\Gamma(m+1-p)\Gamma(c-p+1)}(x-a)^{c-p} \\
&= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(c-p+1)}(x-a)^{c-p}
\end{aligned}$$

Par exemple pour $p = \frac{3}{2}$ et $c = 3$, on aurra

$$ {}_{0}^{RL}D_{x}^{\frac{2}{3}}x^{3} = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(\frac{5}{2}}x^{\frac{3}{2}} $$

Propriété 2.2.2. 1. ***Composition avec les dérivées d'ordre entier :***

Pour n entier positive et α non entier on a

* $\frac{d^n}{dt^n}({}_{a}^{RL}D_{t}^{\alpha}f(t)) ={}_{a}^{RL} D_{t}^{\alpha+n}f(t)$

mais

* ${}_{a}^{RL}D_{t}^{\alpha}(\frac{d^n}{dt^n}f(t)) ={}_{a}^{RL} D_{t}^{\alpha+n}f(t) - \sum\limits_{k=0}^{m-1}\dfrac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha-m}}{\Gamma(k-\alpha-m+1)}$

Donc on déduit que l'opérateur de dérivation fractionnaire de Riemann- Liouville ${}_{a}^{RL}D_{t}^{\alpha}$ est commute avec $\frac{d^n}{dt^n}$, tel que

$\frac{d^n}{dt^n}({}_{a}^{RL}D_{t}^{\alpha}f(t)) ={}_{a}^{RL} D_{t}^{\alpha}(\frac{d^n}{dt^n}f(t)) ={}_{a}^{RL} D_{t}^{\alpha+n}f(t)$

si et seulement si : $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$

2. ***Composition avec l'intégrale d'ordre fractionnaire :***

• *On a*

$$ {}_{a}^{RL}D_{t}^{\alpha}({}_{a}^{RL}D_{t}^{-\alpha}f(t)) ={}_{a}^{RL} D_{t}^{\alpha}(I_{t}^{\alpha}f(t)) = f(t) $$

Cette propriété est peut être la plus importante, de la dérivée au sens de Riemann-Liouville, pour $p > 0$, $x > a$. Alors l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire et en générale on a : ${}_{a}^{RL}D_{t}^{-\alpha}(I^{\beta}f(t)) = {}_{a}^{RL}D_{t}^{\alpha-\beta}f(t)$

• ${}_{a}^{RL}D_{t}^{-\alpha}(I^{\beta}f(t)) = {}_{a}^{RL}D_{t}^{\alpha-\beta}f(t) - \sum\limits_{k=1}^{m}\left[{}_{a}^{RL}D_{t}^{\beta-k}f(t)\right]\dfrac{(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}$

Alors on déduit que la dérivation fractionnaire et l'intégration fractionnaire ne commutent pas en générale.

2.2.4 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville peut notamment s'écrire comme le produit de convolution de la fonction $g(t) = t^{\alpha-1}$ et $f(t)$:

$$ {}_0^R D_t^{\alpha} f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau)d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} g(t) \star f(t) \tag{2.58}$$

La transformée de Laplace de la fonction $g(t) = t^{\alpha-1}$ est donnée dans par :

$$ G(s) = \mathcal{L}\{t^{\alpha-1}\}(s) = \Gamma(\alpha)s^{-\alpha} \tag{2.59}$$

Ainsi, en utilisant la formule de la transformée de Laplace de convolution, on obtient la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

$$ \mathcal{L}\{{}_0^R D_t^{\alpha} f(t); s\} = s^{-\alpha} F(s) \tag{2.60}$$

Pour obtenir la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction $f(t)$; posons

$$ {}_0^R D_t^{\alpha} f(t) = g^{(n)}(t) \tag{2.61}$$

ce qui entraine

$$ g(t) =_0^R D_t^{-(n-\alpha)} f(t) \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)d\tau; n-1 \leq p < n \tag{2.62}$$

L'utilisation de la transformée de Laplace de la dérivation d'ordre entier conduit à :

$$ \mathcal{L}\{{}_0^R D_t^{\alpha} f(t)\}(s) = s^{\alpha} G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0) \tag{2.63}$$

où

$$ G(s) = s^{-(n-\alpha)} F(s) \tag{2.64}$$

En utilisant la définition de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, nous obtenons :

$$ g^{(n-k-1)}(t) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} \left({}_0^R D_t^{-(n-\alpha)} f(t)\right) =_0^R D_t^{\alpha-k-1} f(t) \tag{2.65}$$

Par substitution de (2.64) et (2.65) dans (2.63), nous arrivons à l'expression finale de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville,

$$ \mathcal{L}\{{}_0^R D_t^{\alpha} f(t); s\} = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[{}_0^R D_t^{\alpha-k-1} f(t)\right]_{t=0}; n-1 \leq \alpha < n \tag{2.66}$$

l'application pratique de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann- Liouville, est limitée par l'absence d'une interprétation physique des valeurs limites des dérivées fractionnaires en la borne inférieure $t = 0$: En partculier, si $n = 1$ et $n = 2$; on a respectivement,

$$\mathcal{L}\{{}_0^R D_t^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) -{}_0^R D_t^{\alpha-1} f(0); 1 < \alpha \leq 1 \quad (2.67)$$

$$\mathcal{L}\{{}_0^R D_t^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) -{}_0^R D_t^{\alpha-1} f(0) - s{}_0^R D_t^{\alpha-2} f(0); 1 < \alpha \leq 2 \quad (2.68)$$

Le tableau 2.1 donne un bref résumé de quelques transformées de Laplace utiles. Nous allons souvent se référer à ce tableau le long de cette thèse. a et b sont deux réels constants ($a \neq b$) et $\alpha, \beta > 0$ arbitraires.

$F(s)$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s), t\}$
$\frac{1}{s^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$
$\frac{1}{s+a^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-at}$
$\frac{1}{s^\alpha - a}$	$t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(at^\alpha)$
$\frac{s^\alpha}{s(s^\alpha+a)}$	$E_\alpha(-at^\alpha)$
$\frac{a}{s^\alpha(s-a)}$	$t^\alpha E_{1,\alpha+1}(at)$
$\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a}$	$t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)$
$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})$
$\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + a}$	$t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-at^\alpha)$
$\frac{1}{(s^\alpha + as^\beta)^{n+1}}$	$t^{\alpha(n+1)-1} \sum \frac{(-a)^k}{\Gamma(k(\alpha-\beta)+(n+1)\alpha)} \begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix} t^{k(\alpha-\beta)}$
$\frac{s^\gamma}{s^\alpha + as^\beta + b}$	$t^{\alpha-\gamma-1} \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=0}^\infty \frac{(-b)^n(-a)^k}{\Gamma(k(\alpha-\beta)+(n+1)(\alpha-\gamma))} \begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix} t^{k(\alpha-\beta)+n\alpha}$

