الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Nº Réf :……………

Centre Universitaire
Abdelhafid Boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques appliquées

Etude qualitative du comportement des solutions de certains systèmes d'équations aux différences

Préparé par :
Asma Allam
Zineb Bengueraichi

Soutenue devant le jury

Smail Kaouache	MCB	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Président
Yacine Halim	MCA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
Azzeddine Bellour	MCA	E. N. S Assia Djebar, Constantine	Examinateur

Année universitaire :2019/2020

REMERCIEMENTS

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours des plusieurs personnes à qui nous voulons témoigner toute notre gratitude.

Nous voudrions tout d'abord adresser toute notre reconnaissance au directeur de ce mémoire, Monsieur **Yacine Halim**, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter notre réflexion.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury, **Dr Smail Kaouache** et **Dr Azzeddine Bellour** pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs proposition.

Nous adressons nos sincères remerciements à Monsieur **Badredine Boudjedaa** et Monsieur **Ahmed Ghazel** qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé nos réflexions et ont accepté de nous rencontrer et de répondre à nos questions durant nos recherches.

Enfin, nous tenons à remercier tous les membres de l'institut des sciences et des technologies.

DÉDICACE

Je dédie ce travail :

À mon Chèr Père Omar

À ma Mère Linda

À mon Frère et mes soeurs :

Houssam, Lina et Isra .

À tous les gens qui m'aiment.

À mes amies :

Ikram Tebboub et Yousra Hammoud.

Asma

je dédie ce modeste travail :

À mon père **Youcef**, source de force et de courage.

À l'exemple de vie ma mère **Aïcha**.

À mon chère frère :**Toufik**.

À mes soeurs : **Fouzia** et **Amira**.

À mon binôme **Asma** qui je la souhaite une vie plaine de joie.

À mes très chères amies : **Meriem, Bouthayna, Nourhane**.

À tous mes collègues de la section.

À tous qui occupe une place dans ma vie et mon coeur.

Zineb

ملخص

الهدف الرئيسي من هذه المذكرة هو دراسة السلوك التقاربي لمعادلة فروق من الدرجة الثالثة و جملة معادلات فروق غير خطية.

في الفصل الأول، نقدم بعض التعاريف و النظريات الرئيسية المتعلقة بنظرية معادلات الفروق.

في الفصل الثاني، ندرس دورية الحلول و استقرار نقاط التوازن لجملة معادلات فروق غير خطية.

الفصل الأخير مخصص لدراسة دورية الحلول و استقرار نقاط التوازن لمعادلة فروق غير خطية من الدرجة الثالثة ذات قوى كيفية.

الكلمات الأساسية:معادلات الفروق، جمل معادلات الفروق، الاستقرار، الدورية، السلوك التقاربي.

RÉSUMÉ

L'objectif principal de ce mémoire est l'étude du comportement asymptotique d'une équation aux différences du troisième ordre et d'un système de p équations aux différences non linéaires .

Dans le premier chapitre, nous donnons quelques définitions et théorèmes principaux concernant la théorie d'équations aux différences .

Dans le deuxième chapitre, nous étudions la périodicité des solutions et la stabilité des points d'équilibres d'un système de p équations aux différences non linéaires.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude de la périodicité des solutions et la stabilité des points d'équilibres d'une équation aux différences non linéaire du troisième ordre avec des puissances arbitraires.

Mots-clés : Équations aux différences, Systèmes d'équations aux différences, Stabilité, Périodicité, Comportement asymptotique.

ABSTRACT

The main objective of this work is to study the asymptotic behavior of a third order difference equation and a system of nonlinear difference equations.

In the first chapter, we give some main definitions and theorems concerning the theory of difference equations.

In the second chapter, we study the periodicity of the solutions and the stability of the equilibrium points of a system of p nonlinear difference equations.

The last chapter is devoted to the study of the periodicity of the solutions and the stability of the equilibrium points of a third order nonlinear difference equation with arbitrary powers. .

Keywords : Difference equation, Systems of difference equations, Stability, periodicity, Asymptotic behavior.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

L'objectif principal de ce mémoire est d'étudier le comportement asymptotique des solutions d'une équation et d'un système d'équations aux différences non linéaires.

Les équations aux différences sont à la base de l'analyse appliquée depuis longtemps. En fait, le concept de récurrence, qui est la base de ce genre d'équations, est apparu depuis l'époque de De Moivre (1667-1754).

La notion de suite récurrente/équation aux différences à très probablement été inventé dans [5], bien que de telles suites étaient déjà apparues dans [6]. De [5] et [6], nous voyons que De Moivre avait tous les ingrédients pour résoudre des équations aux différences linéaires homogènes à coefficients constants sous une forme fermée, bien que certaine formules explicites pour les solutions des équations d'ordre inférieur sont apparues plut tard dans [7](voir aussi [8]). Les résultats de De Moivre peuvent être considérer comme un point de départ pour une investigation sérieuse sur les équations aux différences.

Actuellement, la théorie des équations aux différences est devenue un sujet attractif au milieu des chercheurs et des scientifiques de différentes disciplines.

Les équations aux différences en général décrivent l'évolution de certains phénomènes au cours du temps, puisque la plupart des mesures de l'évolution des variables temporelles étant discrètes, et pour cela, ces équations revêtent une importance particulière dans les modèles mathématiques, décrivant des situations de vie réelle, leur champs d'application avait connu une diversité qui touche des domaines comme l'économie, la médecine, la biologie, L'épidémiologie...etc.

Plus important encore, les équations aux différences apparaissent également dans l'étude des méthodes de discrétisation des équations différentielles. Plusieurs résultats de la théorie des équations aux différences ont été obtenus comme des analogues discrets plus ou moins naturels de résultats correspondants d'équations différentielles.

En plus de l'introduction, le mémoire est structuré en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous avons donnés des définitions et résultats généraux concernant les équations et les systèmes d'équations aux différences, ainsi que la stabilité.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons à étudier la périodicité des solutions, prouver la stabilité des points d'équilibre et étudier le comportement asymptotique des solutions du système de p équations aux différences suivant

$$x_{n+1}^{(1)} = A+\frac{x_{n-1}^{(1)}}{x_n^{(p)}}, \quad x_{n+1}^{(2)} = A+\frac{x_{n-1}^{(2)}}{x_n^{(p)}}, \dots, \quad x_{n+1}^{(p-1)} = A+\frac{x_{n-1}^{(p-1)}}{x_n^{(p)}}, \quad x_{n+1}^{(p)} = A+\frac{x_{n-1}^{(p)}}{x_n^{(p-1)}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad p \geq 3,$$

où $A \in]0, \infty[$ et les valeurs initiales $x_{-1}^{(j)}, x_0^{(j)}, \quad j = \overline{1,p}$, sont des nombres réels strictement positifs.

Dans le dernier chapitre, nous allons étudier le comportement asymptotique de l'équation aux différences du troisième ordre avec des puissances arbitraires

$$y_{n+1} = \frac{ry_n}{1 + y_{n-1}^p y_{n-2}^q}, \quad n \in \mathbb{N},$$

où les paramètres $r, p, q \in]0, \infty[$ et les valeurs initiales y_{-2}, y_{-1}, y_0 sont des nombres réels strictement positifs.

CHAPITRE 1

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES

1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons donner quelques définitions et résultats généraux concernant les équations et les systèmes d'équations aux différences, la stabilité ainsi que quelques théorèmes que nous seront utilisés pour la suite de notre mémoire. Dans un premier lieu, nous allons familiariser aux équations aux différences linéaires et non linéaires. Dans la deuxième partie, nous allons donner quelques définitions et théorèmes concernant les systèmes d'équations aux différences, ainsi que la stabilité par linéarisation de ces systèmes.

Pour ces éléments préliminaires, nous renvoyons aux ouvrages [2], [9], [12], [13], [18] et [19].

1.2 Équations aux différences

Cette première partie regroupe des notions générales des équations aux différences, de la stabilité ainsi que quelques théorèmes utiles.

1.2.1 Équations aux différences linéaires

Définition 1.2.1 (Équations aux différences linéaires) *Une équation de la forme*

$$x_{n+k} + p_1(n)\, x_{n+k-1} + \cdots + p_k(n)\, x_n = g(n) \tag{1.1}$$

avec $p_0(n) = 1; p_1(n), p_2(n), p_3(n), \ldots, p_k(n), g(n)$ sont des fonctions définies sur $\mathbb{N}_{n_0}$ s'appelle **équation aux différences linéaire** *d'ordre k dès que $p_k(n) \neq 0$.*

Remarques 1.2.1
En général on associe k conditions initiales avec l'équation (1.1)

$$x_{n_0} = c_1, x_{n_0+1} = c_2, \ldots, x_{n_0+k-1} = c_k, \tag{1.2}$$

avec $c_i, i = 1, 2, \ldots, k$ sont des constantes réelles ou complexes.

Définition 1.2.2 (Équations aux différences linéaires homogènes) *L'équation aux différences* (1.1) *avec $g(n) = 0, \forall n \geq n_0$ est dite équation aux différences linéaire* **homogène** *et elle s'écrit comme suit*

$$x_{n+k} + p_1(n)\, x_{n+k-1} + \cdots + p_k(n)\, x_n = 0. \tag{1.3}$$

Définition 1.2.3 *Une suite $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ est dite solution de l'équation* (1.1) *avec les conditions initiales* (1.2) *si elle satisfait la relation* (1.1).

Théorème 1.2.1 [9] *L'équation* (1.1) *avec les conditions initiales* (1.2) *admet une et une seule solution.*

Théorème 1.2.2 [9] *L'ensemble S des solutions de l'équation aux différences* (1.3) *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *de dimension K.*

Définition 1.2.4 (Ensemble fondamental) *Un ensemble de k solutions libres de l'équation aux différences* (1.3) *est dit* **ensemble fondamental** *des solutions.*

Le théorème suivant montre que l'équation aux différences linéaire homogène (1.3) admet toujours un ensemble fondamental des solutions (c'est à dire une base des solutions).

Théorème 1.2.3 [9], [18]**(Théorème fondamental)**

Si $p_k(n) \neq 0, \forall n \geq n_0$, *l'équation aux différences linéaire homogène* (1.3) *admet un ensemble fondamental des solutions.*

Proposition 1.2.1 *Si* $x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^k$ *sont des solutions de l'équation* (1.3). *Alors*

$$x_n = a_1 x_n^1 + a_2 x_n^2 + \cdots + a_k x_n^k$$

est aussi une solution de l'équation (1.3), *avec* $a_i, i = 1, 2, \ldots, k$, *sont des constantes arbitraires.*

Corollaire 1.2.1 *Soit* $\left\{ \left(x_n^1\right)_{n \geq n_0}, (x_n^2)_{n \geq n_0}, \ldots, \left(x_n^k\right)_{n \geq n_0} \right\}$ *un ensemble fondamental des solutions de l'équation* (1.3). *Alors la solution générale de* (1.3) *est donnée par*

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} a_i x_n^i,$$

avec $a_i, i = 1, 2, \ldots, k$, *sont des constantes arbitraires.*

Théorème 1.2.4 [9], [18] *Soit* $\left\{ \left(x_n^1\right)_{n \geq n_0}, (x_n^2)_{n \geq n_0}, \ldots, \left(x_n^k\right)_{n \geq n_0} \right\}$ *un ensemble fondamental des solutions de l'équation* (1.3) *et* $\left(x_n^p\right)_{n \geq n_0}$ *une solution particulière de l'équation* (1.1), *alors toute solution générale de l'équation* (1.1) *prend la forme*

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} a_i x_n^i + x_n^p, \quad n \geq n_0.$$

Les équations aux différences linéaires à coefficients constants

Dans toute la suite, on s'intéresse aux équations aux différences à coefficients constants homogènes, c'est à dire

$$x_{n+k} + p_1 x_{n+k-1} + \cdots + p_k x_n = 0. \tag{1.4}$$

Les p_i sont des constantes réels ou complexes.

Résolution de l'équation homogène

Notre but est de trouver un ensemble fondamental des solutions et par conséquent la solution générale de l'équation (1.4).

Théorème 1.2.5 [9], [13] *L'équation* (1.4) *a des solutions de la forme*

$$x_n = \lambda^n,$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ *et vérifie*

$$p(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} p_i \lambda^{k-i} = 0. \tag{1.5}$$

Définition 1.2.5 (Polynôme caractéristique) *Le polynôme*

$$p(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} p_i \lambda^{k-i}$$

s'appelle **le polynôme caractéristique** *associé à l'équation* (1.4).

Théorème 1.2.6 [9], [13] *Si les racines* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *du polynôme caractéristique* $p(\lambda)$ *sont distinctes, alors* $\left\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_k^n\right\}$ *est un ensemble fondamental des solutions pour l'équation* (1.4).

Corollaire 1.2.2 *Toute solution de l'équation* (1.4) *s'écrit comme combinaison linéaire des* $\lambda_i^n, i = 1, 2, \ldots, k$, *ie*

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} c_i \lambda_i^n, c_i \in \mathbb{R},$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *sont des racines distinctes du polynôme caractéristique* $p(\lambda)$.

Théorème 1.2.7 [9], [13] *Supposons que* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, r < k$ *sont les racines du polynôme caractéristique associé à l'équation* (1.4) *avec les degrés de multiplicité* $m_1, m_2, \ldots, m_r$ *respectivement* $\left(\sum_{i=1}^{r} m_i = k\right)$, *alors*

$$\left\{(\lambda_1)_{n\geq n_0}^n, n(\lambda_1)_{n\geq n_0}^n, n^2(\lambda_1)_{n\geq n_0}^n, \ldots, n^{m_1-1}(\lambda_1)_{n\geq n_0}^n, (\lambda_2)_{n\geq n_0}^n, n(\lambda_2)_{n\geq n_0}^n, n^2(\lambda_2)_{n\geq n_0}^n, \ldots,\right.$$

$$\left. n^{m_2-1}(\lambda_2)_{n\geq n_0}^n, \ldots, (\lambda_r)_{n\geq n_0}^n, n(\lambda_r)_{n\geq n_0}^n, n^2(\lambda_r)_{n\geq n_0}^n, \ldots, n^{m_r-1}(\lambda_r)_{n\geq n_0}^n\right\},$$

est un ensemble fondamental pour l'équation (1.4).

Corollaire 1.2.3 [9] *La solution générale de l'équation* (1.4) *s'écrit :*

$$y_n = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{ij} n^j \lambda_i^n, \quad c_{ij} \in \mathbb{R}$$

où

- *Le paramètre* $r \leq k$ *désigne le nombre des racines distinctes de l'équation caractéristique* (1.5).
- *Le paramètre* λ_i *désigne une racine de l'équation caractéristique* (1.5).
- *Le paramètre* m_i *désigne le degré de multiplicité de la racine* λ_i.
- *Les coefficients* c_{ij} *sont des constantes qui sont déterminées à partir des conditions initiales.*

1.2.2 Équations aux différences non linéaires

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I^{k+1} \longrightarrow I$ est une fonction continue.

Définition 1.2.6 *Une équation aux différences d'ordre* $(k+1)$,

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{1.6}$$

avec les valeurs initiales $x_0, x_{-1}, \ldots, x_{-k} \in I$, *est dite non linéaire s'il n'est pas de la forme* (1.1)

Définition 1.2.7 (Point d'équilibre) *Un point* $\bar{x} \in I$ *est dit point d'équilibre pour l'équation* (1.6) *si*

$$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}, \ldots, \bar{x}),$$

autrement dit

$$x_n = \bar{x}, \quad \forall n \geq -k.$$

Définition 1.2.8 (Périodicité) *Une solution* $\{x_n\}_{n\geq -k}$ *de l'équation* (1.6) *est dite* **éventuellement périodique** *de période* $p \in \mathbb{N}_0$ *si*

$$\exists N \geq -k; \quad x_{n+p} = x_n.$$

Si $N = -k$, *on dit que la solution est* **périodique** *de période* p *.*

Définition 1.2.9 (Permanence) *Une solution* $\{x_n\}_{n\geq -k}$ *de l'équation* (1.6) *est dite permanente s'il existe* P *et* Q *deux constantes réelles telles que* $0 < P \leq Q < +\infty$, *et pour toutes valeurs initiales* $x_0, x_{-1}, \cdots, x_{-k} \in I$, *il existe* $N \geq -k$ *tel que*

$$P \leq x_n \leq Q, \quad \text{pour tout } n \geq N.$$

Définition 1.2.10 (Oscillation) *Une solution* $\{x_n\}_{n\geq -k}$ *de l'équation* (1.6) *est dite non-oscillatoire autour du points d'équilibre* $\overline{x}$ *; s'il exist* $N \geq -k$ *tel que, soit*

$$x_n \geq \overline{x}, \quad \text{pour tout } n \geq N,$$

ou

$$x_n \leq \overline{x}, \quad \text{pour tout } n \geq N.$$

Définition 1.2.11 (Intervalle invariant) *Un intervalle $J \subseteq I$ est dit intervalle invariant pour l'équation* (1.6) *si*

$$x_{-k}, x_{-k+1}, \cdots, x_0 \in J \Rightarrow x_n \in J, \quad n > 0.$$

A propos de la stabilité

Définition 1.2.12 *Soit $\bar{x}$ un point d'équilibre de l'équation* (1.6)*,*

1. *$\bar{x}$ est dit* **localement stable** *si*

   $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_{-k}, x_{-k+1}, \ldots, x_0 \in I : \quad |x_{-k} - \bar{x}| + |x_{-k+1} - \bar{x}| + \cdots + |x_0 - \bar{x}| < \delta$$

   alors

   $$|x_n - \bar{x}| < \varepsilon, \quad \forall n \geq -k.$$

2. *$\bar{x}$ est dit* **localement asymptotiquement stable** *si*
   - *$\bar{x}$ est localement stable,*
   - $\exists \gamma > 0 \quad \forall x_{-k}, x_{-k+1}, \ldots, x_0 \in I : \quad |x_{-k} - \bar{x}| + |x_{-k+1} - \bar{x}| + \cdots + |x_0 - \bar{x}| < \gamma$*, alors*

   $$\lim_{n \to +\infty} x_n = \bar{x}.$$

3. *$\bar{x}$ est dit* **globalement attractif** *si*

   $$\forall x_{-k}, x_{-k+1}, \ldots, x_0 \in I, \quad \lim_{n \to +\infty} x_n = \bar{x}.$$

4. *$\bar{x}$ est dit* **globalement asymptotiquement stable** *si*
   - *$\bar{x}$ est localement stable,*
   - *$\bar{x}$ est globalement attractif.*

5. *Le point $\bar{x}$ est dit* **instable** *s'il est n'est pas localement stable.*

Définition 1.2.13 *On appelle* **équation aux différences linéaire associée** *à l'équation*

(1.6) *l'équation*

$$y_{n+1} = p_0 y_n + p_1 y_{n-1} + \cdots + p_k y_{n-k} \tag{1.7}$$

avec

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}(\bar{x}, \bar{x}, \ldots, \bar{x}), \quad i = 0, 1, \ldots, k,$$

et

$$\begin{array}{cccc} f: & I^{k+1} & \longrightarrow & I \\ & (u_0, u_1, \ldots, u_k) & \longmapsto & f(u_0, u_1, \ldots, u_k) \end{array}$$

Théorème 1.2.8 [18]**(Stabilité par linéarisation)**

1. *Si toutes les racines du polynôme caractéristique de l'équation aux différences linéaire associée sont dans le disque unitaire ouvert* $|\lambda| < 1$*, alors le point d'équilibre* $\overline{x}$ *de l'équation* (1.6) *est asymptotiquement stable.*
2. *Si au moins une racine du polynôme caractéristique de l'équation aux différences linéaire associée a un module supérieur à un, alors le point d'équilibre* $\overline{x}$ *de l'équation* (1.6) *est instable.*

Théorème 1.2.9 [4]**(Théorème de Clark)**
Une condition suffisante pour la stabilité locale asymptotique de l'équation (1.6) *est*

$$|p_0| + |p_1| + \cdots + |p_k| < 1.$$

Théorème 1.2.10 [2] *Supposons que* α_2, α_1 *et* α_0 *sont des nombres réels. Alors, une condition nécessaire et suffisante pour toutes les racines de l'équation*

$$\lambda^3 + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0,$$

se trouvent à l'intèrieur du disque unitaire, est

$$|\alpha_2 + \alpha_0| < 1 + \alpha_1, \quad |\alpha_2 - 3\alpha_0| < 3 - \alpha_1 \quad et \quad \alpha_0^2 + \alpha_1 - \alpha_0\alpha_2 < 1.$$

Théorèmes de convergences

On donne maintenant quelques Théorèmes de convergences pour les équations aux différences d'ordre 2.

Théorème 1.2.11 [19] *Considérons l'équation aux différences définie par*

$$x_{n+1} = g(x_n, x_{n-1}), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{1.8}$$

avec

$$g : [a, b] \times [a, b] \longrightarrow [a, b], \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Supposons que g est une fonction continue telle que

1. $g(x, y)$ *est croissante par rapport à* $x \in [a, b]$ *pour chaque* $y \in [a, b]$ *et* $g(x, y)$ *est décroissante par rapport à* $y \in [a, b]$ *pour chaque* $x \in [a, b]$.

2. *Si* (m, M) *est une solution du système*

$$\begin{cases} m &= g(m, M) \\ M &= g(M, m) \end{cases}$$

donc $m = M$.

Alors l'équation (1.8) *admet un seul point d'équilibre* $\bar{x}$ *et toute solution de l'équation* (1.8) *converge vers* $\bar{x}$.

