الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……………

Centre Universitaire
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie — Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité: Mathématique Fondamentales

Fonctions symétriques complètes et polynômes orthogonaux

Préparé par : *Bouhbel Ilham*
Siari Hadjer

Soutenue devant le jury

Rapporteur : *Boubellouta Khadidja*. M.A.A — C.U. Abd Elhafid Boussouf
Président : *Benaouicha Loubna*. M.A.A — C.U. Abd Elhafid Boussouf
Examinateur : Bouzakria Fahima. M.A.B — C.U. Abd Elhafid Boussouf

Année Universitaire : 2019/2020

REMERCIEMENT

Nous tenons à remercier avant tout ALLAH le toute puissant de nous avoir donné la volonté, la santé et le courage pour réaliser ce travail.

Nous remercions chaleuresement notre encadreur de ce travail le professeur Boubelouta Khadidja pour son aide précieuse et ses conseils éclairés dans la direction de notre travail ; Ainsi que leur grande disponibilité et son immense gentillesse .

Nous remercions également tous les membres de jury qu'ont accepté de juger notre travail, et tous nos enseignants , nos collègues et administrateurs du département de Mathématiques et Informatique .

Mes grands remerciements vont aussi à toute notre famille précisément notre père et notre mère pour ses encouragement qu'ont accompagné durant cette mémoire .

Enfin, nous tenons également à remercier toutes les personnes qui on participé de prés ou de loi à la réalisation de ce travail.

DÉDICACE

Je tiens à dédier ce modeste travail à :

Ma chère * *maman* * *qui m'a donné la vie, le symbole de tendresse qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite, quelque je fasse, je ne pourrais te rendre ce que tu as fait pour moi.*

Mon cher * *papa* * *qui a été mon ombre durant toutes les années des études et à mis ma disposition tous les moyens nécessaire pour que je réussisse*

Mes frères, ma sœurs et tous ma famille

Tous mes amis et mes collèges des mathématiques .

A mon binôme * *Ilham* * *qui a partagé avec moi les moments difficiles de ce travail ; Aussi beaucoup d'autres personnes que je n'ai pas eu l'occasion de les mentionner. Ce qui m'ont aidé de prés ou de loin.*

Et à la fin je dédie ce travail à moi-même.

Hadjer

DÉDICACE

c'est avec une grande gratitude et des mots sincères,que je dedie ce modest travail de fin d'étude

A mon Père *Kadeur* pour avoir toujours cru en moi et pour ses nombreux sacrifies

A ma Mère *Rabiaa* pour son soutien et ses encourgements,

J'espére qu'un jour ,je pourrai leurs rendre un peu de ce qu'ils on fait pour moi ,que dieu leur pretre bonheur et longue vie.

Je dédie aussi de ce travail

A mes trés chérs oncles : Zouhir, Mouhammed, Aissam.

A mes soeurs :Sara,Zeyneb,Chahra,Abir.

A mon Fiancé Djamil.

A mon binôme *Hadjer* qui a partagé avec moi les moments difficiles de ce travail ;

A tous les membres de ma promotion, à tous mes enseigants de puis mes premiers annés d'études.

Ilham

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Les polynômes orthogonaux constituent un lien de rencontre privilégié pour diverses disciplines de mathématiques pures et appliquées ainsi que d'autre domaines des sciences. Plusieurs auteures ont introduit les polynômes orthogonaux et leurs fonctions génératrices . Voir par exemple [12, 5, 8, 9, 10, 12, 13, 14]. L'objectif de notre mémoire et de déterminer des nouvelles fonctions génératrices des produits des fonctions symétriques de trois variables et certains nombres et polynômes orthogonaux.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Dans le premier, nous rappelons quelques définitions et notions de base ayant été utiliser tout au long de ce mémoire. Dans la première partie nous donnons quelques définitions et propriétés concernant les séries formelles et les relations de récurrences puis nous présentons les fonctions génératrices . Dans la dernière partie de ce chapitre nous introduisons les fonctions symétriques ainsi que leurs propriétés.

Dans le deuxième chapitre nous introduisons les polynômes orthogonaux de types de Tchebychev et les polynômes de Fibonacci , Lucas , Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal et Jacobsthal-Lucas. Et nous déterminons leurs fonctions génératrices, en utilisant les relations de récurrences linéaires.

Dans le troisième chapitre nous présentons un théorème afin de déterminer des nouvelles fonctions génératrices. Premièrement nous donnons quelques définitions qui nous utile dans nos résultats. deuxièmement nous déterminons des fonctions génératrices de produits des fonctions symétriques de trois variables et certains nombres comme : $\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)P_nz^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)Q_nz^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)L_nz^n$... Enfin dans la dernière partie de ce chapitre nous déterminons des nouvelles fonctions génératrices des produits des fonctions symétriques de trois variables et les polynômes orthogonaux par exemples : $\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)P_n(x)z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)Q_n(x)z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)U_n(x)z^n$...

CHAPITRE 1

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre nous rappelons des notions générales . Nous donnons tout d'abord quelques rappels sur les séries formelles , puis les relations de récurrences, ensuite nous définissons les fonctions génératrices ordinaires . Enfin nous nous introduisons les fonctions symétriques complètes et élémentaires ainsi que leurs propriétés.

1.1 Séries formelles

Soit k un corps commutatif ($k = \mathbb{R} \bigcup k = \mathbb{C}$).

Définition 1.1.1. *[1] Toute suite (a_n) d'éléments d'un anneau A est appelée série formelle sur A à une indéterminée x. Notation $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$.*

Notation

– Notons $\mathbb{C}[[x]]$ l'ensemble des séries formelles à coefficients dans $\mathbb{C}$.

- Notons $\mathbb{R}[[x]]$ l'ensemble des séries formelles à coefficients dans $\mathbb{R}$.
- $1 + X\mathbb{C}[[x]]$ l'ensemble des séries formelles à terme constante égale à 1 et $X\mathbb{C}[[x]]$ l'ensemble des séries formelles à terme constante nul.

Remarque

$A[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans A est un sous ensemble de $A[[x]]$.

Définition 1.1.2. *[2] Deux séries formelles $\alpha(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ et $\beta(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ sont égales si et seulement si pour tout $j \geq 0$, $a_j = b_j$.*

Proposition 1.1.1. *[2] Si β et γ sont des séries formelles sans terme constante, on a $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$. Autrement dit , la composition des séries formelles est associative.*

Définition 1.1.3. *[2] Soient $\alpha(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ et $\beta(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ deux séries formelles on peut définir leur somme et leur produit comme suite :*

1- $(\alpha + \beta)(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (a + b)x^i$.

2- $(\alpha.\beta) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{i} (a_k b_{i-k}) x^i$.

Exemple 1.1.1. *Soient $\alpha(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i x^i$ et $\beta(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} x^i$ deux séries formelles.*
Alors :

$$(\alpha + \beta)(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} ((-1)^i + 1)x^i.$$

- **Multiplication par un scalaire** : La séries $\beta(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} kx^i$ est le produit de $\alpha(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} x^i$ par le scalaire k.

Exemple 1.1.2. *$\beta(x) = \sum_{i=0}^{\infty} 2x^i$ est le produit de $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$ par 2.*

- **Dérivation** : $\alpha(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (i + 1)a_{i+1} x^i$ est le résultat de la dérivation de la série $\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i x^i$.

Exemple 1.1.3.

$(1-x)^{-2}$ *est le résultat de la dérivation de* $(1-x)^{-1}$ *par apport à* x*.*

– **Division** : Soient α et β deux séries formelles tels que $\beta \neq 0$, β divise α ssi il existe une série formelle ω telle que : $\alpha = \beta.\omega$.

Théorème 1.1.1. *[2] Si deux séries formelles* α *et* β *ont la même derivé alors il existe* $c \in \mathbb{C} : \alpha = \beta + c$*.*

Démonstration.
Soient $\alpha(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ et $\beta(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ deux séries formelles alors :
$D(\alpha) = \sum_{j=1}^{\infty} ja_j x^j$, $D(\beta(x)) = \sum_{j=1}^{\infty} jb_j x^j$ en indentifient alors les coefficients de $D(\alpha(x))$ et $D(\beta(x))$ on obtient les égalités $a_j = b_j$ pour tout $j \geq 1$ on a alors :
$a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j x^j = b_0 + \sum_{j=1}^{\infty} b_j x^j + c$, avec : $c = a_0 - b_0$ c'est-à-dire $\alpha = \beta + c$. □

1.1.1 Séries inversibles

Définition 1.1.4. *[3] On dit que la série* $\alpha(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ *est l'inverse de la séries* $\beta(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ *si et seulement si* $(\sum_{i=0} a_i x^i)(\sum_{i=0} b_i x^i) = 1$*.*

Exemple 1.1.4.

On a $(1-x)(1 + X + X^2 + X^3 .... + X^n + ...) = 1$*, donc* $(1-x)$ *est l'inverse de la série* $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$*.*

Théorème 1.1.2. *[2]* $\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{K}[[x]]$ *est inversible pour la multiplication si et seulement si* $a_0 \neq 0$ *.*

Exemple 1.1.5.

-La séries $\alpha(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i x^i$ *est inversible car* $a_0 = (-1)^i \neq 0$*.*

Théorème 1.1.3. *[2] Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\alpha \in 1 + X\mathbb{C}[[x]]$*.*

Alors : $(\alpha^{-1})^n = (\alpha^n)^{-1}$*.*

Démonstration.

Soient : $\alpha \in 1 + X\mathbb{C}[[x]]$, et α^{-1} son inverse alors :

$$\begin{aligned}(\alpha^{-1})^n.\alpha^n &= \alpha^{-1}.\alpha^{-1}\cdots\alpha^{-1}.\alpha.\alpha\cdots\alpha = 1\\ &= (\alpha^{-1}.\alpha)(\alpha^{-1}.\alpha)\cdots(\alpha^{-1}.\alpha) = 1\end{aligned}$$

Donc

$$(\alpha^{-1})^n = \frac{1}{(\alpha)^n}.$$

Ce la nous donne

$$(\alpha^{-1})^n = (\alpha^n)^{-1}.$$

□

1.2 Relations de Récurrences

1.2.1 Relations de récurrence linéaire homogène

Définition 1.2.1. *[3] Une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre k à coefficients constants est sous la forme :*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}. \tag{1.1}$$

Où $c_1, c_2, \cdots, c_k$ sont des nombres réels et c_k non nuls.

Exemple 1.2.1.

1. *La relation de récurrence linéaire homogène associée à les nombres de Tribonacci-Lucas est :*

$$\begin{cases} k_n = k_{n-1} + k_{n-2} + k_{n-3}, & n \geq 3 \\ k_0 = 3, k_1 = 1, k_2 = 3. \end{cases}$$

2. *La relation de récurrence linéaire homogène associée à les nombres de Tribonacci est :*

$$\begin{cases} T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}, & n \geq 3 \\ T_0 = 3, T_1 = T_2 = 3. \end{cases}$$

Remarque 1.2.1.

Soit $a_n = r^n$ *la solution de* (1.1)*, on obtient alors :*

$$r^n - c_1 r^{n-1} - \cdots - c_k r^{n-k} = 0 \Longleftrightarrow r^k - c_1 r^{k-1} - \cdots - c_k = 0. \tag{1.2}$$

Cette dernière équation est ***l'équation caractéristique*** *de la relation de récurrence* (1.1).

Théorème 1.2.1. *[3] Soient* $c_1, c_2, \cdots, c_k$ *des nombres réels, supposons que l'équation caractéristique :*

$$r^k - c_1 r^{k-1} - \cdots - c_k = 0. \tag{1.3}$$

Admette k racines distinctes $r_1, r_2 \cdots, r_k$*. Alors, une séquence* a_n *est une solution de la relation de récurrence :*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}. \tag{1.4}$$

Si et seulement si

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \cdots + \alpha_k r_k^n, \forall n = 0, 1, 2, \cdots \tag{1.5}$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ *des constantes réelles.*

Exemple 1.2.2. *Soit la relation de réccurence siovante :*

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - 5a_{n-2}, \quad n \geq 2 \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 5 \end{cases}$$

l'équation caractéristique est : $t^2 - 2t + 5 = 0$ *les racines associées à cette équation sont :* $t_1 = 1 + 2i$ *,* $t_2 = 1 - 2i$*, donc*

$$(a_n)^h = c_1(1 + 2i)^n + c_2(1 - 2i)^n.$$

Les constante c_1 *et* c_2 *sont déterminée par les conditions initiales comme suite*

$$\begin{cases} a_0 = c_1 + c_2 = 1 \\ a_1 = c_1(1 + 2i) + c_2(1 - 2i) = 5 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} c_1 = \frac{1}{2} - i \\ c_1 = \frac{1}{2} + i \end{cases}$$

Donc :

$$a_n = (\frac{1}{2} - i)(1 + 2i)^n + (\frac{1}{2} + i)(1 - 2i)^n.$$

Théorème 1.2.2. *[3] Soient $c_1, c_2, \cdots, c_k$ des nombres réels.Supposons que l'équation caractéristique :*

$$r^k - c_1 r^{k-1} - \cdots - c_k = 0. \tag{1.6}$$

Admette t racines distinctes $r_1, r_2, \cdots, r_t$ de multiplicités respectivement $m_1, m_2, \cdots, m_t$, telles que $m_i \geq 1$ et $m_1 + m_2 + \cdots + m_t = k$. Alors, une séquence a_n est une solution de la relation de récurrence

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}. \tag{1.7}$$

Si et seulement si :

$$\begin{aligned} a_n \quad &= \quad (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} n + \cdots + \alpha_{1,m_1-1} n^{m_1-1}) r_1^n \\ &+ \quad (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1} n + \cdots + \alpha_{2,m_2-1} n^{m_2-1}) r_2^n \\ &+ \quad \cdots + (\alpha_{t,0} + \alpha_{t,1} n + \cdots + \alpha_{t,m_t-1} n^{m_t-1}) r_t^n. \end{aligned} \tag{1.8}$$

où les $\alpha_{i,j}$ sont des constantes telles que $1 \leq i \leq t$, $0 \leq j \leq m_i - 1$.