TABLE 2.1 – Transformée de Laplace de quelques fonctions

2.3 L'approche de Caputo

La définition de la dérivation fractionnaire de type Riemann-Liouville a joué un rôle important dans le développement de la théorie des dérivées et intégrales fractionnaires à cause de leurs applications dans les mathématiques pures (solutions des équations différentielles d'ordre entier, définition de nouvelles classes de fonction, sommation des séries,...). Cependant, la technologie moderne demande une certaine révision de l'approche mathématique pure bien connue, de nombreux travaux sont apparus, spécialement sur la théorie de viscoélasticité et des mécaniques du solide, où les dérivées fractionnaires sont utilisées pour une bonne description des propriétés des matériaux. Une modélisation mathématique est basée sur les modèles rhéologiques mène naturellement à des équations différentielles d'ordre fractionnaire, et à la nécessité de la formulation des conditions initiales de telles équations. Les problèmes appliqués demandent des définitions de dérivées fractionnaires autorisant l'utilisation des conditions initiales interprétables physiquement, lesquelles contiennent $f(a)$, $f'(a)$, etc... Malgré le fait que les problèmes aux valeurs initiales avec de telles conditions initiales peuvent être résolus mathématiquement, la solution de ce problème a été proposée par M. Caputo (dans les années soixante) dans sa définition qu'il a adapté avec Mainardi dans la structure de la théorie de viscoélastiques. Donc on introduit une dérivée fractionnaire qui est plus restrictive que celle de Riemann-Liouville.

Définition 2.3.1. *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction $f(t)$ donnée sur l'intervalle $[a, b]$ est définie par la relation suivante :*

$$ {}_a^cD_t^\alpha f(t) = I_a^{n-\alpha} f^{(n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \tag{2.69}$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $n = [\alpha] + 1$, où $[\alpha]$ désigne la partie entière de α

2.3.1 Relation avec la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Le théorème suivants établit le lien entre la dérivée fractionnaire au sens de caputo et celle au sens de Riemann-Liouville.

Théorème 2.3.1. *Soient $\alpha \geq 0$, $n = [\alpha + 1]$, si f possédé $n - 1$ dérivées en a et si $D_a^\alpha f$ existe, alors :*

$$ {}^cD_a^\alpha f(t) = D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] \tag{2.70}$$

pour presque tout $x \in [a, b]$.

Preuve D'aprés la définition on a :

$$
\begin{aligned}
& D_a^{\alpha}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] \\
& = D^n I_a^{n-\alpha}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] \\
& = \frac{d^n}{dx^n}\int\frac{(x-t)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right]dt
\end{aligned}
$$

En utilisant l'intégration par partie on obtient :

$$
\begin{aligned}
& I_a^{n-\alpha}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] \\
& = \int\frac{(x-t)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right]dt \\
& = -\frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\left[(f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k)(x-t)^{n-\alpha}\right]_{t=a}^{t=x} \\
& + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\int_a^x(x-t)^{n-\alpha}\left[(Df(t)-D\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k)(x-t)^{n-\alpha}\right]dt
\end{aligned}
$$

Où

$$
\begin{aligned}
& I_a^{n-\alpha}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right], \\
& I_a^{n-\alpha+1}D\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right].
\end{aligned}
$$

de la même façon pour $n-fois$ alors :

$$
\begin{aligned}
& I_a^{n-\alpha}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right], \\
& I_a^{n-\alpha+n}D^n\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right], \\
& I_a^n I_a n-\alpha D^n\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right].
\end{aligned}
$$

Exemple 2.3.1. *Soit* $f(x)=(x-a)^{\gamma}$ *avec* $\gamma>0$*, pour* $(0<\alpha\leq 1)$ *et utilisant le changement* *de variable* (**??**) *on a :*

$$\begin{aligned}
{}^cD_a^{\alpha}f(x) &= I_a^{1-\alpha}f'(x) = \gamma I_a^{1-\alpha}(x-a)^{\gamma-1},\\
&= \frac{\gamma}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{-\alpha}(t-a)^{\gamma-1}dt,\\
&= \frac{\gamma}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha+\gamma}\int_0^1 s^{\gamma-1}(1-s)^{-\alpha}ds,\\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha+\gamma}\beta(\gamma,1-\alpha),\\
{}^cD_a^{\alpha}f(x) &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(1-\alpha+\gamma)}(x-a)^{-\alpha+\gamma}.
\end{aligned}$$

Propriété 2.3.1. 1. ***Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire :***

Si f est continue on a

$$ {}_a^CD_t^{\alpha}(I_a^{\alpha}\ f(t)) = f(t),$$

et

$$I_a^{\alpha}({}_a^CD_t^{\alpha}f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{\Gamma(k+1)}.$$

D'où l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais n'est pas inverse droite (au moins sur les fonctions de classe c^1).

2. ***Composition avec les dérivées d'ordre entier :***

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $m-1 < \alpha < m$ on a

- $ {}_a^CD_t^{\alpha}(\frac{d^n}{dt^n}f(t)) = {}_a^C D_t^{\alpha+n}f(t),$
- $\frac{d^n}{dt^n}({}_a^CD_t^{\alpha}f(t)) = {}_a^C D_t^{\alpha+n}f(t) + \sum_{k=m}^{n+m-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-(p+n)}}{\Gamma(k-(p+n)+1)}.$

Preuve

• *On a*

$$\begin{aligned}
{}_a^CD_t^{\alpha}(\frac{d^n}{dt^n}\ f(t)) &= {}_a^C D_t^{-(m-\alpha)}({}_a^CD_t^{m}(\frac{d^n}{dt^n}\ f(t))),\\
&= {}_a^C D_t^{-(m-\alpha)}({}_a^CD_t^{m+n}\ f(t)),\\
&= {}_a^C D_t^{\alpha+n-(m+n)}({}_a^CD_t^{m+n}\ f(t)),\\
&= {}_a^C D_t^{\alpha+n}\ f(t).
\end{aligned}$$

- $$\frac{d^n}{dt^n}({}^C_a D^\alpha_t f(t)) = \frac{d^n}{dt^n}\Big({}^{RL}_a D^\alpha_t f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}\Big),$$

$$= \frac{d^n}{dt^n}({}^{RL}_a D^\alpha_t f(t)) - \frac{d^n}{dt^n}\Big(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}\Big),$$

$$= {}^{RL}_a D^{\alpha+n}_t f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} \frac{d^n}{dt^n}(t-a)^{k-\alpha},$$

$$= {}^{RL}_a D^{\alpha+n}_t f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(\alpha+n)+1)}(t-a)^{k-\alpha-n},$$

$$= {}^{RL}_a D^{\alpha+n}_t f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha-n+1)}(t-a)^{k-\alpha-n}$$

$$- \sum_{k=m}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha-n+1)}(t-a)^{k-\alpha-n}$$

$$+ \sum_{k=m}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha-n+1)}(t-a)^{k-\alpha-n}$$

$$= {}^{RL}_a D^{\alpha+n}_t f(t) - \sum_{k=0}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha-n+1)}(t-a)^{k-\alpha-n}$$

$$+ \sum_{k=m}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha-n+1)}(t-a)^{k-\alpha-n}$$

$$= {}^{C}_a D^{\alpha+n}_t f(t) + \sum_{k=m}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha-n+1)}(t-a)^{k-\alpha-n}.$$