Théorème 1.2.12 [19] *Considérons l'équation aux différences définie par*

$$x_{n+1} = g(x_n, x_{n-1}), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{1.9}$$

avec

$$g : [a, b] \times [a, b] \longrightarrow [a, b], \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Supposons que g est une fonction continue telle que

1. *$g(x, y)$ est décroissante par rapport à $x \in [a, b]$ pour chaque $y \in [a, b]$ et $g(x, y)$ est croissante par rapport à $y \in [a, b]$ pour chaque $x \in [a, b]$.*

2. *Si (m, M) est une solution du système*

$$\begin{cases} m &=& g(M, m) \\ M &=& g(m, M) \end{cases}$$

donc $m = M$.

Alors l'équation (1.9) *admet un seul point d'équilibre $\bar{x}$ et toute solution de l'équation* (1.9) *converge vers $\bar{x}$.*

1.3 Système d'équations aux différences non linéaires

Soient $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(p)}$ des fonctions continûment différentiables, tel que

$$f^{(i)} : I_1^{k+1} \times I_2^{k+1} \times \cdots \times I_p^{k+1} \to I_i^{k+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, p,$$

où $I_i,\ i = 1, 2, \ldots, p$ sont des intervalles réels.

Considérons le système de p équations aux différences

$$\begin{cases} x_{n+1}^{(1)} &=& f^{(1)}\left(x_n^{(1)}, x_{n-1}^{(1)}, \ldots, x_{n-k}^{(1)}, x_n^{(2)}, x_{n-1}^{(2)}, \ldots, x_{n-k}^{(2)}, \ldots\ldots, x_n^{(p)}, x_{n-1}^{(p)}, \ldots, x_{n-k}^{(p)}\right) \\ x_{n+1}^{(2)} &=& f^{(2)}\left(x_n^{(1)}, x_{n-1}^{(1)}, \ldots, x_{n-k}^{(1)}, x_n^{(2)}, x_{n-1}^{(2)}, \ldots, x_{n-k}^{(2)}, \ldots\ldots, x_n^{(p)}, x_{n-1}^{(p)}, \ldots, x_{n-k}^{(p)}\right) \\ & \vdots & \\ x_{n+1}^{(p)} &=& f^{(p)}\left(x_n^{(1)}, x_{n-1}^{(1)}, \ldots, x_{n-k}^{(1)}, x_n^{(2)}, x_{n-1}^{(2)}, \ldots, x_{n-k}^{(2)}, \ldots\ldots, x_n^{(p)}, x_{n-1}^{(p)}, \ldots, x_{n-k}^{(p)}\right) \end{cases} \tag{1.10}$$

où $n, k \in \mathbb{N}_0$, $\left(x_{-k}^{(i)}, x_{-k+1}^{(i)}, \ldots, x_0^{(i)}\right) \in I_i^{k+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, p$.

Définissons la fonction

$$H : I_1^{(k+1)} \times I_2^{(k+1)} \times \cdots \times I_p^{(k+1)} \longrightarrow I_1^{(k+1)} \times I_2^{(k+1)} \times \cdots \times I_p^{(k+1)}$$

par

$$H(W)=\left(f_0^{(1)}(W),f_1^{(1)}(W),\ldots,f_k^{(1)}(W),f_0^{(2)}(W),f_1^{(2)}(W),\ldots,f_k^{(2)}(W),\ldots,f_0^{(p)}(W),f_1^{(p)}(W),\ldots,f_k^{(p)}(W)\right),$$

avec

$$W=\left(u_0^{(1)},u_1^{(1)},\ldots,u_k^{(1)},u_0^{(2)},u_1^{(2)},\ldots,u_k^{(2)},\ldots,u_0^{(p)},u_1^{(p)},\ldots,u_k^{(p)}\right)^T,$$

$$f_0^{(i)}(W)=f^{(i)}(W),\quad f_1^{(i)}(W)=u_0^{(i)},\ldots,f_k^{(i)}(W)=u_{k-1}^{(i)},\quad i=1,2,\ldots,p.$$

Posons

$$W_n=\left[x_n^{(1)},x_{n-1}^{(1)},\ldots,x_{n-k}^{(1)},x_n^{(2)},x_{n-1}^{(2)},\ldots,x_{n-k}^{(2)},\ldots,x_n^{(p)},x_{n-1}^{(p)},\ldots,x_{n-k}^{(p)}\right]^T.$$

Ainsi, le système (1.10) est équivalent au système

$$W_{n+1}=H(W_n),\quad n=0,1,\ldots, \tag{1.11}$$

c'est à dire

$$\left\{\begin{array}{lll}
x_{n+1}^{(1)} & = & f^{(1)}\left(x_n^{(1)},x_{n-1}^{(1)},\ldots,x_{n-k}^{(1)},x_n^{(2)},x_{n-1}^{(2)},\ldots,x_{n-k}^{(2)},\ldots\ldots,x_n^{(p)},x_{n-1}^{(p)},\ldots,x_{n-k}^{(p)}\right)\\
x_n^{(1)} & = & x_n^{(1)}\\
 & \vdots & \\
x_{n-k+1}^{(1)} & = & x_{n-k+1}^{(1)}\\
x_{n+1}^{(2)} & = & f^{(2)}\left(x_n^{(1)},x_{n-1}^{(1)},\ldots,x_{n-k}^{(1)},x_n^{(2)},x_{n-1}^{(2)},\ldots,x_{n-k}^{(2)},\ldots\ldots,x_n^{(p)},x_{n-1}^{(p)},\ldots,x_{n-k}^{(p)}\right)\\
x_n^{(2)} & = & x_n^{(2)}\\
 & \vdots & \\
x_{n-k+1}^{(2)} & = & x_{n-k+1}^{(2)}\\
 & \vdots & \\
x_{n+1}^{(p)} & = & f^{(p)}\left(x_n^{(1)},x_{n-1}^{(1)},\ldots,x_{n-k}^{(1)},x_n^{(2)},x_{n-1}^{(2)},\ldots,x_{n-k}^{(2)},\ldots\ldots,x_n^{(p)},x_{n-1}^{(p)},\ldots,x_{n-k}^{(p)}\right)\\
x_n^{(p)} & = & x_n^{(p)}\\
 & \vdots & \\
x_{n-k+1}^{(p)} & = & x_{n-k+1}^{(p)}
\end{array}\right..$$

Définition 1.3.1 (Point d'équilibre)

1. *Un point* $(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}})$ *est dit point d'équilibre pour le système* (1.10) *si*

$$\begin{aligned}
\overline{x^{(1)}} &= f^{(1)}\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(1)}}, \ldots, \overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}, \overline{x^{(p)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}\right), \\
\overline{x^{(2)}} &= f^{(2)}\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(1)}}, \ldots, \overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}, \overline{x^{(p)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}\right), \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
\overline{x^{(p)}} &= f^{(p)}\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(1)}}, \ldots, \overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}, \overline{x^{(p)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}\right).
\end{aligned}$$

2. *Un point* $\overline{W} = \left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(1)}}, \ldots, \overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}, \overline{x^{(p)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}\right) \in I_1^{k+1} \times I_2^{k+1} \times \ldots \times I_p^{k+1}$ *est un point d'équilibre du système* (1.11) *si*

$$\overline{W} = H(\overline{W}).$$

Définition 1.3.2 (Périodicité) *Une solution* $\left\{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}\right\}_{n \geq -k}$ *du système* (1.10) *est dite* **éventuellement périodique** *de période* $s \in \mathbb{N}_0$ *si*

$$\exists N \geq -k; \quad x_{n+s}^{(i)} = x_n^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Si $N = -k$, *on dit que la solution est* **périodique** *de période* s *.*

Définition 1.3.3 (Permanence) *Une solution* $\left\{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}\right\}_{n \geq -k}$ *du système* (1.10) *est dite permanente s'il existe* P *et* Q *deux constantes réelles telles que* $0 < P \leq Q < +\infty$, *et pour toutes valeurs initiales* $x_0^{(i)}, x_{-1}^{(i)}, \cdots, x_{-k}^{(i)} \in I_i$, *il existe* $N \geq -k$ *tel que*

$$P \leq x_n^{(i)} \leq Q, \quad i = 1, 2, \ldots, p, \quad \text{pour tout } n \geq N.$$

Définition 1.3.4 (Oscillation) *Une solution* $\left\{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}\right\}_{n \geq -k}$ *du système* (1.10) *est dite non-oscillatoire autour du points d'équilibre* $(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}})$, *s'il existe* $N \geq -k$ *tel que, soit*

$$x_n^{(i)} \geq \overline{x^{(i)}}, \quad i = 1, 2, \ldots, p, \quad \text{pour tout } n \geq N,$$

ou

$$x_n^{(i)} \leq \overline{x^{(i)}}, \quad i = 1, 2, \ldots, p, \quad \textit{pour tout } n \geq N.$$

À propos de la stabilité

Définition 1.3.5 *Soient* $\overline{W}$ *un point d'équilibre du système* (1.11) *et* $\|.\|$ *une norme , par exemple la norme euclidienne.*

1. *Le point d'équilibre* $\overline{W}$ *est dit stable (ou localement stable) si pour chaque* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que* $\left\|W_0 - \overline{W}\right\| < \delta$ *implique* $\left\|W_n - \overline{W}\right\| < \varepsilon$ *pour* $n \geq 0$.
2. *Le point d'équilibre* $\overline{W}$ *est dit asymptotiquement stable (ou localement asymptotiquement stable) s'il est stable et s'il existe* $\gamma > 0$ *tel que* $\left\|W_0 - \overline{W}\right\| < \gamma$ *implique*
$$\left\|W_n - \overline{W}\right\| \to 0, \quad n \to +\infty.$$
3. *Le point d'équilibre* $\overline{W}$ *est dit globalement attractif (respectivement globalement attractif de bassin d'attraction l'ensemble* $G \subseteq I_1^{k+1} \times I_2^{k+1} \times \ldots \times I_p^{k+1}$*), si pour chaque* W_0 *(respectivement pour chaque* $W_0 \in G$*)*
$$\left\|W_n - \overline{W}\right\| \to 0, \quad n \to +\infty.$$
4. *Le point d'équilibre* $\overline{W}$ *est dit globalement asymptotiquement stable (respectivement globalement asymptotiquement stable par rapport à G) s'il est localement stable, et si pour chaque* W_0 *(respectivement pour chaque* $W_0 \in G$*),*
$$\left\|W_n - \overline{W}\right\| \to 0, \quad n \to +\infty.$$
5. *Le point d'équilibre* $\overline{W}$ *est dit instable s'il n'est pas localement stable.*

Remarque 1.3.1 *Il est claire que* $\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}\right) \in I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_p$ *est un point d'équilibre du système* (1.10) *si seulement si* $\overline{W} = \left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(1)}}, \ldots, \overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}, \overline{x^{(p)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}\right) \in I_1^{k+1} \times I_2^{k+1} \times \ldots \times I_p^{k+1}$ *est un point d'équilibre du système* (1.11).

Définition 1.3.6 (système linéaire associé) *On appelle système linéaire associé au système* (1.11) *autour du point d'équilibre* $\overline{W} = \left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(1)}}, \dots, \overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(2)}}, \dots, \overline{x^{(2)}}, \dots, \overline{x^{(p)}}, \overline{x^{(p)}}, \dots, \overline{x^{(p)}}\right)$ *le système*

$$W_{n+1} = AW_n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

où A est la matrice Jacobienne de la fonction H au point d'équilibre $\overline{W}$, donnée par

$$A = \begin{pmatrix}
\frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_0^{(1)}} & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_1^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_k^{(1)}} & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_0^{(2)}} & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_1^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_k^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_0^{(p)}} & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_1^{(p)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_k^{(p)}} \\
\frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_0^{(1)}} & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_1^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_k^{(1)}} & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_0^{(2)}} & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_1^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_k^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_0^{(p)}} & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_1^{(p)}} & \cdots & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_k^{(p)}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_0^{(1)}} & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_1^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_k^{(1)}} & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_0^{(2)}} & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_1^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_k^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_0^{(p)}} & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_1^{(p)}} & \cdots & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_k^{(p)}} \\
\frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_0^{(1)}} & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_1^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_k^{(1)}} & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_0^{(2)}} & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_1^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_k^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_0^{(p)}} & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_1^{(p)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_k^{(p)}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_0^{(1)}} & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_1^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_k^{(1)}} & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_0^{(2)}} & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_1^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_k^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_0^{(p)}} & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_1^{(p)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_k^{(p)}} \\
\frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_0^{(1)}} & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_1^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_k^{(1)}} & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_0^{(2)}} & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_1^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_k^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_0^{(p)}} & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_1^{(p)}} & \cdots & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_k^{(p)}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_0^{(1)}} & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_1^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_k^{(1)}} & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_0^{(2)}} & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_1^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_k^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_0^{(p)}} & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_1^{(p)}} & \cdots & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_k^{(p)}}
\end{pmatrix},$$

tel que

$$f_j^{(i)} = f_j^{(i)}\left(\overline{W}\right), \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 0, 1, \dots k.$$

Théorème 1.3.1 [18]**(Stabilité par linéarisation)**

1. *Si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne A sont dans le disque unitaire ouvert $|\lambda| < 1$, alors le point d'équilibre $\overline{W}$ du système* (1.11) *est localement asymptotiquement stable.*
2. *Si au moins une valeur propre de la matrice Jacobienne A a un module supérieur à un, alors le point d'équilibre $\overline{W}$ du système* (1.11) *est instable.*

CHAPITRE 2

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE D'UN SYSTÈME DE *P* ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES

2.1 Introduction

Notre objectif dans ce chapitre est l'étude du comportement asymptotique du système d'équations aux différences

$$x_{n+1}^{(1)} = A+\frac{x_{n-1}^{(1)}}{x_n^{(p)}}, \quad x_{n+1}^{(2)} = A+\frac{x_{n-1}^{(2)}}{x_n^{(p)}}, \ldots, x_{n+1}^{(p-1)} = A+\frac{x_{n-1}^{(p-1)}}{x_n^{(p)}}, \quad x_{n+1}^{(p)} = A+\frac{x_{n-1}^{(p)}}{x_n^{(p-1)}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad p \geq 3$$

où $A \in]0, +\infty[$ et les valeurs initiales $x_{-1}^{(j)}, x_0^{(j)}, \quad j = \overline{1, p}$, sont des nombres positifs.

Dans [1], Amleh et al ont étudié la stabilité globale et la périodicité des solutions positives de l'équation aux différences

$$x_{n+1} = A + \frac{x_{n-1}}{x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.1}$$

où $A \in]0, \infty[$ et les valeurs initiales x_{-1}, x_0 sont des nombres positifs.

Dans [21], Papaschinopouls et Schinas ont étudié le système d'équations aux différences

$$x_{n+1} = A + \frac{x_{n-1}}{y_n}, \quad y_{n+1} = A + \frac{y_{n-1}}{x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.2}$$

où $A \in]0, \infty[$ et les valeurs initiales x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 sont des nombres positifs.

D'autre part Okumus et Soykan ont étudié dans [20] le système de trois équations aux différences

$$x_{n+1} = A + \frac{x_{n-1}}{z_n}, \quad y_{n+1} = A + \frac{y_{n-1}}{z_n}, \quad z_{n+1} = A + \frac{z_{n-1}}{y_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.3}$$

où $A \in]0, \infty[$ et les valeurs initiales $x_i, y_i, z_i \in]0, \infty[, \quad i = -1, 0$.

Dans ce chapitre, nous généralisons les résultats concernant l'équation (2.1) et les systèmes (2.2), (2.3) à un système de p équations aux différences

$$x^{(1)}_{n+1} = A + \frac{x^{(1)}_{n-1}}{x^{(p)}_n}, \quad x^{(2)}_{n+1} = A + \frac{x^{(2)}_{n-1}}{x^{(p)}_n}, \dots, \quad x^{(p-1)}_{n+1} = A + \frac{x^{(p-1)}_{n-1}}{x^{(p)}_n}, \quad x^{(p)}_{n+1} = A + \frac{x^{(p)}_{n-1}}{x^{(p-1)}_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad p \geq 3. \tag{2.4}$$

2.2 Périodicité des solutions

Dans le théorème suivant, on va étudier la périodicité des solutions positives du système (2.4).

Théorème 2.2.1

(i) *Supposons que le système* (2.4) *admet une solution non triviale* $\left\{\left(x^{(1)}_n, x^{(2)}_n, \dots, x^{(p)}_n\right)\right\}_{n \geq -1}$

périodique de période 2, *tel que* $x_{-1}^{(i)} = x_{-1}^{(p-1)}, \quad i = 1, 2, \ldots, p-2$. *Alors* $A = 1$.

(ii) *Soit* $A = 1$. *Alors la solution* $\left\{\left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}\right)\right\}_{n\geq -1}$ *du système* (2.4) *est périodique de période* 2 *si et seulement si*

$$x_0^{(p)} = \frac{x_{-1}^{(p-1)}}{x_{-1}^{(p-1)} - 1}, \quad x_0^{(i)} = \frac{x_{-1}^{(p)}}{x_{-1}^{(p)} - 1}, \quad i = 1, 2, \ldots, p-1,$$

avec $\quad x_{-1}^{(p-1)} \neq 1, \quad x_{-1}^{(p)} \neq 1 \quad$ *et* $\quad x_{-1}^{(i)} = x_{-1}^{(p-1)}, \quad i = 1, 2, \ldots, p-2.$

Preuve.

(i) Supposons que $\left\{\left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}\right)\right\}_{n\geq -1}$ est une solution non triviale du système (2.4) tel que

$$x_{n+2}^{(i)} = x_n^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, p, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

alors, du système (2.4), pour $n \in \{0, 1, \ldots\}$, on aura

$$x_{n-1}^{(i)}\left(x_n^{(p)} - 1\right) = Ax_n^{(p)} \quad donc \quad x_{n-1}^{(i)}\left(A + \frac{x_n^{(p)}}{x_{n-1}^{(p-1)}} - 1\right) = Ax_n^{(p)},$$

et

$$x_{n-1}^{(p)}\left(x_n^{(p-1)} - 1\right) = Ax_n^{(p-1)} \quad donc \quad x_{n-1}^{(p)}\left(A + \frac{x_n^{(p-1)}}{x_{n-1}^{(p)}} - 1\right) = Ax_n^{(p-1)}.$$

En effet, du système (2.4) on a

$$x_{n+1}^{(i)} = A + \frac{x_{n-1}^{(i)}}{x_n^{(p)}}, \quad i = 1, 2, \ldots, p-1,$$

ce qui implique que

$$x_{n+1}^{(i)} x_n^{(p)} - x_{n-1}^{(i)} = Ax_n^{(p)}, \quad i = 1, 2, \ldots, p-1.$$

Comme la solution $\left\{\left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}\right)\right\}$ est périodique de période 2, on a

$$x_{n-1}^{(i)} = x_{n+1}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, p-1,$$

donc

$$x_{n-1}^{(i)}\left(x_n^{(p)}-1\right)=Ax_n^{(p)},\quad i=1,2,\ldots,p-1,$$

du système (2.4) et de la périodicité de la solution $\left\{\left(x_n^{(1)},x_n^{(2)},\ldots,x_n^{(p)}\right)\right\}_{n\geq -1}$, on aura

$$x_{n-1}^{(i)}\left(A+\frac{x_n^{(p)}}{x_{n-1}^{(p-1)}}-1\right)=Ax_n^{(p)},\quad i=1,2,\ldots,p-1,$$

ce qui nous donne

$$x_{n-1}^{(i)}\left(\frac{Ax_{n-1}^{(p-1)}+x_n^{(p)}-x_{n-1}^{(p-1)}}{x_{n-1}^{(p-1)}}\right)=Ax_n^{(p)},\quad i=1,2,\ldots,p-1.$$

Comme

$$x_{-1}^{(i)}=x_{-1}^{(p-1)},\quad i=1,2,\ldots,p-2,$$

avec la périodicité de la solution, on obtient

$$x_{n-1}^{(i)}=x_{n-1}^{(p-1)},\quad i=1,2,\ldots,p-2.$$

Par suite, on trouve

$$(A-1)\left(x_{n-1}^{(p-1)}-x_n^{(p)}\right)=0. \tag{2.5}$$

De même, du système (2.4) on a

$$x_{n+1}^{(p)}=A+\frac{x_{n-1}^{(p)}}{x_n^{(p-1)}},$$

ce qui implique que

$$x_{n+1}^{(p)}x_n^{(p-1)}-x_{n-1}^{(p)}=Ax_n^{(p-1)}.$$

Comme la solution $\left\{\left(x_n^{(1)},x_n^{(2)},\ldots,x_n^{(p)}\right)\right\}_{n\geq -1}$ est périodique de période 2, alors

$$x_{n-1}^{(p)}=x_{n+1}^{(p)},$$

donc

$$x_{n-1}^{(p)}\left(x_n^{(p-1)}-1\right)=Ax_n^{(p-1)},$$

du système (2.4) et de la périodicité de la solution $\left\{\left(x_n^{(1)},x_n^{(2)},\ldots,x_n^{(p)}\right)\right\}$, on aura

$$x_{n-1}^{(p)}\left(A+\frac{x_n^{(p-1)}}{x_{n-1}^{(p)}}-1\right)=Ax_n^{(p-1)},$$

ce qui nous donne

$$(A-1)\left(x_{n-1}^{(p)}-x_n^{(p-1)}\right)=0. \tag{2.6}$$

Comme $\left\{\left(x_n^{(1)},x_n^{(2)},\ldots,x_n^{(p)}\right)\right\}_{n\geq -1}$ est une solution non triviale du système (2.4), alors il existe au moins un $n\in\{0,1,\ldots\}$ et $m\in\{0,1,\ldots\}$ tel que

$$x_{n-1}^{(p-1)}\neq x_n^{(p)},\quad x_{m-1}^{(p)}\neq x_m^{(p-1)}.$$

Alors de (2.5) et (2.6), $A=1$ ce qui termine la démonstration de (i).