Exemple 1.2.3. *Soit la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} a_n = 15a_{n-2} - 10a_{n-3} - 60a_{n-4} + 72a_{n-5} \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 6 \\ a_2 = 9 \\ a_3 = -110 \\ a_4 = -45 \end{cases}$$

L'équation caractéristique associée est : $r^5 - 15r_3 + 10r_2 + 60r - 72 = 0$.

Cette dernière admette deux racines $r_1 = 2$ (la multiplicite est 3), $r_2 = -3$ (la multiplicite est

2*), alors la solution générale s'écrit sous la forme suivante :*

$$a_n = (c_1 + c_1 n + c_1 n^2)(2)^n + (c_4 + c_5 n)(-3)^n.$$

Déterminer les valeurs de c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 *:*

pour $n = 0 \Rightarrow c_1 + c_4 = 1$

pour $n = 1 \Rightarrow 2(c_1 + c_2 + c_3) - 3(c_4 + c_5) = 6$

pour $n = 2 \Rightarrow 4(c_1 + 2c_2 + 4c_3) + 9(c_4 + 2c_5) = 9$

pour $n = 3 \Rightarrow 8(c_1 + 3c_2 + 9c_3) - 27(c_4 + 3c_5) = -110$

pour $n = 4 \Rightarrow 2(c_1 + c_2 + c_3) - 3(c_4 + c_5) = 6.$

On obtient

$$\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 3 \\ c_3 = -2 \\ c_4 = -1 \\ c_5 = 1 \end{cases}$$

Donc :

$$a_n = (2 + 3n - 2n^2)2^n + (n - 1)(-3)^n.$$

1.2.2 Relations de récurrence linéaire non homogène

Définition 1.2.2. *[3] Une relation de récurrence linéaire non-homogène d'ordre k à coefficients constants est sous la forme :*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n), \tag{1.9}$$

où $c_1, c_2, \cdots, c_k$ *sont des nombres réels,* c_k *est non nul et* $F(n)$ *est une fonction non nulle de* n*. La relation de récurrence*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}, \tag{1.10}$$

est appellée la relation de récurrence homogène associée.

Exemple 1.2.4.

$$a_n = -4a_{n-1} + 21a_{n-2} + n3^n.$$

Est une relation de récurrence linéaire non-homogène.

Définition 1.2.3. *[3] Une solution particulière d'une relation de récurrence non homogène est une séquence qui vérifie l'équation sans nécessairement vérifier les conditions initiales.*

Théorème 1.2.3. *[3] Si $\{a_n^{(p)}\}$ est une solution particulière d'une relation de récurrence linéaire non homogène à coefficients constantes*

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k} + F(n), \tag{1.11}$$

alors toute solution est de la forme $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ où $\{a_n^{(h)}\}$ est la solution de la relation de récurrence homogène associée

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k}. \tag{1.12}$$

Théorème 1.2.4. *[4] Soit $F(n) = p(n)s^n$, le terme non homogène d'une relation de récurrence, où $p(n)$ est un polynôme non nul d'un certain degré et s un réel non nul*

- *Si le réel s est une racine de multiplicité m du polynôme caractéristique de la relation de récurrence homogène associée, alors il y a une solution particulière de la forme*

$$(u_n)^p = n^mQ(n)s^n. \tag{1.13}$$

- *Si le réel s n'est pas une racine du polynôme caractéristique de la relation de récurrence homogène associée, alors il y'a un solution particulière de la forme*

$$(u_n)^p = Q(n)s^n. \tag{1.14}$$

Remarque 1.2.2. *Dans les deux cas $Q(n)$ un polynôme de même degré de $p(n)$*

Exemple 1.2.5. *Soit la relation de récurrence :*

$$\begin{cases} a_n = -4a_{n-1} + 21a_{n-2} + 8(3)^n \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

La solution générale de cette relation est :

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}.$$

telle que $a_n^{(h)}$ *est la solution homogène de l'équation* $a_n = -4a_{n-1} + 21a_{n-2}$.
Alors, l'équation caractéristique associée est $r^2 - 4r - 21 = 0$, *qui admet deux racine* $r_1 = 3$ *et* $r_2 = -7$, *donc*

$$a_n^{(h)} = c_1(3)^n + c_2(-7)^n.$$

Et puisque 3 *est une racine de l'équation caractéristique de la relation de récurrence homogène associée, alors d'après le théorème 1.2.4 la solution s'écrit comme suite :* $a_n^{(p)} = cn(3)^n$
Nous avons :

$$a_n + 4a_{n-1} - 21a_{n-2} = 5(4)^n,$$

$$\textit{alors } c(3)^n + 4c(n-1)(3)^{n-1} - 21c(n-2)(3)^{n-2} - 8(3)^n = 0.$$

On obtient $c = \frac{12}{5}$, *alors :*

$$a_n = c_1(-7)^n + c_2(3)^n + \frac{12}{5}n(3)^n.$$

On a
pour $n = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1$
pour $n = 1 \Rightarrow (-7)c_1 + 3c_2 = -\frac{26}{5}$,
on obtient alors

$$c_1 = \frac{41}{50} \quad \textit{et} \quad c_2 = \frac{9}{50},$$

D'où

$$a_n = \frac{41}{50}(-7)^n - \frac{9}{50}(3)^n + \frac{12}{5}n(3)^n.$$

1.2.3 Relations de récurrences associées à certains nombres

Définition 1.2.4. *[5] Les nombre de k-Fibonacci sont définis par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} F_{k,n} = kF_{k,n-1} + F_{k,n-2}, \forall n \geq 2 \\ F_{k,0} = 0, F_{k,1} = 1 \end{cases} \tag{1.15}$$

Les premiers termes des nombres de k-Fibonacci sont donnés par [5] :

$$\begin{aligned} F_{k,0} &= 0 \\ F_{k,1} &= 1 \\ F_{k,2} &= k \\ F_{k,3} &= k^2 + 1 \\ F_{k,4} &= k^3 + 2k \\ F_{k,5} &= k^4 + 3k^2 + 2 \\ F_{k,6} &= k^5 + 4k^3 + 3k. \end{aligned}$$

Définition 1.2.5. *[5] Les nombre de k-Lucas sont définis par la relation de récurrence suivante [6] :*

$$\begin{cases} L_{k,n} = kL_{k,n-1} + L_{k,n-2}, \forall n \geq 2 \\ L_{k,0} = 2, L_{k,1} = k \end{cases} \tag{1.16}$$

Les premiers termes des nombres de k-Lucas sont donnés par [6] :

$$\begin{aligned} L_{k,0} &= 2 \\ L_{k,1} &= k \\ L_{k,2} &= k^2 + 2 \\ L_{k,3} &= k^3 + 3k \\ L_{k,4} &= k^4 + 4k^2 + 2 \\ L_{k,5} &= k^5 + 5k^3 + 5k. \end{aligned}$$

Définition 1.2.6. *[5] Les nombre de k-Jacobsthal sont définis par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} J_{k,n} = kJ_{k,n-1} + 2J_{k,n-2}, \forall n \geq 2 \\ J_{k,0} = 0, J_{k,1} = 1 \end{cases} \tag{1.17}$$

Les premiers termes des nombres de k-Jacobsthal sont donnés par [7] :

$$\begin{aligned} J_{k,0} &= 0 \\ J_{k,1} &= 1 \\ J_{k,2} &= k \\ J_{k,3} &= k^2+2 \\ J_{k,4} &= k^3+4k \\ J_{k,5} &= k^4+6k^2+4 \\ J_{k,6} &= k^5+8k^3+12k. \end{aligned}$$

Définition 1.2.7. *[5] Les nombre de k-Jacobsthal-Lucas sont définis par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} j_{k,n} = kj_{k,n-1} + 2j_{k,n-2}, \forall n \geq 2 \\ j_{k,0} = 2, \, j_{k,1} = k \end{cases} \tag{1.18}$$

Les premiers termes des nombres de k-Jacobsthal-Lucas sont donnés par [7] :

$$\begin{aligned} j_{k,0} &= 2 \\ j_{k,1} &= k \\ j_{k,2} &= k^2+4 \\ j_{k,3} &= k^3+6k \\ j_{k,4} &= k^4+8k^2+8 \\ j_{k,5} &= k^5+10k^3+20k \\ j_{k,6} &= k^6+12k^4+36k^2+16. \end{aligned}$$

Définition 1.2.8. *[5] Les nombre de k-Pell sont définis par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} P_{k,n} = 2P_{k,n-1} + kP_{k,n-2}, \forall n \geq 2 \\ P_{k,0} = 0, P_{k,1} = 1 \end{cases} \tag{1.19}$$

Les premiers termes des nombres de k-Pell sont donnés par [8] :

$$\begin{aligned} P_{k,0} &= 0 \\ P_{k,1} &= 1 \\ P_{k,2} &= 2 \\ P_{k,3} &= k+4 \\ P_{k,4} &= 4k+8 \\ P_{k,5} &= k^2+12k+16 \\ P_{k,6} &= 3k^2+28k+32 \\ P_{k,7} &= k^3+18k^2+72k+64. \end{aligned}$$

Définition 1.2.9. *[5] Les nombre de k-Pell-Lucas sont définis par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} Q_{k,n} = 2Q_{k,n-1} + kQ_{k,n-2}, \forall n \geq 2 \\ Q_{k,0} = 2, Q_{k,1} = 2 \end{cases} \tag{1.20}$$

Les premiers termes des nombres de k-Pell-Lucas sont donnés par [8] :

$$\begin{aligned} Q_{k,0} &= 2 \\ Q_{k,1} &= 2 \\ Q_{k,2} &= 2k+4 \\ Q_{k,3} &= 6k+8 \\ Q_{k,4} &= 4k+8 \\ Q_{k,5} &= 10k^2+40k+32 \\ Q_{k,6} &= 2k^3+36k^2+96k+64 \\ Q_{k,7} &= 14k^3+112k^2+224k+128. \end{aligned}$$

1.3 Fonctions Génératrices

1.3.1 Fonctions génératrices ordinaires (FGO)

Définition 1.3.1. *[9] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres on associée à cette suite la série génératrice ordinaire suivante :*

$$A(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{1.21}$$

La fonction définie par cette suite est appelée fonction génératrice ordinaire associée à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exemple 1.3.1.

- *La FGO de $(1, 1, 1, \cdots)$ est*

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

- *La FGO de la suite (2^n) est*

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (2^n) x^n \\ &= 1 + 2x + 2^2 + \cdots \end{aligned}$$

.

Proposition 1.3.1. *[9] Pour $k \in \mathbb{N}$ fixée la F.G.O de $\left(\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est*

$$\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

1.3.2 Fonctions génératrices ordinaires associées à certains nombres

Théorème 1.3.1. *[5] La fonction génératrice des nombres de k-Fibonacci est donné par :*

$$F(z) = \frac{z}{1-kz-z^2}.$$

Démonstration.

On pose

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} F_{k,n} z^n.$$

Alors

$$\begin{aligned}
F(z) &= F_{k,0} + F_{k,1} z + \sum_{n\geq 2} F_{k,n} z^n \\
&= 0 + z + \sum_{n\geq 2} (kF_{k,n-1} + F_{k,n-2}) z^n \\
&= z + k \sum_{n\geq 2} F_{k,n-1} z^n + \sum_{n\geq 2} F_{k,n-2} z^n \\
&= z + kz \sum_{n\geq 1} F_{k,n} z^n + z^2 \sum_{n\geq 2} F_{k,n-2} z^{n-2} \\
&= z + kz \sum_{n\geq 0} F_{k,n} z^n + z^2 \sum_{n\geq 0} F_{k,n} z^n \\
&= z + zkF(z) + z^2 F(z).
\end{aligned}$$

D'où

$$F(z) = \frac{z}{1 - kz - z^2}.$$

□

Théorème 1.3.2. *[5] La fonction génératrice des nombres de k-Lucas est donné par :*

$$L(z) = \frac{2 - kz}{1 - kz - z^2}.$$

Démonstration.

On pose

$$L(z) = \sum_{n\geq 0} L_{k,n} z^n.$$

Alors

$$\begin{aligned}
L(z) &= L_{k,0} + L_{k,1} z + \sum_{n\geq 2} L_{k,n} z^n \\
&= 2 + kz + \sum_{n\geq 2} (L_{k,n-1} + L_{k,n-2}) z^n \\
&= 2 + kz + \sum_{n\geq 2} L_{k,n-1} z^n + \sum_{n\geq 2} L_{k,n-2} z^n \\
&= 2 + kz + kz \sum_{n\geq 1} L_{k,n} z^n + z^2 \sum_{n\geq 0} L_{k,n} z^n \\
&= 2 + kz + kz \sum_{n\geq 0} L_{k,n} z^n + z^2 \sum_{n\geq 0} L_{k,n} z^n \\
&= 2 + kz + zkL(z) + z^2 L(z).
\end{aligned}$$

D'où

$$L(z) = \frac{2 - kz}{1 - kz - z^2}.$$

□

Théorème 1.3.3. *[5] La fonction génératrice des nombres de k-Jacobstal est :*

$$J(z) = \frac{z}{1 - kz - 2z^2}.$$

Démonstration.