Donc on déduit que : $\frac{d^n}{dt^n}({}^C_a D^\alpha_t f(t)) = {}^C_a D^\alpha_t (\frac{d^n}{dt^n} f(t)) = {}^C_a D^{\alpha+n}_t f(t),$
si et seulement si $f^{(k)}(a) = 0$ *pour tout* $k = m, m+1, ..., n.$

2.3.2 La transformation de Laplace de la dérivée au sens de Caputo

Soient $f \in C^\infty[\alpha; +\infty], n-1 \leq \alpha < n$,et $\alpha \leq 0$ Cas $\alpha = 0$;on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[{}^\alpha_0 D^\alpha_t](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st}[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\tau)d\tau]dt,\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^{+\infty}\int_\tau^{\infty} e^{-st}(t-\tau)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\tau)dtd\tau,\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^{+\infty}\int_0^{\infty} e^{-s(u+\tau)}(u)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\tau)dud\tau,\\
&= (\int_0^{+\infty} e^{-su}\frac{u^{n-1-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)}du)(\int_0^{+\infty} e^{-st} f^{(n)}(n)d\tau),\\
&= \mathcal{L}[\frac{t^{n-1-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)}](s)\mathcal{L}[f^{(n)}](s),\\
&= s^{\alpha-n}\mathcal{L}[f^{(n)}](s).
\end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f^{(n)}](s) &= s^n\mathcal{L}[f^{(n)}](s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots f^{(n-1)}(0), \text{alos}\\
\mathcal{L}[{}_0^cDf](s) &= s^{\alpha-n}[s^n\mathcal{L}[f^{(n)}](s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots f^{(n-1)}(0)]\\
&= s^{\alpha}\mathcal{L}[f^{(n)}](s) - s^{\alpha-1}f(0) - s^{\alpha-2}f'(0) - \cdots - s^{\alpha-n}f^{(n-1)}(0)
\end{aligned}$$

Cas général :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[{}_a^cD_t^{\alpha}](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st}[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-1-\alpha}f^{(n)}(\tau)d\tau]dt\\
&= \int_0^{+\infty} e^{-st}[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{n-1-\alpha}f^{(n)}(\tau)d\tau]dt\\
&+ \int_0^{+\infty} e^{-st}[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^0 (t-\tau)^{n-1-\alpha}f^{(n)}(\tau)d\tau]dt\\
&= s^{\alpha-n}\mathcal{L}[f^{(n)}](s) + \int_a^0 (\int_0^{+\infty} e^{-st}\frac{(t-\tau)^{n-1-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)}dt)f^{(n)}(\tau)d\tau\\
&= s^{\alpha-n}\mathcal{L}[f^{(n)}](s) + \int_a^0 \mathcal{L}[\frac{(t-\tau)^{n-1-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)}](s)f^{(n)}(\tau)d\tau\\
&= s^{\alpha-n}\mathcal{L}[f^{(n)}](s) + s^{\alpha-n}\int_a^0 e^{-s\tau}f^{(n)}(\tau)d\tau
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Une intégration par parties, nous donne :

$$\begin{aligned}
\int_a^0 e^{-s\tau}f^{(n)}(\tau)d\tau &= [e^{-s\tau}f^{(n)}(\tau)] + \int_a^0 se^{-s\tau}f^{(n-1)}d\tau\\
&= s\int_a^0 e^{-s\tau}f^{(n-1)}(\tau)d\tau + f^{(n-1)}(0)e^{-as}f^{(n-2)}(a)
\end{aligned}$$

En intégrant encore une fois par parties, on obtient ;

$$\begin{aligned}
\int_a^0 e^{-s\tau}f^{(n)}(\tau)d\tau &= [sf^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0)] - e^{-as}[sf^{(n-2)}(a) + f^{(n-0)}(a)]\\
&\quad + s^2\int_a^0 e^{-s\tau}f^{(n-2)}(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

ce que l'on généralise par parties :

$$\begin{aligned}
\int_a^0 e^{-s\tau}f^{(n)}(\tau)d\tau &= [s^{n-1}f(0) + \cdots + f^{(n-1)}(0)] - e^{-as}[s^{n-1}f(a) + \cdots + f^{(n-1)}(a)]\\
&\quad + s^n\int_a^0 e^{-s\tau}f(\tau)d\tau
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Une combinaison de (2.72) et (2.72), en simplifiant les termes en $f^{(k)}(0)$; on obtient finalement

$$\mathcal{L}[{}_a^cD_t^{\alpha}f](s) = s^a\mathcal{L}[f](s) - e^{-as}[s^{a-1}f(a) + s^{a-2}f'(a) + \cdots + s^{a-n}f^{(n-1)}(a)] \tag{2.73}$$

2.4 Propriétés des dérivées fractionnaires

2.4.1 Linéarité

La dérivation fractionnaire est une opération linéaire

$$D^{\alpha}(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^{\alpha} f(t) + \mu D^{\alpha} g(t).$$

2.4.2 Règle de Leibniz

Pour n entier on a :

$$\frac{d^n}{dt^n}(f(t) \star g(t) = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t).$$

La formule générale donné par :

$$D^p(f(t) \star g(t) = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} p \\ k \end{array} \right) f^{(k)}(t) g^{(p-k)}(t) + R_n^p(t)$$

où $n \geq p + 1$ et

$$R_n^p(t) = \frac{1}{n!\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} g(\tau) d\tau \int_\tau^t f^{(n+1)}(\zeta)(\tau - \zeta)^n d\zeta$$

avec $\lim_{n\to+\infty} R_n^p(t) = 0$ Si f et g sont continues dans $[a, t]$ ainsi que toutes leurs dérivées, la formule devient :

$$D^p(f(t) \star g(t) = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} p \\ k \end{array} \right) f^{(k)}(t) D^{(p-k)} g(t)$$

D^p est la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov et au sens de Riemann-Liouville.

Chapitre 3

Résolutions de quelques équations différentielles fractionnaires

Dans ce chapitre, on va résoudre quelques équations différentielles fractionnaires, où nous utilisons la transformée de Laplace du dérivé fractionnaire dans le sens de Caputo comme outil de résoudre d'équation différentielle fractionnaire. En plus la résolution d'équation intégrale d'Abel.