(ii) Pour montrer la condition nécessaire, on suppose que la solution $\left\{\left(x_n^{(1)},x_n^{(2)},\ldots,x_n^{(p)}\right)\right\}_{n\geq -1}$ est périodique de période 2 et on va montrer que

$$x_0^{(p)}=\frac{x_{-1}^{(p-1)}}{x_{-1}^{(p-1)}-1},\quad x_0^{(i)}=\frac{x_{-1}^{(p)}}{x_{-1}^{(p)}-1},\quad i=1,2,\ldots,p-1,$$

avec $x_{-1}^{(p-1)}\neq 1,\quad x_{-1}^{(p)}\neq 1\quad$ et $\quad x_{-1}^{(i)}=x_{-1}^{(p-1)},\quad i=1,2,\ldots,p-2.$

Comme $x_n^{(1)},x_n^{(2)},\ldots,x_n^{(p)},\quad n=-1,0,\ldots$ sont des fonctions périodique de période 2, alors $x_{-1}^{(i)}=x_1^{(i)},\quad i=1,2,\ldots,p.$

Du système (2.4), pour $A=1$ on a

$$x_0^{(i)}=x_2^{(i)}=1+\frac{x_0^{(i)}}{x_1^{(p)}},\quad i=1,2,\ldots,p-1,$$

alors

$$x_0^{(i)}=\frac{x_1^{(p)}+x_0^{(i)}}{x_1^{(p)}}=\frac{x_{-1}^{(p)}+x_0^{(i)}}{x_{-1}^{(p)}},\quad i=1,2,\ldots,p-1.$$

Pour $x_{-1}^{(p)} \neq 1$ on aura

$$x_0^{(i)} = \frac{x_{-1}^{(p)}}{x_{-1}^{(p)} - 1}, \quad i = 1, 2, \dots, p-1.$$

De même, du système (2.4), pour $A = 1$, on a

$$x_0^{(p)} = x_2^{(p)} = 1 + \frac{x_0^{(p)}}{x_1^{(p-1)}},$$

alors

$$x_0^{(p)} = \frac{x_1^{(p-1)} + x_0^{(p)}}{x_1^{(p-1)}} = \frac{x_{-1}^{(p-1)} + x_0^{(p)}}{x_{-1}^{(p-1)}}.$$

Pour $x_{-1}^{(p-1)} \neq 1$ on aura

$$x_0^{(p)} = \frac{x_{-1}^{(p-1)}}{x_{-1}^{(p-1)} - 1}.$$

D'autre part, du système (2.4) on a

$$x_1^{(i)} = 1 + \frac{x_{-1}^{(i)}}{x_0^{(p)}}, \quad i = 1, 2, \dots, p-1,$$

comme la solution du système (2.4) est périodique de période 2, alors

$$x_{-1}^{(i)} = x_1^{(i)} = 1 + \frac{x_{-1}^{(i)}}{x_0^{(p)}}, \quad i = 1, 2, \dots, p-1,$$

c'est à dire

$$x_{-1}^{(i)} = \frac{x_0^{(p)}}{x_0^{(p)} - 1}, \quad i = 1, 2, \dots, p-1,$$

d'où

$$x_{-1}^{(i)} = x_{-1}^{(p-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, p-2.$$

Ce qui prouve la condition nécessaire.

Pour montrer la condition suffisante, on suppose que

$$x_0^{(p)} = \frac{x_{-1}^{(p-1)}}{x_{-1}^{(p-1)} - 1}, \quad x_0^{(i)} = \frac{x_{-1}^{(p)}}{x_{-1}^{(p)} - 1}, \quad i = 1, 2, \ldots, p-1,$$

avec $x_{-1}^{(p-1)} \neq 1, \quad x_{-1}^{(p)} \neq 1 \quad$ et $\quad x_{-1}^{(i)} = x_{-1}^{(p-1)}, \quad i = 1, 2, \ldots, p-2,$

et on va montrer que la solution $\left\{\left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}\right)\right\}_{n \geq -1}$ du système (2.4) est périodique de période 2 (ie : $x_{n+2}^{(i)} = x_n^{(i)}, \quad n = -1, 0, \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, p$).

Du système (2.4) on aura

$$x_1^{(i)} = 1 + \frac{x_{-1}^{(i)}}{x_0^{(p)}} = 1 + x_{-1}^{(i)} \left(\frac{x_{-1}^{(p-1)} - 1}{x_{-1}^{(p-1)}} \right), \quad i = 1, 2, \ldots, p-1,$$

comme $x_{-1}^{(i)} = x_{-1}^{(p-1)}, \quad i = 1, 2, \ldots, p-2$, on obtient

$$x_1^{(i)} = 1 + x_{-1}^{(i)} \left(\frac{x_{-1}^{(i)} - 1}{x_{-1}^{(i)}} \right) \quad i = 1, 2, \ldots, p-1$$

donc

$$x_1^{(i)} = x_{-1}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, p-1.$$

D'autre part

$$x_1^{(p)} = 1 + \frac{x_{-1}^{(p)}}{x_0^{(p-1)}} = 1 + x_{-1}^{(p)} \left(\frac{x_{-1}^{(p)} - 1}{x_{-1}^{(p)}} \right),$$

et par suite

$$x_1^{(p)} = x_{-1}^{(p)}.$$

De même, du système (2.4) on aura

$$x_2^{(i)} = 1 + \frac{x_0^{(i)}}{x_1^{(p)}} = 1 + \frac{x_0^{(i)}}{x_{-1}^{(p)}}, \quad i = 1, 2, \ldots, p-1,$$

ce qui nous donne

$$x_2^{(i)} = 1 + \frac{x_{-1}^{(p)}}{\left(x_{-1}^{(p)} - 1\right) x_{-1}^{(p)}} = \frac{x_{-1}^{(p)}}{x_{-1}^{(p)} - 1}, \quad i = 1, 2, \ldots, p-1,$$

c'est à dire

$$x_2^{(i)} = x_0^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, p-1.$$

D'autre part

$$x_2^{(p)} = 1 + \frac{x_0^{(p)}}{x_1^{(p-1)}} = 1 + \frac{x_0^{(p)}}{x_{-1}^{(p-1)}},$$

ce qui nous donne

$$x_2^{(p)} = 1 + \frac{x_{-1}^{(p-1)}}{\left(x_{-1}^{(p-1)} - 1\right) x_{-1}^{(p-1)}} = \frac{x_{-1}^{(p-1)}}{x_{-1}^{(p-1)} - 1},$$

c'est à dire

$$x_2^{(p)} = x_0^{(p)}.$$

Par indication, on trouve

$$x_{n+2}^{(i)} = x_n^{(i)}, \quad n = -1, 0, \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Ce qui termine la démonstration.

■

Pour illustrer nos résultats de cette section, nous considérons l'exemple numérique suivant

Exemple 2.2.1

Soient $A = 1$ *et* $p = 4$ *dans le système* (2.4)*, alors on obtient le système*

$$x_{n+1}^{(1)} = 1 + \frac{x_{n-1}^{(1)}}{x_n^{(4)}}, \quad x_{n+1}^{(2)} = 1 + \frac{x_{n-1}^{(2)}}{x_n^{(4)}}, \quad x_{n+1}^{(3)} = 1 + \frac{x_{n-1}^{(3)}}{x_n^{(4)}}, \quad x_{n+1}^{(4)} = 1 + \frac{x_{n-1}^{(4)}}{x_n^{(3)}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.7)$$

Supposons $x_{-1}^{(1)} = 4, x_0^{(1)} = \frac{5}{4}, x_{-1}^{(2)} = 4, x_0^{(2)} = \frac{5}{4}, x_{-1}^{(3)} = 4, x_0^{(3)} = \frac{5}{4}, x_{-1}^{(4)} = 5, x_0^{(4)} = \frac{4}{3}$,

les valeurs initiales vérifient les conditions du Théorème (2.2.1) *(voir le graphe* (2.1)*)*

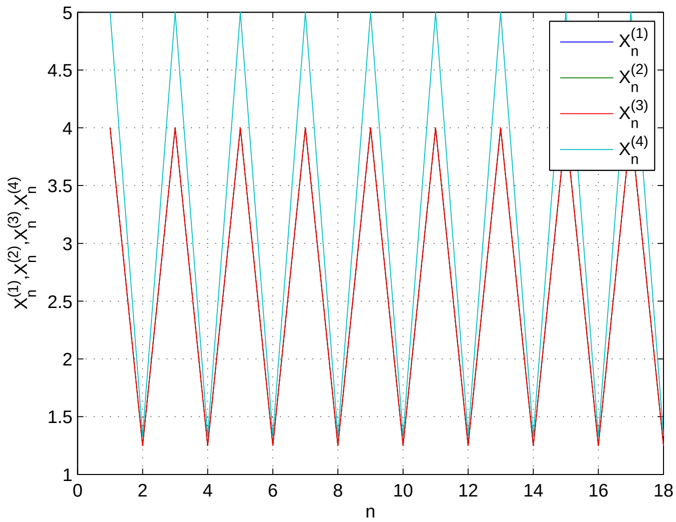

FIGURE 2.1 – Ce graphique représente la périodicité de la solution du système (2.7)

2.3 Stabilité locale des points d'équilibre

Dans cette section nous étudions la stabilité locale des points d'équilibre du système (2.4).

Le Lemme suivant donne les points d'équilibre positifs du système (2.4).

Lemme 2.3.1 *Si* $\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p-1)}}, \overline{x^{(p)}}\right)$ *est un point d'équilibre positif du système* (2.4), *alors*

$$\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p-1)}}, \overline{x^{(p)}}\right) = \begin{cases} (A+1, A+1, \ldots, A+1, A+1), & \text{si } A \neq 1, \\ (\mu, \mu, \ldots, \mu, \dfrac{\mu}{\mu - 1}), \quad \mu \in]1, +\infty[& \text{si } A = 1. \end{cases}$$

Preuve.

Soit $\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \dots, \overline{x^{(p-1)}}, \overline{x^{(p)}}\right)$ un point d'équilibre du système (2.4), donc

$$\overline{x^{(1)}} = A + \frac{\overline{x^{(1)}}}{\overline{x^{(p)}}}, \quad \overline{x^{(2)}} = A + \frac{\overline{x^{(2)}}}{\overline{x^{(p)}}}, \dots, \overline{x^{(p-1)}} = A + \frac{\overline{x^{(p-1)}}}{\overline{x^{(p)}}}, \quad \overline{x^{(p)}} = A + \frac{\overline{x^{(p)}}}{\overline{x^{(p-1)}}}. \tag{2.8}$$

Si nous substituons la dernière relation de récurrence de (2.8) dans l'équation

$$\overline{x^{(p-1)}} = A + \frac{\overline{x^{(p-1)}}}{\overline{x^{(p)}}},$$

on trouve

$$\overline{x^{(p-1)}}\left(\frac{A-1}{A}\right) = A - \frac{1}{A}.$$

•) Pour $A \neq 1$, on trouve :

$$\overline{x^{(p-1)}} = \left(\frac{A^2-1}{A}\right)\left(\frac{A}{A-1}\right).$$

Alors

$$\overline{x^{(p-1)}} = A + 1.$$

Les valeurs de $\overline{x^{(1)}}$, $\overline{x^{(2)}}$,..., $\overline{x^{(p-2)}}$ et $\overline{x^{(p)}}$ se découlent directement de la valeur de $\overline{x^{(p-1)}}$ et du système (2.8), ie :

$$\overline{x^{(1)}} = \overline{x^{(2)}} = \dots = \overline{x^{(p-1)}} = \overline{x^{(p)}} = A + 1.$$

Alors

$$\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \dots, \overline{x^{(p-1)}}, \overline{x^{(p)}}\right) = (A+1, A+1, \dots, A+1, A+1).$$

•) Pour $A = 1$

Soit $\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \dots, \overline{x^{(p-1)}}, \overline{x^{(p)}}\right)$ un point d'équilibre du système (2.4), donc

$$\overline{x^{(1)}} = 1 + \frac{\overline{x^{(1)}}}{\overline{x^{(p)}}}, \quad \overline{x^{(2)}} = 1 + \frac{\overline{x^{(2)}}}{\overline{x^{(p)}}}, \dots, \quad \overline{x^{(p-1)}} = 1 + \frac{\overline{x^{(p-1)}}}{\overline{x^{(p)}}}, \quad \overline{x^{(p)}} = 1 + \frac{\overline{x^{(p)}}}{\overline{x^{(p-1)}}}. \qquad (2.9)$$

Si nous substituons la dernière relation de récurrence de (2.9) dans les équations

$$\overline{x^{(1)}} = 1 + \frac{\overline{x^{(1)}}}{\overline{x^{(p)}}}, \quad \overline{x^{(2)}} = 1 + \frac{\overline{x^{(2)}}}{\overline{x^{(p)}}}, \dots, \quad \overline{x^{(p-2)}} = 1 + \frac{\overline{x^{(p-2)}}}{\overline{x^{(p)}}},$$

on trouve

$$\overline{x^{(1)}} = 1 + \overline{x^{(1)}}\left(\frac{\overline{x^{(p-1)}} - 1}{\overline{x^{(p-1)}}}\right), \quad \text{donc} \quad \overline{x^{(1)}}\left(1 - 1 + \frac{1}{\overline{x^{(p-1)}}}\right) = 1,$$

$$\overline{x^{(2)}} = 1 + \overline{x^{(2)}}\left(\frac{\overline{x^{(p-1)}} - 1}{\overline{x^{(p-1)}}}\right), \quad \text{donc} \quad \overline{x^{(2)}}\left(1 - 1 + \frac{1}{\overline{x^{(p-1)}}}\right) = 1,$$

$$\vdots$$

$$\overline{x^{(p-2)}} = 1 + \overline{x^{(p-2)}}\left(\frac{\overline{x^{(p-1)}} - 1}{\overline{x^{(p-1)}}}\right), \quad \text{donc} \quad \overline{x^{(p-2)}}\left(1 - 1 + \frac{1}{\overline{x^{(p-1)}}}\right) = 1.$$

Et par suite

$$\overline{x^{(1)}} = \overline{x^{(2)}} = \dots = \overline{x^{(p-2)}} = \overline{x^{(p-1)}}.$$

On pose

$$\overline{x^{(1)}} = \overline{x^{(2)}} = \dots = \overline{x^{(p-2)}} = \overline{x^{(p-1)}} = \mu, \qquad \mu > 0.$$

Pour $\mu \neq 1$

$$\overline{x^{(p)}} = \frac{\mu}{\mu - 1}.$$

Et comme $\overline{x^{(p)}} > 0$, alors :

$$\mu - 1 > 0, \qquad \textit{ie} : \mu \in]1, +\infty[.$$

Et par suite :

$$\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p-1)}}, \overline{x^{(p)}}\right) = (\mu, \mu, \ldots, \mu, \frac{\mu}{\mu - 1}), \qquad \mu \in]1, +\infty[.$$

■

Théorème 2.3.1 *Les assertions suivantes sont vraies*

(i) *Si $A > 1$, alors le point d'équilibre du système* (2.4) *est localement asymptotiquement stable.*

(ii) *Si $0 < A < 1$, alors le point d'équilibre du système* (2.4) *est instable.*

(iii) *Si $A = 1$, alors pour tout $\mu \in]1, \infty[$ il existe une solution positive $\left\{\left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p-1)}, x_n^{(p)}\right)\right\}_{n \geq -1}$ du système* (2.4) *qui tend vers le point d'équilibre positif $(\mu, \mu, \ldots, \mu, \frac{\mu}{\mu - 1})$.*

Preuve.

(i) Pour montrer (i), il faut d'abord définir le système équivalent du système (2.4) :

$$\begin{cases} x_{n+1}^{(1)} & = & A + \dfrac{x_{n-1}^{(1)}}{x_n^{(p)}} \\ x_n^{(1)} & = & x_n^{(1)} \\ x_{n+1}^{(2)} & = & A + \dfrac{x_{n-1}^{(2)}}{x_n^{(p)}} \\ x_n^{(2)} & = & x_n^{(2)} \\ & \vdots & \\ x_{n+1}^{(p-1)} & = & A + \dfrac{x_{n-1}^{(p-1)}}{x_n^{(p)}} \\ x_n^{(p-1)} & = & x_n^{(p-1)} \\ x_{n+1}^{(p)} & = & A + \dfrac{x_{n-1}^{(p)}}{x_n^{(p-1)}} \\ x_n^{(p)} & = & x_n^{(p)} \end{cases} \tag{2.10}$$

Le système linéarisé associé au système (2.10) autour du point d'équilibre $\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p-1)}}, \overline{x^{(p)}}\right)$ est :

$$X_{n+1} = B\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p-1)}}, \overline{x^{(p)}}\right) X_n.$$

où :

$$X_n = \left(x_n^{(1)}, x_{n-1}^{(1)}, x_n^{(2)}, x_{n-1}^{(2)}, \ldots, x_n^{(p-1)}, x_{n-1}^{(p-1)}, x_n^{(p)}, x_{n-1}^{(p)}\right)^T,$$

et

$B\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p-1)}}, \overline{x^{(p)}}\right)$ est la matrice Jacobienne autour du point d'équilibre $\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p-1)}}, \overline{x^{(p)}}\right)$.

Pour construire la Jacobienne B, il faut d'abord définir les fonctions suivantes :

$$\begin{array}{rcl}
f_1^{(i)} : (]0,+\infty[)^{2p} & \to &]0,+\infty[\\
\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_1^{(p-1)}, x_2^{(p-1)}, x_1^{(p)}, x_2^{(p)}\right) & \mapsto & A + \dfrac{x_2^{(i)}}{x_1^{(p)}} \\
f_2^{(i)} : (]0,+\infty[)^{2p} & \to &]0,+\infty[\\
\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_1^{(p-1)}, x_2^{(p-1)}, x_1^{(p)}, x_2^{(p)}\right) & \mapsto & x_1^{(i)}
\end{array}$$

avec $i = 1, 2, \ldots, p-1$, et

$$\begin{array}{rcl}
f_1^{(p)} : (]0,+\infty[)^{2p} & \to &]0,+\infty[\\
\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_1^{(p-1)}, x_2^{(p-1)}, x_1^{(p)}, x_2^{(p)}\right) & \mapsto & A + \dfrac{x_2^{(p)}}{x_1^{(p-1)}} \\
f_2^{(p)} : (]0,+\infty[)^{2p} & \to &]0,+\infty[\\
\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_1^{(p-1)}, x_2^{(p-1)}, x_1^{(p)}, x_2^{(p)}\right) & \mapsto & x_1^{(p)}
\end{array}$$

Alors, la matrice Jacobienne $B\left(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(p)}\right)$ devient

$$\begin{pmatrix}
\frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial x_1^{(1)}} & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial x_2^{(1)}} & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial x_1^{(2)}} & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial x_2^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial x_1^{(p-1)}} & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial x_2^{(p-1)}} & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial x_1^{(p)}} & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial x_2^{(p)}} \\
\frac{\partial f_2^{(1)}}{\partial x_1^{(1)}} & \frac{\partial f_2^{(1)}}{\partial x_2^{(1)}} & \frac{\partial f_2^{(1)}}{\partial x_1^{(2)}} & \frac{\partial f_2^{(1)}}{\partial x_2^{(2)}} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_2^{(1)}}{\partial x_1^{(p-1)}} & \frac{\partial f_2^{(1)}}{\partial x_2^{(p-1)}} & \frac{\partial f_2^{(1)}}{\partial x_1^{(p)}} & \frac{\partial f_2^{(1)}}{\partial x_2^{(p)}} \\
\frac{\partial f_1^{(2)}}{\partial x_1^{(1)}} & \frac{\partial f_1^{(2)}}{\partial x_2^{(1)}} & \frac{\partial f_1^{(2)}}{\partial x_1^{(2)}} & \frac{\partial f_1^{(2)}}{\partial x_2^{(2)}} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_1^{(2)}}{\partial x_1^{(p-1)}} & \frac{\partial f_1^{(2)}}{\partial x_2^{(p-1)}} & \frac{\partial f_1^{(2)}}{\partial x_1^{(p)}} & \frac{\partial f_1^{(2)}}{\partial x_2^{(p)}} \\
\frac{\partial f_2^{(2)}}{\partial x_1^{(1)}} & \frac{\partial f_2^{(2)}}{\partial x_2^{(1)}} & \frac{\partial f_2^{(2)}}{\partial x_1^{(2)}} & \frac{\partial f_2^{(2)}}{\partial x_2^{(2)}} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_2^{(2)}}{\partial x_1^{(p-1)}} & \frac{\partial f_2^{(2)}}{\partial x_2^{(p-1)}} & \frac{\partial f_2^{(2)}}{\partial x_1^{(p)}} & \frac{\partial f_2^{(2)}}{\partial x_2^{(p)}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial x_1^{(1)}} & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial x_2^{(1)}} & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial x_1^{(2)}} & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial x_2^{(2)}} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial x_1^{(p-1)}} & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial x_2^{(p-1)}} & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial x_1^{(p)}} & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial x_2^{(p)}} \\
\frac{\partial f_2^{(p)}}{\partial x_1^{(1)}} & \frac{\partial f_2^{(p)}}{\partial x_2^{(1)}} & \frac{\partial f_2^{(p)}}{\partial x_1^{(2)}} & \frac{\partial f_2^{(p)}}{\partial x_2^{(2)}} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_2^{(p)}}{\partial x_1^{(p-1)}} & \frac{\partial f_2^{(p)}}{\partial x_2^{(p-1)}} & \frac{\partial f_2^{(p)}}{\partial x_1^{(p)}} & \frac{\partial f_2^{(p)}}{\partial x_2^{(p)}}
\end{pmatrix}$$

tel que

$$f_i^{(j)} = f_i^{(j)}\left(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(p)}\right), \quad i = 1, 2, \quad j = \overline{1, p},$$

et

$$x^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right), \quad x^{(2)} = \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right), \ldots, \quad x^{(p)} = \left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}\right).$$