Posons

$$J(z) = \sum_{n\geq 0} J_{k,n} z^n.$$

Alors

$$\begin{aligned}
J(z) &= J_{k,0} + J_{k,1}z + \sum_{n\geq 2} J_{k,n} z^n \\
&= 0 + z + \sum_{n\geq 2} (kJ_{k,n-1} + 2J_{k,n-2}) z^n \\
&= z + k \sum_{n\geq 2} J_{k,n-1} z^n + 2 \sum_{n\geq 2} J_{k,n-2} z^n \\
&= z + kz \sum_{n\geq 2} J_{k,n-1} z^{n-1} + 2 \sum_{n\geq 2} J_{k,n-2} z^{n-2} \\
&= z + kz \sum_{n\geq 1} J_{k,n} z^n + 2z^2 \sum_{n\geq 0} J_{k,n} z^n \\
&= z + kz \sum_{n\geq 0} J_{k,n} z^n + 2z^2 \sum_{n\geq 0} J_{k,n} z^n \\
&= z + kzJ(z) + 2z^2 J(z).
\end{aligned}$$

D'où

$$J(z) = \frac{z}{1 - kz - 2z^2}.$$

□

Théorème 1.3.4. *[5] La fonction génératrice des nombres de k-Jacobstal-Lucas est :*

$$j(z) = \frac{2 - kz}{1 - kz - 2z^2}.$$

Démonstration.

Posons

$$j(z) = \sum_{n\geq 0} j_{k,n} z^n.$$

Alors

$$\begin{aligned} j(z) &= j_{k,0} + j_{k,1}z + \sum_{n\geq 2} j_{k,n}z^n \\ &= 2 + kz + \sum_{n\geq 2}(kj_{k,n-1} + 2j_{k,n-2})z^n \\ &= 2 + kz + k\sum_{n\geq 2} j_{k,n-1}z^n + 2\sum_{n\geq 2} j_{k,n-2}z^n \\ &= 2 + kz + kz\sum_{n\geq 2} j_{k,n-1}z^{n-1} + 2z^2\sum_{n\geq 2} j_{k,n-2}z^{n-2} \\ &= 2 + kz + kz\sum_{n\geq 1} j_{k,n}z^n - 2kz + 2z^2\sum_{n\geq 0} j_{k,n}z^n \\ &= 2 - kz + kz\sum_{n\geq 0} j_{k,n}z^n + 2z^2\sum_{n\geq 0} j_{k,n}z^n \\ &= 2 - kz + kzj(z) + 2z^2 j(z). \end{aligned}$$

D'où

$$j(z) = \frac{2 - kz}{1 - kz - 2z^2}.$$

□

Théorème 1.3.5. *[5] La fonction génératrice des nombres de k-Pell est :*

$$P(z) = \frac{z}{1 - 2z - kz^2}.$$

Démonstration.

Posons

$$P(z) = \sum_{n\geq 0} P_{k,n}z^n.$$

Alors

$$\begin{aligned} P(z) &= P_{k,0} + P_{k,1}z + \sum_{n\geq 2} P_{k,n}z^n \\ &= 0 + z + \sum_{n\geq 2}(2P_{k,n-1} + kP_{k,n-2})z^n \\ &= z + 2\sum_{n\geq 2} P_{k,n-1}z^n + k\sum_{n\geq 2} P_{k,n-2}z^n \\ &= z + 2z\sum_{n\geq 2} P_{k,n-1}z^{n-1} + kz^2\sum_{n\geq 2} P_{k,n-2}z^{n-2} \\ &= z + 2z\sum_{n\geq 1} P_{k,n}z^n + kz^2\sum_{n\geq 0} P_{k,n}z^n \\ &= z + 2z\sum_{n\geq 0} P_{k,n}z^n + kz^2\sum_{n\geq 0} P_{k,n}z^n \\ &= z + 2zP(z) + kz^2P(z). \end{aligned}$$

D'où

$$P(z) = \frac{z}{1-2z-kz^2}.$$

□

Théorème 1.3.6. *[5] La fonction génératrice de nombres de k-Pell-Lucas est :*

$$Q(z) = \frac{2-2z}{1-2z-kz^2}.$$

Démonstration.

Posons

$$Q(z) = \sum_{n\geq 0} Q_{k,n} z^n.$$

Alors

$$\begin{aligned}
Q(z) &= Q_0 + Q_1 z + \sum_{n\geq 2} Q_{k,n} z^n \\
&= 2 + 2z + \sum_{n\geq 2} (2Q_{k,n-1} + kQ_{k,n-2}) z^n \\
&= 2 + 2z + 2\sum_{n\geq 2} Q_{k,n-1} z^n + k\sum_{n\geq 2} Q_{k,n-2} z^n \\
&= 2 + 2z + 2z\sum_{n\geq 2} Q_{k,n-1} z^{n-1} + kz^2\sum_{n\geq 2} Q_{k,n-2} z^{n-2} \\
&= 2 + 2z + 2z\sum_{n\geq 1} Q_{k,n} z^n + kz^2\sum_{n\geq 0} Q_{k,n} z^n \\
&= 2 - 2z + 2z\sum_{n\geq 0} Q_{k,n} z^n + kz^2\sum_{n\geq 0} Q_{k,n} z^n \\
&= 2 - 2z + 2zQ(z) + kz^2 Q(z).
\end{aligned}$$

D'où

$$Q(z) = \frac{2-2z}{1-2z-kz^2}.$$

□

1.4 Fonctions symétriques

Définition 1.4.1. *[11] Une fonction $f(x_1, x_2, ...x_n)$ en variable est symétriques si pour tout permutations de l'ensemble d'indice $(1, 2, ..., n)$ l'égalité suivante est vérifiée :*

$$f(x_1, x_2, ...x_n) = f(x_{\delta(1)}, x_{\delta(2)}, ...x_{\delta(n)}).$$

1.4.1 Fonctions symétriques élémentaires

Définition 1.4.2. *[11] On appelle k-iéme fonctions symétriques élémentaires la fonction définie par :*

$$e_k(a_1, a_2, ...a_n) = \sum_{i_1+i_2+...i_n=k} a_1^{i_1} a_2^{i_2} ... a_n^{i_n}, 0 \leq k \leq n.$$

Avec : $i_1, i_2, ...i_n = 0$ *ou* 1.

Exemple 1.4.1. *Pour une équation de degré* 3 *(*$n = 3$ *; racines :* a_1, a_2 *et* a_3*) on a :*

$$\begin{cases} e_0 &= 1, \\ e_1 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ e_2 &= a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3, \\ e_3 &= a_1a_2a_3. \end{cases}$$

Exemple 1.4.2. *Pour une équation de degré* 4 *(*$n = 4$*, racines :* a_1, a_2 *et* a_3, a_4*) on a :*

$$\begin{cases} e_0 &= 1, \\ e_1 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \\ e_2 &= a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4, \\ e_3 &= a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_3a_4 + a_2a_3a_4, \\ e_4 &= a_1a_2a_3a_4. \end{cases}$$

Proposition 1.4.1. *[12] Soit* $e_k^{(n)}$ *une fonction symétrique élementaire alors on a :*

1. $e_k^{(n+1)} = a_{n+1} e_{k-1}^{(n)} + e_k^{(n)}$.
2. $e_k^{(n)} = a_{n^{(n)}} e_{k-1}^{(n-1)} + a_{n-1} e_{k-1}^{(n-2)} + ... + a_{n-i} e_{k-1}^{n-i-1} + ... + a_k e_{k-1}^{k-1}$.

Propriété 1.4.1. *[3] Les fonctions symétriques élémentaires peuvent également se définir comme les coefficients du développement en série formelle :*

$$E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k z^k = \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k z),$$

avec $e_k(a_1, a_2, ...a_n)$ *s'annule pour* $k > 1$.

1.4.2 Fonctions symétriques complètes

Définition 1.4.3. *[11] On appelle k-iéme fonctions symétriques complètes $h_k(a_1, a_2, ...a_n)$ la fonction définie par :*

$$h_k(a_1, a_2, ...a_n) = \sum_{i_1+i_2+...+i_n=k} a_1^{i_1} a_2^{i_2} ... a_n^{i_n}; 0 \leq k \leq n.$$

Avec

$$i_1, i_2, i_3 ....i_n \geq 0.$$

Exemple 1.4.3. *Pour une équation de degré 3 ($n = 3$; racines a_1, a_2, a_3) on a :*

$$\begin{cases} h_0 &= 1, \\ h_1 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ h_2 &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_1a_2 + a_1a_3, \\ h_3 &= a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_1^3 + a_1^3a_2 + a_1^2a_3 + a_2^2a_1 + a_2^2a_1 + a_2^2a_3 + a_3^2a_1 + a_3^2a_2 + a_1a_2a_3, \\ \vdots \end{cases}$$

Exemple 1.4.4. *Pour une équation de degré 4 ($n = 4$; racines a_1, a_2, a_3, a_4) on a :*

$$\begin{cases} h_0 = 1, \\ h_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \\ h_2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_4 + a_3a_4, \\ \vdots \end{cases}$$

Proposition 1.4.2. *[12] Soit $h_k^{(n)}$ une fonction symétrique complète alors on a :*

1. $h_k^{(n+1)} = a_{n+1}h_{k-1}^{(n+1)} + h_k^{(n)}$.
2. $h_k^{(n+1)} = a_{n+1}^k + a_{n+1}^{k-1}h_1^{(n)} + a_{n+1}^{k-2}h_2^{(n)} + ...a_{n+1}h_{k-1}^{(n)} + h_k^{(n)}$.
3. $h_k^{(n)} = a_nh_{k-1}^{(n)} + a_{n-1}h_{k-1}^{n-1} + a_{n-2}h_{k-1}^{n-2} + a_{n-3}h_{k-1}^{n-3} + ... + a_1h_{k-1}^{(1)}$.

Propriété 1.4.2. *[3] On peut également définir les k-iéme fonctions symétriques complètes comme les coefficients du développment en série formelle :*

$$H(z) = \sum_{k \geq 0} h_k z^k = \frac{1}{\prod_{i \geq 1}(1 - a_i z)}.$$

Remarque 1.4.1. *[13] On a :*

$$e_0(a_1, a_2, ...a_n) = 1 \text{ et } h_0(a_1, a_2, ...a_n) = 1$$

par convention, pour $k < 0$, on a :

$$e_0(a_1, a_2, ...a_n) = 0 \text{ et } h_0(a_1, a_2, ...a_n) = 0.$$

Proposition 1.4.3. *[14] Soint $E(z)$ et $H(z)$ les fonctions symétriques élémentairs et complètes respectivement alors :*

$$E(-z)H(z) = 1.$$

Démonstration.
On a :

$$E(z) = \prod_{i\geq 1}(1 + a_i z),$$

alors

$$E(-z) = \prod_{i\geq 1}(1 - a_i z),$$

et comme

$$H(z) = \frac{1}{\prod_{i\geq 1}(1 - a_i z)},$$

on obtient alors

$$E(-z)H(z) = 1.$$

□

1.4.3 Quelques propriétés sur les fonctions symétriques

Définition 1.4.4. *[11] Considérons l'alphabet $A = \{a_1, a_2\}$, et on définit la fonction symétrique S_n qui lui associée par :*

$$S_n(A) = S_n(a_1 + a_2) = \frac{a_1^{n+1} - a_2^{n+1}}{a_1 - a_2}.$$

Avec :

$$\begin{aligned} S_0(A) &= h_0 = 1 \\ S_1(A) &= h_1 = a_1 + a_2 \\ S_2(A) &= h_2 = a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Définition 1.4.5. *[15] Soient A et B deux alphabets, on notes $S_n(A-B)$ les coefficients de la série rationnelle suivante :*

$$\frac{\prod_{b\in B}(1-bz)}{\prod_{a\in A}(1-az)} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(A-B)z^n. \tag{1.22}$$

Corollaire 1.4.1. *[16] Pour $A = \{0,0,0,...,0\}$ en (1.22) on obtient*

$$\prod_{b\in B}(1-bz) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(-B)z^n.$$

De plus, dans le cas $A = 0$, ou $B = 0$, nous avons

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A-B)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)z^n \sum_{n=0}^{\infty} S_n(-B)z^n.$$

Lemme 1.4.1. *[17] Soient A et B deux alphabets, A est de cardinal 1, on a :*

$$S_{n+k}(x-B) = x^k S_n(x-B), k \in \mathbb{N}$$

.

Proposition 1.4.4. *[11] Si A est de cardinal 1 c'est-a-dire $A = \{x\}$, alors :*

$$\frac{\prod_{b\in B}(1-bz)}{1-xz} = 1 + ... + z^{n-1}S_n(x-B) + z^n \frac{S_n(x-B)}{1-xz}.$$

Proposition 1.4.5. *[18] Soit $A = \{x\}$ on a :*

$$S_n(x-B) = x^n S_0(B) + x^{n-1}S_1(-B) + ... + S_n(-B).$$

$S_n(-B)$ Sont les coefficients du polynôme $S_n(x-B)$, pour $(0 \le i \le n)$.

Démonstration.