3.1 Quelques applications sur la résolution des équations différentielles fractionnaires

Les mathématiques et la physique sont deux disciplines très liées, les mathématiques constituent le language de la physique. Dans ce sens la modélisation mathématique consiste à décrire des problèmes réels en utilisant des concepts mathématique comme par exemple : fonction, variable, dérivée, inégalité, équation...etc. ici, on utilise l'équation différentielle pour décrire les circuits électrique, en particulier la circuit RL et RLC.

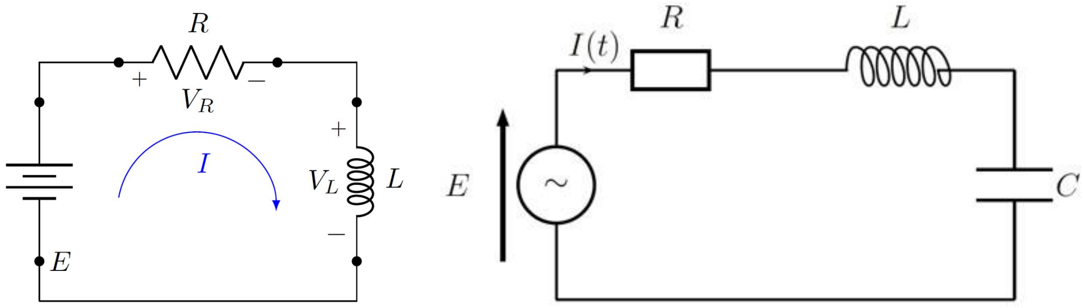

FIGURE 3.1 – RL et RLC circuit.

on note :

- $E(t)$: La tension de la source d'alimentation (mesurée en volts = V).
- $I(t)$: Le courant dans le circuit au temps t (mesuré en ampères = A).
- R : La résistance de la résistance (mesurée en ohms = V/A).
- L : L'inductance de l'inducteur (mesurée en Henry = H).
- C : La capacité du condensateur (mesurée en farads = $F = C/V$).

Problème 1 :

Formulation d'équation différentielle fractionnaire associe au circuit RL et sa solution

Les composants constituant le circuit RL (résistance, inductance) sont décrit par les deux équation suivantes :

- Le voltage qui passe l'inductance donné par : $V_L(t) = L\frac{dI(t)}{dt}$
- Le voltage qui passe la résistance donné par : $V_R(t) = RI(t)$.

D'après la Loi de Kirchhoff, autour de n'importe quelle boucle dans un circuit, la tension monte doit égal aux chutes de tension. Nous avons

$$V_L(t) + V_R(t) = E(t).$$

alors

$$L\frac{dI}{dt}(t) + RI(t) = E(t). \tag{3.1}$$

$$\frac{dI}{dt}(t) + \frac{R}{L}I(t) = \frac{E(t)}{L}. \tag{3.2}$$

Cet dernière équation différentiel admet un solution

$$I(t) = e^{(-\frac{R}{L})t}\Big[\int e^{(\frac{R}{L})t}\frac{E}{L}dt + C\Big] \tag{3.3}$$

Dans cette exemple nous développons le modèle de circuit RL sous forme d'équation fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $0 < \alpha \leq 1$ comme

$$ {}_0^C D_t^\alpha I(t) + \frac{R}{L} I(t) = \frac{E(t)}{L} \tag{3.4} $$

où $\frac{d^\alpha I}{dt^\alpha} =_\alpha^C D_t^\alpha I(t)$; dérive fractionnaire au sens de Caputo $0 < \alpha \leq 1$ tel que $\lim\limits_{\alpha\to 1}(\frac{d^\alpha I}{dt^\alpha} = \frac{dI}{dt})$ et $\lim\limits_{\alpha\to 0}\left(\frac{d^\alpha I}{dt^\alpha} = I\right)$ alors pour la solution l'équation (3.4) on va appliquer la transformation de Laplace sur les deux cotés de (3.4) avec la condition initial $I(0) = C$, on a

$$ \mathcal{L}({}_0D_t^\alpha I(t)) + \mathcal{L}\left(\frac{R}{L} I(t)\right) = \mathcal{L}\left(\frac{E(t)}{L}\right) $$

Alors

$$ \mathcal{L}({}_0D_t^\alpha I(t)) + \frac{R}{L}\mathcal{L}(I(t)) = \frac{1}{L}\mathcal{L}(E(t)) \tag{3.5} $$

on pose $\mathcal{L}(I(t))(s) = I(s)$ et $\mathcal{L}(E(t))(s) = E(s)$

On a

$$ \begin{aligned} \mathcal{L}({}_0D_t^\alpha I(t))(s) &= s^\alpha I(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{\alpha-j-1} I^{(j)}(0) \\ &= s^\alpha I(s) - s^{\alpha-1}\sum_{j=0}^{n-1} s^{-j} I^{(j)}(0) \\ &= s^\alpha I(s) - s^{\alpha-1} I^{(0)}(0), \qquad I(0) = 0 \\ &= s^\alpha I(s) - s^{\alpha-1} C \end{aligned} \tag{3.6} $$

on remplace (3.5) et (3.6) on obtient :

$$ s^\alpha I(s) - s^{\alpha-1} C + \frac{R}{L} I(s) = \frac{E(s)}{L} $$

$$ I(s)(s^\alpha + \frac{R}{L}) = s^{\alpha-1} C + \frac{E(s)}{L} $$

alors

$$ I(s) = C\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \frac{R}{L}} + \frac{E(s)}{L(s^\alpha + \frac{R}{L})} \tag{3.7} $$

La solution de (3.7) est obtenue en prenant la transformée inverse de Laplace,nous avons :

$$ I(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[C\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \frac{R}{L}}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{E(s)}{L(s^\alpha + \frac{R}{L})}\right] = C\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \frac{R}{L}}\right] + \frac{1}{L}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{E(s)}{(s^\alpha + \frac{R}{L})}\right] $$

d'après le tableau (2.1) on a :

$$ \begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \frac{R}{L}}\right) &= t^{1-1} E_{\alpha,1}\left(-\frac{R}{L} t^\alpha\right) \\ &= E_\alpha\left(-\frac{R}{L} t^\alpha\right) \end{aligned} \tag{3.8} $$

et le produit de convolution on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{E(s)}{s^\alpha + \frac{R}{L}}\Big) &= \mathcal{L}^{-1}\left(E(t) \times \frac{1}{s^\alpha + \frac{R}{L}}\right)\\ &= E(t) \star \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^\alpha + \frac{R}{L}}\right)\\ &= \int_0^t E(t-u)u^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\frac{R}{L}u^\alpha\right)du \end{aligned} \tag{3.9}$$

dans le (3.8)et (3.9) on a

$$I(t) = CE_\alpha\left(-\frac{R}{L}t^\alpha\right) - \frac{1}{L}\int_0^t E(t-u)u^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\frac{R}{L}u^\alpha\right)du \tag{3.10}$$

Maintenant, nous obtenons la solution de différent cas du modal de circuit RL (3.4) pour différent de source.