Alors

$$B\left(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(p)}\right) = \begin{pmatrix}
0 & \frac{1}{x_1^{(p)}} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -\frac{x_2^{(1)}}{(x_1^{(p)})^2} & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{x_1^{(p)}} & \ldots & 0 & 0 & -\frac{x_2^{(2)}}{(x_1^{(p)})^2} & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{x_1^{(p)}} & -\frac{x_2^{(p-1)}}{(x_1^{(p)})^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -\frac{x_2^{(p)}}{(x_1^{(p-1)})^2} & 0 & 0 & \frac{1}{x_1^{(p-1)}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}.$$

La Jacobienne autour du point d'équilibre $\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p-1)}}, \overline{x^{(p)}}\right)$ est

$$B\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p-1)}}, \overline{x^{(p)}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\overline{x^{(p)}}} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -\frac{\overline{x^{(1)}}}{\left(\overline{x^{(p)}}\right)^2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\overline{x^{(p)}}} & \ldots & 0 & 0 & -\frac{\overline{x^{(2)}}}{\left(\overline{x^{(p)}}\right)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{\overline{x^{(p)}}} & -\frac{\overline{x^{(p-1)}}}{\left(\overline{x^{(p)}}\right)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -\frac{\overline{x^{(p)}}}{\left(\overline{x^{(p-1)}}\right)^2} & 0 & 0 & \frac{1}{\overline{x^{(p-1)}}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Si $A \neq 1$, le point d'équilibre $\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p-1)}}, \overline{x^{(p)}}\right) = (A+1, A+1, \ldots, A+1, A+1)$, donc

$$B\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p-1)}}, \overline{x^{(p)}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{A+1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -\frac{1}{A+1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A+1} & \ldots & 0 & 0 & -\frac{1}{A+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{A+1} & -\frac{1}{A+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -\frac{1}{A+1} & 0 & 0 & \frac{1}{A+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, le polynôme caractéristique est

$$det(B-\lambda I)=\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{A+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{1}{A+1} & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \frac{1}{A+1} & \dots & 0 & 0 & -\frac{1}{A+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & \frac{1}{A+1} & -\frac{1}{A+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{A+1} & 0 & -\lambda & \frac{1}{A+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

- Pour $p=3$, la matrice Jacobienne autour du point d'équilibre $\left(\overline{x^{(1)}},\overline{x^{(2)}},\overline{x^{(3)}}\right)=$ $(A+1,A+1,A+1)$ est

$$B\left(\overline{x^{(1)}},\overline{x^{(2)}},\overline{x^{(3)}}\right)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{A+1} & 0 & 0 & -\frac{1}{A+1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A+1} & -\frac{1}{A+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{A+1} & 0 & 0 & \frac{1}{A+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui implique que

$$det(B-\lambda I)=\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{A+1} & 0 & 0 & -\frac{1}{A+1} & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \frac{1}{A+1} & -\frac{1}{A+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{A+1} & 0 & -\lambda & \frac{1}{A+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Alors l'équation caractéristique du $B\left(\overline{x^{(1)}},\overline{x^{(2)}},\overline{x^{(3)}}\right)$ autour du point d'équilibre $\left(\overline{x^{(1)}},\overline{x^{(2)}},\overline{x^{(3)}}\right)=(A+1,A+1,A+1)$ est

$$\lambda^6-\frac{(3A+4)}{(A+1)^2}\lambda^4+\frac{(3A+4)}{(A+1)^3}\lambda^2-\frac{1}{(A+1)^3}=0.$$

- Pour $p = 4$, la matrice Jacobienne autour du point d'équilibre $\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(3)}}, \overline{x^{(4)}}\right) = (A+1, A+1, A+1, A+1)$ est

$$B\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(3)}}, \overline{x^{(4)}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{A+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{A+1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A+1} & 0 & 0 & -\frac{1}{A+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A+1} & -\frac{1}{A+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{A+1} & 0 & 0 & \frac{1}{A+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui implique que

$$det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{A+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{A+1} & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \frac{1}{A+1} & 0 & 0 & -\frac{1}{A+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & \frac{1}{A+1} & -\frac{1}{A+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{A+1} & 0 & -\lambda & \frac{1}{A+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Alors l'équation caractéristique du $B\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(3)}}, \overline{x^{(4)}}\right)$ autour du point d'équilibre $\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(3)}}, \overline{x^{(4)}}\right) = (A+1, A+1, A+1, A+1)$ est

$$\left(\lambda^2 - \frac{1}{A+1}\right)\left(\lambda^6 - \frac{(3A+4)}{(A+1)^2}\lambda^4 + \frac{(3A+4)}{(A+1)^3}\lambda^2 - \frac{1}{(A+1)^3}\right) = 0.$$

- Pour $p = 5$, la matrice Jacobienne autour du point d'équilibre $\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(3)}}, \overline{x^{(4)}}, \overline{x^{(5)}}\right) = (A+1, A+1, A+1, A+1, A+1)$ est

$$B\left(\overline{x^{(1)}},\overline{x^{(2)}},\overline{x^{(3)}},\overline{x^{(4)}},\overline{x^{(5)}}\right)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{A+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{A+1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{A+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A+1} & 0 & 0 & -\frac{1}{A+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A+1} & -\frac{1}{A+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{A+1} & 0 & 0 & \frac{1}{A+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui implique que

$$det(B-\lambda I)=\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{A+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{A+1} & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \frac{1}{A+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{A+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & \frac{1}{A+1} & 0 & 0 & -\frac{1}{A+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & \frac{1}{A+1} & -\frac{1}{A+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{A+1} & 0 & -\lambda & \frac{1}{A+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Alors l'équation caractéristique du $B\left(\overline{x^{(1)}},\overline{x^{(2)}},\overline{x^{(3)}},\overline{x^{(4)}},\overline{x^{(5)}}\right)$ autour du point d'équilibre $\left(\overline{x^{(1)}},\overline{x^{(2)}},\overline{x^{(3)}},\overline{x^{(4)}},\overline{x^{(5)}}\right)=(A+1,A+1,A+1,A+1,A+1)$ est

$$\left(\lambda^2-\frac{1}{A+1}\right)^2\left(\lambda^6-\frac{(3A+4)}{(A+1)^2}\lambda^4+\frac{(3A+4)}{(A+1)^3}\lambda^2-\frac{1}{(A+1)^3}\right)=0.$$

Par indication, pour tout $p\geq 3$, l'équation caractéristique de la matrice jacobienne associée à un système d'un nombre quelconque p des équations aux différences autour du point d'équilibre $\left(\overline{x^{(1)}},\overline{x^{(2)}},\ldots,\overline{x^{(p-1)}},\overline{x^{(p)}}\right)=(A+1,A+1,\ldots,A+1,A+1)$ est

$$\left(\lambda^2 - \frac{1}{A+1}\right)^{p-3}\left(\lambda^6 - \frac{(3A+4)}{(A+1)^2}\lambda^4 + \frac{(3A+4)}{(A+1)^3}\lambda^2 - \frac{1}{(A+1)^3}\right) = 0, \tag{2.12}$$

ce qui équivalent à

$$\left(\lambda^2 - \frac{1}{A+1}\right)^{p-3} = 0,$$

ou

$$\lambda^6 - \frac{(3A+4)}{(A+1)^2}\lambda^4 + \frac{(3A+4)}{(A+1)^3}\lambda^2 - \frac{1}{(A+1)^3} = 0.$$

C'est à dire

$$\left(\lambda^2 - \frac{1}{A+1}\right)^{p-3} = 0,$$

ou

$$\left(\lambda - \frac{1}{\sqrt{A+1}}\right)\left(\lambda + \frac{1}{\sqrt{A+1}}\right)\left(\lambda^4 - \frac{(2A+3)\lambda^2}{(1+A)^2} + \frac{1}{(1+A)^2}\right) = 0.$$

On a

$$\lambda^4 - \frac{(2A+3)\lambda^2}{(1+A)^2} + \frac{1}{(1+A)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda^2)^2 - \frac{(2A+3)}{(1+A)^2}(\lambda)^2 + \frac{1}{(1+A)^2} = 0$$

On pose

$$x = \lambda^2$$

Alors

$$(\lambda^2)^2 - \frac{2A+3}{(1+A)^2}(\lambda)^2 + \frac{1}{(1+A)^2} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 - \frac{2A+3}{(1+A)^2}x + \frac{1}{(1+A)^2} = 0.$$

Et par suite

$$\Delta = \frac{4A+5}{(1+A)^4} > 0$$

Alors

$$x_1 = \frac{1}{2}\frac{(2A+3) + \sqrt{4A+5}}{(1+A)^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{3,4} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2A+3+\sqrt{4A+5}}}{A+1},$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\frac{(2A+3) - \sqrt{4A+5}}{(1+A)^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{5,6} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2A+3-\sqrt{4A+5}}}{A+1}.$$

Et donc

$$\lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2A+3-\sqrt{4A+5}}}{1+A}, \quad \lambda_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2A+3-\sqrt{4A+5}}}{1+A},$$
$$\lambda_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2A+3+\sqrt{4A+5}}}{1+A}, \quad \lambda_6 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2A+3+\sqrt{4A+5}}}{1+A}.$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}
\lambda_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2A+3-\sqrt{4A+5}}}{1+A}\\
&= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\sqrt{2A+3-\sqrt{4A+5}}}{1+A}\\
&= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{4A+6-2\sqrt{4A+5}}}{1+A}\\
&= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{4A+5+1-2\sqrt{4A+5}}}{1+A}\\
&= \frac{1}{2}\frac{((\sqrt{4A+5}-1)^2)^{\frac{1}{2}}}{1+A}\\
\lambda_3 &= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{4A+5}-1}{1+A}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{4A+5}-1}{1+A}, \quad \lambda_4 = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{4A+5}-1}{1+A},$$
$$\lambda_5 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{4A+5}+1}{1+A}, \quad \lambda_6 = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{4A+5}+1}{1+A}.$$

Ce qui implique que les racines de l'équation (2.12) sont

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{1+A}}, \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{1+A}}, \qquad \lambda_3 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{4A+5}-1}{1+A},$$
$$\lambda_4 = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{4A+5}-1}{1+A}, \quad \lambda_5 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{4A+5}+1}{1+A}, \quad \lambda_6 = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{4A+5}+1}{1+A},$$

tel que $\lambda_{1,2}$ sont de degré de multiplicité égale à $p-2$.

Comme $A > 1$, on obtient

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \frac{1}{\sqrt{1+A}} < 1,$$

$$|\lambda_3| = |\lambda_4| = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{4A+5}-1}{1+A} < 1,$$

et

$$|\lambda_5| = |\lambda_6| = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{4A+5}+1}{1+A} < 1.$$

Donc toutes les racines de l'équation (2.12) ont un module strictement inférieur à 1. Alors d'après le Théorème (1.3.1) le point d'équilibre $(A+1, A+1, \ldots, A+1)$ est localement asymptotiquement stable.

(ii) Pour $0 < A < 1$, il y a des racines qui ont un module supérieur à un, alors d'après le Théorème (1.3.1) le point d'équilibre $(A+1, A+1, \ldots, A+1)$ du système (2.4) est instable.

(iii) Si $A = 1$, le point d'équilibre du système (2.4) est $\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p-1)}}, \overline{x^{(p)}}\right) = (\mu, \mu, \ldots, \mu, \dfrac{\mu}{\mu-1})$, donc

$$B\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p-1)}}, \overline{x^{(p)}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\mu-1}{\mu} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -\frac{(\mu-1)^2}{\mu} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mu-1}{\mu} & \ldots & 0 & 0 & -\frac{(\mu-1)^2}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{\mu-1}{\mu} & -\frac{(\mu-1)^2}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -\frac{1}{\mu(\mu-1)} & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors, le polynôme caractéristique est

$$det(B-\lambda I)=\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{\mu-1}{\mu} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{(\mu-1)^2}{\mu} & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \frac{\mu-1}{\mu} & \dots & 0 & 0 & -\frac{(\mu-1)^2}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & \frac{\mu-1}{\mu} & -\frac{(\mu-1)^2}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{\mu(\mu-1)} & 0 & -\lambda & \frac{1}{\mu} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

- Pour $p=3$, la matrice Jacobienne autour du point d'équilibre $\left(\overline{x^{(1)}},\overline{x^{(2)}},\overline{x^{(3)}}\right)=(\mu,\mu,\frac{\mu}{\mu-1})$ est

$$B\left(\overline{x^{(1)}},\overline{x^{(2)}},\overline{x^{(3)}}\right)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{\mu-1}{\mu} & 0 & 0 & -\frac{(\mu-1)^2}{\mu} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mu-1}{\mu} & -\frac{(\mu-1)^2}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\mu(\mu-1)} & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui implique que

$$det(B-\lambda I)=\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{\mu-1}{\mu} & 0 & 0 & -\frac{(\mu-1)^2}{\mu} & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \frac{\mu-1}{\mu} & -\frac{(\mu-1)^2}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\mu(\mu-1)} & 0 & -\lambda & \frac{1}{\mu} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Alors l'équation caractéristique du $B\left(\overline{x^{(1)}},\overline{x^{(2)}},\overline{x^{(3)}}\right)$ autour du point d'équilibre $\left(\overline{x^{(1)}},\overline{x^{(2)}},\overline{x^{(3)}}\right)=(\mu,\mu,\frac{\mu}{\mu-1})$ est

$$\lambda^6-\left(\frac{2\mu^2-1}{\mu^2}\right)\lambda^4+\left(\frac{\mu^3+\mu^2-3\mu+1}{\mu^3}\right)\lambda^2-\frac{(\mu-1)^2}{\mu^3}=0.$$

- Pour $p = 4$, la matrice Jacobienne autour du point d'équilibre $\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(3)}}, \overline{x^{(4)}}\right) = (\mu, \mu, \mu, \frac{\mu}{\mu-1})$ est

$$B\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(3)}}, \overline{x^{(4)}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\mu-1}{\mu} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\mu-1)^2}{\mu} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mu-1}{\mu} & 0 & 0 & -\frac{(\mu-1)^2}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu-1}{\mu} & -\frac{(\mu-1)^2}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\mu(\mu-1)} & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui implique que

$$det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{\mu-1}{\mu} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\mu-1)^2}{\mu} & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \frac{\mu-1}{\mu} & 0 & 0 & -\frac{(\mu-1)^2}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & \frac{\mu-1}{\mu} & -\frac{(\mu-1)^2}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\mu(\mu-1)} & 0 & -\lambda & \frac{1}{\mu} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Alors l'équation caractéristique du $B\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(3)}}, \overline{x^{(4)}}\right)$ autour du point d'équilibre $\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(3)}}, \overline{x^{(4)}}\right) = (\mu, \mu, \mu, \frac{\mu}{\mu-1})$ est

$$\left(\lambda^2 - \frac{\mu-1}{\mu}\right)\left(\lambda^6 - \left(\frac{2\mu^2-1}{\mu^2}\right)\lambda^4 + \left(\frac{\mu^3+\mu^2-3\mu+1}{\mu^3}\right)\lambda^2 - \frac{(\mu-1)^2}{\mu^3}\right) = 0.$$

- Pour $p = 5$, la matrice Jacobienne autour du point d'équilibre $\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(3)}}, \overline{x^{(4)}}, \overline{x^{(5)}}\right) = (\mu, \mu, \mu, \mu, \frac{\mu}{\mu-1})$ est

$$B\left(\overline{x^{(1)}},\overline{x^{(2)}},\overline{x^{(3)}},\overline{x^{(4)}},\overline{x^{(5)}}\right)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{\mu-1}{\mu} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\mu-1)^2}{\mu} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mu-1}{\mu} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\mu-1)^2}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu-1}{\mu} & 0 & 0 & -\frac{(\mu-1)^2}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu-1}{\mu} & -\frac{(\mu-1)^2}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\mu(\mu-1)} & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui implique que

$$det(B-\lambda I)=\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{\mu-1}{\mu} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\mu-1)^2}{\mu} & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \frac{\mu-1}{\mu} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\mu-1)^2}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & \frac{\mu-1}{\mu} & 0 & 0 & -\frac{(\mu-1)^2}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & \frac{\mu-1}{\mu} & -\frac{(\mu-1)^2}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\mu(\mu-1)} & 0 & -\lambda & \frac{1}{\mu} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Alors l'équation caractéristique du $B\left(\overline{x^{(1)}},\overline{x^{(2)}},\overline{x^{(3)}},\overline{x^{(4)}},\overline{x^{(5)}}\right)$ autour du point d'équilibre $\left(\overline{x^{(1)}},\overline{x^{(2)}},\overline{x^{(3)}},\overline{x^{(4)}},\overline{x^{(5)}}\right)=(\mu,\mu,\mu,\mu,\frac{\mu}{\mu-1})$ est

$$\left(\lambda^2-\frac{\mu-1}{\mu}\right)^2\left(\lambda^6-\left(\frac{2\mu^2-1}{\mu^2}\right)\lambda^4+\left(\frac{\mu^3+\mu^2-3\mu+1}{\mu^3}\right)\lambda^2-\frac{(\mu-1)^2}{\mu^3}\right)=0.$$

Par indication, pour tout $p\geq 3$, l'équation caractéristique de la matrice jacobienne associée à un système d'un nombre quelconque p des équations aux différences autour du point d'équilibre $\left(\overline{x^{(1)}},\overline{x^{(2)}},\ldots,\overline{x^{(p-1)}},\overline{x^{(p)}}\right)=(\mu,\mu,\ldots,\mu,\frac{\mu}{\mu-1})$ est

$$\left(\lambda^2 - \frac{\mu - 1}{\mu}\right)^{p-3} \left(\lambda^6 - \left(\frac{2\mu^2 - 1}{\mu^2}\right)\lambda^4 + \left(\frac{\mu^3 + \mu^2 - 3\mu + 1}{\mu^3}\right)\lambda^2 - \frac{(\mu - 1)^2}{\mu^3}\right) = 0. \quad (2.13)$$

ce qui équivalent à

$$\left(\lambda^2 - \frac{\mu - 1}{\mu}\right)^{p-3} = 0,$$

ou

$$\lambda^6 - \left(\frac{2\mu^2 - 1}{\mu^2}\right)\lambda^4 + \left(\frac{\mu^3 + \mu^2 - 3\mu + 1}{\mu^3}\right)\lambda^2 - \frac{(\mu - 1)^2}{\mu^3} = 0.$$

C'est à dire

$$\left(\lambda^2 - \frac{\mu - 1}{\mu}\right)^{p-3} = 0,$$

ou

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1)\left(\lambda^4 - \left(\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2}\right)\lambda^2 + \frac{(\mu - 1)^2}{\mu^3}\right) = 0.$$

On a

$$\lambda^4 - \left(\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2}\right)\lambda^2 + \frac{(\mu - 1)^2}{\mu^3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda^2)^2 - \left(\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2}\right)(\lambda)^2 + \frac{(\mu - 1)^2}{\mu^3} = 0$$

On pose :

$$x = \lambda^2$$

Alors :

$$(\lambda^2)^2 - \left(\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2}\right)(\lambda)^2 + \frac{(\mu - 1)^2}{\mu^3} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 - \left(\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2}\right)x + \frac{(\mu - 1)^2}{\mu^3} = 0.$$

Et par suite

$$\Delta = \mu^2(\mu - 1)^4 > 0$$

Alors

$$x_1 = \frac{\mu-1}{\mu^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{\mu-1}}{\mu}$$
$$x_2 = \frac{\mu-1}{\mu} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{5,6} = \pm\sqrt{\frac{\mu-1}{\mu}}.$$

Et donc

$$\lambda_3 = \frac{\sqrt{\mu-1}}{\mu}, \quad \lambda_4 = -\frac{\sqrt{\mu-1}}{\mu},$$
$$\lambda_5 = \sqrt{\frac{\mu-1}{\mu}}, \quad \lambda_6 = -\sqrt{\frac{\mu-1}{\mu}}.$$

Ce qui implique que les racines de l'équation (2.13) sont

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = \frac{\sqrt{\mu-1}}{\mu},$$
$$\lambda_4 = -\frac{\sqrt{\mu-1}}{\mu}, \quad \lambda_5 = \sqrt{\frac{\mu-1}{\mu}}, \quad \lambda_6 = -\sqrt{\frac{\mu-1}{\mu}},$$

tel que $\lambda_{5,6}$ sont de degré de multiplicité égale à $p-2$.

Comme $\mu > 1$, on obtient

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1,$$
$$|\lambda_3| = |\lambda_4| = \frac{\sqrt{\mu-1}}{\mu} < 1,$$

et

$$|\lambda_5| = |\lambda_6| = \sqrt{\frac{\mu-1}{\mu}} < 1.$$

D'une part le module de quatre racines est strictement inférieur à 1, d'autre part, on a deux racines de module égale à 1. Alors on ne peut rien dire sur la stabilité du point d'équilibre $\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p-1)}}, \overline{x^{(p)}}\right) = (\mu, \mu, \ldots, \mu, \frac{\mu}{\mu-1})$.

Pour continuer notre démonstration, on va utiliser le lemme suivant

Lemme 2.3.2 *Soit* $\left\{\left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}\right)\right\}_{n\geq -1}$ *une solution du système* (2.4). *Alors, s'il existe* $s \in \{-1, 0, \ldots\}$, *tel que pour* $n \geq s, x_n^{(1)} \geq \overline{x^{(1)}}, x_n^{(2)} \geq \overline{x^{(2)}}, \ldots, x_n^{(p)} \geq \overline{x^{(p)}}$ *(resp :* $x_n^{(1)} < \overline{x^{(1)}}, x_n^{(2)} < \overline{x^{(2)}}, \ldots, x_n^{(p)} < \overline{x^{(p)}}$, *la solution* $\left\{\left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}\right)\right\}$ *tend vers le point d'équilibre positif* $\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}\right)$ *du système* (2.4) *lorsque* $n \to +\infty$.