On a :

$$\begin{aligned} S_n(x-B) &= \sum_{k=0}^{n} S_{n-k}(x)S_k(-B) \\ &= \sum_{k=0}^{n} S_k(-B) \\ &= x^{n-k}S_0(-B) + x^{n-1} + x^{n-1}S_1(-B) + \ldots + S_n(-B). \end{aligned}$$

□

CHAPITRE 2

POLYNÔMES ORTHOGONAUX

Dans ce chapitre nous donnons quelques définitions concernant les polynômes orthogonaux utiles dans ce mémoire comme : Les polynômes de Tchebychev de quatre espèce, les polynômes de Fibonacci, les polynômes de Lucas, les polynômes de Pell , les polynômes de Pell –Lucas, les polynômes de Jacobsthales et de Jacobsthal-Lucas. Et nous déterminons leurs fonctions génératrices. En utilisant les relations de récurrences.

2.1 Polynômes orthogonaux de type de Tchebychev

2.1.1 Polynômes de Tchebychev de la première espèce $T_n(x)$

Définition 2.1.1. *[19] Les polynômes de Tchebychev de la première espèce $T_n(x)$ sont des polynômes en x de degé n définis à l'aide de la relation suivante :*

$$\cos(n\theta) = T_n(x), \text{ avec } x = \cos(\theta).$$

Pour tout x dans $[-1,1]$, alors θ appartient à $[0,\Pi]$

Les premiers termes des polynômes de Tchebychev de la première espèce $T_n(x)$ sont donnés par [20] :

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= 1\\
T_1(x) &= x\\
T_2(x) &= 2x^2-1\\
T_3(x) &= 4x^3-3x\\
T_4(x) &= 8x^4+8x^2+1\\
T_5(x) &= 16x^5-20x^3+5x\\
T_6(x) &= 32x^6-48x^4+18x^2-1\\
T_7(x) &= 64x^7-112x^5+56x^3-7x.
\end{aligned}$$

Proposition 2.1.1. *[21] Les polynômes de Tchebychev de la première espèce $T_n(x)$ vérifiant la relation de récurrence d'ordre deux suivante :*

$$\begin{cases} T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \forall n \geq 1 \\ T_0(x) = 1, T_1(x) = x \end{cases} \tag{2.1}$$

Démonstration.

Soit $x \in [-1,1]$, posons $\theta = \arccos x$, ainsi $\theta \in [0,\Pi]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ on :

$$\begin{aligned}
\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta &= 2\cos\left[\frac{(n+1)\theta + (n-1)\theta)}{2}\right]\cos\left[\frac{(n+1)\theta - (n-1)\theta}{2}\right],\\
&= 2\cos n\theta\cos\theta
\end{aligned}$$

donc

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n+1)\theta = 2\cos\theta\cos\theta.$$

D'où le résultat i.e

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x), \forall n \geq 1,$$

avec

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x.$$

□

Théorème 2.1.1. *[21] La fonction génératrice de $(T_n(x))_{n\geq 0}$ est donnée par :*

$$T(z) = \frac{1 - xz}{1 - 2xz + z^2}.$$

Démonstration.

Posons

$$T(z) = \sum_{n\geq 0} T_n(x) z^n,$$

alors la fonction génératrice associée à $T_n(x)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
T(z) &= T_0(x) + T_1(x)z + \sum_{n\geq 2} T_n(x)z^n \\
&= 1 + xz + \sum_{n\geq 2} (2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x))z^n \\
&= 1 + xz + \sum_{n\geq 2} 2xT_{n-1}(x)z^n - \sum_{n\geq 2} T_{n-2}(x)z^n \\
&= 1 + xz + 2xz \sum_{n\geq 2} T_{n-1}(x)z^{n-1} - z^2 \sum_{n\geq 2} T_{n-2}(x)z^{n-2} \\
&= 1 + xz + 2xz \sum_{n\geq 1} T_n(x)z^n - z^2 \sum_{n\geq 0} T_n(x)z^n \\
&= 1 - xz + 2xz \sum_{n\geq 0} T_n(x)z^n - z^2 \sum_{n\geq 0} T_n(x)z^n \\
&= 1 - xz + 2xT(z) - z^2 T(z).
\end{aligned}$$

D'où

$$T(z) = \frac{1 - xz}{1 - 2xz + z^2}.$$

□

2.1.2 Polynômes de Tchebychev de la deuxième espèce $U_n(x)$

Définition 2.1.2. *[19] Les polynômes de Tchebychev de la deuxième espèce $U_n(x)$ sont des polynômes en x de degré n définis à l'aide de la relation suivante :*

$$\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = U_n(x), \ \textit{avec}\ x = \cos\theta.$$

Pour tout x dans $[-1, 1]$*, alors* θ *appartient à* $[0, \Pi]$*,*

Les premiers termes des polynômes de la deuxième espèce sont donnés par [20] :

$$\begin{aligned}
U_0(x) &= 1 \\
U_1(x) &= 2x \\
U_2(x) &= 4x^2 - 1 \\
U_3(x) &= 8x^3 - 4x \\
U_4(x) &= 16x^4 - 12x^2 + 1 \\
U_5(x) &= 32x^5 - 32x^3 + 6x \\
U_6(x) &= 64x^6 - 80x^4 + 24x^3 - 1 \\
U_7(x) &= 128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x
\end{aligned}$$

Proposition 2.1.2. *[21] Les polynômes de Tchebychev de la deuxième espèce* $U_n(x)$ *vérifiant la relation de récurrence d'ordre deux suivante :*

$$\begin{cases} U_n(x) = 2xU_{n-1} + U_{n-2}, \forall n \geq 2 \\ U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x. \end{cases} \tag{2.2}$$

Démonstration.

Soit $x \in [-1, 1]$, posons $\theta = \arccos x$, ainsi $\theta \in [0, \Pi]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sin(n+1)\theta = \sin n\theta \cos n\theta + \cos n\theta \sin \theta, \tag{2.3}$$

$$\sin(n-1)\theta = \sin n\theta \cos n\theta - \cos n\theta \sin \theta. \tag{2.4}$$

Les relations (2.3) et (2.4) donnent

$$\sin(n+1)\theta + \sin(n-1)\theta = 2 \sin n\theta \cos n\theta,$$

on divise par $\sin \theta$ on obtient :

$$\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} + \frac{\sin(n-1)\theta}{\sin \theta} = 2 \cos n\theta \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}.$$

D'où le résultat i.e

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \forall n \geq 2.$$

Avec

$$U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x.$$

□

Théorème 2.1.2. *[21] La fonction génératrice de $(U_n(x))_{n\geq 0}$ est donnée par :*

$$U(z) = \frac{1}{1 - 2xz + z^2}.$$

Démonstration.

Posons

$$U_n(z) = \sum_{n\geq 0} U_n(x)z^n,$$

alors la fonction génératrice associée à $U_n(x)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
U(z) &= U_0(x) + U_1(x)z + \sum_{n\geq 2} U_n(x)z^n \\
&= 1 + 2xz + \sum_{n\geq 2}(2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x))z^n \\
&= 1 + 2xz + \sum_{n\geq 2} 2xU_{n-1}(x)z^n - \sum_{n\geq 2} U_{n-2}(x)z^n \\
&= 1 + 2xz + 2xz\sum_{n\geq 2} U_{n-1}(x)z^{n-1} - z^2\sum_{n\geq 2} U_{n-2}(x)z^{n-2} \\
&= 1 + 2xz + 2xz\sum_{n\geq 1} U_n(x)z^n - z^2\sum_{n\geq 0} U_n(x)z^n \\
&= 1 + 2xz\sum_{n\geq 0} U_n(x)z^n - z^2\sum_{n\geq 0} U_n(x)z^n \\
&= 1 + 2xU(z) - z^2U(z).
\end{aligned}$$

D'où

$$U(z) = \frac{1}{1 - 2xz + z^2}.$$

□

2.1.3 Polynômes de Tchebychev de la troisième espèce $V_n(x)$

Définition 2.1.3. *[19] Les polynômes de Tchebychev de la troisième espèce $V_n(x)$ sont des polynômes en x de degré n définis à l'aide de la relation suivante :*

$$\frac{\cos(n+\frac{1}{2})\theta}{\cos(\frac{1}{2})\theta} = V_n(x), avec, x = \cos\theta.$$

Pour tout x dans $[-1,1]$, alors θ appartient à $[0,\Pi]$,

Les premiers termes des polynômes de Tchebychev de la troisième espèce $V_n(x)$ sont donnés par [20] :

$$\begin{aligned}
V_0(x) &= 1\\
V_1(x) &= 2x-1\\
V_2(x) &= 4x^2-2x-1\\
V_3(x) &= 8x^3-4x^2-4x+1\\
V_4(x) &= 16x^4-8x^3-12x^2+4x+1\\
V_5(x) &= 32x^5-16x^4-32x^3+12x^2+6x-1\\
V_6(x) &= 64x^6-32x^5-80x^4+32x^3+24x^2-6x-1\\
V_7(x) &= 128x^7-64x^6-192x^5+80x^4+80x^3-24x^2-8x+1.
\end{aligned}$$

Proposition 2.1.3. *[21] Les polynômes de Tchebychev de la troisième espèce $V_n(x)$ vérifiant la relation de récurrence d'ordre deux suivante :*

$$\begin{cases} V_n(x) = 2xV_{n-1}(x) - V_{n-2}(x), \forall n \geq 2 \\ V_0(x) = 1, V_1(x) = 2x-1 \end{cases} \tag{2.5}$$

Démonstration.

Soit $x \in [-1,1]$, posons $\theta = \arccos x$, ainsi $\theta \in [0,\Pi]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\cos(n+\frac{1}{2})\theta = \cos\theta\cos(n-1+\frac{1}{2})\theta - \sin\theta\sin(n-1+\frac{1}{2})\theta, \tag{2.6}$$

$$\cos(n-2+\frac{1}{2})\theta = \cos\theta\cos(n-1+\frac{1}{2})\theta + \sin\theta\sin(n-1+\frac{1}{2})\theta. \tag{2.7}$$

Les relations (2.6) et (2.7) donnent

$$\cos(n+\frac{1}{2})\theta + \cos(n-2+\frac{1}{2})\theta = 2\cos\cos(n-1+\frac{1}{2})\theta.$$

On devise par $\cos\frac{1}{2}$ on obtient :

$$\frac{\cos(n+\frac{1}{2})\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta} + \frac{\cos(n-1+\frac{1}{2})\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta} = 2\cos\frac{\cos(n-1+\frac{1}{2})\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}.$$

D'où le résultat i.e

$$V_n(x) = 2xV_{n-1}(x) + V_{n-2}(x), \forall n \geq 2,$$

avec

$$V_0(x) = 1, V_1(x) = 2x - 1.$$

□

Théorème 2.1.3. *[21] La fonction génératrice de $(V_n(x))_{n\geq 0}$ est donnée par :*

$$V(z) = \frac{1+z}{1-2xz+z^2}.$$

Démonstration.

Posons

$$V(z) = \sum_{n\geq 0} V_n(x)z^n,$$

alors la fonction génératrice associée à $V_n(x)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
V(z) &= V_0(x) + V_1(x)z + \sum_{n\geq 2} V_n(x)z^n \\
&= 1 + (2x-1)z + \sum_{n\geq 2}(2xV_{n-1}(x) - V_{n-2}(x))z^n \\
&= 1 + (2x-1)z + \sum_{n\geq 2} 2xV_{n-1}(x)z^n - \sum_{n\geq 2} V_{n-2}(x)z^n \\
&= 1 + (2x-1)z + 2xz\sum_{n\geq 2} V_{n-1}(x)z^{n-1} - z^2\sum_{n\geq 2} V_{n-2}(x)z^{n-2} \\
&= 1 + (2x-1)z + 2xz\sum_{n\geq 1} V_n(x)z^n - z^2\sum_{n\geq 0} V_n(x)z^n \\
&= 1 - z + 2xz\sum_{n\geq 0} V_n(x)z^n - z^2\sum_{n\geq 0} V_n(x)z^n \\
&= 1 - z + 2xzV(z) - z^2V(z).
\end{aligned}$$

D'où

$$V(z) = \frac{1-z}{1-2xz+z^2}.$$

□

2.1.4 Polynômes de Tchebychev de la quatrième espèce $W_n(x)$

Définition 2.1.4. *[19] Les polynômes de Tchebychev de la quatrième espèce $W_n(x)$ sont des polynômes en x de degré n définis à l'aide de la relation suivante :*

$$\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{\sin(\frac{1}{2})\theta} = W_n(x), avec, x = \cos\theta.$$

Pour tout x dans $[-1,1]$, alors θ appartient à $[0,\Pi]$.

Les premiers termes des polynômes de Tchebychev de la quatrième espèce $w_n(x)$ sont donnés par [20] :

$$W_0(x) = 1$$
$$W_1(x) = 2x+1$$
$$W_2(x) = 4x^2+2x-1$$
$$W_3(x) = 8x^3+4x^2-4x-1$$
$$W_4(x) = 16x^4+8x^3-12x^2-4x-1$$
$$W_5(x) = 32x^5+16x^4-32x^3-12x^2+6x+1$$
$$W_6(x) = 64x^6+32x^5-80x^4-32x^3+24x^2+6x-1$$
$$W_7(x) = 128x^7+64x^6-192x^5-80x^4+80x^3+24x^2-8x-1$$

Proposition 2.1.4. *[21] Les polynômes de Tchebychev de la quatrième espèce $W_n(x)$ vérifiant la relation de récurrence d'ordre deux suivante :*

$$\begin{cases} W_n(x) = 2xW_{n-1} - W_{n-2}, \forall n \geq 2 \\ W_0(x) = 1, W_1(x) = 2x+1 \end{cases} \tag{2.8}$$

Démonstration.