• **Cas 1 :** $E(t) = 0$, on a :

$${}_0D_t^\alpha I(t) + \frac{R}{L}I(t) = 0 \tag{3.11}$$

et la condition initiale est $I(0) = C, \quad (C > 0) \quad$ (Puisque $\lim_{\alpha\to 0}\frac{d^\alpha I}{dt^\alpha} = I$)
alors

$${}_0D_t^\alpha I(t) = -\frac{R}{L}I(t)$$

D'après le (3.10) on a

$$\begin{aligned} s^\alpha I(s) - s^{\alpha-1}C &= -\frac{R}{L}I(s)\\ I(s) &= \frac{Cs^{\alpha-1}}{s^\alpha + \frac{R}{L}} \end{aligned}$$

d'après l'inverse de la transformée de Laplace on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}(I(t)) &= C\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \frac{R}{L}}\right)\\ I(t) &= CE_\alpha\left(-\frac{R}{L}t^\alpha\right) \end{aligned} \tag{3.12}$$

• **Cas 2** $E(t) = E_0$ **:**

$${}_0D_t^\alpha I(t) + \frac{R}{L}I(t) = \frac{E_0}{L} \tag{3.13}$$

$$D_t^\alpha I(t) = \frac{E_0}{L} - \frac{R}{L}I(t) \tag{3.14}$$

on applique la transformée de Laplace des deux côtés et utilisant (les condition initial), on a

$$I(s) = \frac{E_0}{L}\frac{1}{s(s^\alpha + \frac{R}{L})} + C\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \frac{R}{L}} \tag{3.15}$$

et d'après l'inverse de transformée de Laplace on a

$$I(t) = \frac{E_0}{L}\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s(s^\alpha + \frac{R}{L})}\Big\} + C\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \frac{R}{L}}\Big\} \tag{3.16}$$

en appliquant la définition de produit convolution et le tableau (2.1) on a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s(s^\alpha + \frac{R}{L})}\Big\} &= \mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s} \times \frac{1}{s^\alpha + \frac{R}{L}}\Big\}\\ &= \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{s}\Big) \star \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{s^\alpha + \frac{R}{L}}\Big)\\ &= \frac{1}{\Gamma(1)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E_\alpha\Big(-\frac{R}{L}t^\alpha\Big)dt\end{aligned}$$

et comme $(\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)})\int\limits_0^x \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt = E_\alpha(\lambda x^\alpha) - 1,\ \ \alpha > 0$

Ainsi

$$\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s(s^\alpha + \frac{R}{L})}\Big\} = -\frac{L}{R}\Big[E_\alpha\Big(-\frac{R}{L}t^\alpha\Big) - 1\Big] \tag{3.17}$$

et de (3.8), nous avons

$$\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha + \frac{R}{L})}\Big\} = E_\alpha\Big(-\frac{R}{L}t^\alpha\Big) \tag{3.18}$$

De (3.17) et (3.18), on a :

$$I(t) = \Big(C - \frac{E_0}{R}\Big)E_\alpha\Big(-\frac{R}{L}t^\alpha\Big) + \frac{E_0}{R},\ \text{ où }\ \Big(C - \frac{E_0}{R}\Big) \geq 0 \tag{3.19}$$

- **Cas 3 $E(t) = E_0\cos\omega t$:**

d'après le (3.8) on a :

$$_0D_t^\alpha I(t) + \frac{R}{L}I(t) = \frac{E_0}{L}\cos\omega t \Longleftrightarrow {}_0D_t^\alpha I(t) = \frac{E_0}{L}\cos\omega t - \frac{R}{L}I(t) \tag{3.20}$$

on applique la transformation de Laplace et avec la condition initial on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\Big(D_t^\alpha I(t)\Big) &= \mathcal{L}\Big(\frac{E_0}{L}\cos\omega t\Big) - \mathcal{L}\Big(\frac{R}{L}I(t)\Big),\\ s^\alpha I(s) - Cs^{\alpha-1} &= \frac{E_0}{L}\Big(\frac{s}{s^2+\omega^2}\Big) - \frac{R}{L}I(s),\\ I(s)(s^\alpha + \frac{R}{L}) &= \frac{E_0}{L}\Big(\frac{s}{s^2+\omega^2}\Big) + Cs^{\alpha-1},\\ I(s) &= \frac{E_0}{L}\frac{s}{(s^2+\omega^2)(s^\alpha + \frac{R}{L})} + C\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \frac{R}{L}}.\end{aligned}$$

On applique l'inverse de transformée de Laplace, on a :

$$I(t) = \frac{E_0}{L}\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{s}{(s^2+\omega^2)(s^\alpha+\frac{R}{L})}\Big\} + C\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha+\frac{R}{L}}\Big\} \tag{3.21}$$

D'après le tableau (2.1) et le de produite convolution, on a :

$$\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{s^\alpha+\frac{R}{L}}\Big) = t^{\alpha-1}E_\alpha\left(-\frac{R}{L}t^\alpha\right) \tag{3.22}$$

et

$$\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{s}{s^2+\omega^2}\Big) = \cos t$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{s}{(s^2+\omega^2)}\times\frac{1}{s^\alpha+\frac{R}{L}}\Big) &= \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{s}{s^2+\omega^2}\Big)\star\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{s^\alpha+\frac{R}{L}}\Big)\\ &= \int_0^t \cos\omega(t-u)u^{\alpha-1}E_\alpha\left(-\frac{R}{L}u^\alpha\right)du \end{aligned}\tag{3.23}$$

de (3.8), (3.22)et (3.23) on a

$$I(t) = CE_\alpha\left(-\frac{R}{L}t^\alpha\right) + \frac{E_0}{L}\int_0^t \cos\omega(t-u)u^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\frac{R}{L}u^\alpha\right)du \tag{3.24}$$

Problème 2 :

Formulation d'équation différentielle fractionnaire associe au circuit RLC et sa solution

considérez la circuit RLC qui constitue équations associate avec trois éléments, i.e, résistance, bobine, capaciteur sont :

Le voltage qui passe la bobine donné par : $V_L(t) = L\frac{d}{dt}I(t)$

Le voltage qui passe la résistance donné par : $V_R(t) = RI(t)$.