Preuve. Soit $\left\{\left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}\right)\right\}_{n\geq -1}$ une solution positive du système (2.4), tel que

$$x_n^{(1)} \geq \overline{x^{(1)}}, \quad x_n^{(2)} \geq \overline{x^{(2)}}, \ldots, x_n^{(p)} \geq \overline{x^{(p)}}, \quad n \geq s, \tag{2.14}$$

Où $s \in \{-1, 0, \ldots\}$.

On va montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)} \right) = \left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}} \right).$$

D'abord, montrons que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n^{(1)} = \overline{x^{(1)}}.$$

Alors, du système (2.4) et de la relation (2.14), on obtient

$$x_{n+1}^{(1)} = A + \frac{x_{n-1}^{(1)}}{x_n^{(p)}} \leq A + \frac{x_{n-1}^{(1)}}{\overline{x^{(p)}}}, \qquad n \geq 1. \tag{2.15}$$

On pose

$$u_{n+1} = A + \frac{u_{n-1}}{\overline{x^{(p)}}}, \qquad n \geq 1, \tag{2.16}$$

tel que

$$u_s = x_s^{(1)}, \qquad u_{s+1} = x_{s+1}^{(1)}, \qquad s \in \{-1, 0, \ldots\}, \qquad n \geq s. \tag{2.17}$$

Alors la solution u_n de l'équation aux différences (2.16) est comme suit

$$u_n = u_h + u_p,$$

tel que $\begin{cases} u_h : \text{est la solution de l'équation homogène.} \\ u_p : \text{est une solution particulière de l'équation (2.16).} \end{cases}$

De l'équation (2.16), on a l'équation homogène

$$u_{n+1} - \frac{u_{n-1}}{\overline{x^{(p)}}} = 0.$$

Alors, le polynôme caractéristique de l'équation homogène est

$$\lambda^2 - \frac{1}{\overline{x^{(p)}}} = 0.$$

Et donc

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{\overline{x^{(p)}}}}.$$

Alors, la solution de l'équation homogène est

$$u_h = c_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\overline{x^{(p)}}}} \right)^n + c_2 \left(-\frac{1}{\sqrt{\overline{x^{(p)}}}} \right)^n .$$

D'autre part La solution particulière est sous la forme

$$u_p = Ac_3.$$

Comme u_p est une solution de l'équation (2.16), en substituant sa valeur dans (2.16), on trouve

$$Ac_3 - \frac{Ac_3}{\overline{x^{(p)}}} = A \qquad \Rightarrow \qquad c_3 - \frac{c_3}{\overline{x^{(p)}}} = 1.$$

Ce qui implique que

$$c_3 = \frac{\overline{x^{(p)}}}{\overline{x^{(p)}} - 1},$$

et par suite

$$u_p = \frac{A\overline{x^{(p)}}}{\overline{x^{(p)}} - 1}.$$

D'où

$$u_n = c_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\overline{x^{(p)}}}} \right)^n + c_2 \left(-\frac{1}{\sqrt{\overline{x^{(p)}}}} \right)^n + \frac{A\overline{x^{(p)}}}{\overline{x^{(p)}} - 1}.$$

De l'équation (2.16), on a :

$$\bar{u} = A + \frac{\bar{u}}{\overline{x^{(p)}}} \qquad \Rightarrow \qquad \bar{u} \left(\frac{\overline{x^{(p)}} - 1}{\overline{x^{(p)}}} \right) = A,$$

alors

$$\bar{u} = \frac{A\overline{x^{(p)}}}{\overline{x^{(p)}} - 1},$$

et par l'utilisation de la relation (2.17), on trouve

$$\overline{x^{(1)}} = \frac{A\overline{x^{(p)}}}{\overline{x^{(p)}} - 1}.$$

D'où

$$u_n = c_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\overline{x^{(p)}}}} \right)^n + c_2 \left(-\frac{1}{\sqrt{\overline{x^{(p)}}}} \right)^n + \overline{x^{(1)}}.$$

Par l'utilisation des deux relations (2.15) et (2.16), on obtient

$$x_{n+1}^{(1)} - u_{n+1} = \frac{x_{n-1}^{(1)}}{x_n^{(p)}} - \frac{u_{n-1}}{\overline{x^{(p)}}}.$$

Ce qui implique que :

$$x_{n+1}^{(1)} - u_{n+1} \leq \frac{x_{n-1}^{(1)} - u_{n-1}}{\overline{x^{(p)}}}, \qquad n > s. \tag{2.18}$$

Par conséquent, d'après les relations (2.17) et (2.18), on a :

$$x_{n+1}^{(1)} - u_{n+1} \leq 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_{n+1}^{(1)} \leq u_{n+1}, \quad n > s,$$

c'est-à-dire

$$x_n^{(1)} \leq u_n, \qquad n \geq s. \tag{2.19}$$

Par passage à la limite de la relation (2.19) on trouve que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n^{(1)} \leq \lim_{n\to+\infty} u_n = \overline{x^{(1)}}, (car \quad \overline{x^{(p)}} > 1). \tag{2.20}$$

Par hypothèse et d'après (2.14), on a

$$\lim_{n\to+\infty} x_n^{(1)} \geq \overline{x^{(1)}}, \tag{2.21}$$

de (2.20) et (2.21), on aura

$$\lim_{n\to+\infty} x_n^{(1)} = \overline{x^{(1)}}. \tag{2.22}$$

De la même manière, on peut montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n^{(2)} = \overline{x^{(2)}}, \ldots, \lim_{n\to+\infty} x_n^{(p)} = \overline{x^{(p)}}. \tag{2.23}$$

De (2.22) et (2.23), la solution $\left\{\left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}\right)\right\}$ tend vers $\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}\right)$ lorsque n $\to +\infty$.

On peut voir aussi que si $x_n^{(1)} < \overline{x^{(1)}}$, $x_n^{(2)} < \overline{x^{(2)}}$,..., $x_n^{(p)} < \overline{x^{(p)}}$, pour $n \geq s$ alors $\left\{\left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}\right)\right\}$ tend vers $\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}\right)$ lorsque n $\to +\infty$.

Ce qui termine la démonstration du lemme. ■

■

Pour illustrer les résultats de ce Théorème, nous considérons l'exemple numérique suivant

Exemple 2.3.1 1. *Soient $A = 2$ et $p = 3$ dans le système* (2.4), *alors on obtient le système*

$$x_{n+1}^{(1)} = 2 + \frac{x_{n-1}^{(1)}}{x_n^{(3)}}, \quad x_{n+1}^{(2)} = 2 + \frac{x_{n-1}^{(2)}}{x_n^{(3)}}, \quad x_{n+1}^{(3)} = 2 + \frac{x_{n-1}^{(3)}}{x_n^{(2)}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.24}$$

Supposons $x_{-1}^{(1)} = \frac{3}{2}, x_0^{(1)} = \frac{5}{2}, x_{-1}^{(2)} = \frac{3}{2}, x_0^{(2)} = \frac{13}{4}, x_{-1}^{(3)} = \frac{4}{3}, x_0^{(3)} = \frac{7}{3}$.

Alors, on obtient la représentation graphique suivante

2. *Soient* $A = \frac{1}{2}$ *et* $p = 4$ *dans le système* (2.4), *alors on obtient le système*

$$x_{n+1}^{(1)} = \frac{1}{2} + \frac{x_{n-1}^{(1)}}{x_n^{(4)}}, \quad x_{n+1}^{(2)} = \frac{1}{2} + \frac{x_{n-1}^{(2)}}{x_n^{(4)}}, \quad x_{n+1}^{(3)} = \frac{1}{2} + \frac{x_{n-1}^{(3)}}{x_n^{(4)}}, \quad x_{n+1}^{(3)} = \frac{1}{2} + \frac{x_{n-1}^{(4)}}{x_n^{(3)}} \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.25}$$

Supposons $x_{-1}^{(1)} = 2, x_0^{(1)} = 32, x_{-1}^{(2)} = 9, x_0^{(2)} = 10, x_{-1}^{(3)} = 4, x_0^{(3)} = 17, x_{-1}^{(4)} = 7, x_0^{(4)} = 5.$

Alors, on obtient la représentation graphique suivante

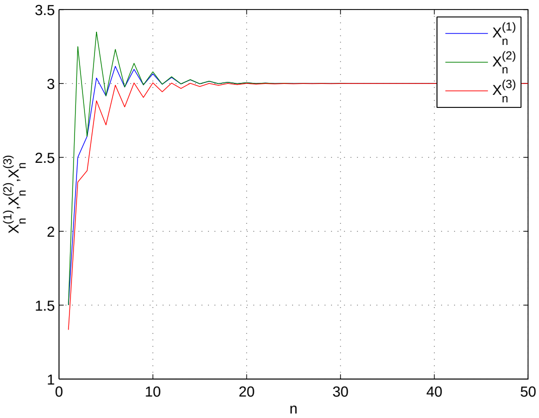

FIGURE 2.2 – Ce graphique représente le comportement asymptotique de la solution du système (2.24)

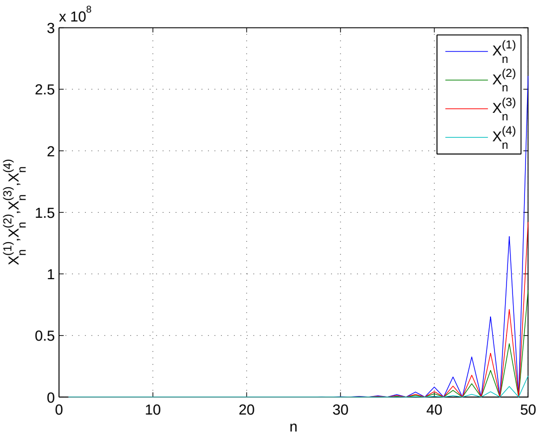

FIGURE 2.3 – Ce graphique représente le comportement de la solution du système (2.25)

2.4 Le comportement asymptotique des solutions positives

Dans cette section, nous donnons et prouvons quelques résultats concernant le comportement asymptotique des solutions du système (2.4), lorsque $0 < A < 1, A = 1$ et $A > 1$.

2.4.1 Cas $0 < A < 1$:

Théorème 2.4.1 *Supposons que* $0 < A < 1$ *et* $\left\{\left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}\right)\right\}_{n\geq -1}$ *est une solution positive du système* (2.4). *Alors,*

(i) *Si*

$$x_{-1}^{(i)} < 1, \quad x_0^{(i)} > \frac{1}{1-A}, \quad i = 1, 2, \ldots, p. \tag{2.26}$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1}^{(i)} = A, \quad \lim_{n\to\infty} x_{2n}^{(i)} = \infty, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

(ii) *Si*

$$x_0^{(i)} < 1, \quad x_{-1}^{(i)} > \frac{1}{1-A}, \quad i = 1, 2, \ldots, p. \tag{2.27}$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1}^{(i)} = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} x_{2n}^{(i)} = A, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Preuve.

(i) D'après le système (2.4), pour $i = 1, 2, \ldots, p-1$, on a

$$x_1^{(i)} = A + \frac{x_{-1}^{(i)}}{x_0^{(p)}}, \quad x_1^{(p)} = A + \frac{x_{-1}^{(p)}}{x_0^{(p-1)}}.$$

Comme $x_{-1}^{(i)} < 1, i = 1, 2, \dots, p$ (d'après (2.26)), alors

$$x_1^{(i)} < A + \frac{1}{x_0^{(p)}}, \quad x_1^{(p)} < A + \frac{1}{x_0^{(p-1)}}, \quad i = 1, 2, \dots, p-1.$$

De plus, d'après (2.26), on a

$$x_0^{(p)} > \frac{1}{1-A} \Rightarrow \frac{1}{x_0^{(p)}} < 1 - A,$$

et

$$x_0^{(p-1)} > \frac{1}{1-A} \Rightarrow \frac{1}{x_0^{(p-1)}} < 1 - A.$$

Ce qui implique que

$$x_1^{(i)} < A + (1 - A) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

D'autre part, d'après (2.4), pour $i = 1, 2, \dots, p-1$, on a

$$x_2^{(i)} = A + \frac{x_0^{(i)}}{x_1^{(p)}}, \quad x_2^{(p)} = A + \frac{x_0^{(p)}}{x_1^{(p-1)}},$$

comme

$$x_1^{(p)} < 1 \text{ et } x_1^{(p-1)} < 1,$$

alors

$$\frac{1}{x_1^{(p)}} > 1 \text{ et } \frac{1}{x_1^{(p-1)}} > 1,$$

ce qui nous donne

$$x_2^{(i)} > A + x_0^{(i)} > x_0^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

alors

$$x_2^{(i)} > \frac{1}{1-A} \qquad i = 1, 2, \dots, p \left(\text{car} \quad x_0^{(i)} > \frac{1}{1-A}\right).$$

Par indication, pour $n = 0, 1, \ldots$, on obtient

$$x_{2n-1}^{(i)} < 1, \quad x_{2n}^{(i)} > \frac{1}{1-A}, \quad i = 1, 2, \ldots, p. \tag{2.28}$$

Du système (2.4), pour $i = 1, 2, \ldots, p-1$, on a

$$x_{2n}^{(i)} = A + \frac{x_{2n-2}^{(i)}}{x_{2n-1}^{(p)}}, \quad x_{2n}^{(p)} = A + \frac{x_{2n-2}^{(p)}}{x_{2n-1}^{(p-1)}},$$

et d'après (2.28), on a :

$$x_{2n-1}^{(p)} < 1 \quad \text{et} \quad x_{2n-1}^{(p-1)} < 1,$$

alors

$$\frac{1}{x_{2n-1}^{(p)}} > 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{x_{2n-1}^{(p-1)}} > 1.$$

donc

$$x_{2n}^{(i)} > A + x_{2n-2}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Par la répétition des mêmes étapes, pour $i = 1, 2, \ldots, p-1$, on obtient

$$x_{2n}^{(i)} > A + x_{2n-2}^{(i)} = 2A + \frac{x_{2n-4}^{(i)}}{x_{2n-3}^{(p)}} > 2A + x_{2n-4}^{(i)} > 3A + x_{2n-6}^{(i)} > \cdots,$$

$$x_{2n}^{(p)} > A + x_{2n-2}^{(p)} = 2A + \frac{x_{2n-4}^{(p)}}{x_{2n-3}^{(p-1)}} > 2A + x_{2n-4}^{(p)} > 3A + x_{2n-6}^{(p)} > \cdots.$$

Remarquons que, pour $i = 1, 2, \ldots, p$

$$x_{2n}^{(i)} > A + x_{2(n-1)}^{(i)} > 2A + x_{2(n-2)}^{(i)} > 3A + x_{2(n-3)}^{(i)} > \cdots > nA + x_{2(n-n)}^{(i)},$$

d'où

$$x_{2n}^{(i)} > nA + x_0^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Par passage à la limite, lorsque $n \to \infty$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n}^{(i)} = \infty, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

D'autre part, et du système (2.4), pour $i = 1, 2, \ldots, p-1$, on a

$$x_{2n+1}^{(i)} = A + \frac{x_{2n-1}^{(i)}}{x_{2n}^{(p)}}, \quad x_{2n+1}^{(p)} = A + \frac{x_{2n-1}^{(p)}}{x_{2n}^{(p-1)}}.$$

De (2.28) et par passage à la limite des deux membres des deux égalités précédentes lorsque $n \to \infty$, et par l'utilisation du fait que $x_{2n-1}^{(i)} < 1, \quad i = 1, 2, \ldots, p$, on aura

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1}^{(i)} < A + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_{2n}^{(p)}}, \quad i = 1, 2, \ldots, p-1,$$

et

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1}^{(p)} < A + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_{2n}^{(p-1)}}.$$

Et par suite, pour $i = 1, 2, \ldots, p$, on trouve

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1}^{(i)} = A, \quad \left(\text{car} \lim_{n\to\infty} x_{2n}^{(p)} = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} x_{2n}^{(p-1)} = \infty\right).$$

(ii) D'après le système (2.4), pour $i = 1, 2, \ldots, p-1$, on a

$$x_1^{(i)} = A + \frac{x_{-1}^{(i)}}{x_0^{(p)}}, \quad x_1^{(p)} = A + \frac{x_{-1}^{(p)}}{x_0^{(p-1)}},$$

comme $x_0^{(p)} < 1$ et $x_0^{(p-1)} < 1$ (d'après (2.27)), alors

$$x_1^{(i)} > A + x_{-1}^{(i)} > x_{-1}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

De plus, d'après (2.27), on a

$$x_{-1}^{(i)} > \frac{1}{1-A}, \quad i = 1, 2, \ldots, p,$$

ce qui implique que

$$x_1^{(i)} > \frac{1}{1-A}, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

D'autre part, de (2.4), pour $i = 1, 2, \ldots, p-1$, on a

$$x_2^{(i)} = A + \frac{x_0^{(i)}}{x_1^{(p)}}, \quad x_2^{(p)} = A + \frac{x_0^{(p)}}{x_1^{(p-1)}},$$

comme $x_0^{(i)} < 1, \quad i = 1, 2, \ldots, p$, alors

$$x_2^{(i)} < A + \frac{1}{x_1^{(p)}}, \quad x_2^{(p)} < A + \frac{1}{x_1^{(p-1)}}, \quad i = 1, 2, \ldots, p-1,$$

ce qui nous donne

$$x_2^{(i)} < A + (1-A) = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, p \quad \left(\text{car} \quad x_1^{(p)} > \frac{1}{1-A}, \quad x_1^{(p-1)} > \frac{1}{1-A}\right).$$

Par indication, et pour $n = 0, 1, \ldots$, on obtient

$$x_{2n-1}^{(i)} > \frac{1}{1-A}, \quad x_{2n}^{(i)} < 1, \quad i = 1, 2, \ldots, p. \tag{2.29}$$

Du système (2.4), pour $i = 1, 2, \ldots, p-1$, on a

$$x_{2n+1}^{(i)} = A + \frac{x_{2n-1}^{(i)}}{x_{2n}^{(p)}}, \quad x_{2n+1}^{(p)} = A + \frac{x_{2n-1}^{(p)}}{x_{2n}^{(p-1)}}$$

et d'après (2.29), on aura

$$\frac{1}{x_{2n}^{(p)}} > 1, \quad \text{et} \quad \frac{1}{x_{2n}^{(p-1)}} > 1,$$

donc

$$x_{2n+1}^{(i)} > A + x_{2n-1}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Par la répétition des mêmes étapes, pour $i = 1, 2, \ldots, p-1$, on obtient

$$x_{2n+1}^{(i)} > A + x_{2n-1}^{(i)} = 2A + \frac{x_{2n-3}^{(i)}}{x_{2n-2}^{(p)}} > 2A + x_{2n-3}^{(i)} > 3A + x_{2n-5}^{(i)} > \cdots,$$

$$x^{(p)}_{2n+1} > A + x^{(p)}_{2n-1} = 2A + \frac{x^{(p)}_{2n-3}}{x^{(p-1)}_{2n-2}} > 2A + x^{(p)}_{2n-3} > 3A + x^{(p)}_{2n-5} > \cdots .$$

Remarquons que pour $i = 1, 2, \ldots, p$

$$x^{(i)}_{2n+1} > A + x^{(i)}_{2n-[(1)(2)-1]} > 2A + x^{(i)}_{2n-[(2)(2)-1]} > 3A + x^{(i)}_{2n-[(3)(2)-1]} > \cdots > kA + x^{(i)}_{2n-2n}.$$

Il est facile de voir que

$$2n = 2k - 1 \Rightarrow k = \frac{2n+1}{2}.$$

donc

$$x^{(i)}_{2n+1} > \frac{2n+1}{2}A + x^{(i)}_{0}, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Par passage à la limite, lorsque $n \to \infty$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} x^{(i)}_{2n+1} = \infty, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

D'autre part, de(2.4), pour $i = 1, 2, \ldots, p-1$, on a

$$x^{(i)}_{2n} = A + \frac{x^{(i)}_{2n-2}}{x^{(p)}_{2n-1}}, \quad x^{(p)}_{2n} = A + \frac{x^{(p)}_{2n-2}}{x^{(p-1)}_{2n-1}},$$

par l'utilisation de (2.29) et par passage à la limite des deux membres des deux égalités précédentes lorsque $n \to \infty$, et par l'utilisation du fait que $x^{(i)}_{2n-2} < 1, \quad i = 1, 2, \ldots, p$, on aura

$$\lim_{n\to\infty} x^{(i)}_{2n} < A + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^{(p)}_{2n-1}}, \quad i = 1, 2, \ldots, p-1,$$

et

$$\lim_{n\to\infty} x^{(p)}_{2n} < A + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^{(p-1)}_{2n-1}}.$$

Et par suite, pour $i = 1, 2, \ldots, p$, on trouve

$$\lim_{n\to\infty} x^{(i)}_{2n} = A, \quad \left(car \quad \lim_{n\to\infty} x^{(p)}_{2n-1} = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} x^{(p-1)}_{2n-1} = \infty \right).$$

Ce qui termine la démonstration du Théorème.

■

2.4.2 Cas $A = 1$:

Dans ce cas, nous prouvons que chaque solution positive du système (2.4) est bornée et permanente.

Théorème 2.4.2 *Supposons que $A = 1$. Alors, toute solution positive* $\left\{\left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}\right)\right\}_{n\geq -1}$ *du système* (2.4) *est bornée et permanente.*

Preuve.