Soit $x \in [-1,1]$, posons $\theta = \arccos x$, ainsi $\theta \in [0,\Pi]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sin(n+\frac{1}{2})\theta + \sin(n-2+\frac{1}{2})\theta = 2\cos\theta\sin(n-1+\frac{1}{2})\theta, \tag{2.9}$$

on devise par $\sin\frac{1}{2}\theta$ on obtient :

$$\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{sin\frac{1}{2}\theta}+\frac{sin(n-2+\frac{1}{2})\theta}{sin\frac{1}{2}\theta}=2\cos\frac{\sin(n-1+\frac{1}{2})\theta}{sin\frac{1}{2}\theta}. \tag{2.10}$$

D'où le résultat i.e

$$W_n(x)=2xW_{n-1}(x)+W_{n-2}(x), \forall n\geq 2.$$

Avec

$$W_0(x)=1, W_1(x)=2x+1.$$

□

Théorème 2.1.4. *[21] La fonction génératrice de $(W_n(x))_{n\geq 0}$ est donnée par :*

$$W(z)=\frac{1+z}{1-2xz+z^2}.$$

Démonstration.

Posons

$$W_n(z)=\sum_{n\geq 0}W_n(x)z^n,$$

alors la fonction génératrice associée à $W_n(x)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
W(z) &= W_0(x)+V_1(x)z+\sum_{n\geq 2}W_n(x)z^n\\
&= 1+(2x+1)z+\sum_{n\geq 2}(2xW_{n-1}(x)W_{n-2}(x))z^n\\
&= 1+(2x+1)z+\sum_{n\geq 2}2xW_{n-1}(x)z^n-\sum_{n\geq 2}W_{n-2}(x)z^n\\
&= 1+(2x+1)z+2xz\sum_{n\geq 2}W_{n-1}(x)z^{n-1}-z^2\sum_{n\geq 2}W_{n-2}(x)z^{n-2}\\
&= 1+(2x+1)z+2xz\sum_{n\geq 1}W_n(x)z^n-z^2\sum_{n\geq 0}W_n(x)z^n\\
&= 1+z+2xz\sum_{n\geq 0}W_n(x)z^n-z^2\sum_{n\geq 0}W_n(x)z^n\\
&= 1+z+2xzW(z)-z^2W(z).
\end{aligned}$$

D'où

$$W(z)=\frac{1+z}{1-2xz+z^2}.$$

□

Corollaire 2.1.1. *[19] Les polynomes T_n, U_n, V_n, W_n vérifiant les propiérités suivantes :*

1. $U_n(x) = \frac{1}{2}[V_n(x) + W_n(x)]$.
2. $V_n(x) = U_n(x) - U_{n-1}(x)$.
3. $W_n(x) = U_n(x) - U_{n-1}(x)$.
4. $V_n(x) + V_n(x) = W_n(x) - W_{n-1}(x) = 2T_n(x)$.
5. $U_n(x) - U_n(x) = 2T_n(x), \forall n \geq 2$.

2.2 Polynômes de Fibonacci

Définition 2.2.1. *[22] La suite des polynômes de Fibonacci $(F_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est défiinie par la relation de rècurrence suivante :*

$$\begin{cases} F_n(x) = 2F_{n-1}(x) + F_{n-2}(x), \forall n \geq 2 \\ F_0(x) = 0, F_1(x) = 1. \end{cases} \tag{2.11}$$

Les premiers termes des polynômes de Fibonacci sont donnés par [22] :

$$\begin{aligned} F_0(x) &= 0 \\ F_1(x) &= 1 \\ F_2(x) &= x \\ F_3(x) &= x^2 + 1 \\ F_4(x) &= x^3 + 2x \\ F_5(x) &= x^4 + 3x^2 + 1 \\ F_6(x) &= x^5 + 4x^2 + 3x \\ F_7(x) &= x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1. \end{aligned}$$

Théorème 2.2.1. *[22] La fonction génératrice des polynômes de Fibonacci est donné par :*

$$F(z) = \frac{z}{1 - xz - z^2}.$$

Démonstration.

Posons

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} F_n(x)z^n,$$

alors :

$$\begin{aligned}
F(z) &= F_0(x) + F_1(x)z + \sum_{n\geq 2} F_n(x)z^n \\
&= 0 + z + \sum_{n\geq 2} (xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x))z^n \\
&= z + \sum_{n\geq 2} xF_{n-1}(x)z^n + \sum_{n\geq 2} F_{n-2}(x)z^n \\
&= z + xz \sum_{n\geq 2} F_{n-1}(x)z^{n-1} + z^2 \sum_{n\geq 2} F_{n-2}(x)z^{n-2} \\
&= z + xz \sum_{n\geq 1} F_n(x)z^n + z^2 \sum_{n\geq 0} F_n(x)z^n \\
&= z + xz \sum_{n\geq 0} F_n(x)z^n + z^2 \sum_{n\geq 0} F_n(x)z^n \\
&= z + xzF(z) + z^2F(z).
\end{aligned}$$

D'où

$$F(z) = \frac{z}{1 - xz - z^2}.$$

□

2.3 Polynômes de Lucas

Définition 2.3.1. *[23] La suite des polynômes de Lucas $(L_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sont défiinis par la relation de rècurrence suivante :*

$$\begin{cases} L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x), \forall n \geq 2 \\ L_0(x) = 2, L_1(x) = x \end{cases} \tag{2.12}$$

Les premiers termes des polynômes de Lucas sont donnés par [24] :

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= 2 \\
L_1(x) &= x \\
L_2(x) &= x^2 + 2 \\
L_3(x) &= x^3 + 3x \\
L_4(x) &= x^4 + 4x^2 + 2 \\
L_5(x) &= x^5 + 5x^3 + 5x \\
L_6(x) &= x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 2.
\end{aligned}$$

Proposition 2.3.1. *[25] La fonction génératrice des polynômes de Lucas est :*

$$L(z) = \frac{2 - xz}{1 - xz - z^2}.$$

Démonstration.
Posons

$$L(z) = \sum_{n \geq 0} L_n(x) z^n,$$

alors la fonction génératrice associée à $L_n(x)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
&= 2 + xz + \sum_{n\geq 2} (xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x))z^n \\
&= 2 + xz + \sum_{n\geq 2} xL_{n-1}(x)z^n + \sum_{n\geq 2} L_{n-2}(x)z^n \\
&= 2 + xz + xz \sum_{n\geq 2} L_{n-1}(x)z^{n-1} + z^2 \sum_{n\geq 2} L_{n-2}(x)z^{n-2} \\
&= 2 + xz + xz \sum_{n\geq 1} L_n(x)z^n + z^2 \sum_{n\geq 0} L_n(x)z^n \\
&= 2 + xz + xz \sum_{n\geq 0} L_n(x)z^n - 2xz + z^2 \sum_{n\geq 0} L_n(x)z^n \\
&= 2 + xz + xzL(z) + z^2 L(z).
\end{aligned}$$

D'où

$$L(z) = \frac{2 - xz}{1 - xz - z^2}.$$

□

2.4 Polynômes de Pell

Définition 2.4.1. *[23] La suite des polynômes de Pell* $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *sont défénis par la relation de recurrence suivante :*

$$\begin{cases} P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x), \forall n \geq 2 \\ P_0(x) = 0, P_1(x) = 1 \end{cases} \tag{2.13}$$

Les premiers termes de polynômes de Pell sont donnés par [26] :

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 0 \\ P_1(x) &= 1 \\ P_2(x) &= 2x \\ P_3(x) &= 4x^2 + 1 \\ P_4(x) &= 8x^3 + 4x \\ P_5(x) &= 16x^4 + 12x^2 + 1 \\ P_6(x) &= 32x^5 + 32x^3 + 6x \\ P_7(x) &= 64x^6 + 80x^4 + 24x^2 + 1. \end{aligned}$$

Proposition 2.4.1. *[25] La fonction générqtrice des polynômes de Pell est :*

$$P(z) = \frac{z}{1 - 2xz - z^2}.$$

Démonstration.

Posons

$$P(z) = \sum_{n\geq 0} p_n(x)z^n,$$

alors la fonction génératrice associée à $P_n(x)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
P(z) &= P_0(x) + P_1(x)z + \sum_{n\geq 2} P_n(x)z^n \\
&= 0 + z + \sum_{n\geq 2}(2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x))z^n \\
&= z + \sum_{n\geq 2} 2xP_{n-1}(x)z^n + \sum_{n\geq 2} P_{n-2}(x)z^n \\
&= z + 2xz\sum_{n\geq 2} P_{n-1}(x)z^{n-1} + z^2\sum_{n\geq 2} P_{n-2}(x)z^{n-2} \\
&= z + 2xz\sum_{n\geq 1} P_n(x)z^n + z^2\sum_{n\geq 0} P_n(x)z^n \\
&= z + 2xz\sum_{n\geq 0} P_n(x)z^n + z^2\sum_{n\geq 0} P_n(x)z^n \\
&= z + 2xzP(z) + z^2P(z).
\end{aligned}$$

D'où

$$P(z) = \frac{z}{1-2xz-z^2}.$$

□

2.5 Polynômes de Jacobsthal

Définition 2.5.1. *[23] La suite des polynômes de Jacobsthal $(J_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est défiinie par la relation de rècurrence suivante :*

$$\begin{cases} J_n(x) = J_{n-1}(x) + 2xJ_{n-2}(x), \forall n \geq 2 \\ J_0(x) = 0, J_1(x) = 1 \end{cases} \tag{2.14}$$

Proposition 2.5.1. *[25] La fonction génératrice des polynômes de Jacobsthal est :*

$$J(z) = \frac{z}{1-z-2xz^2}.$$

Démonstration.

Posons

$$J(z) = \sum_{n\geq 0} J_n(x)z^n,$$

Alors la fonction génératrice associée à $J_n(x)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
J(z) &= J_0(x) + J_1(x)z + \sum_{n\geq 2} J_n(x)z^n \\
&= 0 + z + \sum_{n\geq 2} (J_{n-1}(x) + 2xJ_{n-2}(x))z^n \\
&= z + \sum_{n\geq 2} J_{n-1}(x)z^n + \sum_{n\geq 2} 2xJ_{n-2}(x)z^n \\
&= z + z\sum_{n\geq 2} J_{n-1}(x)z^{n-1} + 2xz^2 \sum_{n\geq 2} J_{n-2}(x)z^{n-2} \\
&= z + z\sum_{n\geq 1} J_n(x)z^n + 2xz^2 \sum_{n\geq 0} J_n(x)z^n \\
&= z + z\sum_{n\geq 0} J_n(x)z^n + 2xz^2 \sum_{n\geq 0} J_n(x)z^n \\
&= z + zJ(z) + 2xz^2 J(z).
\end{aligned}$$

D'où

$$J(z) = \frac{z}{1 - z - 2xz^2}.$$

□

2.6 Polynômes de Jacobsthal-Lucas

Définition 2.6.1. *[23] La suite des polynômes de Jacobsthal-Lucas $(j_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est défiinie par la relation de rècurrence suivante :*

$$\begin{cases} j_n(x) = j_{n-1}(x) + 2xj_{n-2}(x), \forall n \geq 2 \\ j_0(x) = 2, j_1(x) = 1 \end{cases} \tag{2.15}$$

Théorème 2.6.1. *[25] La fonction génératrice des polynômes de Jacobsthal-Lucas est :*

$$j(z) = \frac{2 - z}{1 - z - 2xz^2}.$$

Démonstration.

Posons

$$j(z) = \sum_{n\geq 0} j_n(x)z^n,$$

alors la fonction génératrice associée à $j_n(x)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
j(z) &= j_0(x) + j_1(x)z + \sum_{n\geq 2} j_n(x)z^n \\
&= 2 + z + \sum_{n\geq 2} (j_{n-1}(x) + 2x j_{n-2}(x))z^n \\
&= 2 + z + \sum_{n\geq 2} j_{n-1}(x)z^n + \sum_{n\geq 2} 2x j_{n-2}(x)z^n \\
&= 2 + z + z\sum_{n\geq 2} j_{n-1}(x)z^{n-1} + 2xz^2\sum_{n\geq 2} j_{n-2}(x)z^{n-2} \\
&= 2 + z + z\sum_{n\geq 1} j_n(x)z^n + 2xz^2\sum_{n\geq 0} j_n(x)z^n \\
&= 2 + z + z\sum_{n\geq 0} j_n(x)z^n - 2z + 2xz^2\sum_{n\geq 0} j_n(x)z^n \\
&= 2 - z + zj(z) + 2xz^2 j(z).
\end{aligned}$$

D'où

$$j(z) = \frac{2-z}{1-z-2xz^2}.$$

□

Théorème 2.6.2. *[27] Soit $(P_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes normalisée c-à-d :*

$$P_n(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} + a_{n-3}t^{n-3} + \ldots$$

Alors $(P_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes orthogonaux normalisée si et seulement s'il existe deux suites de nombres complexes $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de réccurence suivante :

$$\begin{cases} P_{n+1}(t) = (t-\alpha_n)P_n(t) - \beta_n P_{n-1}(t), \forall n \geq 0 \\ P_{-1}(t) = 0, P_0(t) = 1 \end{cases}$$

Théorème 2.6.3. *[27] Soit $(P_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes orthogonaux alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $P_n(-t) = (-1)^n P_n(t)$
2. $P_{n+1}(t) = tP_n(t) - \beta_n P_{n-1}(t), P_{-1}(t) = 0, P_0(t) = 1, n \geq 1$

CHAPITRE 3

FONCTIONS GÉNÉRATRICES DE CERTAINS NOMBRES ET POLYNÔMES ORTHOGONAUX

Dans ce chapitre nous présentons un théorème basé sur les fonctions symétriques afin de déterminer des nouvelles fonctions génératrices des produits de fonctions symétriques de trois variables et certains nombres comme : $\sum_{n\geq 0} S_n(A)P_{k,n}z^n$, $\sum_{n\geq 0} S_n(A)J_{k,n}z^n$, $\sum_{n\geq 0} S_n(A)j_{k,n}z^n$,... Ainsi que les fonctions génératrices des produits de fonctions symétriques de trois variable et les polynômes orthogonaux comme :
$\sum_{n\geq 0} S_n(A)F_n(x)z^n$, $\sum_{n\geq 0} S_n(A)U_n(x)z^n$, $\sum_{n\geq 0} S_n(A)Q_n(x)z^n$,...