Le voltage qui passe la capaciteur donné par : $V_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t I(\xi)d\xi$

Maintenant on utilisons la loi de voltage de Kirchoff :

$$V_L(t) + V_R(t) + V_C(t) = E(t)$$

Alors

$$L\frac{d}{dt}I(t) + RI(t) + \frac{1}{C}\int_0^t I(\xi)d\xi = E(t) \tag{3.25}$$

On dérivée les deux membres de l'équation (3.25) par rapport t on obtient :

$$I'' + \frac{R}{L}I' + \frac{1}{CL}I = \frac{E'(t)}{L} \tag{3.26}$$

avec
$I'' = \frac{d^2}{dt^2}I(t)$ et $I' = \frac{d}{dt}I(t)$ dans cet exemple on doit présenter un modal d'équation différentielle fractionnaire pour une circuit RLC comme :

$$ {}_0^C D_t^\alpha I(t) + \frac{R}{L}{}_0^C D_t^\beta I(t) + \frac{1}{LC}I(t) = \frac{E'(t)}{L} \tag{3.27}$$

avec $D^\alpha I(t) = \frac{d^\alpha I}{dt^\alpha}$ et $D^\beta I(t) = \frac{d^\beta I}{dt^\beta}$, $0 < \beta \leq 1$, $1 < \alpha \leq 2$,
$\lim_{\alpha\to 2} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}I(t) = \frac{d^2}{dt^2}$ et $\lim_{\beta\to 1} \frac{d^\beta I}{dt^\beta} = \frac{dI}{dt}$
on pennons la transformée de Laplace pour les deux membres de l'équation (3.27) avec les conditions initiales $I(0) = A$ et $I'(0) = B$, on obtient :

$$\mathcal{L}\left\{{}_0^C D_t^\alpha I(t) + \frac{R}{L}{}_0^C D_t^\beta I(t) + \frac{1}{CL}I(t)\right\}(s) = E(s) \tag{3.28}$$

De la linéarité de la transformée de Laplace on a :

$$\mathcal{L}\left\{{}_0^C D_t^\alpha I(t)\right\}(s) + \frac{R}{L}\mathcal{L}\left\{{}_0^C D_t^\beta I(t)\right\}(s) + \frac{1}{CL}\mathcal{L}\{I(t)\}(s) = \frac{E(s)}{L} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}
&\left\{s^\alpha I(s) - s^{\alpha-1}I(0) - s^{\alpha-2}I'(0)\right\} + \frac{R}{L}\left\{s^\beta I(s) - s^{\beta-1}I(0)\right\} + \frac{1}{CL}I(s) = \frac{E(s)}{L}\\
&\Rightarrow \left\{s^\alpha I(s) - s^{\alpha-1}A - s^{\alpha-2}B\right\} + \frac{R}{L}\left\{s^\beta I(s) - s^{\beta-1}A\right\} + \frac{1}{CL}I(s) = \frac{E(s)}{L}\\
&\Rightarrow I(s) = \frac{1}{L}\frac{E(s)}{s^\alpha + \frac{R}{L}s^\beta + \frac{1}{CL}} + A\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \frac{R}{L}s^\beta + \frac{1}{CL}} + B\frac{s^{\alpha-2}}{s^\alpha + \frac{R}{L}s^\beta + \frac{1}{CL}} + \frac{R}{L}A\frac{s^{\beta-1}}{s^\alpha + \frac{R}{L}s^\beta + \frac{1}{CL}}
\end{aligned}$$

On applique la transformation inverse de Laplace pour obtenir la solution :
Mais d'abord on Calcule $\mathcal{L}^{-}1\left\{\frac{s^\gamma}{s^\alpha + \frac{R}{L}s^\beta + \frac{1}{CL}}\right\}$
On pose : $a = \frac{R}{L}$, $b = \frac{1}{CL}$
Pour $\alpha > \beta$, $\alpha > \gamma$, $a \in \mathbb{R}$,$s^{\alpha-\beta} >\mid a \mid$ et $\mid s^\alpha + as^\beta \mid>\mid b \mid$ on a

$$\begin{aligned}
\frac{s^\gamma}{s^\alpha + as^\beta + b} &= \frac{s^\gamma}{s^\alpha + as^\beta}\frac{1}{1 + \frac{b}{s^\alpha + as^\beta}} = \frac{s^\gamma}{s^\alpha + as^\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{b}{s^\alpha + as^\beta}\right)^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^\gamma(-b)^n}{(s^\alpha + as^\beta)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-b)^n}{s^{\alpha(n+1)-\gamma}}\frac{1}{(1 + as^{\beta-\alpha})^{n+1}}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-b)^n}{s^{\alpha(n+1)-\gamma}}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n}{k}\left(-as^{\beta-\alpha}\right)^k\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n}{k}(-b)^n(-a)^k\frac{1}{s^{k(\alpha-\beta)+\alpha(n+1)-\gamma}}
\end{aligned}$$

On applique la transformée inverse de Laplace , on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}(g(t)) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^{\gamma}}{s^{\alpha}+as^{\beta}+b}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}(-b)^n(-a)^k\frac{t^{k(\alpha-\beta)+\alpha(n+1)-\gamma-1}}{\Gamma(k(\alpha-\beta)+\alpha(n+1)-\gamma)}\\ &= t^{\alpha-\gamma-1}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n}{k}(-b)^n(-a)^k\frac{t^{k(\alpha-\beta)+\alpha n}}{\Gamma(k(\alpha-\beta)+\alpha(n+1)-\gamma)}\end{aligned} \tag{3.30}$$

D'autre part, pour $\gamma = 0$, $\mathcal{L}^{-}1\left\{\frac{E(s)}{s^{\alpha}+as^{\beta}+b}\right\}$ est donnée sous la forme de convolution définie par :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-}1\left\{\frac{E(s)}{s^{\alpha}+bs^{\beta}+b}\right\} &= \int_0^t f(t-u)g(u)du\\ &= \int_0^t E(t-u)u^{\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n}{k}(-b)^n(-a)^k\frac{u^{k(\alpha-\beta)+\alpha n}}{\Gamma(k(\alpha-\beta)+\alpha(n+1))}du\end{aligned} \tag{3.31}$$

Alors, d'aprés (3.31) et (3.30) , la solution de (3.27) est donnée par :

$$\begin{aligned}I(t) = \frac{1}{L}\int_0^t E(t-u)u^{\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n}{k}(-\frac{1}{CL})^n(-\frac{R}{L})^k\frac{u^{k(\alpha-\beta)+\alpha n}}{\Gamma(k(\alpha-\beta)+\alpha(n+1))}du\\ + A\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n}{k}(-\frac{1}{CL})^n(-\frac{R}{L})^k\frac{t^{k(\alpha-\beta)+\alpha n}}{\Gamma(k(\alpha-\beta)+\alpha n+1)}\\ + Bt\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n}{k}(-\frac{1}{CL})^n(-\frac{R}{L})^k\frac{t^{k(\alpha-\beta)+\alpha n}}{\Gamma(k(\alpha-\beta)+\alpha n+2)}\\ + A\frac{R}{L}t^{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n}{k}(-\frac{1}{CL})^n(-\frac{R}{L})^k\frac{t^{k(\alpha-\beta)+\alpha n}}{\Gamma(k(\alpha-\beta)+\alpha(n+1)-\beta+1)}\end{aligned}$$

3.2 Quelques applications sur la résolution des équations intégrales fractionnaires

3.2.1 Intégrale fractionnaire d'Abel

L'équation intégrale d'Abel est bien étudiée, et il existe de nombreuses sources consacrées à ses applications dans différents domaines. Parmis les nombreux ouvrages existants sur divers aspects des équations d'Abel nous citons par exemple [11] et [12]. Il existe aussi d'autres types d'équations intégrales, qui apparaissent dans les applications et qui peuvent être réduites à l'équation intégrale d'Abel.