Soit $\left\{\left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}\right)\right\}$ une solution positive du système (2.4). Il est clair que

$$x_n^{(i)} > 1, \quad i = 1, 2, \ldots, p \quad \text{pour} \quad n \geq 1.$$

Alors on a

$$x_j^{(i)} \in \left[K, \frac{K}{K-1}\right], \qquad j = 1, 2, \ldots, m+1, \quad i = 1, 2, \ldots, p,$$

où

$$K = \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{\beta - 1}\right\} > 1, \qquad \alpha = \min_{1\leq j\leq m+1}\{x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, \ldots, x_j^{(p)}\}, \qquad \beta = \max_{1\leq j\leq m+1}\{x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, \ldots, x_j^{(p)}\}.$$

Donc, pour $i = 1, 2, \ldots, p-1$, on aura

$$K \leq x_{m+2}^{(i)} = 1 + \frac{x_m^{(i)}}{x_{m+1}^{(p)}} \leq \frac{K}{K-1}, \quad K \leq x_{m+2}^{(p)} = 1 + \frac{x_m^{(p)}}{x_{m+1}^{(p-1)}} \leq \frac{K}{K-1},$$

car

$$K \leq x_m^{(i)} \leq \frac{K}{K-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, p,$$

$$K \leq x_{m+1}^{(p)} \leq \frac{K}{K-1} \Rightarrow \frac{K-1}{K} \leq \frac{1}{x_{m+1}^{(p)}} \leq \frac{1}{K},$$

et

$$K \leq x_{m+1}^{(p-1)} \leq \frac{K}{K-1} \Rightarrow \frac{K-1}{K} \leq \frac{1}{x_{m+1}^{(p-1)}} \leq \frac{1}{K}.$$

Par indication, on trouve que

$$x_j^{(i)} \in \left[K, \frac{K}{K-1}\right], \quad j = 1, 2, \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Ce qui termine la démonstration. ∎

2.4.3 Cas $A > 1$:

Dans ce cas, nous prouvons que le point d'équilibre positive du système (2.4) est globalement asymptotiquement stable. Pour prouvez la stabilité globale du point d'équilibre, nous avons besoin du Lemme suivant.

Lemme 2.4.1 *Supposons que* $A > 1$. *Alors, toute solution positive* $\left\{\left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p-1)}, x_n^{(p)}\right)\right\}_{n \geq -1}$ *du système* (2.4) *est bornée.*

Preuve.

Soit $\left\{\left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p-1)}, x_n^{(p)}\right)\right\}$ une solution positive du système (2.4). Il est clair que

$$x_n^{(i)} > A > 1, \quad pour \quad n \geq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, p. \tag{2.30}$$

De (2.30), comme $x_n^{(p)} > A, x_n^{(p-1)} > A$, pour $i = 1, 2, \ldots, p-1$, on aura

$$x_{n+1}^{(i)} = A + \frac{x_{n-1}^{(i)}}{x_n^{(p)}} \leq A + \frac{x_{n-1}^{(i)}}{A}, \quad x_{n+1}^{(p)} = A + \frac{x_{n-1}^{(p)}}{x_n^{(p-1)}} \leq A + \frac{x_{n-1}^{(p)}}{A} \quad n \geq 1. \tag{2.31}$$

On pose

$$u_{n+1} = A + \frac{u_{n-1}}{A}, \quad n \geq 1, \tag{2.32}$$

tel que

$$u_s = x_s^{(i)}, \quad u_{s+1} = x_{s+1}^{(i)}, \quad s \in \{-1, 0, \ldots\}, n \geq s, \quad i = 1, 2, \ldots, p. \tag{2.33}$$

Alors, la solution u_n de l'équation aux différences (2.32) est comme suit

$$u_n = u_h + u_p, \tag{2.34}$$

avec

$$\begin{cases} u_h : \text{est la solution de l'équation homogène,} \\ u_p : \text{est une solution particulière de l'équation (2.32).} \end{cases}$$

De l'équation (2.32) on a l'équation homogène

$$u_{n+1} - \frac{u_{n-1}}{A} = 0.$$

Alors, le polynôme caractéristique de l'équation homogène est

$$\lambda^2 - \frac{1}{A} = 0,$$

donc

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{A}}.$$

Alors, la solution de l'équation homogène est

$$u_h = c_1^{(i)} \left(\frac{1}{\sqrt{A}} \right)^n + c_2^{(i)} \left(-\frac{1}{\sqrt{A}} \right)^n, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

D'autre part la solution particulière s'écrit sous la forme

$$u_p = A c_3^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Comme u_p est une solution particulière de (2.32), en substituant sa valeur dans (2.32), on trouve

$$Ac_3^{(i)} - \frac{Ac_3^{(i)}}{A} = A \Rightarrow (A-1)c_3^{(i)} = A, \quad i = 1, 2, \ldots, p,$$

ce qui implique que

$$c_3^{(i)} = \frac{A}{A-1},$$

par suite

$$u_p = \frac{A^2}{A-1}.$$

D'où

$$u_n = c_1^{(i)} \left(\frac{1}{\sqrt{A}} \right)^n + c_2^{(i)} \left(-\frac{1}{\sqrt{A}} \right)^n + \frac{A^2}{A-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, p. \tag{2.35}$$

De l'équation (2.32) on a

$$\bar{u} = A + \frac{\bar{u}}{A} \Rightarrow \bar{u}(1 - \frac{1}{A}) = A.$$

Alors

$$\bar{u} = \frac{A^2}{A-1},$$

d'où

$$u_n = c_1^{(i)} \left(\frac{1}{\sqrt{A}} \right)^n + c_2^{(i)} \left(-\frac{1}{\sqrt{A}} \right)^n + \bar{u}, \quad i = 1, 2, \ldots, p. \tag{2.36}$$

Par l'utilisation des deux relations (2.31) et (2.32), on obtient

$$x_{n+1}^{(i)} - u_{n+1} = \frac{x_{n-1}^{(i)}}{x_n^{(p)}} - \frac{u_{n-1}}{A}, \quad x_{n+1}^{(p)} - u_{n+1} = \frac{x_{n-1}^{(p)}}{x_n^{(p-1)}} - \frac{u_{n-1}}{A},$$

ce qui implique que

$$x_{n+1}^{(i)} - u_{n+1} \leq \frac{x_{n-1}^{(i)} - u_{n-1}}{A}, \quad n > s, \quad i = 1, 2, \ldots, p. \tag{2.37}$$

Par conséquent, de (2.33) et (2.37), on a

$$x_{n+1}^{(i)} - u_{n+1} \leq 0 \Rightarrow x_{n+1}^{(i)} \leq u_{n+1}, \quad n > s, \quad i = 1, 2, \ldots, p,$$

c'est à dire

$$x_n^{(i)} \leq u_n, \quad n \geq s, \quad i = 1, 2, \ldots, p. \tag{2.38}$$

De (2.30),(2.35) et (2.38), pour $i = 1, 2, \ldots, p$ on obtient

$$A < x_n^{(i)} \leq c_1^{(i)} \left(\frac{1}{\sqrt{A}} \right)^n + c_2^{(i)} \left(-\frac{1}{\sqrt{A}} \right)^n + \frac{A^2}{A-1},$$

où

$$c_1^{(i)} = \frac{1}{2} \left(x_0^{(i)} + \sqrt{A} x_1^{(i)} - \frac{A^2}{A-1}(1 + \sqrt{A}) \right), \quad c_2^{(i)} = \frac{1}{2} \left(x_0^{(i)} - \sqrt{A} x_1^{(i)} - \frac{A^2}{A-1}(1 - \sqrt{A}) \right).$$

En effet, de (2.33) et (2.35), pour $i = 1, 2, \ldots, p$, on a :

$$x_0^{(i)} = c_1^{(i)} + c_2^{(i)} + \frac{A^2}{A-1} \quad et \quad x_1^{(i)} = \frac{c_1^{(i)} - c_2^{(i)}}{\sqrt{A}} + \frac{A^2}{A-1},$$

ce qui implique que pour $i = 1, 2, \ldots, p$, on trouve

$$c_1^{(i)} = \frac{1}{2} \left(x_0^{(i)} + \sqrt{A} x_1^{(i)} - \frac{A^2}{A-1}(1 + \sqrt{A}) \right), \quad c_2^{(i)} = \frac{1}{2} \left(x_0^{(i)} - \sqrt{A} x_1^{(i)} - \frac{A^2}{A-1}(1 - \sqrt{A}) \right).$$

■

Théorème 2.4.3 *Supposons que $A > 1$. Alors, le point d'équilibre positif du système* (2.4) *est globalement asymptotiquement stable.*

Preuve.

D'après le Théorème (2.3.1), le point d'équilibre positif du système (2.4) est localement asymptotiquement stable pour $A > 1$. Alors il nous reste qu'à montrer qu'il est globalement attractif. C'est à dire :

$$\lim_{n \to \infty} \left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)} \right) = (A + 1, A + 1, \ldots A + 1).$$

Pour cela, on va montrer que

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{(i)} = A + 1, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Au moyen du Lemme (2.4.1), on pose

$$L_i = \lim_{n\to\infty} \sup x_n^{(i)}, \quad m_i = \lim_{n\to\infty} \inf x_n^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, p. \tag{2.39}$$

Alors, de(2.4) et (2.39), on obtient

$$L_i \leq A + \frac{L_i}{m_p}, \quad L_p \leq A + \frac{L_p}{m_{p-1}}, \quad i = 1, 2, \ldots, p-1,$$

en effet, d'après le système (2.4) on a :

$$x_{n+1}^{(i)} = A + \frac{x_{n-1}^{(i)}}{x_n^{(p)}}, \quad x_{n+1}^{(p)} = A + \frac{x_{n-1}^{(p)}}{x_n^{(p-1)}}, \quad i = 1, 2, \ldots, p-1,$$

alors, pour $i = 1, 2, \ldots, p-1$, on trouve

$$\sup x_{n+1}^{(i)} = \sup\left(A + \frac{x_{n-1}^{(i)}}{x_n^{(p)}}\right), \quad \sup x_{n+1}^{(p)} = \sup\left(A + \frac{x_{n-1}^{(p)}}{x_n^{(p-1)}}\right).$$

Donc, pour $i = 1, 2, \ldots, p-1$, on obtient

$$L_i = \lim_{n\to\infty} \sup x_n^{(i)} = \lim_{n\to\infty} \sup x_{n+1}^{(i)} = \lim_{n\to\infty} \sup\left(A + \frac{x_{n-1}^{(i)}}{x_n^{(p)}}\right),$$

$$L_p = \lim_{n\to\infty} \sup x_n^{(p)} = \lim_{n\to\infty} \sup x_{n+1}^{(p)} = \lim_{n\to\infty} \sup\left(A + \frac{x_{n-1}^{(p)}}{x_n^{(p-1)}}\right).$$

Il est évident que

$$x_{n-1}^{(i)} \leq \sup x_n^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, p$$

et

$$x_n^{(p)} \geq \inf x_n^{(p)} \Rightarrow \frac{1}{x_n^{(p)}} \leq \frac{1}{\inf x_n^{(p)}}, \quad x_n^{(p-1)} \geq \inf x_n^{(p-1)} \Rightarrow \frac{1}{x_n^{(p-1)}} \leq \frac{1}{\inf x_n^{(p-1)}},$$

et par suite

$$A + \frac{x_{n-1}^{(i)}}{x_n^{(p)}} \leq A + \frac{\sup x_n^{(i)}}{\inf x_n^{(p)}}, \quad A + \frac{x_{n-1}^{(p)}}{x_n^{(p-1)}} \leq A + \frac{\sup x_n^{(p)}}{\inf x_n^{(p-1)}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, p-1,$$

alors

$$L_i \leq \lim_{n\to\infty}\left(A + \frac{\sup x_n^{(i)}}{\inf x_n^{(p)}}\right), \quad L_p \leq \lim_{n\to\infty}\left(A + \frac{\sup x_n^{(p)}}{\inf x_n^{(p-1)}}\right), \qquad i = 1, 2, \ldots, p-1,$$

donc

$$L_i \leq A + \frac{L_i}{m_p}, \quad L_p \leq A + \frac{L_p}{m_{p-1}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, p-1.$$

D'autre part on a

$$m_i \geq A + \frac{m_i}{L_p}, \quad m_p \geq A + \frac{m_p}{L_{p-1}}, \quad i = 1, 2, \ldots, p-1,$$

en effet, d'après le système (2.4), pour $i = 1, 2, \ldots, p-1$, on a :

$$x_{n+1}^{(i)} = A + \frac{x_{n-1}^{(i)}}{x_n^{(p)}}, \quad x_{n+1}^{(p)} = A + \frac{x_{n-1}^{(p)}}{x_n^{(p-1)}},$$

alors

$$\inf x_{n+1}^{(i)} = \inf\left(A + \frac{x_{n-1}^{(i)}}{x_n^{(p)}}\right), \quad \inf x_{n+1}^{(p)} = \inf\left(A + \frac{x_{n-1}^{(p)}}{x_n^{(p-1)}}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, p-1.$$

Donc, pour $i = 1, 2, \ldots, p-1$, on a

$$m_i = \lim_{n\to\infty} \inf x_n^{(i)} = \lim_{n\to\infty} \inf x_{n+1}^{(i)} = \lim_{n\to\infty} \inf\left(A + \frac{x_{n-1}^{(i)}}{x_n^{(p)}}\right),$$

$$m_p = \lim_{n\to\infty} \inf x_n^{(p)} = \lim_{n\to\infty} \inf x_{n+1}^{(p)} = \lim_{n\to\infty} \inf\left(A + \frac{x_{n-1}^{(p)}}{x_n^{(p-1)}}\right).$$

Il est évident que

$$x_{n-1}^{(i)} \geq \inf x_n^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, p,$$

et

$$x_n^{(p)} \leq \sup x_n^{(p)} \Rightarrow \frac{1}{x_n^{(p)}} \geq \frac{1}{\sup x_n^{(p)}}, \quad x_n^{(p-1)} \leq \sup x_n^{(p-1)} \Rightarrow \frac{1}{x_n^{(p-1)}} \geq \frac{1}{\sup x_n^{(p-1)}}$$

et par suite

$$A + \frac{x_{n-1}^{(i)}}{x_n^{(p)}} \geq A + \frac{\inf x_n^{(i)}}{\sup x_n^{(p)}}, \quad A + \frac{x_{n-1}^{(p)}}{x_n^{(p-1)}} \geq A + \frac{\inf x_n^{(p)}}{\sup x_n^{(p-1)}}, \quad i = 1, 2, \ldots, p-1,$$

alors

$$m_i \geq \lim_{n\to\infty} \left(A + \frac{\inf x_n^{(i)}}{\sup x_n^{(p)}} \right), \quad m_p \geq \lim_{n\to\infty} \left(A + \frac{\inf x_n^{(p)}}{\sup x_n^{(p-1)}} \right), \quad i = 1, 2, \ldots, p-1.$$

Donc

$$m_i \geq A + \frac{m_i}{L_p}, \quad m_p \geq A + \frac{m_p}{L_{p-1}}, \quad i = 1, 2, \ldots, p-1.$$

Des relations précédentes on a

$$AL_{p-1} + m_p \leq m_p L_{p-1} \leq Am_p + L_{p-1}, \quad AL_p + m_{p-1} \leq m_{p-1} L_p \leq Am_{p-1} + L_p,$$

ce qui implique que

$$AL_{p-1} + m_p \leq Am_p + L_{p-1},$$

et

$$AL_p + m_{p-1} \leq Am_{p-1} + L_p.$$

Alors

$$(A-1)(L_{p-1} - m_p) \leq 0, \quad (A-1)(L_p - m_{p-1}) \leq 0,$$

comme $A > 1$, on obtient

$$L_{p-1} \leq m_p \ \ et \ \ L_p \leq m_{p-1}.$$

De (2.39), il est clair que

$$m_p \leq L_p \ \ et \ \ m_{p-1} \leq L_{p-1}.$$

Alors

$$L_{p-1} \leq m_p \leq L_p, \quad L_p \leq m_{p-1} \leq L_{p-1},$$

d'où

$$L_{p-1} = L_p = m_{p-1} = m_p.$$

Des les même argument, pour $i = 1, 2, \ldots, p-2$, on a

$$L_i m_p \leq A m_p + L_i, \quad m_i L_p \geq A L_p + m_i,$$

ce qui nous donne

$$L_i(m_p - 1) \leq A m_p, \quad A L_p \leq m_i(L_p - 1), \quad i = 1, 2, \ldots, p-2.$$

Comme $L_p = m_p$, pour $i = 1, 2, \ldots, p-2$, on a

$$L_i(L_p - 1) \leq m_i(L_p - 1),$$

donc, pour $i = 1, 2, \ldots, p-2$, on obtient

$$L_i \leq m_i.$$

Tant que $x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p-2)}$ sont bornées et $m_1, m_2, \ldots, m_{p-2}$ sont des valeurs finies, alors

$$L_i = m_i, \quad i = 1, 2, \ldots, p-2.$$

Alors

$$\liminf_{n\to\infty} x_n^{(i)} = \limsup_{n\to\infty} x_n^{(i)} = \lim_{n\to\infty} x_n^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

D'où toute solution positive $\left\{\left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p-1)}, x_n^{(p)}\right)\right\}_{n\geq -1}$ du système (2.4) tend vers le point d'équilibre positif.

Ce qui termine la démonstration.

■

CHAPITRE 3

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE D'UNE ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES DU TROISIÈME ORDRE AVEC DES PUISSANCES ARBITRAIRES

3.1 Introduction

Notre objectif dans ce chapitre est l'étude du comportement asymptotique de l'équation aux différences du troisième ordre avec des puissances arbitraires

$$y_{n+1} = \frac{\alpha y_n}{\beta + \gamma y_{n-1}^{p} y_{n-2}^{q}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

où $\alpha, \beta, \gamma, p, q$ sont des nombres positifs non nuls et les valeurs initiales y_{-2}, y_{-1}, y_0 sont des nombres positifs.

Dans [10], El-Owaidy et al. ont étudié le comportement global de l'équation aux différences suivante

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-1}}{\beta + \gamma x_{n-2}^{p}}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.1}$$

avec des paramètres positifs non nuls et des valeurs initiales positives.

En généralisant les résultats d'El-Owaidy [10], Chen et al. [3] ont étudié le comportement asymptotique de l'équation aux différences rationnelle suivante

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-k}}{\beta + \gamma x_{n-l}^{p}}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.2}$$

où $k, l \in \mathbb{N}$, les paramètres sont des nombres positifs et les valeurs initiales $x_{-\max\{k,l\}}, \dots, x_{-1}, x_0$ sont des nombres positifs non nuls.

Dans ce chapitre, nous généralisons les résultats concernant les équations (3.1), (3.2) à l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n}}{\beta + \gamma x_{n-1}^{p} x_{n-2}^{q}}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.3}$$

cette équation se ramène à l'équation aux différences

$$y_{n+1} = \frac{r y_{n}}{1 + y_{n-1}^{p} y_{n-2}^{q}}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.4}$$

en utilisant le changement des variables $x_n = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{p+q}} y_n$ avec $r = \frac{\alpha}{\beta}$.

Ainsi, au lieu de l'équation (3.3), on étudiera l'équation (3.4).

3.2 Stabilité locale des points d'équilibre

Dans cette section nous étudions la stabilité locale des points d'équilibre positifs de l'équation (3.4).

Le Lemme suivant donne les points d'équilibre positifs de l'équation (3.4).

Lemme 3.2.1 *Nous avons les cas suivants pour les points d'équilibre de l'équation* (3.4).

(i) $\overline{y_0} = 0$ *est toujours un point d'équilibre de l'équation* (3.4).

(ii) *Si* $r > 1$, *alors l'équation* (3.4) *admet l'équilibre positif* $\overline{y_1} = (r-1)^{\frac{1}{p+q}}$.

(iii) *Si* $r < 1$ *et* $\frac{1}{p+q}$ *est un entier positif pair, alors l'équation* (3.4) *admet l'équilibre positif* $\overline{y_2} = (r-1)^{\frac{1}{p+q}}$ *qui est toujours dans l'intervalle* $]0,1[$.

Preuve. Par définition du point d'équilibre on a $\bar{y}$ est un point d'équilibre de l'équation (3.4) si et seulement si

$$\bar{y} = \frac{r\bar{y}}{1+\bar{y}^{p+q}},$$

ce qui nous donne

$$\bar{y}\left(1 - \frac{r}{1+\bar{y}^{p+q}}\right) = 0.$$

Alors

$\bar{y} = 0$ ou bien $\bar{y} = (r-1)^{\frac{1}{p+q}}$ (cette valeur doit être positive).

- Si $r > 1, \overline{y_1} = (r-1)^{\frac{1}{p+q}} > 0$, donc il est un point d'équilibre de l'équation (3.4).
- Si $r < 1$, on pose $r = \dfrac{n}{m}$ tel que $n, m > 0, \quad n < m$,

alors

$$r - 1 = \frac{n}{m} - 1 = \frac{n-m}{m} < 0.$$

Pour tout entier positif pair $\frac{1}{p+q}, \quad (r-1)^{\frac{1}{p+q}} > 0$,

d'autre part

$$0 < \frac{m-n}{m} < 1 \quad (car \;\; m > n),$$

alors

$$0 < \left(\frac{m-n}{m}\right)^{\frac{1}{p+q}} < 1.$$

Comme $\frac{1}{p+q}$ est pair, alors

$$\left(\frac{m-n}{m}\right)^{\frac{1}{p+q}} = \left(\frac{n-m}{m}\right)^{\frac{1}{p+q}},$$

d'où

$$0 < \left(\frac{n-m}{m}\right)^{\frac{1}{p+q}} < 1,$$

par suite

$$0 < (r-1)^{\frac{1}{p+q}} < 1.$$

Donc, si $r < 1$ et $\dfrac{1}{p+q}$ un entier positif pair $\overline{y_2} = (r-1)^{\frac{1}{p+q}}$ est un point d'équilibre de l'équation (3.4) qui est toujours dans l'intervalle $]0,1[$.