3.1 Définitions et notations

Définition 3.1.1. *[28] Nous définissons l'operateur $\delta^k_{a_1a_2}$ appelé symétriseur par :*

$$\delta^k_{a_1a_2}(f) = \frac{a_1^k f(a_1) - a_2^k f(a_2)}{a_1 - a_2}. \tag{3.1}$$

Remarque 3.1.1. *Si $f(a_1) = a_1$, l'opérateur (3.1). nous donne :*

$$\begin{aligned}\delta^k_{a_1a_2}(a_1) &= S_k(a_1 + a_2)\\ &= h_k(a_1, a_2).\end{aligned}$$

Définition 3.1.2. *[28] Soit f une fonction réelle, la différence divissé est définie par :*

$$\delta_{a_i,a_{i+1}}(f) = \frac{f(a_1, ..., a_i, a_{i+1}, ..., a_n) - f(a_1, ...a_{i+1}, a_i, a_{i+2}, ...a_n)}{a_i + a_{i+1}}.$$

Proposition 3.1.1. *[29] Soit $E = \{e_1, e_2\}$, on définit l'operateur $\delta^k_{e_1e_2}$, par :*

$$\delta^k_{e_1e_2} f(e_1) = h_{k-1}(e_1, e_2) f(e_1) + e_2^k \partial_{e_1e_2} f(e_1),$$

pour tout $k \in \mathbb{K}$.

Proposition 3.1.2. *[32][33] $\forall n \in \mathbb{N}$,on a*

$$\begin{aligned}1)P_{k,-n} &= (-1)^{n+1} P_{k,n}.\\ 2)Q_{k,-n} &= (-1)^{n+1} Q_{k,n}.\\ 3)J_{k,-n} &= (-1)^{n+1} J_{k,n}.\end{aligned}$$

3.2 Formule principale

Théorème 3.2.1. *[30] Etants donné deux alphabets $E = \{e_1, e_2\}$ et $A = \{a_1, a_2, ...a_n\}$, alors :*
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n^{(n)}(a_1, a_2, ...a_n) h^{(2)}_{k+n-1}(e_1, e_2) z^n$

$$= \frac{\sum\limits_{n=0}^{k-1} S_n(-A) e_1^n e_2^n h^{(2)}_{k-n-1}(e_1, e_2) z^n - (e_1e_2z)^k \sum\limits_{n=0}^{\infty} S_{n+k+1}(-A) h_n^{(2)}(e_1, e_2) z^{n+1}}{(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)(e_1z)^n)(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)(e_2z)^n)}. \tag{3.2}$$

Démonstration.
Soient $\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(A)z^n$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)z^n$, deux séries telles que

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)z^n \sum_{n=0}^{\infty} S_n(-A)z^n = 1.$$

Soit : $f(e_1) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n^{(n)}(a_1, a_2, ...a_n)e_1^n z^n$, alors le premier membre de la formule (3.2) s'écrit :

$$\begin{aligned}
\delta_{e_1e_2}^k f(e_1) &= \delta_{e_1e_2}^k \left(\sum_{n=0}^{\infty} h_n^{(n)}(a_1, a_2, ...a_n)e_1^n z^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} h_n^{(n)}(a_1, a_2, ...a_n)h_{k+n-1}^{(2)}(e_1, e_2)z^n,
\end{aligned}$$

posons $f(e_1) = \dfrac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)e_1^n z^n}$, alors le deuxième membre de la formule (3.2) s'écrit :

$$\begin{aligned}
\partial_{e_1e_2} f(e_1) &= \frac{1}{e_1 - e_2}\left(\frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)e_1^n z^n} - \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)e_2^n z^n}\right) \\
&= \frac{1}{e_1 - e_2}\left(\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)e_2^n z^n - \sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)e_1^n z^n}{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)e_1^n z^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)e_2^n z^n\right)}\right) \\
&= \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)\dfrac{e_2^n - e_1^n}{e_1 - e_2} z^n}{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)e_1^n z^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)e_2^n z^n\right)} \\
&= -\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n h_{n-1}^{(2)}(e_1, e_2)z^n}{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)e_1^n z^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)e_2^n z^n\right)}.
\end{aligned}$$

D'aprés la proposition 3.1.1, on déduit :

$$\begin{aligned}
\delta^k_{e_1e_2} f(e_1) &= h_{k-1}(e_1,e_2)f(e_1) + e_2^k \partial_{e_1e_2} f(e_1) \\
&= \frac{h^{(2)}_{k-1}(e_1,e_2)}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)e_1^n z^n} - e_2^k \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)h^{(2)}_{n-1}(e_1,e_2)z^n}{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)e_1^n z^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)e_2^n z^n\right)} \\
&= \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)[e_2^n h^{(2)}_{k-1}(e_1,e_2) - e_2^k h^{(2)}_{n-1}(e_1,e_2)]z^n}{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)e_1^n z^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)e_2^n z^n\right)}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\delta^k_{e_1e_2} f(e_1) &= \frac{\sum\limits_{n=0}^{k-1} S_n(-A)\left[e_2^n h^{(2)}_{k-1}(e_1+e_2) - e_2^k S_{n-1}(e_1,e_2)\right]z^n}{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)e_1^n z^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n(-A)e_2^n z^n\right)} \\
&\quad + \frac{\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} S_n(-A)\left[e_2^n h^{(2)}_{k-1}(e_1+e_2) - e_2^k h^{(2)}_{n-1}(e_1,e_2)\right]z^n}{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)e_1^n z^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)e_2^n z^n\right)} \\
&= \frac{\sum\limits_{n=0}^{k-1} S_n(-A)(e_1^n e_2^n)h^{(2)}_{k-n-1}(e_1,e_2)z^n - (e_1,e_2)z^k \sum\limits_{n=0}^{\infty} S_{n+k+1}(-A)h^{(2)}_n(e_1,e_2)z^{n+1}}{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)e_1^n z^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)e_2^n z^n\right)}.
\end{aligned}$$

3.3 Applications du théorème

Posons $k = 0, 1$ et $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, dans le théorème 3.2.1. nous déduisons les théorémes suivants :

Théorème 3.3.1. *[31] Etant donnés deux alphabets $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ et $E = \{e_1, e_2\}$, alors :*

$$S_n(A)S_{n-1}(E) = \frac{-S_1(A)z - (e_1+e_2)S_2(-A)z^2 - ((e_1+e_2)^2 - e_1e_2)S_3(-A)z^3}{\prod_{a\in A}(1-ae_1z)\prod(1-ae_2z)}$$

Théorème 3.3.2. *Etant donnés deux alphabets $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ et $E = \{e_1, e_2\}$, alors :*

$$S_n(A)S_n(E) = \frac{1 - e_1e_2S_2(-A)z^2 - e_1e_2(e_1+e_2)S_3(-A)z^3}{\prod_{a\in A}(1-ae_1z)\prod(1-ae_2z)}.$$

En remplaçons e_2 par $(-e_2)$ dans les théoème 3.3.1 et 3.3.2 on obtient respectivement, les relations suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_{n-1}(e_1+[-e_2])z^n = \frac{-S_1(-A)z - (e_1-e_2)S_2(-A)z^2 - ((e_1-e_2)^2+e_1e_2)S_3(-A)z^3}{\prod_{a\in A}(1-e_1az)\prod_{a\in A}(1+e_2az)}, \tag{3.3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_n(e_1+[-e_2])z^n = \frac{1 + e_1e_2S_2(-A)z^2 + e_1e_2(e_1-e_2)S_3(-A)z^3}{\prod_{a\in A}(1-e_1az)\prod_{a\in A}(1+e_2az)}. \tag{3.4}$$

Avec

$$\prod_{a\in A}(1-e_1az)\prod_{a\in A}(1+e_2az)$$

$$\begin{aligned}
&= 1-(e_1-e_2)(a_1+a_2+a_3)z\\
&\quad +((a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)(e_1-e_2)^2 - e_1e_2((a_1+a_2+a_3)^2 - 2(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)))z^2\\
&\quad -(a_1a_2a_3(e_1-e_2)^3 - e_1e_2(e_1-e_2)((a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)(a_1+a_2-a_3) - 3a_1a_2a_3))z^3\\
&\quad +(-e_1e_2(e_1-e_2)^2a_1a_2a_3(a_1+a_2+a_3) + e_1^2e_2^2((a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)^2 - 2a_1a_2a_3(a_1+a_2+a_3)))z^4\\
&\quad -a_1a_2a_3e_1^2e_2^2(e_1-e_2)(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)z^5 - a_1^2a_2^2a_3^2e_1^3e_2^3z^6.\\
\Delta &= 1+(e_1-e_2)S_1(-A)z + \left[S_2(-A)(e_1-e_2)^2 - e_1e_2((S_1(-A))^2 - 2S_2(-A))\right]z^2\\
&\quad -\left[-S_3(-A)(e_1-e_2)^3 - e_1e_2(e_1-e_2)(-S_2(-A)S_1(-A) + 3S_3(-A))\right]z^3\\
&\quad +\left[-e_1e_2(e_1-e_2)^2S_3(-A)S_1(-A) + e_1^2e_2^2((S_2(-A))^2 - 2S_3(-A)S_1(-A))\right]z^4\\
&\quad +S_3(-A)e_1^2e_2^2(e_1-e_2)S_2(-A)z^5 - (S_3(-A))^2e_1^3e_2^3z^6.
\end{aligned}$$

3.4 Fonctions génératrices des produits de certains nombres et les fonctions symétriques de trois variables :

- De la spécialisation suivante $\begin{cases} e_1 - e_2 = 2 \\ e_1e_2 = k \end{cases}$ dans la relation (3.3) on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_{n-1}(e_1+[-e_2])z^n = \frac{-S_1(-A)z - 2S_2(-A)z^2 - (4+k)S_3(-A)z^3}{D_{P_k}}. \tag{3.5}$$

avec

$$\begin{aligned} D_{P_k} &= 1 + 2S_1(-A)z + \left[4S_2(-A) - k((S_1(-A))^2 - 2S_2(-A))\right] z^2 \\ &\quad - \left[-8S_3(-A) - 2k(-S_2(-A)S_1(-A) + 3S_3(-A))\right] z^3 \\ &\quad + \left[-4kS_3(-A)S_1(-A) + k^2((S_2(-A))^2 - 2S_3(-A)S_1(-A))\right] z^4 \\ &\quad +2k^2S_3(-A)S_2(-A)z^5 - k^3(S_3(-A))^2z^6, \end{aligned}$$

qui représente la fonction génératrice du produit des fonctions symétriques de trois variables et les nombres de k-Pell.

Proposition 3.4.1. $\forall n \in \mathbb{N}$,*on a*

$$S_n(A)P_{k,n} = S_n(A)S_{n-1}(e_1 + [-e_2]).$$

Posons $k = 1$ *dans* (3.5) *on obtient la proposition suivante :*

Proposition 3.4.2. $\forall n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice du produit des fonctions symétriques de trois variables et les nombres de Pell est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_{n-1}(e_1 + [-e_2])z^n = \frac{-S_1(-A)z - 2S_2(-A)z^2 - 5S_3(-A)z^3}{D_P}. \tag{3.6}$$

avec

$$\begin{aligned} D_P &= 1 + 2S_1(-A)z + \left[4S_2(-A) - ((S_1(-A))^2 - 2S_2(-A))\right] z^2 \\ &\quad - \left[-8S_3(-A) - 2(-S_2(-A)S_1(-A) + 3S_3(-A))\right] z^3 \\ &\quad + \left[-4S_3(-A)S_1(-A) + ((S_2(-A))^2 - 2S_3(-A)S_1(-A))\right] z^4 \\ &\quad +2S_3(-A)S_2(-A)z^5 - (S_3(-A))^2z^6. \end{aligned}$$

Théorème 3.4.1. $\forall n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice du produit des fonctions symétriques de trois variables et les nombres de k-Pell-Lucas est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)Q_{k,n}z^n = \frac{2 + 2S_1(-A)z + 2(k + 2)S_2(-A)z^2 + (6k + 8)S_3(-A)z^3}{D_{Q_k}}. \tag{3.7}$$

Démonstration.