Définition 3.2.1. *L'équation intégrale*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(t-1)^{1-\alpha}} = f(t) \ \ (t>0) \tag{3.32}$$

où $0<\alpha<1$ *; est appelée équation intégrale d'Abel.*

Remarque 3.2.1. *La solution de l'équation d'Abel est donnée par la formule*

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^t \frac{f(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} \ \ (t>0) \tag{3.33}$$

que nous préférons à écrire sous la forme inversée

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^t \frac{f(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} = \varphi(t) \ \ (t>0) \tag{3.34}$$

En terme des dérivées d'ordre fractionnaire, les équations (3.32) et (3.33) prennent respectivement les formes :

$${}_0^R D_t^{-\alpha}\varphi(t) = f(t), \ \ (t>0) \tag{3.35}$$

et

$${}_0^R D_t^{-\alpha} f(t) = \varphi(t), (t>0) \tag{3.36}$$

Quelques équations réductibles à l'équation d'Abel

La résolution de nombreux problèmes appliqués conduit à des équations intégrales, qui à première vue n'ont rien en commun avec l'équation intégrale d'Abel, et à cause de cette impression des efforts supplémentaires sont entrepris pour le développement de la procédure analytique ou numérique pour résoudre ces équations.
Cependant, leurs transformations à la forme de l'équation intégrale d'Abel peuvent souvent être pratique pour obtenir rapidement la solution, ce qui est la raison pour donner quelques exemples typiques d'équations qui peuvent être réduites à l'équation d'Abel. Pour plus de détails nous pouvons consulter.

Exemple 3.2.1. *On considére l'équation*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(\sqrt{s^2+y^2})}{\sqrt{s^2+y^2}} ds = \frac{f(y)}{2y} \tag{3.37}$$

Posons

$$\frac{\varphi(r)}{r} = F(r^2)$$

Nous pouvons donc écrire l'équation (3.37) sous la forme :

$$\int_0^{+\infty} F(s^2+y^2)ds = \frac{f(y)}{2y} \tag{3.38}$$

En effectuant le changement de variables $x = y^2, \xi = s^2$*.Alors*

$$\begin{aligned} \xi = s^2 &\implies d\xi = 2sds \\ &\implies d\xi = 2\sqrt{\xi}ds \\ &\implies ds = \frac{1}{2}\xi^{-\frac{1}{2}}dx \end{aligned}$$

Par substitution dans (3.37), on arrive à

$$\int_0^{+\infty} \xi^{-\frac{1}{2}}F(x+\xi)d\xi = \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \tag{3.39}$$

Effectuant encore une autre fois le changement de variable $\tau = \frac{1}{x+\xi}$ *; on aura d'une part,*

$$\begin{aligned} \tau = \frac{1}{x+\xi} &\implies x+\xi = \frac{1}{\tau} \\ &\implies d\xi = -\frac{1}{\tau^2}d\tau. \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} \tau = \frac{1}{x+\xi} &\implies \xi = \frac{1}{\tau} - x \\ &\implies \xi^{-\frac{1}{2}} = (\frac{1}{\tau^2} - x)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \xi^{-\frac{1}{2}}d\xi &= -\frac{1}{\tau^2}(\frac{1}{\tau} - x)^{-\frac{1}{2}}d\tau \\ &= -\tau^{-\frac{3}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{\tau} - x)^{-\frac{1}{2}}d\tau \\ &= -\tau^{-\frac{3}{2}}(1-\tau x)^{-\frac{1}{2}}d\tau \\ &= -x^{-\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{3}{2}}(\frac{1}{x} - \tau)^{-\frac{1}{2}}d\tau \end{aligned}$$

Cherchons maintenant les bornes de l'intégrale pour la nouvelle variableτ *: On a*

$$\begin{aligned} \tau = 0 &\implies \tau = \frac{1}{x} \\ \xi \to +\infty &\implies \tau \to 0^{+0}. \end{aligned}$$

Si nous substituons dans (3.37), nous obtenons

$$\int_{\frac{1}{x}}^{0} -x^{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{x}-\tau)^{-\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{3}{2}}F(\frac{1}{\tau})d\tau = \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \tag{3.40}$$

aprés simplification, on trouve :

$$\int_{0}^{\frac{1}{x}} (\frac{1}{x}-\tau)^{-\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{3}{2}}F(\frac{1}{\tau})d\tau = f(\sqrt{x}) \tag{3.41}$$

si on pose maintenant $t = \frac{1}{x}$ *et* $\psi(\tau) = \tau^{-\frac{3}{2}}F(\frac{1}{\tau})$ *on arrive à une équation d'Abel de type (3.32) avec* $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\int_{0}^{\frac{1}{x}} (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\psi(\tau)d\tau = f(\frac{1}{\sqrt{t}}) \tag{3.42}$$

Par la relation (3.35), on déduit que la solution de l'équation (3.41) s'écrit sous la forme

$$\psi(t) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}{}_{0}^{R}D_{t}^{\frac{1}{2}} f(\frac{1}{\sqrt{t}}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}{}_{0}^{R}D_{t}^{\frac{1}{2}} f(\frac{1}{\sqrt{t}}) \tag{3.43}$$

C'est-à-dire que :

$$\psi(\frac{1}{\sqrt{t}}) = \frac{t}{\sqrt{\pi}}{}_{0}^{R}D_{t}^{\frac{1}{2}} f(\frac{1}{\sqrt{t}}) \tag{3.44}$$

Exemple 3.2.2. *(équation intégrale de Poisson) Soit l'équation intégrale de Poisson suivante :*

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \psi(r\cos\omega)\sin^{2\mu+1}\omega d\omega = f(r) \tag{3.45}$$