Ce qui termine la démonstration du Lemme. ■

Théorème 3.2.1 *Nous avons les résultats suivants pour l'équation* (3.4).

(i) *Si $r < 1$, alors le point d'équilibre nul est localement asymptotiquement stable.*

(ii) *Si $r > 1$, alors le point d'équilibre nul est instable.*

(iii) *Si $r = 1$, alors le point d'équilibre nul est un point non-hyperbolique.*

(iv) *Supposons que $r > 1$ et soit $q < \dfrac{r}{r-1}\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{5-4p\left(\dfrac{r-1}{r}\right)}\right)$. Alors le point d'équilibre positif $\overline{y_1} = (r-1)^{\frac{1}{p+q}}$ est localement asymptotiquement stable si*

$$q \leq p,$$

ou

$$p < q < p + 2\frac{r}{r-1}.$$

(v) *Supposons que $r \in]0,1[$ tel que $\frac{1}{p+q}$ est un entier positif pair. Alors le point d'équilibre positif $\overline{y_2} = (r-1)^{\frac{1}{p+q}}$ est instable.*

Preuve.

L'équation linéaire associée à l'équation (3.4) autour du point d'équilibre $\overline{y_0} = 0$ est

$$z_{n+1} = p_0 z_n + p_1 z_{n-1} + p_2 z_{n-2},$$

tel que

$$p_0 = \frac{\partial f}{\partial z_1}(0,0,0) = r, \quad p_1 = \frac{\partial f}{\partial z_2}(0,0,0) = 0, \quad p_2 = \frac{\partial f}{\partial z_3}(0,0,0) = 0,$$

avec

$$\begin{array}{rccc} f: &]0,+\infty[^3 & \longrightarrow &]0,+\infty[\\ & (z_1,z_2,z_3) & \longmapsto & \dfrac{rz_1}{1+z_2^p z_3^q}. \end{array}$$

Alors, l'équation linéaire associée à l'équation (3.4) autour du point d'équilibre $\overline{y_0} = 0$ est

$$z_{n+1} - rz_n = 0, \quad n = 0,1,\ldots, \tag{3.5}$$

le polynôme caractéristique de l'équation (3.5) autour du point d'équilibre $\overline{y_0} = 0$ est

$$\lambda - r = 0,$$

alors, la racine du polynôme caractéristique est

$$\lambda = r.$$

D'après le Théorème (1.2.8) de la stabilité par linéarisation, on a

- si $r < 1$, alors $\lambda < 1$ et par suite $\overline{y_0} = 0$ est localement asymptotiquement stable,
- si $r > 1$, alors $\lambda > 1$ et par suite $\overline{y_0} = 0$ est instable,
- si $r = 1$, alors $\lambda = 1$ et par suite $\overline{y_0} = 0$ est un point non-hyperbolique.

Ce qui termine la démonstration de (i), (ii) et (iii).

Pour montrer (iv) on va supposer que $r > 1$, et on va montrer que $\overline{y_1} = (r-1)^{\frac{1}{p+q}}$ est localement asymptotiquement stable si

$$q \leq p \quad ou \quad p < q < p + 2\frac{r}{r-1}.$$

L'équation linéaire associée à l'équation (3.4) autour du point d'équilibre $\overline{y_1} = (r-1)^{\frac{1}{p+q}}$ est

$$z_{n+1} - z_n + p\left(\frac{r-1}{r}\right)z_{n-1} + q\left(\frac{r-1}{r}\right)z_{n-2} = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{3.6}$$

le polynôme caractéristique de l'équation aux différences (3.6) autour du point d'équilibre $\overline{y_1} = (r-1)^{\frac{1}{p+q}}$ est

$$\lambda^3 - \lambda^2 + p\left(\frac{r-1}{r}\right)\lambda + q\left(\frac{r-1}{r}\right) = 0. \tag{3.7}$$

Selon le Théorème (1.2.10) et l'équation (3.7), on aura

$$\alpha_2 = -1, \quad \alpha_1 = p\left(\frac{r-1}{r}\right) \quad et \quad \alpha_0 = q\left(\frac{r-1}{r}\right).$$

D'abord, on va montrer que

$$\left|-1 + q\left(\frac{r-1}{r}\right)\right| < 1 + p\left(\frac{r-1}{r}\right),$$

c'est à dire

$$-1 - p\left(\frac{r-1}{r}\right) < -1 + q\left(\frac{r-1}{r}\right) < 1 + p\left(\frac{r-1}{r}\right).$$

Pour $q \leq p$, on a

$$q\left(\frac{r-1}{r}\right) \leq p\left(\frac{r-1}{r}\right), \quad (car \quad r > 1)$$

alors

$$-1 + q\left(\frac{r-1}{r}\right) \leq -1 + p\left(\frac{r-1}{r}\right) < 1 + p\left(\frac{r-1}{r}\right).$$

Donc

$$-1 + q\left(\frac{r-1}{r}\right) < 1 + p\left(\frac{r-1}{r}\right).$$

Comme $q \leq p$, alors $-p \leq -q < q$, donc

$$-p\left(\frac{r-1}{r}\right) < q\left(\frac{r-1}{r}\right), \quad (car \quad r > 1)$$

par suite
$$-1-p\left(\frac{r-1}{r}\right)<-1+q\left(\frac{r-1}{r}\right).$$
D'où
$$-1-p\left(\frac{r-1}{r}\right)<-1+q\left(\frac{r-1}{r}\right)<1+p\left(\frac{r-1}{r}\right).$$
D'autre part, si $p<q<p+2\frac{r}{r-1}$, on aura
$$q\left(\frac{r-1}{r}\right)<p\left(\frac{r-1}{r}\right)+2,$$
alors
$$-1+q\left(\frac{r-1}{r}\right)<1+p\left(\frac{r-1}{r}\right).$$
Comme $p<q$, alors $-p<q$ (car $\quad p,q>0$)

donc
$$-1-p\left(\frac{r-1}{r}\right)<-1+q\left(\frac{r-1}{r}\right),$$
par suite
$$-1-p\left(\frac{r-1}{r}\right)<-1+q\left(\frac{r-1}{r}\right)<1+p\left(\frac{r-1}{r}\right).$$
Donc dans tous les cas
$$|\alpha_2+\alpha_0|<1+\alpha_1.$$
Maintenant, on va utiliser le fait que
$$q<\frac{r}{r-1}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5-4p\left(\frac{r-1}{r}\right)}\right), \tag{3.8}$$
multipliant les deux membres de (3.8) par $\frac{r-1}{r}$, on aura
$$q\left(\frac{r-1}{r}\right)<-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5-4p\left(\frac{r-1}{r}\right)},$$
alors
$$q\left(\frac{r-1}{r}\right)+\frac{1}{2}<\frac{1}{2}\sqrt{5-4p\left(\frac{r-1}{r}\right)},$$

par suite

$$\left(q\left(\frac{r-1}{r}\right)+\frac{1}{2}\right)^2<\left(\frac{1}{2}\sqrt{5-4p\left(\frac{r-1}{r}\right)}\right)^2.$$

Donc

$$q^2\left(\frac{r-1}{r}\right)^2+q\left(\frac{r-1}{r}\right)+\frac{1}{4}<\frac{1}{4}\left(5-4p\left(\frac{r-1}{r}\right)\right),$$

d'où

$$q^2\left(\frac{r-1}{r}\right)^2+p\left(\frac{r-1}{r}\right)+q\left(\frac{r-1}{r}\right)<1.$$

C'est à dire

$$\alpha_0^2+\alpha_1-\alpha_0\alpha_2<1. \tag{3.9}$$

De (3.9), on aura

$$\alpha_1<1-\alpha_0^2-\alpha_0, \quad (car \quad \alpha_2=-1)$$

alors

$$\begin{aligned}1+3q\left(\frac{r-1}{r}\right)+p\left(\frac{r-1}{r}\right) &< 1+3q\left(\frac{r-1}{r}\right)+1-q\left(\frac{r-1}{r}\right)-q^2\left(\frac{r-1}{r}\right)^2\\ &< 2+2q\left(\frac{r-1}{r}\right)-q^2\left(\frac{r-1}{r}\right)^2.\end{aligned}$$

Comme $\left(q\left(\frac{r-1}{r}\right)-1\right)^2\geq 0$, alors

$$q^2\left(\frac{r-1}{r}\right)^2+1-2q\left(\frac{r-1}{r}\right)\geq 0,$$

donc

$$2q\left(\frac{r-1}{r}\right)-q^2\left(\frac{r-1}{r}\right)^2\leq 1,$$

d'où

$$1+3q\left(\frac{r-1}{r}\right)+p\left(\frac{r-1}{r}\right)<3,$$

c'est à dire

$$1+3q\left(\frac{r-1}{r}\right)<3-p\left(\frac{r-1}{r}\right), \tag{3.10}$$

alors

$$-3+p\left(\frac{r-1}{r}\right)<-1-3q\left(\frac{r-1}{r}\right). \tag{3.11}$$

De (3.10) et (3.11), on aura

$$-3+p\left(\frac{r-1}{r}\right)<-1-3q\left(\frac{r-1}{r}\right)<1+3q\left(\frac{r-1}{r}\right)<3-p\left(\frac{r-1}{r}\right),\quad (car\quad r>1,\quad p,q>0)$$

ie

$$-3+p\left(\frac{r-1}{r}\right)<-1-3q\left(\frac{r-1}{r}\right)<3-p\left(\frac{r-1}{r}\right).$$

D'où

$$|\alpha_2-3\alpha_0|<3-\alpha_1.$$

Donc d'après le Théorème (1.2.10) et le Théorème (1.2.8), $\overline{y_1}=(r-1)^{\frac{1}{p+q}}$ est localement asymptotiquement stable.

Ce qui termine la démonstration de (iv).

Pour montrer (v), on suppose que $r<1$ et on va montrer que $\overline{y_2}=(r-1)^{\frac{1}{p+q}}$ est instable.

L'équation linéaire associée à l'équation aux différences (3.4) autour du point d'équilibre $\overline{y_2}=(r-1)^{\frac{1}{p+q}}$ est

$$z_{n+1}-z_n+p\left(\frac{r-1}{r}\right)z_{n-1}+q\left(\frac{r-1}{r}\right)z_{n-2}=0,\quad n=0,1,\ldots, \tag{3.12}$$

alors, le polynôme caractéristique de l'équation (3.12) autour de $\overline{y_2}=(r-1)^{\frac{1}{p+q}}$ est

$$\lambda^3-\lambda^2+p\left(\frac{r-1}{r}\right)\lambda+q\left(\frac{r-1}{r}\right)=0, \tag{3.13}$$

si on définit la fonction g telle que

$$\begin{array}{rcll} g: &]0,+\infty[& \longrightarrow &]0,+\infty[\\ & \lambda & \longmapsto & \lambda^3-\lambda^2+p\left(\frac{r-1}{r}\right)\lambda+q\left(\frac{r-1}{r}\right) \end{array}$$

alors, il est clair que

$$g(1)=\frac{(p+q)(r-1)}{r}<0,\quad car\quad p,q>0,\quad 0<r<1,$$

et

$$\lim_{\lambda \to +\infty} g(\lambda) = +\infty.$$

Donc, d'après le Théorème des valeurs intermédiaire, il existe au moins un $\lambda^* \in]1, +\infty[$ tel que $g(\lambda^*) = 0$, et alors $g(\lambda)$ admet au moins une racine dans l'intervalle $]1, +\infty[$.

Par suite, par l'utilisation du Théorème (1.2.8), alors $\overline{y_2} = (r-1)^{\frac{1}{p+q}}$ est instable.

Ce qui termine la démonstration de (v). ■

3.3 Le comportement asymptotique des solutions positives

Dans cette section, nous donnons et prouvons quelques résultats concernant le comportement asymptotique des solutions de l'équation (3.4).

Théorème 3.3.1 *Chaque solution de l'équation* (3.4) *est bornée.*

Preuve. Soit $\{y_n\}_{n \geq -2}$ une solution de l'équation (3.4). Pour montrer ce Théorème, on va supposer que cette solution n'est pas bornée supérieurement. Alors, il existe une sous-suite $\{y_{n_m+1}\}_{m \geq 0}$ tel que

$$\lim_{n \to \infty} n_m = \infty, \quad \lim_{n \to \infty} y_{n_m+1} = \infty,$$

et

$$y_{n_m+1} = \max\{y_n : n \leq n_m\}, \quad \text{pour tout} \quad m \geq 0. \tag{3.14}$$

De l'équation (3.4), on aura

$$y_{n_m+1} = \frac{r y_{n_m}}{1 + y_{n_m-1}^p y_{n_m-2}^q} \to \infty, \quad \text{lorsque} \quad m \to \infty.$$

Alors de (3.14) on obtient $y_{n_m} \to \infty$. De même on peut obtenir $y_{n_m-1} \to \infty$ ou $y_{n_m-2} \to \infty$ lorsque $m \to \infty$.

Par conséquent, pour tout $m \geq 0$, m suffisamment grand, de (3.4) et (3.14), on obtient

$$0 \leq y_{n_m+1} - y_{n_m} = \frac{y_{n_m}(r - 1 - y_{n_m-1}^p y_{n_m-2}^q)}{1 + y_{n_m-1}^p y_{n_m-2}^q} < 0,$$

qui est contradictoire avec notre supposition.

Alors, la solution $\{y_n\}_{n\geq -2}$ est bornée. ■

Théorème 3.3.2 *Supposons que $r > 1$ et $\{y_n\}_{n\geq -2}$ est une solution de l'équation* (3.4) *de telle sorte que pour certains $n_0 \in \mathbb{N}$, si*

$$y_n > \overline{y_1} = \sqrt[p+q]{r-1} \quad pour \quad n > n_0,$$

ou

$$y_n < \overline{y_1} = \sqrt[p+q]{r-1} \quad pour \quad n > n_0.$$

Alors, pour $n \geq n_0 + 2$, la suite $\{y_n\}$ est monotone, et

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \overline{y_1}.$$

Preuve. Supposons que pour certains $n > n_0$

$$y_n > \overline{y_1} = \sqrt[p+q]{r-1}$$

soit vérifier. Alors, pour $n > n_0 + 2$(*ie* $\quad n - 2 > n_0$), on aura

$$y_n > \overline{y_1}, \quad y_{n-1} > \overline{y_1}, \quad y_{n-2} > \overline{y_1},$$

alors

$$y_{n-1}^p y_{n-2}^q > \overline{y_1}^{p+q},$$

d'où

$$y_{n+1} = \frac{ry_n}{1 + y_{n-1}^p y_{n-2}^q} < \frac{ry_n}{1 + \overline{y_1}^{p+q}} = y_n \quad (car \quad \overline{y_1}^{p+q} = r - 1).$$

Donc

$$y_{n+1} < y_n, \quad \forall n > n_0 + 2.$$

Alors $\{y_n\}$ est monotone pour tout $n \geq n_0 + 2$.

Maintenant on va montrer que

$$\lim_{n \to \infty} y_n = \overline{y_1}.$$

De l'équation (3.4), on aura

$$y_{n+1}\left(1 + y_{n-1}^p y_{n-2}^q\right) = r y_n, \tag{3.15}$$

par passage à la limite des deux membres de l'équation (3.15) lorsque $n \to \infty$, on obtient

$$\lim_{n \to \infty}\left[y_{n+1}\left(1 + y_{n-1}^p y_{n-2}^q\right)\right] = \lim_{n \to \infty} r y_n, \tag{3.16}$$

si on pose $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = l$, alors (3.16) devient

$$l(1 + l^{p+q}) = rl,$$

ce qui implique que

$$l = (r-1)^{\frac{1}{p+q}} = \overline{y_1}.$$

On peut prouver le deuxième cas de la même manière que précédemment. ■

Dans le théorème suivant, nous prouvons que le point d'équilibre nul de l'équation (3.4) est globalement asymptotiquement stable dans le cas ou $r < 1$.

Théorème 3.3.3 *Supposons que $r < 1$. Alors le point d'équilibre nul de l'équation* (3.4) *est globalement asymptotiquement stable.*

Preuve. D'après le Théorème (3.2.1) le point d'équilibre nul est localement asymptotiquement stable. Alors, il nous reste qu'à démontrer que $\overline{y_0} = 0$ est globalement attractif.

ie

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \overline{y_0} = 0,$$

pour toute solution positive $\{y_n\}_{n\geq -2}$ de l'équation (3.4).

Soit $\{y_n\}_{n\geq -2}$ une solution positive de l'équation (3.4).

Alors, pour tout $n \geq 0$ on aura

$$0 < y_{n+1} = \frac{ry_n}{1 + y_{n-1}^p y_{n-2}^q} < ry_n,$$

c'est à dire

$$y_{n+1} < ry_n,$$

par indication, pour $n = 0, 1, \ldots,$ on obtient

$$y_n < r^n y_0.$$

Alors

$$0 < \lim_{n\to\infty} y_n < \lim_{n\to\infty} r^n y_0,$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0 \quad (car \quad r < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} r^n = 0).$$

Ce qui termine la démonstration. ■

3.4 Périodicité des solutions

Dans le théorème suivant, on va étudier la périodicité des solutions positives de l'équation (3.4).

Théorème 3.4.1 *Si $p + 2 \geq q$, alors l'équation* (3.4) *n'admet aucune solution périodique de période* 2.

Si $q > p+2$ *et* $r > \dfrac{q-p}{q-p-2}$, *alors l'équation* (3.4) *admet une solution périodique de période* 2.

Preuve. Supposons que l'équation (3.4) admet une solution périodique de période 2 de la forme

$$\ldots, x, y, x, y, \ldots$$

Alors, de l'équation (3.4) on obtient les égalités suivantes

$$x = \frac{ry}{1 + x^p y^q} \quad \text{et} \quad y = \frac{rx}{1 + y^p x^q}, \tag{3.17}$$

ce qui nous donne

$$ry = x\left(1 + x^p y^q\right) \qquad \text{et} \qquad rx = y\left(1 + y^p x^q\right),$$

c'est à dire

$$ry - x = x^{p+1} y^q \qquad \text{et} \qquad rx - y = y^{p+1} x^q,$$

donc

$$\frac{ry - x}{rx - y} = \frac{x^{p+1} y^q}{y^{p+1} x^q} = \frac{x^{p+1-q}}{y^{p+1-q}},$$

d'où

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{p+1-q} = \frac{ry - x}{rx - y}. \tag{3.18}$$

De (3.18) on obtient

$$\frac{y\left(r - \frac{x}{y}\right)}{y\left(r\frac{x}{y} - 1\right)} = \left(\frac{x}{y}\right)^{p+1-q}.$$

Posons $\lambda = \dfrac{x}{y}$, on aura

$$r - \lambda = \lambda^{p+1-q}\left(r\lambda - 1\right). \tag{3.19}$$

Comme $x, y > 0$, alors

$$\lambda^{p+1-q} = \left(\frac{x}{y}\right)^{p+1-q} > 0,$$

de même
$$ry - x = x^{p+1}y^q > 0 \quad \text{et} \quad rx - y = y^{p+1}x^q > 0,$$
ce qui implique que
$$y\left(r - \frac{x}{y}\right) > 0 \quad \text{et} \quad y\left(r\frac{x}{y} - 1\right) > 0,$$
d'où
$$r - \lambda > 0 \quad \text{et} \quad r\lambda - 1 > 0,$$
ce qui nous donne
$$r > \lambda \quad \text{et} \quad \lambda > \frac{1}{r}.$$
Alors, on obtient toujours
$$\frac{1}{r} < \lambda < r.$$
Nous considérons les cas suivants

Cas1 $p + 2 \geq q$

- Si $p + 2 = q$, alors $p + 1 - q = -1$, donc (3.19) devient

$$r - \lambda = \left(r - \frac{1}{\lambda}\right),$$

ce qui nous donne
$$\lambda = \frac{1}{\lambda},$$
cette relation est vérifiée si et seulement si $\lambda = 1$.

- Si $p + 2 > q$, il est clair que $\lambda = 1$ est une racine de l'équation (3.19).

De (3.19) on obtient
$$r\lambda^{p+2-q} - \lambda^{p+1-q} + \lambda - r = 0.$$

Posons
$$h(\lambda) = r\lambda^{p+2-q} - \lambda^{p+1-q} + \lambda - r,$$

alors
$$h^{'}(\lambda) = (p + 2 - q)\, r\lambda^{p+1-q} - (p + 1 - q)\, \lambda^{p-q} + 1$$

$$= (p+1-q)\,\lambda^{p-q}\,(r\lambda-1) + r\lambda^{p+1-q} + 1.$$

Comme $p+2-q>0$, alors $p+1-q>-1$,

donc

$$(p+1-q)\,\lambda^{p-q}\,(r\lambda-1) + r\lambda^{p+1-q} + 1 > -\lambda^{p-q}\,(r\lambda-1) + r\lambda^{p+1-q} + 1,$$

ie

$$(p+1-q)\,\lambda^{p-q}\,(r\lambda-1) + r\lambda^{p+1-q} + 1 > \lambda^{p-q} + 1,$$

alors pour toute valeur de $\lambda > 0$ on obtient

$$(p+1-q)\,\lambda^{p-q}\,(r\lambda-1) + r\lambda^{p+1-q} + 1 > 0,$$

d'où

$$h^{'}(\lambda) > 0.$$

Alors, h est une fonction strictement croissante.

Par conséquent, $\lambda = 1$ est la seule racine de la fonction h.

Donc, pour $p+2 \geq q$, on a $x = y$ et l'équation (3.4) n'admet aucune solution périodique de période 2.