On a

$$Q_{k,n} = 2S_n(e_1 + [-e_2]) - 2S_{n-1}(e_1 + [-e_2]), (voir[5])$$

alors

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)Q_{k,n}z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)\left[2S_n(e_1+[-e_2]) - 2S_{n-1}(e_1+[-e_2])\right] z^n \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_n(e_1+[-e_2]) - 2\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_{n-1}(e_1+[-e_2])z^n \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_n(e_1+[-e_2])z^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)P_{k,n}z^n,\end{aligned}$$

Posons $e_1 - e_2 = 2$ et $e_1e_2 = k$ dans la formule (3.4) on obtient la fonction génératrice suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_n(e_1+[-e_2])z^n = \frac{1 + kS_2(-A)z^2 + 2kS_3(-A)z^3}{D_{Q_k}}, \tag{3.8}$$

avec

$$D_{Q_k} = D_{P_k}.$$

Alors :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)Q_{k,n}z^n &= 2\frac{1 + kS_2(-A)z^2 + 2kS_3(-A)z^3}{D_{Q_k}} \\ &\quad -2\frac{-S_1(-A)z - 2S_2(-A)z^2 - (4+k)S_3(-A)z^3}{D_{Q_k}} \\ &= \frac{2 + 2S_1(-A)z + 2(k+2)S_2(-A)z^2 + (6k+8)S_3(-A)z^3}{D_{Q_k}}.\end{aligned}$$

Posons $k = 1$ dans le théorème 3.4.1 on obtient la proposition suivante : □

Proposition 3.4.3. $\forall n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice du produit des fonctions symétriques de trois variables et les nombres de Pell-Lucas est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)Q_n z^n = \frac{2 + 2S_1(-A)z + 6S_2(-A)z^2 + 14S_3(-A)}{D_Q}. \tag{3.9}$$

Avec

$$D_Q = D_P.$$

D'après la proposition précedente et les relations (3.5) et (3.7) on déduit les propositions suivantes :

Proposition 3.4.4. $\forall n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice du produit des fonctions symétriques de trois variables et les nombres de k-Pell d'indice négatif est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)P_{k,-n}z^n = \frac{-S_1(-A)z + 2S_2(-A)z^2 - (4+k)S_3(A)z^3}{D_{p'_k}} \tag{3.10}$$

avec

$$\begin{aligned} D_{P'_k} &= 1 - 2S_1(-A)z + \left[4S_2(-A) - k((S_1(-A))^2 - 2S_2(-A))\right] z^2 \\ &\quad + \left[-8S_3(-A) - 2k(-S_2(-A)S_1(-A) + 3S_3(-A))\right] z^3 \\ &\quad + \left[-4kS_3(-A)S_1(-A) + k^2((S_2(-A))^2 - 2S_3(-A)S_1(-A))\right] z^4 \\ &\quad -2k^2S_3(-A)S_2(-A)z^5 - k^3(S_3(-A))^2z^6, \end{aligned}$$

Proposition 3.4.5. $\forall n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice du produit des fonctions symétriques de trois variables et les nombres de k-Pell-Lucas d'indice négatif est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)Q_{k,-n}z^n = \frac{-2 + 2S_1(-A)z - 2(k+2)S_2(-A)z^2 + (6k+8)S_3(-A)z^3}{D_{Q'_k}}. \tag{3.11}$$

Avec

$$D_{Q'_k} = D_{P'_k}.$$

Posons $k = 1$ dans les deux proposition précédentes on obtient les corollaires suivants

Corollaire 3.4.1. $\forall n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice du produit des fonctions symétriques de trois variables et les nombres de Pell d'indice négatif est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)P_{-n}z^n = \frac{-S_1(-A)z + 2S_2(-A)z^2 - 5S_3(-A)z^3}{D_{p'}}, \tag{3.12}$$

avec

$$\begin{aligned} D_{P'} &= 1 - 2S_1(-A)z + \left[4S_2(-A) - ((S_1(-A))^2 - 2S_2(-A))\right] z^2 \\ &\quad + [-8S_3(-A) - 2(-S_2(-A)S_1(-A) + 3S_3(-A))])z^3 \\ &\quad + \left[-4S_3(-A)S_1(-A) + (S_2(-A))^2 - 2S_3(-A)S_1(-A))\right] z^4 \\ &\quad -2S_3(-A)S_2(-A)z^5 - (S_3(-A))^2z^6, \end{aligned}$$

Corollaire 3.4.2. $\forall n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice du produit des fonctions symétriques de trois variables et les nombres de Pell-Lucas d'indice négatif est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)Q_{-n}z^n = \frac{-2 + 2S_1(-A)z - 6S_2(-A)z^2 + 14S_3(-A)z^3}{D_{Q'}} \tag{3.13}$$

Avec

$$D_{Q'} = D_{P'}.$$

- *De la spécialisation suivante* $\begin{cases} e_1 - e_2 = k \\ e_1 e_2 = 2. \end{cases}$ *dans la relation* (3.3) *on obtient :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_{n-1}(e_1 + [-e_2])z^n = \frac{-S_1(-A)z - kS_2(-A)z^2 - (k^2+2)S_3(-A)z^3}{D_{J_k}}, \tag{3.14}$$

avec

$$\begin{aligned} D_{J_k} &= 1 + kS_1(-A)z + \left[S_2(-A)k^2 - 2((S_1(-A))^2 - 2S_2(-A))\right] z^2 \\ &\quad - \left[-S_3(-A)k^3 - 2k(-S_2(-A)S_1(-A) + 3S_3(-A))\right] z^3 \\ &\quad + \left[-2k^2S_3(-A)S_1(-A) + 4((S_2(-A))^2 - 2S_3(-A)S_1(-A))\right] z^4 \\ &\quad +4kS_3(-A)S_2(-A)z^5 - 8(S_3(-A))^2z^6, \end{aligned}$$

qui représente la fonction génératrice du produit des fonctions symétriques de trois variables et les nombres de k-Jacobsthal

Corollaire 3.4.3. $\forall n \in \mathbb{N}$,*on a*

$$S_n(A)J_{k,n} = S_n(A)S_{n-1}(e_1 + [-e_2]).$$

Théorème 3.4.2. $\forall n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice du produit des fonctions symétriques de trois variables et les nombres de k-Jacobsthal-Lucas est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)j_{k,n}z^n = \frac{2 + kS_1(-A)z + (2k+4)S_2(-A)z^2 + (k^2+6)S_3(-A)z^3}{D_{j_k}}. \tag{3.15}$$

Démonstration.

On a

$$j_{k,n} = 2S_n(e_1 + [-e_2]) - kS_{n-1}(e_1 + [-e_2]), (voir[28])$$

alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)j_{k,n}z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)\left[2S_n(e_1 + [-e_2]) - kS_{n-1}(e_1 + [-e_2])\right] z^n \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_n(e_1 + [-e_2])z^n - k\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_{n-1}(e_1 + [-e_2])z^n \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_n(e_1 + [-e_2])z^n - k\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)J_{k,n}z^n. \end{aligned}$$

Posons $e_1 - e_2 = k$ et $e_1 e_2 = 2$ dans la formule (3.4) on obtient la fonction génératrice suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A) S_n(e_1 + [-e_2]) z^n = \frac{1 + 2S_2(-A)z^2 + 2kS_3(-A)z^3}{D_{J_k}};$$

avec

$$D_{j_k} = D_{J_k}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A) j_{k,n} z^n &= 2\frac{1 + 2S_2(-A)z^2 + 2kS_3(-A)z^3}{D_{J_k}} \\
&\quad -k\frac{-S_1(-A)z - kS_2(-A)z^2 - (k^2+2)S_3(-A)z^3}{D_{J_k}} \\
&= \frac{2 + kS_1(-A)z + (k^2+4)S_2(-A)z^2 + k(k^2+6)S_3(-A)z^3}{D_{J_k}}.
\end{aligned}$$

Posons $k = 1$ dans (3.14) et (3.15) on obtient les propositions suivantes : □

Proposition 3.4.6. $\forall n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice du produit des fonctions symétriques de trois variables et les nombres de Jacobsthal est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A) J_n z^n = \frac{-S_1(-A)z - S_2(-A)z^2 - 3S_3(-A)z^3}{D_J}. \tag{3.16}$$

avec

$$\begin{aligned}
D_J &= 1 + S_1(-A)z + \left[S_2(-A) - 2((S_1(-A))^2 - 2S_2(-A))\right] z^2 \\
&\quad - \left[-S_3(-A) - 2(-S_2(-A)S_1(-A) + 3S_3(-A))\right] z^3 \\
&\quad + \left[-2S_3(-A)S_1(-A) + 4((S_2(-A))^2 - 2S_3(-A)S_1(-A))\right] z^4 \\
&\quad + 4S_3(-A)S_2(-A)z^5 - 8(S_3(-A))^2 z^6,
\end{aligned}$$

Proposition 3.4.7. $\forall n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice du produit des fonctions symétriques de trois variables et les nombres de Jacobsthal-Lucas est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A) j_n z^n = \frac{2 + S_1(-A)z + 6S_2(-A)z^2 + 7S_3(-A)z^3}{D_j}. \tag{3.17}$$

Avec

$$D_j = D_J.$$

3.5 Fonctions génératrices des produits de certains polynômes orthogonaux et les fonctions symétriques de trois variables

- De la spécialisation suivante $\begin{cases} e_1 - e_2 = x \\ e_1e_2 = 1 \end{cases}$ dans la relation (3.4) on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_n(e_1 + [-e_2])z^n = \frac{1 + S_2(-A)z^2 + S_3(-A)xz^3}{D_F}; \tag{3.18}$$

avec

$$\begin{aligned} D_F \;=\; & 1 + S_1(-A)xz + \left[S_2(-A)x^2 - ((S_1(-A))^2 - 2S_2(-A))\right] z^2 \\ & - \left[-S_3(-A)x^3 - x(-S_2(-A)S_1(-A) + 3S_3(-A))\right] z^3 \\ & + \left[-x^2S_3(-A)S_1(-A) + ((S_2(-A))^2 - 2S_3(-A)S_1(-A))\right] z^4 \\ & + S_3(-A)S_2(-A)xz^5 - (S_3(-A))^2z^6, \end{aligned}$$

qui représente la fonction génératrice du produit des polynômes de Fibonacci et les fonctions symétriques de trois variables.

Corollaire 3.5.1. $\forall n \in \mathbb{N}$ *on a*

$$S_n(A)F_n(x) = S_n(A)S_{n-1}(e_1 + [-e_2])z^n.$$

- *De la spécialisation suivante* $\begin{cases} e_1 - e_2 = x \\ e_1e_2 = 1 \end{cases}$ *dans la relation* (3.3) *on obtient :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_{n-1}(e_1 + [-e_2])z^n = \frac{-S_1(-A)z - S_2(-A)xz^2 - S_3(-A)(x^2+1)z^3}{D_F}; \tag{3.19}$$

qui représente une nouvelle fonction génératrice .

Théorème 3.5.1. $\forall n \in \mathbb{N}$, *la fonction génératrice du produit des polynômes de Lucas et les fonctions symétriques de trois variables est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)L_n(x)z^n = \frac{2 + xS_1(-A)z + (2+x^2)S_2(-A)xz^2 + x(3+x^2)S_3(-A)z^3}{D_F}.$$

Démonstration.

On a

$$L_n(x) = 2S_n(e_1 + [-e_2]) - xS_{n-1}(e_1 + [-e_2]), (voir[5])$$

alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)L_n(x)z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_n[2S_n(e_1 + [-e_2]) - xS_{n-1}(e_1 + [-e_2])]z^n \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_n(e_1 + [-e_2])z^n - x\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_{n-1}(e_1 + [-e_2])z^n \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)F_n(x)z^n - x\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_{n-1}(e_1 + [-e_2])z^n \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)F_n(x)z^n - x\frac{-S_1(-A)z - xS_2(-A)z^2 - (x^2+1)S_3(-A)z^3}{D_F} \\
&= 2\frac{1 + S_2(-A)z^2 + S_3(-A)xz^3}{D_F} \\
&\quad -x\frac{-S_1(-A)z - xS_2(-A)z^2 - (x^2+1)S_3(-A)z^3}{D_F} \\
&= \frac{2 + xS_1(-A)z + (2+x^2)S_2(-A)z^2 + x(3+x^2)S_3(-A)z^3}{D_F}.
\end{aligned}$$

- De la spécialisation suivante $\begin{cases} e_1 - e_2 = 2x \\ e_1e_2 = 1. \end{cases}$ dans la formule (3.3) on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_{n-1}(e_1 + [-e_2])z^n = \frac{-S_1(-A) - 2xS_2(-A)z^2 - (4x^2+1)S_3(-A)z^3}{D_{px}}, \qquad (3.20)$$

avec :

$$\begin{aligned}
D_{px} = {} & 1 + 2xS_1(-A)z + \left[S_2(-A)4x^2 - ((S_1(-A))^2 - 2S_2(-A))\right]z^2 \\
& - \left[-S_3(-A)8x^3 - 2x(-S_2(-A)S_1(-A) + 3S_3(-A))\right]z^3 \\
& + \left[4x^2S_3(-A)S_1(-A) + ((S_2(-A))^2 - 2S_3(-A)S_1(-A))\right]z^4 \\
& + S_3(-A)S_2(-A)2xz^5 - (S_3(-A))^2z^6.
\end{aligned}$$

qui représent la fonction génératrice du produit des polynômes de Pell et les fonctions symétriques de trois variables. □

Corollaire 3.5.2. $\forall n \in \mathbb{N}$ *; on a :*

$$S_n(A)P_n(x) = S_n(A)S_{n-1}(e_1 + [-e_2]).$$

Théorème 3.5.2. $\forall n \in \mathbb{N}$, *La fonction génératrice du produit des polynômes des Pell-Lucas et les fonctions symétriques de trois variables est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)Q_n(x) = \frac{2 + 2xS_1(-A)z + 2(1 + 2x^2)S_2(-A)z^2 + 2x(4x^2 + 3)S_3(-A)z^3}{D_{px}}.$$

Démonstration.