Ce type d'équations peut se réduire à une équation intégrale d'Abel par le changement de variables : $x = r\cos\omega$*. En effet,*

$$\begin{aligned} x = r\cos\omega &\implies dx = -r\sin\omega d\omega \\ &\implies d\omega = \frac{1}{-r\sin\omega}dx. \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} x = r\cos\omega &\implies x^2 = r^2(1-\sin^2\omega) \\ &\implies \sin^2\omega = \frac{r^2-x^2}{r^2} = 1 - \frac{x^2}{r^2}. \end{aligned}$$

d'un autre côté on a :$\omega = 0 \Rightarrow x = r$ *et* $\omega = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 0$ *: En substituant dans l'équation (3.45), on arrive à l'équation*

$$\int_{0}^{r} (1-\frac{x^2}{r^2})^{\mu}\psi(x)dx = rf(r) \tag{3.46}$$

si on pose maintenant $y = \frac{1}{r^2}$ *, alors l'équation (3.46) devient*

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{y}}} (1 - yx^2)^\mu \psi(x)dx = \frac{1}{\sqrt{y}} f(\frac{1}{\sqrt{y}}) \tag{3.47}$$

ou plus simplement,

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{y}}} (1 - yx^2)^\mu \psi(x)dx = g(y) \tag{3.48}$$

où

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} f\Big(\frac{1}{\sqrt{y}}\Big)$$

puisque$(1 - yx^2)^\mu = y^\mu(\frac{1}{y} + x^2)^\mu$ *, alors l'équation (3.48) peut se mettre encore sous la forme*

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{y}}} (\frac{1}{y} - x^2)^\mu \psi(x)dx = y^{-\mu} g(y) \tag{3.49}$$

En effectuant le changement de variables $\tau = x^2$ *,*$t = \frac{1}{y}$*on obtient* $dx = \frac{1}{2\sqrt{\tau}} d\tau$ *,*$y^{-\mu} g(x) = t^\mu g(\frac{1}{t})$ *alors l'équation (3.49)s'écrite sous la forme suivante :*

$$\int_0^t (t - \tau)^\mu \psi(\sqrt{\tau}) \frac{1}{\sqrt{\tau}} d\tau = 2t^\mu g(\frac{1}{t}) \tag{3.50}$$

si on pose $\varphi(\tau) = \frac{\psi(\sqrt{\tau})}{\sqrt{\tau}}$*,*$h(t) = 2t^\mu g(\frac{1}{t})$ *; on arrive à une équation intégrale d'Abel,*

$$\int_0^t (t - \tau)^\mu \varphi(\tau)d\tau = h(t) \tag{3.51}$$

avec $\alpha = \mu + 1$

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu + 1)} {}_0^R D_t^\mu h(t).$$

Conclusion

Ce mémoire a pour but l'étude de quelques théorèmes et applications des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire. On a donnée des exemples d'applications comme cette du modèle circuit électrique et l'équation d'Abel. Ainsi l'utilisation de la transformée de Laplace pour résoudre ces équations fractionnaire, dans les deux premiers chapitres nous avons rassemblé quelques outils de base utiles pour notre travail (les fonctions Gamma, Bêta, Mettag-Leffler,...) et nous avons présenté trois approches des dérivées et intégrales fractionnaires (approche de Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo.). On peut modéliser des phénomènes naturels en faisant appel à la dérivée d'ordre fractionnaire, depuis ces découvertes , beaucoup de contributions autant théorique que pratiques ont montré l'importance des systèmes d'ordre non entier et leur intérêt dans différentes disciplines telles que l'électricité, la chimie, la biologie, l'économie, l'automatisme et le traitement du signal et dans les différentes applications telles que la modélisation, l'identification et la commande. En effet, il a été montré qu'un nombre important de systèmes physiques ont un comportement qui peut être mieux décrit en utilisant des modèles mathématique d'ordre non entier.

Bibliographie

[1] A. A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, volume 204 of North-Holland Mathematics Studies. Elsevier, Amesterdam, 2006.

[2] A. M. Mathai and H. J. Haubold, Special Functions for Applied Scientists, Springer, New York, NY, USA, 2010.

[3] B.Tellab, Résolution des équation différentielles fractionnaires.Thèse de doctorat 2018

[4] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, vol. 198 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, New York, NY, USA, 1999.

[5] Joel L. Schiff The Laplace Transform, Theory and Applications.

[6] K. Diethelm. The Analysis of Fractional Differential Equations. Springer, Verlag Berlin Heideberg, 2010.

[7] K.B. Oldham,J. Spanier, (1974). The Fractional Calculus : Theory and Applications of Differentiation and Integrations to Arbitrary Order. Academic Press ? Inc.

[8] L. Debnath, D. Bhatta, , Integral Transforms and their Applications, Chapman Hall, CRC Press, Boca Raton, 2007.

[9] M. Godefroy, La fonction Gamma ; Théorie, Histoire, Bibliographie, Gauthier-Villars, Paris, (1901).

[10] P.V. Shah, A.D. Patel, I.A. Salehbhai, A.K. Shukla, Analytic Solution for the RL electric circuit model in fractional order, Abstract and Applied Analysis, 2014, (http ://dx.doi.org/10.1155/2014/343814).

[11] R. Gorenflo, Abel integral equations with special emphasis on applications, Lectures in Mathematical Sciences, Vol. 13, University of Tokyo, 1996.

[12] R. Gorenflo and S. Vessella, Abel integral Equations : Analysis and Applications, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1461, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[13] Z. Avazzadeh, B. Shafiee and G. B. Loghmani, Fractional Calculus for Solving Abel's Integral Equations Using Chebyshev Polynomials, Applied Mathematical Sciences, Vol. 5, 2011, no. 45, 2207 - 2216.

Résumé

Dans ce mémoire, on a étudié l'intégrale et les dérivées d'ordre fractionnaire. Nous Avons présenté trois types des dérivées fractionnaires au sens de Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville et Caputo et l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville. Nous avons également essayé d'appliquer ses concepts en utilisant la transformation de Laplace et les fonctions Gamma, Beta et Mittag-leffler pour résoudre quelques équations différentielles fractionnaires et l'équation d'Abel.

Mots clé: La dérivation d'ordre arbitraire, l'intégration d'ordre arbitraire, la transformée de Laplace, l'équation d'Abel.

Abstract

In this paper, we have studied derivative of fractional order, In addition We have presented three types of fractional derivative (Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville and Caputo) and fractional integral of Riemann-Liouville.
morever, we have applied Laplace transformtion and functions Gamma, Beta and Mittagleffler to resolve differential and integral equations of fractional order .

Key words: derivative of arbitrary order, integral of arbitrary order, Laplace transformtion, Abel equation.

الملخص

درسنا في هذه المذكرة مفهوم المشتقات من الرتبة الكسرية و قد تطرقنا الى ثلاثة انواع من المشتقات و التكاملات ذات الرتب الكسرية(بمفهوم ريمان ليوفيل ،غرينفلد ليتنيكوف و كابيتو)كما حاولنا تطبيق هذه المفاهيم باستعمال تحويلات لبلاس و الدوال الخاصة مثل (الدالة غاما ,بيتا ,ميتاغا)...,مع بعض الامثلة و الخصائص المهمة في حل بعض المعادلات التفاضلية الكسرية و معادلة ابيل.

الكلمات المفتاحية :المشتقات ذو رتبة كسرية، تحويلات لبلاس، معادلة ابيل.