Cas2 $p+2-q<0$.

De l'équation (3.19) on obtient

$$\lambda^{q-p} - r\lambda^{q-p-1} + r\lambda - 1 = 0.$$

Posons

$$g(\lambda) = \lambda^{q-p} - r\lambda^{q-p-1} + r\lambda - 1.$$

Il est clair que $\lambda = 1$ est une racine de $g(\lambda)$, de plus on a

$$g^{'}(\lambda) = (q-p)\,\lambda^{q-p-1} - r\,(q-p-1)\,\lambda^{q-p-2} + r.$$

Maintenant, étudions le comportement de g utilisant g'.

On a

$$g'(0) = r > 0, g'(1) = q - p - r(q - p - 1) + r$$
$$= q - p - r(q - p - 2).$$

Si $g'(1) < 0$, alors

$$q - p - r(q - p - 2) < 0 \Leftrightarrow r > \frac{q - p}{q - p - 2},$$

donc d'après le Théorème des valeurs intermédiaire, il existe un $\lambda_0 \in]0, 1[$ tel que $g'(\lambda_0) = 0$.

Selon le graphe de g et sa position par rapport à la tangente au point $\lambda = 1$,

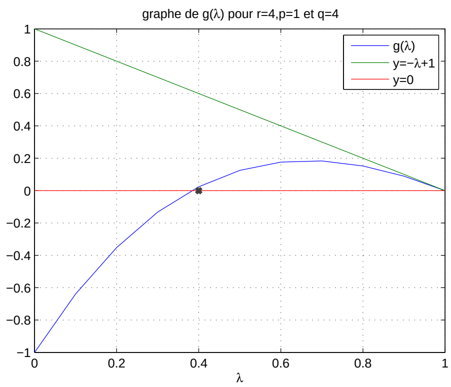

FIGURE 3.1 – Ce graphique représente le comportement de l'équation $g(\lambda)$

il est facile de voir que g admet une borne supérieure au point λ_0. Par suite le graphe de g passe par l'axe des abscisses, d'où g admet une autre racine $\lambda_1 \in]0, 1[$. Alors $x \neq y$.

De (3.17), on aura

$$x^2 = \frac{r^2 y^2}{(1 + x^p y^q)^2} \qquad \text{et} \qquad y^2 = \frac{r^2 x^2}{(1 + y^p x^q)^2},$$

alors

$$r^2 y^2 = x^2 (1 + x^p y^q)^2 \qquad \text{et} \qquad r^2 x^2 = y^2 (1 + y^p x^q)^2,$$

donc
$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2(1+x^py^q)^2}{y^2(1+y^px^q)^2},$$
par suite
$$y^4(1+y^px^q)^2 = x^4(1+x^py^q)^2,$$
d'où
$$x^2 - y^2 = x^q y^{p+2} - x^{p+2}y^q. \tag{3.20}$$
Si on pose $x_{-2} = x_0 = x$ et $x_{-1} = y$, alors
$$x_1 = \frac{rx_0}{1+x_{-1}^p x_{-2}^q} = \frac{rx}{1+y^px^q}.$$
Utilisons (3.20) deux fois, on obtient
$$x_1 = \frac{rx}{1+\left(\frac{x^2}{y^2} - 1 + x^{p+2}y^{q-2}\right)} = \frac{rx}{1+\frac{1}{y^2}\left(x^2 - y^2 + x^{p+2}y^q\right)} = \frac{rx}{1+y^px^q} = y.$$
Et
$$x_2 = \frac{rx_1}{1+x_0^p x_{-1}^q} = \frac{ry}{1+x^py^q}.$$
Utilisons (3.20) deux fois, on obtient
$$x_2 = \frac{ry}{1+\left(\frac{y^2}{x^2} - 1 + y^{p+2}x^{q-2}\right)} = \frac{ry}{1+\frac{1}{x^2}\left(y^2 - x^2 + y^{p+2}x^q\right)} = \frac{ry}{1+x^py^q} = x.$$
Alors, l'équation (3.4) admet une solution périodique de période 2.

D'autre part, si $g^{'}(1) > 0$, on aura
$$q - p - r(q-p-2) > 0 \Leftrightarrow r < \frac{q-p}{q-p-2},$$
alors selon le graphe de g et sa position par rapport à la tangente au point $\lambda = 1$,

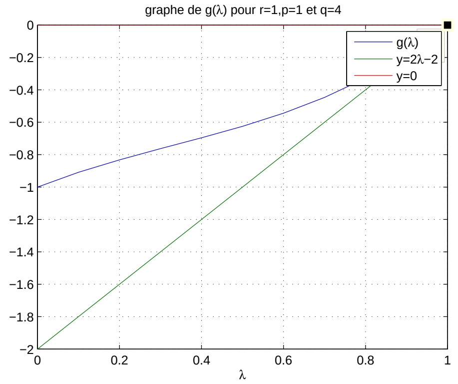

FIGURE 3.2 – Ce graphique représente le comportement de l'équation $g(\lambda)$

il est facile de voir que le graphe de g passe par l'axe des abscisses seulement au point $\lambda = 1$, donc g n'admet aucune racine que $\lambda = 1$. Par suite $x = y$ et l'équation (3.4) n'admet aucune solution périodique de période 2.

■

3.5 Exemples numériques

Pour confirmer les résultats de ce chapitre, nous considérons les exemples numériques suivants

Exemple 3.5.1

1. *Soient* $p = 3, q = 2$ *et* $r = 0.5$ *dans l'équation* (3.4), *alors on obtient l'équation*

$$y_{n+1} = \frac{0.5y_n}{1 + y_{n-1}^3 y_{n-2}^2}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.21}$$

   supposons $y_{-2} = 2, y_{-1} = 1.03, y_0 = 1.$ *(voir graph* (3.3)*)*

2. *Soient* $p = 3, q = 2$ *et* $r = 1.3$ *dans l'équation* (3.4), *alors on obtient l'équation*

$$y_{n+1} = \frac{1.3y_n}{1 + y_{n-1}^3 y_{n-2}^2}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.22}$$

   supposons $y_{-2} = 2, y_{-1} = 3, y_0 = 0.5.$ *(voir graph* (3.4)*)*

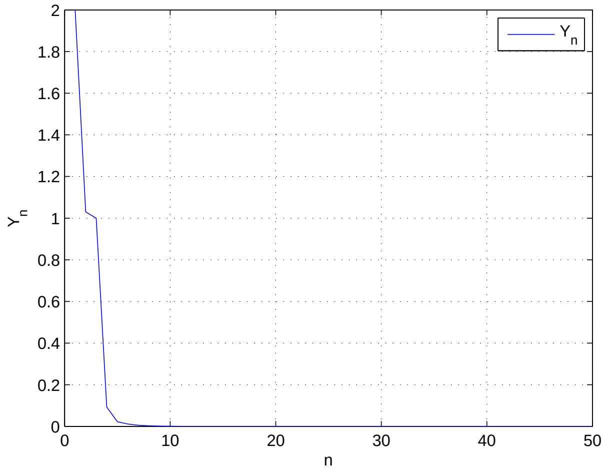

FIGURE 3.3 – Ce graphique représente le comportement asymptotique de la solution de l'équation (3.21)

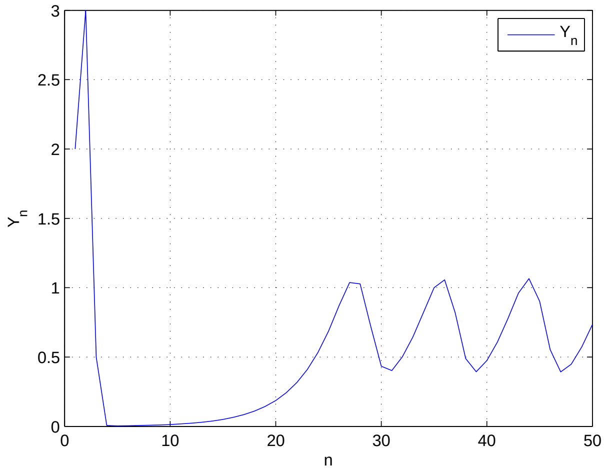

FIGURE 3.4 – Ce graphique représente le comportement de la solution de l'équation (3.22)

3. *Soient* $p = 0.5, q = 0.5$ *et* $r = 2$ *dans l'équation* (3.4), *alors on obtient l'équation*

$$y_{n+1} = \frac{2y_n}{1 + y_{n-1}^{0.5} y_{n-2}^{0.5}}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.23}$$

supposons $y_{-2} = 2.5, y_{-1} = 1.08, y_0 = 1$. *(voir graph* (3.5)*)*

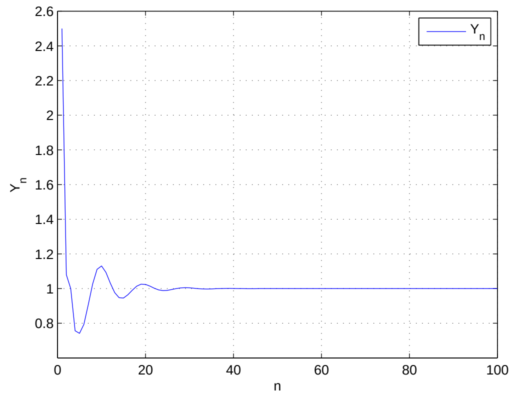

FIGURE 3.5 – Ce graphique représente le comportement asymptotique de la solution de l'équation (3.23)

4. *Soient* $p = 0.25, q = 0.25$ *et* $r = 0.5$ *dans l'équation* (3.4), *alors on obtient l'équation*

$$y_{n+1} = \frac{0.5y_n}{1 + y_{n-1}^{0.25} y_{n-2}^{0.25}}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.24}$$

supposons $y_{-2} = 0.02, y_{-1} = 0.04, y_0 = 0.08$.*(voir graph* (3.6)*)*

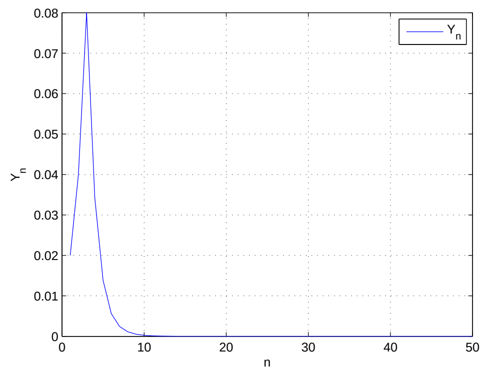

FIGURE 3.6 – Ce graphique représente le comportement de la solution de l'équation (3.24)

Exemple 3.5.2

1. *Soient* $p = 1, q = 1$ *et* $r = 1.09$ *dans l'équation* (3.4), *alors on obtient l'équation*

$$y_{n+1} = \frac{1.09 y_n}{1 + y_{n-1} y_{n-2}}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.25}$$

supposons $y_{-2} = 0.2, y_{-1} = 0.05, y_0 = 0.03$.*(voir graph* (3.7)*)*

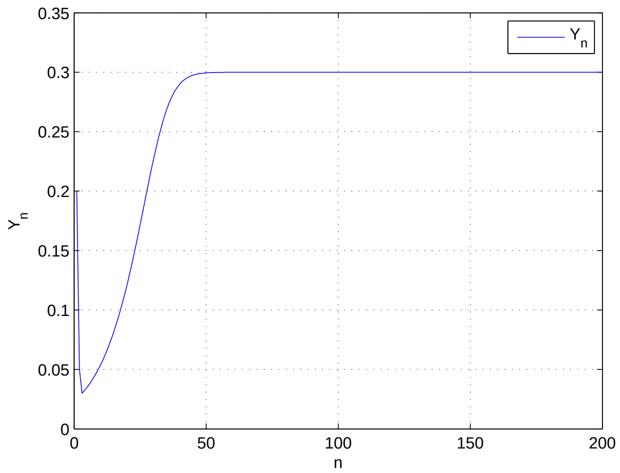

FIGURE 3.7 – Ce graphique représente le comportement de la solution de l'équation (3.25)

2. *Soient* $p = 0.25, q = 0.25$ *et* $r = 1.1$ *dans l'équation* (3.4), *alors on obtient l'équation*

$$y_{n+1} = \frac{1.1 y_n}{1 + y_{n-1}^{0.25} y_{n-2}^{0.25}}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.26}$$

supposons $y_{-2} = 0.3, y_{-1} = 0.5, y_0 = 0.2$. *(voir graph* (3.8)*)*

Exemple 3.5.3 *Soient* $p = 0.5, q = 3$ *et* $r = 6$ *dans l'équation* (3.4), *alors on obtient l'équation*

$$y_{n+1} = \frac{6 y_n}{1 + y_{n-1}^{0.5} y_{n-2}^{3}}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.27}$$

supposons $y_{-2} = 3, y_{-1} = 4, y_0 = 3$. *(voir graph* (3.9)*)*

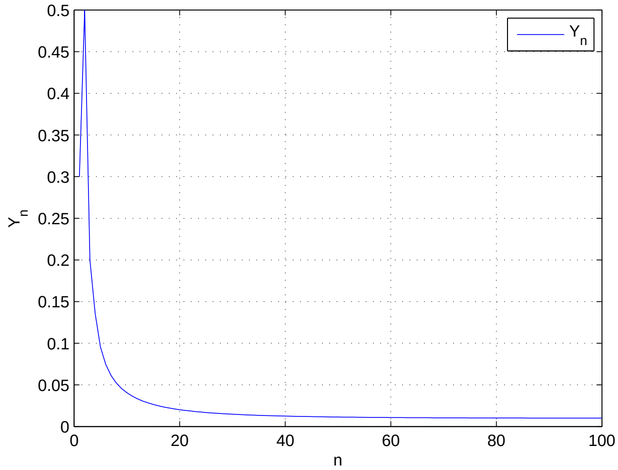

FIGURE 3.8 – Ce graphique représente le comportement de la solution de l'équation (3.26)

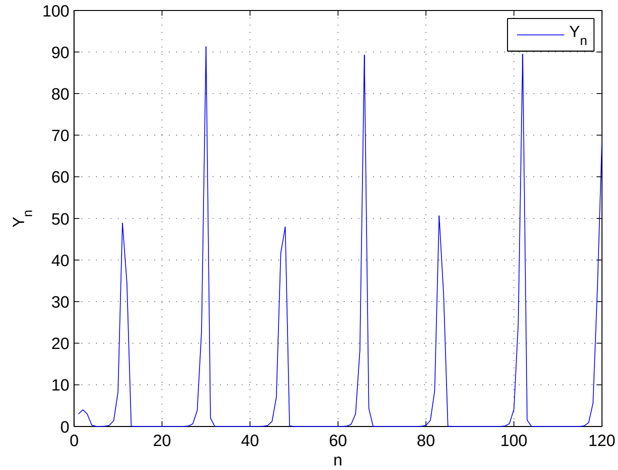

FIGURE 3.9 – Ce graphique représente la périodicité de la solution de l'équation (3.27)

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans notre mémoire, nous avons étudié le comportement des solutions du système de p équations aux différences d'ordres 2 non linéaires suivant

$$x_{n+1}^{(1)} = A + \frac{x_{n-1}^{(1)}}{x_n^{(p)}}, \quad x_{n+1}^{(2)} = A + \frac{x_{n-1}^{(2)}}{x_n^{(p)}}, \ldots, x_{n+1}^{(p-1)} = A + \frac{x_{n-1}^{(p-1)}}{x_n^{(p)}}, \quad x_{n+1}^{(p)} = A + \frac{x_{n-1}^{(p)}}{x_n^{(p-1)}}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

où $p \geq 3$, $A \in]0, +\infty[$ et les valeurs initiales $x_{-1}^{(j)}, x_0^{(j)}, \quad j = \overline{1,p}$, sont des nombres positifs.

Dans un futur proche, nous allons essayer d'étudier le comportement des solutions du système de p équations aux différences non linéaires d'ordres k suivant

$$x_{n+1}^{(1)} = A + \frac{x_{n-k+1}^{(1)}}{x_n^{(p)}}, \quad x_{n+1}^{(2)} = A + \frac{x_{n-k+1}^{(2)}}{x_n^{(p)}}, \ldots, x_{n+1}^{(p-1)} = A + \frac{x_{n-k+1}^{(p-1)}}{x_n^{(p)}}, \quad x_{n+1}^{(p)} = A + \frac{x_{n-k+1}^{(p)}}{x_n^{(p-1)}}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

où $p \geq 3$, $A \in]0, +\infty[$ et les valeurs initiales $x_i^{(j)}, \quad j = \overline{1,p}, i = -k, -k+1, \ldots, 0$, sont des nombres positifs.

De plus, nous avons étudié la stabilité des points d'équilibre et la périodicité des solutions de l' équation aux différences d'ordre trois suivante

$$y_{n+1} = \frac{\alpha y_n}{\beta + \gamma y_{n-1}^p y_{n-2}^q}, \quad n \in \mathbb{N},$$

où $\alpha, \beta, \gamma, p, q$ sont des nombres positifs non nuls et les valeurs initiales y_{-2}, y_{-1}, y_0 sont des nombres positifs.

Dans un futur proche, nous allons essayer d'étudier le système de deux équations aux différences non linéaires d'ordres trois suivant

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n}{\beta + \gamma x_{n-1}^p y_{n-2}^q}, \quad y_{n+1} = \frac{\alpha y_n}{\beta + \gamma y_{n-1}^p x_{n-2}^q}, \quad n \in \mathbb{N},$$

où $\alpha, \beta, \gamma, p, q$ sont des nombres positifs non nuls et les valeurs initiales $x_{-2}, x_{-1}, x_0, y_{-2}, y_{-1}, y_0$ sont des nombres positifs.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. M. Amleh, E. A. Grove, G. Ladas, and D. A. Georgiou, *On the recursive sequence* $x_{n+1} = \alpha + (x_{n-1}/x_n)$, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 233(2)(1999), 790-798.

[2] E. Camouzis, G. Ladas, *Dynamics of third-order rational difference equations with open problems and conjectures*, Advances in Discrete Mathematics and Applications Vol.5, Chapman and Hall/CRC, (2008).

[3] D. Chen, X. Li and Y. Wang, *Dynamics for nonlinear difference equations* $x_{n+1} = (\alpha x_{n-k})/(\beta + \gamma x_{n-1}^p)$, Advences in Difference Equations, (2009), Art. ID 235691, 13 page.

[4] C. W. Clark, *A delayed recruitement of a population dynamics with an application to baleen whale population*, Journal of Mathematical Biology, 3(1976), 381-391.

[5] A. De Moivre, *De Fractionibus algebraicis radicalitate immunibus ad fractiones simpliciores reducendis*, deque summandis terminis quarumdam serierum aequali intervallo a se distantibus. philos. Trans 32, (1722), 162-178.

[6] A. De Moivre, *The Doctrine of Chances*, London(1718).

[7] A. De Moivre, *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*, Londini(1730).

[8] A. De Moivre, *The Doctrine of Chances*, 3rd edn. Strand, London(1756).

[9] S. Elaydi, *An introduction to difference equation*, springer, (2005).

[10] H. M. El-Owaidy, A. M. Ahmed and A. M. Youssef, *The dynamics of the recursive sequence* $x_{n+1} = (\alpha x_{n-1})/(\beta + \gamma x_{n-2}^{p})$, Applied Mathematics Letters, 18(9)(2005), 1013-1018.

[11] L. Fibonacci, *Liber Abbaci*, (1202).

[12] N. Finizio and G. Ladas, *An introduction to differential equations with difference equations, fourier series, and partial differential equations*, Wadsworth publishing company, (1982).

[13] E. A. Grove and G. Ladas, *Periodicities in nonlinear difference equations*, Advances in Discrete Mathematics and Applications Vol.4, Chapman and Hall/CRC, (2005).

[14] M. Gümüş, R. Abo-Zeid and Ö. Öcalan, *Dynamical behavior of a third-order difference equation with arbitrary powers*, Kyungpook Mathematical Journal 27(2017), 251-263. 161-165.

[15] Y. Halim, A. Khelifa, A. Boussaha, *Representation of solutions of a Second-order system of difference equations in terms of padovan sequence*, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B : Algorithm and applications, 27(3)(2020), 113-131. **(Mémoire de Master 2018, Centre Universitaire de Mila).**

[16] P. S. Laplace, *Recherches sur l'integration des équations différentielles aux différences finies et sur leur usage dans la théorie des hasards. Mémoires de l'académie royale des sciences de paris 1773*, t.VII, (1776).

[17] A. Khelifa, Y. Halim, M. Berkal, *Solutions of a system of two higher-order difference equations in terms of Lucas sequence*, Universal Journal of Mathematics and Applications, 2(4)(2019), 202-211. **(Mémoire de Master 2019, Centre Universitaire de Mila).**

[18] V. L. Kocic and G. Ladas, *Global Behavior of Nonlinear Difference Equations of Higher Order with Applications*, Chapman & Hall, (1993).

[19] M. R. S. Kulenović, G. Ladas, *Dynamics of second order rational difference equations with open problems and conjectures*, Chapman and Hall/CRC, (2002).

[20] I. Okumus and Y. Soykan, *Dynamical behavior of a system three-dimensional nonlinear difference equations*, Advances in Differnce Equations, (2018), 223, 15 page.

[21] G. Papaschinapoulos, C. J. Schinas, *On the system of two nonlinear difference equations* $x_{n+1} = A + \frac{x_{n-1}}{y_n}, y_{n+1} = A + \frac{y_{n-1}}{x_n}$, International Journal Mathematics and Mathematical Sciences (23)(12)(2000), 839-848.

[22] S. Stević, *Representations of solutions to linear and bilinear difference equations and systems of bilinear difference equations*, Advances in Differnce Equations, (2018), 474, 21 page.