On a :

$$Q_n(x) = 2S_n(E) - 2xS_{n-1}(E)z.$$

alors :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)Q_n(x)z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)[2S_n(E) - 2xS_{n-1}(E)]z^n \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_n(E)z^n - 2x\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_{n-1}(E)z^n \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_n(E)z^n - 2x\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)P_n(x)z^n.\end{aligned}$$

-De la spécialisation suivante $\begin{cases} e_1 - e_2 &= 2x \\ e_1e_2 &= 1; \end{cases}$ Dans la formule (3.4) on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_n(e_1 + [-e_2])z^n = \frac{1 + S_2(-A)z^2 + 2xS_3(-A)z^3}{D_{px}}. \tag{3.21}$$

alors :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)Q_n(x)z^n &= 2\frac{1 + S_2(-A)z^2 + 2xS_3(-A)z^3}{D_{px}} - 2x\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)P_n(x)z^n \\ &= 2\frac{1 + S_2(-A)z^2 + 2xS_3(-A)z^3}{D_{px}} \\ &\quad -2x\frac{-S_1(-A) - 2xS_2(-A)z^2 - (-4x^2 + 1)S_3(-A)z^3}{D_{px}}. \\ &= \frac{2 + 2xS_1(-A)z + 2(1 + 2x^2)S_2(-A)z^2 + 2x(4x^2 + 3)S_3(-A)z^3}{D_{px}}.\end{aligned}$$

En remplaçant e_1 par $2e_1$ et e_2 par $(-2e_2)$ dans le théorème (3.3.2), on deduit la fonction génératrice suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_n(2e_1-[-2e_2])z^n = \frac{1+4e_1e_2S_2(-A)z^2+8e_1e_2(e_1-e_2)S_3(-A)z^3}{D}. \tag{3.22}$$

avec

$$\begin{aligned} D &= 1+2(e_1-e_2)S_1(-A)z+\left[4S_2(-A)(e_1-e_2)^2-4(e_1e_2)^2((S_1(-A))^2-2S_2(-A))\right]z^2 \\ &\quad -\left[-8S_3(-A)(e_1-e_2)^3-8e_1e_2(e_1-e_2)(-S_2(-A)S_1(-A)+3S_3(-A))\right]z^3 \\ &\quad +\left[-16e_1e_2(e_1-e_2)^2S_3(-A)S_1(-A)+16(e_1e_2)^2((S_2(-A))^2-2S_3(-A)S_1(-A))\right]z^4 \\ &\quad +32(e_1e_2)^2(e_1-e_2)S_3(-A)S_2(-A)z^5-64e_1^3e_2^3(S_3(-A))^2z^6. \end{aligned}$$

-De la spécialisation suivante $\begin{cases} e_1-e_2 &= x \\ 4e_1e_2 &= -1; \end{cases}$ Dans la formule (3.22) on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_n(e_1+[-e_2])z^n = \frac{1-S_2(-A)z^2-2xS_3(-A)z^3}{D_u}. \tag{3.23}$$

avec

$$\begin{aligned} D_u &= 1+2xS_1(-A)z+\left[4x^2S_2(-A)+((S_1(-A))^2-2S_2(-A))\right]z^2 \\ &\quad -\left[-8S_3(-A)x^3+2x(-S_2(-A)S_1(-A)+3S_3(-A))\right]z^3 \\ &\quad +\left[4x^2S_3(-A)S_1(-A)+((S_2(-A))^2-2S_3(-A)S_1(-A))\right]z^4 \\ &\quad +2xS_3(-A)S_2(-A)z^5+(S_3(-A))^2z^6. \end{aligned}$$

Qui représent la fonction génératrice du produit des polynômes de Tchebychev de deuxième espèce et les fonctions symétriques de trois variables. $\square$

Corollaire 3.5.3. *On a :*

$$S_n(A)U_n(x)z^n = S_n(A)S_n(2e_1-[-2e_2]).$$

Théorème 3.5.3. $\forall n \in \mathbb{N}$, *La fonction génératrice du produit des polynômes de Tchebychev de la première espèce et les fonctions symétriques de trois variables est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)T_n(x)z^n = \frac{1+xS_1(-A)z+(2x^2-1)S_2(-A)z^2+x(4x^2-3)S_3(-A)z^3}{D_T}$$

Démonstration.

on a :

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= S_n(2e_1 + (-3e_2)) - xS_{n-1}(2e_1 + [-2e_2]) \ (voir[34], [35]) \\
\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)T_n(x)z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)[S_n(2e_1 + [-2e_2] - xS_{n-1}(2e_1 + [-e_2])]z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_n(2e_1 + [-2e_2])z^n - x\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_{n-1}(2e_1 + [-2e_2])z^n.
\end{aligned}$$

En remplaçant e_1 par $2e_1$ et e_2 par $(-2e_2)$ dans la théorème 3.3.1 , on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_{n-1}(2e_1+[-2e_2])z^n = \frac{-S_1(-A)z - 2(e_1-e_2)S_2(-A)z^2 - (4(e_1-e_2)^2 + 4e_1e_2)S_3(-A)z^3}{D}. \tag{3.24}$$

Posons $e_1 - e_2 = x$ et $4e_1e_2 = -1$ dans la relation (3.24) on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)S_{n-1}(2e_1 + [-2e_2])z^n = \frac{-S_1(-A)z - 2xS_2(-A)z^2 - (4x^2-1)S_3(-A)z^3}{D_T}. \tag{3.25}$$

Avec

$$D_T = D_u.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)T_n(x)z^n &= \frac{1 - S_2(-A)z^2 - 2xS_3(-A)z^3}{D_T} \\
&\quad -x\frac{-S_1(-A)z - 2xS_2(-A)z^2 - (4x^2-1)S_3(-A)z^3}{D_T} \\
&= x\frac{1 - S_2(-A)z^2 - 2xS_3(-A)z^3}{D_T} \\
&\quad +\frac{xS_1(-A)z + 2x^2S_2(-A)z^2 + x(4x^2-1)S_3(-A)z^3}{D_T} \\
&= \frac{1 + xS_1(-A)z + (2x^2-1)S_2(-A)z^2 + x(4x^2-3)S_3(-A)z^3}{D_T}.
\end{aligned}$$

□

CONCLUSION

Dans ce mémoire nous avons utilisé le concept des fonctions symétriques pour déterminé des nouvelles fonctions génératrices ordinaires des produits de fonctions symétriques de trois variables et certains nombres et polynômes orthogonaux par exemples :

$\sum\limits_{n\geq 0} S_n(A)P_n(x)z^n$, $\sum\limits_{n\geq 0} S_n(A)U_n(x)z^n$, $\sum\limits_{n\geq 0} S_n(A)Q_n(x)z^n$,...

BIBLIOGRAPHIE

[1] Pierre Lissy, 114 : Anneau des séries formelles. Applications, 2010.

[2] Sylvie Rauch, Séries formelles et applications, Ter de M1 encadré par Olivier Bouillot, 2012.

[3] Lucia Moura, Recurrence Relations, Winter, 2010.

[4] K. H. Rosen, Discrete Mathematics and Its Applications, Monmouth University (and formerly ATT Laboratories).

[5] S. Boughaba, A. Boussayoud, M. Kerada, Construction of Symmetric Functions of Generalizad Fibonacci Numbre. Tamap journal of Mathematic and Statistics, Doi, 1-6, 10. 29371/2019.

[6] B. Barik, Lucas Sequence its Properties end Generalisation, National Institude of Technology Bourkela, 2013.

[7] D. Jhala, G. P. S. Rathore, K. Sisodiya, Some Properties of k-Jacobsthal Numbre with Arithmec indexes, Turkish Jornal of Analysis and numbre Theory, Vol. 2. No. 4, 119-124, 2014

[8] P. Catarino, On Generating Matrice of the k-Pell, k-Pell-Lucas and Modified k-Pell Sequences, Pure Mathematical Sciences, Vol. 3, No. 2, 17-77 , 2014.

[9] S. Fiorini, MATH-F-307 Mathématiques discrètes, Version du 5 octobre 2012.

[10] A. Boussayoud, A. Abderrezzak and P. B. Zhang, Symmetric functions for families of generating functions, Neural, Parallel, and Scientific Computations, 26(1), 53-64, 2018.

[11] M. Boulyere M. Ghedjan, les fonctions symétrique pour la généralisation des polynômes orthogonaux,Université de Jijel, 2015.

[12] JP . Chabert, Equations Algébriques et Fonctions Symétriques, P. 1-36.

[13] K. Boubelouta, M. Karada, Some identities and Generating Funtions For Padovan Numbres, Doi : 10. 29371/2019. 16. SI04.

[14] D. Foata et G. N. Han, principes de combinatoire classique, cours et exercices corrigés, université Louis Pasteur, Strasbourg Département de mathématique, 2008.

[15] A. Abderrezzak, Généralisation d'identités de Carlitz, Howard et Lehmer, Aequationes Math., 36-46, 49, 1995.

[16] A. Boussayoud , M. Kerada, S. Araci, M. Acikgoz, Symmetric Functions of The K-Fibonacci and k-Lucas Numbers, Doi : 10 . 1142/S179557121500315 .

[17] A. Boussayoud and A. Abderrezzak, On some identities and generating functions for Hadamard product, Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications, 5(2), 89-97, 2017.

[18] A. Boussayoud, A. Abderrezzak and P. B. Zhang, Symmetric functions for families of generating functions, Neural, Parallel, and Scientific Computations, 26(1), 53-64, 2018.

[19] J. C. Masan and D. C. Handscanb, chebychev polyômials, CRS press, 2003.

[20] G. Brian, The classical orthogonal polynomials, University of liverpool, Word Scientific, 177P, 2016.

[21] T. kim, Dv. Dolgy, and J. kwon, sums of finite products of polynômials of the third and fourt kinds,kim et al.Advances in Differences equation (2018), 283 : 2018.

[22] M S. Boudrioua, sur les fonction générqtrice des polynômes, université mouloud , mammeri tizi-ouzou, 2013.

[23] R. florez, N. Mukherjee, Identities for the generalized polynômials , integers, 18B 2018.

[24] O. Oriç, A neuw numerical treatment based on lucas polynômials for 1D and 2D sinh-gordan equation, commun Nonlinear sci Numer simulat , 14-25. 57, 2018

[25] N. Tuglu, E. G. kocer, A. stakhov, Bivariate fibonacci like p-polynômials, Qpplied Mathematics and computation 21710239-10246, 2011.

[26] P. Catarino, Diagonal functions of the k-pell and k-pell-lucas polynômials and identities, vol. LXXXVII, 1, pp. 147-159, 2018.

[27] T. S. Chihara, An Introduction to Orthogonal Polynomials, Gordon and Breach, Science Publishers, Inc, 1978

[28] A. Boussayoud,A. Abderrezzak, M. Kerada, Some application of symmetric function, Integers, No. A≠ 48, 1-7, 2015.

[29] A. Boussayoud, M. Boulyer, M. Kerada, "A simple and accurate methode for determination of some generalized sequence of numbers", Int. J. Pure Appl. Math., 108, 503-511, 2016.

[30] A. Abderrezzak, M, Kerada, A, Boussayoud, Generalization of Some Hadamard Product, Communication in Applied Analysis 20, 301-306, 2016.

[31] A. Boussayoud, A. Abderrezzak, Complet Homogeneous symmetric Functions and Hadamard Product, Ars Comb.144, 81-90, 2019.

[32] T. Koshy, Fibonacci and Lucas numbres with applications, Wiley-Interscience, 2001

[33] A. Boussayoud, M. Kerada. N. Harrouch, On the k-Lucas numbres and Lucas Polynomials, Turkish Journal of Analysis and Number. 5(3)121-125, 2017.

[34] A. Boussayoud, M. Kerada, Symmetric and Generating Functions International Electronic Journal of Pure and Applied Mathematics, 7(4), 195-203, 2014.

[35] A. Boussayoud, S. Boughaba, M, Kerada, S. Araci and M. Acikgoz Generating of binary products of k-Fibonacci and orthogonal polynomial, Rev. R. Acad. Cienc Exactas Fis. Nat, Ser, A Mat.

الملخص:

في هذه المذكرة قمنا بحساب الدوال المولدة العادية وذلك باستخدام مفهوم الدوال التناظرية. حيث قمنا في البداية بعرض بعض المفاهيم الأساسية التي تم استخدامها خلال هذه المذكرة .ثم تطرقنا لكثيرات الحدود المتعامدة وأخيرا قمنا بعرض دوال مولدة جديدة لحاصل ضرب الدوال التناظرية بثلاث متغيرات وبعض الأرقام وكثيرات الحدود المتعامدة .

الكلمات المفتاحية: الدوال التناظرية, الدوال المولدة, كثيرات الحدود المتعامدة, العلاقات التراجعات.

Résumé:

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés au calcul des fonctions génératrices ordinaires, en utilisant le concept des fonctions symétriques. Nous allons commencer par donner des notion de base ayant été utilisés tout au long de ce mémoire, ensuite nous introduisons les polynômes orthogonaux, enfin nous allons présenter des nouvelles fonctions génératrices des produits des fonctions symétriques de trois variables et certains nombres et polynômes orthogonaux.

Mots-clés : Fonctions génératrices, fonctions symétriques, polynômes orthogonaux, relations de récurrences.

Abstract:

In this memory, we are intrested in the calculation of the generating functions , using the concept of symmetric functions. We will start by giving a basic notions that have been used throughout this memory , then we introduce the orthogonal polynomials. Finally we will present a new generating functions of the products of symmetric functions of three variables and certain numbers and orthogonal polynomials .

Keys-words: Generating functions, symmetric functions, orthogonal polynomials, recurrences relations.